

第十三届清疏数学考研 & 大学生数学竞赛讲义

持续更新到 2026 年底

作者：清疏数学
组织：清疏大学
时间：August 2, 2026
版本：正式版 3.0
作者联系方式：QQ:937821418



本讲义将自动生成和 cctalk 用户绑定的 ID 且本讲义已经注册知识产权保护.

目录

第 1 章 致谢 **1**

第 2 章 前言 **2**
2.1 学员看 . . . 2
2.2 同行和盗版看 . . . 2

第 3 章 第十三届竞赛班基本规则 **3**
3.1 问题规则 . . . 3
3.1.1 严格的规则 . . . 3
3.1.2 提倡性规则 . . . 3
3.2 学习氛围管理规范 . . . 4

第 4 章 数学学习推荐路线 **5**
4.1 准备竞赛基本方法 . . . 5
4.1.1 非数学类 . . . 5
4.1.2 数学类 . . . 5
4.2 分析方向基础数学 . . . 5
4.2.1 全力丘赛版 . . . 5
4.2.2 基础素养版 . . . 5
4.3 几何方向基础数学学习路线 . . . 5
4.4 数学专业考研指南 . . . 6

第 5 章 一些数学网站链接 **7**

第 6 章 一些符号约定 **8**

第 7 章 非数学类数学分析和线性代数常识 ♡,♠ **10**
7.1 前言 . . . 10
7.2 实数系基本定理 . . . 10
7.2.1 上确界和下确界 . . . 10
7.2.2 cauchy 收敛准则和 cauchy 列 . . . 10
7.3 上极限和下极限 . . . 11
7.4 子列极限 . . . 13
7.5 一致连续和一致收敛 . . . 15
7.6 换序常用手法 ♡ . . . 16
第 7 章 练习 . . . 17

第 8 章 极限和渐近分析方法非数学类 **18**
8.1 余项的分析和计算 . . . 18
8.2 Stolz 定理的应用 . . . 28
8.3 和式和积分的转换思想 . . . 37
8.4 递推数列方法 . . . 39
8.4.1 单调性分析法 . . . 39
8.4.2 压缩映像方法 . . . 42

8.4.3 折线图 (蛛网图) 方法 . . . 43
8.4.4 递推数列估阶的初等方法 . . . 44
8.4.5 加强归纳法 . . . 48
8.4.6 强求通项和强行裂项法 . . . 49
8.5 杂题 . . . 54
第 8 章 练习 . . . 85

第 9 章 极限和渐近分析方法数学类 96
9.1 Stolz 定理和 toeplitz 定理 . . . 96
9.2 cauchy 积型极限 ♡ . . . 102
9.3 Laplace 方法 . . . 103
9.3.1 前言 . . . 103
9.3.2 一些基本例子 ♡ . . . 104
9.3.3 Laplace 方法 ♡,♠ . . . 104
9.3.4 laplace 方法的变式应用 ∗ . . . 112
9.4 黎曼引理和 Friedrichs mollifier technique.♡ . . . 114
9.5 欧拉麦克劳林公式及其应用 . . . 120
9.5.1 欧拉麦克麦克劳林公式 ♡,♠ . . . 120
9.5.2 定积分定义型的渐近估计,♡ . . . 123
9.6 渐近分析方法 . . . 127
9.6.1 迭代方法 ♡,♠ . . . 127
9.6.2 幂级数方法 . . . 128
9.6.3 傅立叶型积分渐近方法 . . . 131
9.6.4 正常傅立叶积分渐近方法 ♡ . . . 131
9.6.5 奇异型傅立叶积分渐近方法 ∗ . . . 136
9.6.6 逼近方法 . . . 140
9.7 数列极限技巧 ♠,♡ . . . 145
9.7.1 上下极限技巧 . . . 145
9.7.2 二次复合技巧 . . . 149
9.7.3 拉格朗日反演 ∗ . . . 152
9.8 无理数的逼近 ∗ . . . 152
9.9 杂例 . . . 161
第 9 章 练习 . . . 177

第 10 章 非数学类微分学计算 (包括二重极限.) 188
10.1 单变量微分学计算 . . . 188
10.2 多变量微分学和极限计算 . . . 198
10.2.1 二重极限 . . . 198
10.2.2 多变量微分学计算 . . . 200
10.3 多变量微分学证明 . . . 201
第 10 章 练习 . . . 213

第 11 章 非数学类微分中值定理 219
11.1 插值定理和 K 值法类 . . . 219
11.1.1 前言 . . . 219
11.1.2 插值定理和常数 K 值法介绍 . . . 219

11.1.3 插值定理和常数 K 值法 . . . 221
11.1.4 插值积分余项 ♠ . . . 228
11.2 函数构造类 . . . 230
11.2.1 一阶构造类 . . . 230
11.2.2 二阶构造类 . . . 233
11.3 多中值点问题 . . . 236
11.4 性态分析类 . . . 240
11.5 中值极限性质 . . . 262
第 11 章 练习 . . . 265

第 12 章 非数学类函数性态分析 276
12.1 基本常用想法 . . . 276
12.2 函数方程 . . . 283
12.2.1 柯西方程 . . . 283
12.2.2 函数方程综合训练 . . . 285
12.3 非数学类函数性态分析解题方法 . . . 290
12.4 杂例 . . . 300
第 12 章 练习 . . . 309

第 13 章 数学类函数性态分析 320
13.1 凸函数 ♡ . . . 320
13.1.1 半连续函数 ♠ . . . 320
13.1.2 凸函数 . . . 322
13.2 洛必达和函数 stolz . . . 333
13.3 基本分析定理 . . . 338
13.4 R-S 积分和 L-S 积分理论 * . . . 364
13.5 基本性态分析结论 . . . 370
13.5.1 一致连续 . . . 370
13.5.2 Dini 定理 . . . 377
13.5.3 更弱定义的导数 . . . 378
13.6 逼近方法 . . . 387
13.6.1 Stone weierstrass . . . 387
13.6.2 Bernstein 多项式 . . . 390
13.6.3 可积函数的逼近 . . . 395
13.7 函数性态分析训练集 . . . 407
13.7.1 微分方程类 . . . 407
13.7.2 性态分析数学分析题 . . . 418
13.7.3 一致连续判断专题 . . . 460
第 13 章 练习 . . . 466

第 14 章 非数学类积分计算 487
14.1 不定积分计算 . . . 487
14.1.1 带根号不定积分 . . . 487
14.1.2 一种特殊有理积分算法 . . . 487
14.1.3 猜原函数法 . . . 487
14.1.4 杂例 . . . 488

14.2 定积分计算 . . . 489
14.2.1 积分恒等式 . . . 489
14.2.2 区间再现专题训练 (重要) . . . 494
14.2.3 含参积分求导 (♠)& 化多元 (累次) 积分换序 . . . 496
14.2.4 利用特殊函数 . . . 499
14.2.5 级数展开方法 . . . 500
14.2.6 杂例 . . . 506
14.3 反常积分收敛性判别 . . . 512
14.3.1 抽象结果 . . . 512
14.3.2 具体积分判断 . . . 519
第 14 章 练习 . . . 530

第 15 章 数学类含参变量积分一致收敛性 535
第 15 章 练习 . . . 543

第 16 章 非数学类积分不等式 544
16.1 可直接使用的著名积分不等式 . . . 544
16.2 重积分方法 . . . 548
16.3 直接求导法 . . . 550
16.4 Cauchy 不等式相关题型 . . . 552
16.5 凸性相关题型 . . . 559
16.6 中值相关题型 . . . 562
16.7 数值比较类 . . . 565
16.8 杂题 . . . 567
16.8.1 young 不等式 . . . 567
16.8.2 变分法 . . . 568
16.8.3 傅立叶型积分不等式 . . . 569
16.8.4 逼近取等 . . . 571
16.8.5 杂例 . . . 572
第 16 章 练习 . . . 580

第 17 章 数学类积分不等式 590
第 17 章 练习 . . . 621

第 18 章 非数学类级数 631
18.1 级数计算 . . . 631
18.1.1 裂项方法 . . . 631
18.1.2 凑已知函数 . . . 633
18.1.3 生成函数和幂级数计算方法 . . . 635
18.1.4 多重求和 . . . 638
18.1.5 级数特殊算法 . . . 640
18.1.6 有理分式和无穷积计算方法 ♠ . . . 650
18.1.7 留数计算方法 ♠ . . . 651
18.2 级数结论 . . . 653
18.3 具体级数收敛性判断 . . . 664
18.3.1 估阶法 . . . 664

18.3.2 带对数换底方法 . . . 666
18.3.3 Taylor 公式法 . . . 667
18.3.4 分组判别法 . . . 669
18.3.5 综合训练和杂题 . . . 670
18.4 傅立叶级数 . . . 673
18.5 级数证明 . . . 678
18.6 特殊多项式 ♠ . . . 700
第 18 章 练习 . . . 705

第 19 章 数学类级数 710
19.1 基本结论 . . . 710
19.1.1 幂级数阶和系数阶的关系 . . . 710
19.1.2 Cauchy 积 . . . 711
19.1.3 Tauber 和 Littlewood-hardy 型问题 . . . 715
19.2 实解析函数 . . . 724
19.3 三角级数 . . . 729
19.3.1 处处连续处处不可微 . . . 730
19.3.2 基于 Weyl 等分布 ∗ . . . 734
19.4 黎曼重排定理的技巧 . . . 735
19.5 级数一致收敛性判断专题 . . . 742
19.6 级数技巧训练题集 . . . 761
第 19 章 练习 . . . 778

第 20 章 非数学类多元积分和解析几何 783
20.1 基本结论 . . . 783
20.1.1 换元法 . . . 783
20.1.2 Poisson 公式和余面积公式 . . . 787
20.1.3 旋转体表面积和体积统一公式 . . . 790
20.2 二重积分 . . . 791
20.2.1 二重积分计算 . . . 791
20.2.2 反常二重积分收敛性判断 ♠ . . . 797
20.3 三重积分 . . . 801
20.4 第一类曲线积分 . . . 810
20.5 第二类曲线积分 . . . 811
20.6 第一类曲面积分 . . . 818
20.7 第二类曲面积分 . . . 824
20.8 一般的多元积分问题 . . . 831
20.9 非数学类解析几何 . . . 844
20.9.1 柱面 . . . 844
20.9.2 锥面 . . . 846
20.9.3 旋转曲面求法 . . . 848
20.9.4 杂题 . . . 849
第 20 章 练习 . . . 849

第 21 章 非数学类决赛线性代数 ♠ 857
21.1 非数学类决赛线性代数基本结论 . . . 857

21.2 非数学类决赛线性代数训练集 . . . 876
第 21 章 练习 . . . 879

第 22 章 非数学类微分方程 882
22.1 同济教材外微分方程解法模型 . . . 882
22.1.1 黎卡提微分方程 . . . 882
22.1.2 克莱罗微分方程 . . . 882
22.1.3 y 可以解出来的类型 . . . 883
22.1.4 x 可以解出来的类型 . . . 883
22.1.5 $F(x,y')=0, F(y,y')=0$ 的类型 . . . 883
22.1.6 积分因子法 . . . 884
22.1.7 特殊方法 . . . 884
22.1.8 二阶微分方程 . . . 885
22.2 微分方程杂题 . . . 887
22.3 微分方程证明 . . . 890
第 22 章 练习 . . . 891

第 23 章 数学类线性代数 893
23.1 线性代数结论 ♡ . . . 893
23.1.1 中国剩余定理 . . . 893
23.1.2 矩阵分解 . . . 895
23.1.3 同时相似对角化 . . . 907
23.1.4 同时合同对角化 . . . 913
23.1.5 矩阵的哈达马积和克罗内克积 . . . 915
23.1.6 矩阵空间上的经典线性映射 . . . 916
23.1.7 交结数 . . . 924
23.1.8 覆盖定理 . . . 929
23.1.9 正规矩阵 . . . 932
23.1.10 著名矩阵的逆矩阵 . . . 937
23.1.11 矩阵级数 . . . 941
23.1.12 杂例 . . . 949
23.2 分析思想 . . . 959
23.3 非负矩阵理论 * . . . 967
23.4 用矩阵的观点解题 . . . 973
23.5 用代数的观点解题 . . . 994
23.5.1 公理化专题 . . . 994
23.5.2 矩阵空间维数极值 . . . 1007
23.5.3 杂例 . . . 1012
23.5.4 关于复形的线性代数题 * . . . 1018
23.6 向量组问题 . . . 1027
23.7 数学类线性代数杂题 . . . 1029
23.8 组合数论类 . . . 1044
23.8.1 杂例 . . . 1044
23.8.2 有限域上的线性代数 * . . . 1055
23.9 行列式 . . . 1056

23.9.1 三对角行列式 1056
23.9.2 vandermonde 相关 1060
23.9.3 循环行列式 1065
23.9.4 杂例 1067
23.10数学类多项式 1078
23.10.1 分圆多项式 1079
23.10.2 一些重要判别法和结论 1080
23.10.3 多项式杂题 1080
第 23 章 练习 1092

第 24 章 数学类解析几何 1120

第 25 章 后续课程问题 * 1126

第 26 章 非数学模拟 1167
26.1 全国大学生数学竞赛非数学决赛水平测试 1167
26.2 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟一 1168
26.3 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟二 1169
26.4 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟三 1170
26.5 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟四 1172
26.6 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟五 1173
26.7 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟六 1174
26.8 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟一 1175
26.9 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟二 1177
26.102025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟三 1178
26.112025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟四 1179
26.122025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟五 1181
26.132025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟六 1182

第 27 章 数学类模拟 1184
27.1 全国大学生数学竞赛数学低年级决赛水平测试 1184
27.2 全国大学生数学竞赛数学高年级决赛水平测试 1185
27.2.1 必做部分 1185
27.2.2 选做部分 1185
27.3 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟一 1186
27.4 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟二 1187
27.5 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟三 1188
27.6 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟四 1189
27.7 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟五 1190
27.8 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟六 1191
27.9 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟一 1192
27.102025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟二 1192
27.112025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟三 1194
27.122025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟四 1195
27.132025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟五 1195
27.142025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟六 1196

第 28 章 数学专业考研模拟数学分析 **1**
28.1 2026 考研数学分析一 1
28.2 2026 考研数学分析二 2

第 29 章 数学专业考研模拟高等代数 **1**
29.1 2026 考研高等代数一 1
29.2 2026 考研高等代数二 2

第 30 章 习题解答 **3**
30.1 非数学类数学分析常识 3
30.2 极限和渐近分析方法非数学类 3
30.3 极限和渐近分析方法数学类 59
30.4 非数学类微分学计算 124
30.5 非数学类微分中值定理 143
30.6 非数学类函数性态分析 181
30.7 非数学积分计算 215
30.8 数学类含参变量积分一致收敛性 239
30.9 非数学类积分不等式 240
30.10非数学类级数 279
30.11非数学类多元积分和解析几何 306
30.12非数学类线性代数 338
30.13微分方程 344
30.14数学类线性代数 346
30.15数学类函数性态分析 489
30.16数学类积分不等式 608
30.17数学类级数 666

附录 A 一些基本工具 **697**

附录 B 高中数学基础 **699**
B.1 集合与逻辑用语 699
B.2 复数 699
B.3 长除法 699
B.4 部分分式分解 699
B.5 多重求和的换序 699
B.6 三角恒等式 699

第 1 章 致谢

1. 感谢课程学员 他的网名: 谨防 QQ 诈骗! 提供的讲义封面图.
2. 感谢八一竞赛考研数学提供的大学生数学竞赛考前模拟 Tex 模版.
3. 感谢课程学员 他的网名: 大雾散去指出的大量笔误.
4. 感谢课程学员 他的网名: 蓝色雨的大量推荐.

第 2 章 前言

2.1 学员看

1. 本书是第十三届 (2026-2027) 清疏数学考研 & 竞赛全程班班字典讲义. 所提供答案未必完全详细或者完全没有笔误[1]. 读者可以私聊作者指出.
2. 自 2026 开始, 我们课程数学类和非数学类完全独立且分离, 非数学类重新制作讲义. 本 pdf 非数学部分可以视为数学类部分的基础.
3. 高中基础和试听内容可以根据情况选看. 视频讲的内容提倡以自己的语言和方法来书写, 不必要和我一致!!!!!!!!! 只要你自己过的去自己的步骤, 过不去我的步骤也不要紧!!!!!! 视频不必强求自己一定可以看完!.
4. 为避免盗版, 正课视频内容我们不直接发布编排好的 Tex 解答, 但其大部分文字内容都在本讲义对应章节中[2].
5. 课程讲义使用方法见视频.
6. 本书是前十二届竞赛班内容大集合, 也是我们考研竞赛课程主要讲义. 本讲义课后习题只查不做. 不可代替基础习题书 (否则抄经典题没意义).
7. 我们内容作为区分, 标 $*$ 的表示难度较大, 不重要, 仅做兴趣了解. 对于非数学只想竞赛拿奖, 而无高目标要求的, 可以不看带有符号 ♠ 的内容. 如果没有标注的表明只是一个正常需要看的内容.
   章节标题中带有符号 $*, \heartsuit, \spadesuit$, 表示本章节全部都属于这种内容 (第三优先为准), 但是如果章节内具体到某一个子章节, 例题或者命题, 定理上, 有着不一样的 $*, \heartsuit, \spadesuit$, 那么子章节标题第二优先为准. 例题或者命题, 定理以自己的 $*, \heartsuit, \spadesuit$ 第一优先为准.

认真阅读本讲义内容, 对你会大有毗益.

2.2 同行和盗版看

1. 我们欢迎对我们提供的数学内容和风格引用, 但是如果大篇幅借鉴或者抄袭并未曾引用, 虽然感谢您对我们内容的赞同, 但如果屡次反复操作, 我们法务团队会直接起诉, 不会再单独通知.
2. 我们已经在讲义中加了自动绑定 cctalkID 的机密代码并交给专业团队监控, 如果发现盗课行为将追究法律责任.
3. 盗版质量难以保证, 且希望各位同学支持正版, 尊重劳动成果.
4. 在全新的十三届清疏考研 & 考研班中, 我们将采用傅立叶变换原理的隐式水印和学员 ID 跑马灯防盗, 如果您的资料被在公开场合发现, 我们直接起诉, 对此您有任何意见请及时联系律师沟通.

---

[1] 大部分肯定不会有这样的问题.

[2] 要注意步骤书写未必完全一致, 因为我们一直提倡不背题, 而是理解思想, 同一种方法自然即使我自己, 不同的时候也会写出不同的样子.

第 3 章 第十三届竞赛班基本规则

3.1 问题规则

3.1.1 严格的规则

1. 竞赛班不限制问题范围, 老师仅能保证本科基础数学范围[1]内的常规问题可以获取解答, 其余问题[2]未必可以获得解答. 但是老师在空闲的时候会尝试 (当然, 考研数学和大学生数学竞赛作为课程的主要部分可以保证获得解答).
2. 只解答付费学员自己真正遇到的想解决的问题, 嫖答案和替别人问题完全禁止.
3. 提问的问题应该准确严谨, 符合数学规范, 疑似不通用的符号应该给出定义[3].
4. 提供的题目你知道的 (不知道的可以不提供) 所有信息都要完整提供, 包括来源, 已有的结果, 你已经取的的结果和思考, 并且获得完整解答的, 之后需要反馈你遇到的困难在什么地方, 我们的最后是如何解决掉的, 你学到了什么.
5. 本课程可以问野题, 钓鱼题, 但提问难度较高!, 需要给出自己了解的全部背景知识, 并且在获取解答的时候 (当然会有老师也无法解决的难题且不在少数), 务必需要完整学习解答过程, 即本课程只解决问题, 不钓鱼.
6. 答疑每周日公休一天, 法定节假日公休, 每天固定时间段 9:30-11:30, 15:00-17:00 19:00-21:00, 其余时间段和公休随缘答疑[4]
7. 如无必要, 优先群内答疑. 主群仅答疑数分高代高数线代. 其余学科问题皆在副群答疑, 问学习经验方法等都在水群进行, 当问题在群内未能得到妥善解答可以私聊问题.
8. 禁止随便提问随便猜一个结论的反例[5]. 群文件有分类好的一系列反例书可以查询. 如果反例书没有提供反例, 那么你的例子大概难度本身会非常大, 如无必要, 不必纠结反例.
9. 在答疑过程中, 难免会出现大家不能有相同意见的情况. 例如老师指出问题不够严谨以至于不能给出一个回答, 学员又认为自己问题是严谨的, 认为老师在故意刁难. 这种情况一旦出现, 希望学员可以认可老师专业水平, 老师会给出问题叙述修改意见, 学员只需要按照问题叙述修改. 如果学员完全持反对态度, 这种情况以老师叙述为准.

注如果没有遵守答疑规则且在较忙的时候, 老师可能短时间内会忽略掉提问而不提醒提问不规范.

3.1.2 提倡性规则

1. 考虑到竞赛班答疑内容的广泛性和可能存在的高难度性. 并且引导学员正确学习数学, 培养学习规范, 老师答疑会优先采取给一种思路的形式. 学员应该尽可能尝试根据提示解决问题[6]. 当然你实在需要, 可以要求答疑老师出你需要的步骤.
2. 经提醒是基本计算的, 应该学会用软件检查计算结果.
3. 期望别人检查你的答案是否准确的, 首先应该告知你拿不准的最可能错的地方在哪里 (拿不准就是错, 不要期望他有对的可能).
4. 提出猜想解决猜想是正确的, 提出猜想到处问答案, 期望别人告诉你自己的瞎猜对错的是不提倡的.
5. 表明我没听懂或者我看不懂的时候, 应该具体指出哪一步不懂. 如果有很多, 就从第一步不懂的开始问.

[1] 由于不同学校本科数学课程范围不同, 难度和广度也可能无限拔高, 为了一个明确的衡量标准, 我们将“本科基础数学范围”定为全国各高校各类基础数学研究生招生 (包括夏令营, 直博等) 考试 (包括复试) 的笔试的考纲范围.

[2] 包括高中数学竞赛问题.

[3] 例如, 你在考试中习题册上做题时别人是怎么提问的?

[4] 随缘问题期间并非秒回, 几个小时内回答都有可能, 如果老师不小心错过了你的提问, 大可以反复 @, 不必担心是什么其他原因.

[5] 因为举例子往往非常困难.

[6] 不具备这种基本能力, 以后没办法学好数学.

3.2 学习氛围管理规范

1. 为保护学员隐私, 竞赛群[7]内消息未经允许不可擅自转发到其他地方, 否则将会踢出群.
2. 课程严格禁止水群[8]否则会被禁言. 如果对禁言有异议的. 可以带截图像老师提出, 老师会在水群举行群成员投票决定是否应该禁言. 无法提供截图的视为接受因为水群而禁言. 没有被禁言的水群行为可以截图举报.
3. 主副群禁止任何涉及嘲讽的言论, 包括但不限于" 高考题"," 考研题", "简单题", " 小学题", " 中学题", 评价题目比较困难是允许的, 副群可以适当放宽, 但明显嘲讽的言论将违规! 如果你感受都某些言论有让你不舒服的感觉可私聊向老师提出.
4. 水群禁止一切抽象, 违背道德, 涉黄, 法律行为. 闲聊内容也应该积极向上. 也不可做任何广告类宣传.

注违背上述行为一次禁言 1h, 多次违背禁言 1 日, 随着行为越来越过分将会踢出所在群.

[7]包括副群, 主群, 水群

[8]只允许交流讨论数学问题本身, 注意学习经验也是不允许提问的, 但问学什么书可以.

第 4 章 数学学习推荐路线[1]

4.1 准备竞赛基本方法

可以参考全国大学生数学竞赛备考指南.

4.1.1 非数学类

1. 选用蒲和平或者陈兆斗编著的大学生数学竞赛习题书作为基本训练, 以及最新出版的红书. 注意不必做物理和实际应用题, 过于高中的几何题等也不必做, 判断是否素数类的中学数论题也不必做.
2. 准备决赛之前无需学习线性代数, 决赛线性代数可以阅读丘维声的高等代数上册. 重点是矩阵的打洞技巧. 准备线性代数的效率较低, 难度很大, 往往是白准备.
3. 决赛重点训练各校数学分析近几年考研真题.

4.1.2 数学类

1. 数学分析可以刷周民强的数学分析习题演练前 2 册, 高等代数可以刷白皮书, 谢启鸿博客或者樊启斌的高等代数. 数学分析高等代数可以刷朱尧辰的数学分析, 高等代数, 大学生数学竞赛, 以及最新出版的红书.
2. 数学类应该博众取长, 不应该局限一本书, 一个网站.
3. 数学类重点是函数性态分析, 渐近分析方法, 级数估计等单变量微积分. 多元部分仅需要二元函数求极值等部分内容.

4.2 分析方向基础数学

鼓励同学不要过早确定自己方向, 除非自己确实认为自己天赋和精力有限.

4.2.1 全力丘赛版

数学分析 (rudin 做题), 高等代数 (丘维声, 不学多重线性代数, 少量做不太困难的题.)⟶ 抽象代数 (丘维声群论, 课后习题全做), 点集拓扑 (尤乘业学完算基本群即可, 闭曲面分类可跳过, 后续需要什么查什么), 常微分方程 (Arnol'd 正文考纲内部分, 做题可张伟年)⟶ 复变函数 (刷题史济怀, 看书 Stein, rudin), 实变函数 (刷题徐森林, 看书 rudin, evans)⟶ 古典偏微分方程 (周蜀林, 刷题), 偏微分方程 (看书 evans 第五, 六, 七, 八, 九章并刷题, 第七章实在没时间可不看, 考到认栽), 泛函分析 (brezis, 刷题可张恭庆, brezis 不看 sobolev 空间部分.)

4.2.2 基础素养版

在全力丘赛版的基础上减少刷题量, 可不看周蜀林, evans 尽量看完. 泛函分析从 brezis 切换到 rudin, 调和分析看 gtm249 250 且不可以用其他书替代, 当然量太大, 能看多少是多少.

4.3 几何方向基础数学学习路线

除点集拓扑外, 个人比较推荐 John lee 的三本几何教材, 分别是代数拓扑, 微分流形, 黎曼几何. loring tu 的可以淘汰掉, 不涉及黎曼流形是不妥的.

[1] 仅供参考, 每个人情况不同.

4.4 数学专业考研指南[2]

认真学习陈纪修的数学分析, 谢启鸿的白皮书或者丘维声的高等代数 (不看多重线性代数, 正交空间辛空间那些玩意), 刷题周民强 (你实在害怕这个名字就做裴礼文) 和樊启斌即可. 不懂群里问, 考研数学终究是没有难度的. 政治可以十二月直接背肖四 + 刷各名师的最终选择题, 再之前没有看的必要. 英语只需刷真题 (可以每天半套, 10 月开始准备, 背真题出现的不会的单词, 总结命题规律), 考前买篇作文来背, 翻译不准吧也罢, 随缘做. 基本上考研就必上了, 少受外部营销目的的干扰, 宣传考研难度不过是为了吸引你买课而已.

[2]跨考也适用且主要适用于 985 以上高校.

第 5 章 一些数学网站链接

注收集一些常用数学网站, 如果有链接失效或者补充新的链接的记得及时通知作者.

- 正版清疏竞赛班报名链接
- wolfram
- AOPS, 国外知乎数学, 几乎可以找到所有国内外竞赛题
- 群论计算器
- arxiv, 论文预印本网站
- Markdown 网站
- latex 绘图 (包括交换图) 软件
- 谢启鸿老师博客
- 找书网站, zlibrary
- jstor(美国数学月刊和这种类似物期刊的网站)
- 美国数学月刊快速浏览
- Putnam 竞赛真题和答案
- mse, 国外知乎数学, 答主极其强大
- 清疏竞赛考研数学
- mathoverflow, 国外知乎数学
- 数学名词和符号检索
- sci-hub
- Mathematica
- 谷歌学术镜像, 查论文神器
- CCTALK APP 下载地址
- 丘成桐聊天记录恶搞
- GPT4 镜像
- AI 生成课程报告
- 麻省理工积分竞赛
- zbmath
- 数学评论, 最好从自己学校图书馆进入
- 九宫格恶搞
- deepseek 满血, 可用于辅助做题
- approach0 数学问题搜索

第 6 章 一些符号约定

$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\},\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$.

设 $E\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{N}_0$, 我们用 $f\in R(E)$ 表示 E 上黎曼可积函数全体. $f\in C(E)$ 表示 E 上连续函数全体. $f\in C^k(E)$ 表示 E 上 k 阶连续可微函数 **(即函数 k 阶可导且直到 k 阶的全部导函数都连续)** 全体. $f\in D(E)$ 表示 E 上可微函数全体. $f\in D^k(E)$ 表示 E 上 k 阶可微函数全体. $f\in L^p(E)$ 表示 E 上 p 次方勒贝格绝对可积[1]函数全体.

设 A 是一个集合, 当 A 是有限集, $|A|$ 表示 A 中元素个数.

设 X 是一个赋范空间, X^* 表示其按范数拓扑的对偶空间, 当 $\dim X<\infty$, X^* 就是全体线性函数构成的线性空间.

设 X 是一个拓扑空间, 我们用 $C_c^\infty(X)$ 表示 X 上实数值或者复数值且满足 $\overline{\{x\in X:f(x)\neq 0\}}$ 是 X 中紧集的无穷阶连续可微函数全体. 用 $\mathrm{supp}f\triangleq\overline{\{x\in X:f(x)\neq 0\}}$, 我们称 $\mathrm{supp}f$ 是 f 的支撑. 于是 $C_c^\infty(X)$ 是紧支撑于 X 的光滑函数全体.

设 X 是一个拓扑空间, $B\subset A\subset X$, 我们称 $B\subset\subset A$, 如果 $\overline{B}\subset A$ 且 $\overline{B}$ 是紧集.

对适合条件的 f, 我们定义 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\right),\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$. $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}$ 表示 f 沿着方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数.

贝塔函数定义为

$$\beta(p,q)\triangleq\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,p,q>0.$$

伽马函数定义为

$$\Gamma(s)\triangleq\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx,s>0.$$

设 A 是一个集合, 定义 A 的特征函数或者示性函数为 $\chi_A\triangleq\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$.

定义 $\delta_{ij}\triangleq\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

Zeta 函数定义为

$$\zeta(x)\triangleq\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x},x>1.$$

在线性代数部分, 如果没歧义, 我们总是用 e_i 表示第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的列向量. E_{ij} 表示第 (i,j) 元为 1, 其余元为 0 的矩阵. 1_n 表示元素全为 1 的 n 维列向量. J 表示元素全为 1 的方阵. $J_n(\lambda)$ 表示属于特征值 λ 的 n 阶 Jordan 块.

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 表明 $a_n\geqslant 0,\forall n$ 而不是 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$.

本讲义默认 0 多项式次数为 $-\infty$.

$\binom{s}{t}\triangleq C_s^t$. 我们总是约定

$$\binom{s}{t}=C_s^t=0,\forall t\notin[0,s]\bigcap\mathbb{Z}.$$

对多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$, 我们定义

$$\alpha!\triangleq\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,|\alpha|=\sum_{k=1}^n\alpha_k,D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

[1]当非数学类看到这个符号的时候, 只关心黎曼积分意义或者广义绝对可积意义的函数.

如果还有一个 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{N}_0^n$, 我们称 $\beta\leqslant\alpha$, 如果

$$\beta_i\leqslant\alpha_i, i=1,2,\cdots,n.$$

此时我们记

$$C_\alpha^\beta=C_{\alpha_1}^{\beta_1}C_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots C_{\alpha_n}^{\beta_n}.$$

第 7 章 非数学类数学分析和线性代数常识 ♡, ♠

内容提要

- 实数系基本定理 7.2
- 上极限和下极限 7.3
- 子列极限 7.4
- 一致连续和一致收敛 7.5
- 换序常用手法 7.6

7.1 前言

我们这里总结一些非数学类需要的数学分析基础知识使得非数学专业读者可以无需阅读数学专业知识即可完成学习. 如果我没有写证明的, 视为以后可以直接引用. 部分数学专业定理, 因为难度并不大且没什么用, 我们放到课后习题. 此外为了方便, 我们不考虑循环论证的问题. 本部分内容是给以后无需完整学习数学分析的同学看的. 学完整数学分析的内容不可参考这一部分.

7.2 实数系基本定理

7.2.1 上确界和下确界

大家在高数课本已经知道了函数, 数列, 集合有界的概念, 那么我们把最精确的那个界定义为确界, 即

定义 7.1 (确界定义)

设 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个非空集合, 我们定义

(1): 称 $a \in \mathbb{R}$ 是 A 的上确界, 如果 $x \leqslant a, \forall x \in A$ 且对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $y \in A$, 使得 $y \geqslant a - \epsilon$. 记作 $a = \sup A$.

(2): 称 $a \in \mathbb{R}$ 是 A 的下确界, 如果 $x \geqslant a, \forall x \in A$ 且对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $y \in A$, 使得 $y \leqslant a + \epsilon$. 记作 $a = \inf A$.

(3): 对于某个定义在 D 上的函数 f 或者数列 x_n, 其上下确界分别定义为集合 $\{f(x) : x \in D\}, \{x_n\}$ 的上下确界.

特别的, 如果集合 A 无上界, 我们定义 $\sup A = +\infty$. 如果集合 A 无下界, 我们定义 $\inf A = -\infty$. 显然这个定义可以自然的扩充到函数或者数列. ♣

例题 7.1 函数 $\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 的上确界是 $\frac{\pi}{2}$, 在 $\mathbb{R}$ 的下确界是 $-\frac{\pi}{2}$.

定理 7.1 (确界定理)

非空有上界集合必有上确界, 非空下界集必有下确界. ♡

笔记 确界原理往往用在构造某种满足某条件的集合之后使得筛选出其中极端的那个点.

7.2.2 cauchy 收敛准则和 cauchy 列

我们知道数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 的定义是对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $|x_n - x| \leqslant \epsilon, \forall n \geqslant N$. 但这往往需要知道极限值 x 才能做估计, 并不利于证明极限的存在性, 因此我们来看一个等价的定理, 无需知 x 的值也能判断极限存在性.

定理 7.2 (Cauchy 收敛准则)

1. 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得
$$|x_n-x_m|\leqslant\epsilon,\forall m,n\geqslant N.$$
2. 函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$[a]收敛的充分必要条件是存在 $X>0$, 使得
$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\epsilon,\forall x_1,x_2>X.$$
3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$ 收敛的充分必要条件是存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\epsilon,\forall n\geqslant N,p\in\mathbb{N}.$$
4. 广义积分 $\int_0^{\infty}f(y)\,dy=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{x}f(y)\,dy$[b]收敛的充分必要条件是存在 $A>0$, 使得
$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(y)\,dy\right|<\epsilon,\forall A_2>A_1\geqslant A.$$

[a]趋于 $-\infty,x_0^+,x_0^-$ 类似.

[b]带瑕点的类似.

♡

注如果还未学习反常积分或者级数, 则可以无视术语反常积分或者级数, 直接视为一个函数极限或者数列极限去看待.

证明 第一条可以直接适用, 第二条可以考虑海捏准则之后对每个子列用第一条即可证明, 第三条可以把 m 写成 $m=n+p$ 就是第一条的结果, 第四条就是特殊的函数极限所以也就是第二条的结果.

7.3 上极限和下极限

回忆课本

定理 7.3 (单调收敛定理)

我们有

(1): 设 (x_n) 递增, 则
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\text{存在}, & \text{如果 }(x_n)\text{ 有上界}\\ +\infty, & \text{如果 }(x_n)\text{ 无上界}\end{cases}.$$

(2): 设 (x_n) 递减, 则
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\text{存在}, & \text{如果 }(x_n)\text{ 有下界}\\ -\infty, & \text{如果 }(x_n)\text{ 无下界}\end{cases}.$$

(3): (1), (2) 的函数版本也成立[a].

[a]设 $f(x)$ 关于 x 单调, 则无论 $\lim\limits_{x\to x_0^+}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ 哪种极限都是有对应上下界时存在, 无上下界时为对应符号的 ∞.

♡

注读者应该想清楚定理7.3的 (3) 中四种极限分别对应 f 递增 (递减) 时需要考虑的是有上界还是有下界.

注单调收敛定理7.3中的 (3) 的证明可由海涅准则对所有序列极限用 (1), (2) 得到, 希望读者可以选一种极限情况来书写一遍证明.

我们知道对任何数列 (a_n), $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不一定存在, 甚至也不一定为 ∞. 实际上我们可以定义 a_n 可能的子列极限的最大值和最小值.

定义 7.2 (上下极限定义)

我们定义

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \triangleq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} a_k,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \triangleq \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} a_k. \tag{7.1}$$

♣

注注意到由定义, $\sup\limits_{k\geqslant n} a_k$ 是单调递减的, $\inf\limits_{k\geqslant n} a_k$ 是单调递增的. 因此式(7.1)的极限存在或为确定符号的 ∞[1].

命题 7.1 (上下极限的等价定义)

假定 $\{a_n\}$ 是个实数列, 则有

(1): 设 A 是某个实数, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = A$ 的充分必要条件是对任何 $\epsilon > 0$, 存在无穷多个 n, 使得 $a_n > A-\epsilon$ 且存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $a_n \leqslant A+\epsilon, \forall n\geqslant N$.

(2): $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A>0$, 存在 n, 使得 $a_n > A$.

(3): 设 A 是某个实数, 则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = A$ 的充分必要条件是对任何 $\epsilon > 0$, 存在无穷多个 n, 使得 $a_n < A+\epsilon$ 且存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $a_n \geqslant A-\epsilon, \forall n\geqslant N$.

(4): $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$ 的充分必要条件是对任何 $A<0$, 存在 n, 使得 $a_n < A$.

♠

推论 7.1 (有界必有收敛子列)

有界数列必有收敛子列.

♡

命题 7.2 (上下极限的性质)

我们有如下的

1.
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

2.
$$-\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n).$$

3.
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

♠

注我们无须记忆命题7.2, 可以根据实际需要现推即可. 此外还有许许多多类似的等式, 写出来没有多大意义, 读者可以根据实际需要去考虑.

证明 事实上设 $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n)$, 则

$$\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

这就证明了第一点.

考虑 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, 则[2]

$$-\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{k\to\infty}(-a_{n_k}) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n).$$

这就证明了第二点.

由第一点和第二点可得第三点.

接下来我们来看一种经典逻辑, 我们有时候可以证明得

$$g_1(\epsilon)+f_1(n) \leqslant a_n \leqslant f_2(n)+g_2(\epsilon), \forall \epsilon>0, n\geqslant N,$$

[1]当上下极限不同时, 上极限当然不可能是 $-\infty$, 下极限当然不可能是 $+\infty$

[2]形式上可以理解为 a_n 最大值的相反数当然为 $-a_n$ 的最小值.

这里

$$N\in\mathbb{N},\lim_{n\to\infty}f_1(n)=\lim_{n\to\infty}f_2(n)=A\in\mathbb{R},\lim_{\epsilon\to0^+}g_1(\epsilon)=\lim_{\epsilon\to0^+}g_2(\epsilon)=0.$$

然后我们可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A.$

这是因为

$$A+g_1(\epsilon)\leqslant\lim_{n\to\infty}f_1(n)+g_1(\epsilon)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\leqslant\lim_{n\to\infty}f_2(n)+g_2(\epsilon)=A+g_2(\epsilon),$$

由 ϵ 任意性[3]得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A.$

那上述逻辑显然是对的, 因此第一次取极限, 相当于对任何 $\epsilon>0$, 给出了上, 下极限的一个不等式估计, 这个估计随着 ϵ 怎么取而变换, 最后发现当 ϵ 越来越靠近 0, 上, 下极限这两个数字会越来越接近, 当然就是相同的. 当然我们也可以把上述过程用极限定义等价的转述出来.

命题 7.3 (上下极限技巧)

若

$$g_1(\epsilon)+f_1(n)\leqslant a_n\leqslant f_2(n)+g_2(\epsilon),\forall\epsilon>0,n\geqslant N,$$

这里

$$N\in\mathbb{N},\lim_{n\to\infty}f_1(n)=\lim_{n\to\infty}f_2(n)=A\in\mathbb{R},\lim_{\epsilon\to0^+}g_1(\epsilon)=\lim_{\epsilon\to0^+}g_2(\epsilon)=0.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A.$

证明 事实上因为 $\lim\limits_{\epsilon\to0^+}g_1(\epsilon)=\lim\limits_{\epsilon\to0^+}g_2(\epsilon)=0$, 对任何 $\eta>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\epsilon\in(0,\delta)$, 必有

$$|g_1(\epsilon)|<\frac{\eta}{2},|g_2(\epsilon)|<\frac{\eta}{2}.\tag{7.2}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_1(n)=\lim\limits_{n\to\infty}f_2(n)=A\in\mathbb{R}$, 存在 $N'\in\mathbb{N}$ 且 $N'>N$, 使得

$$f_1(n)>A-\frac{\eta}{2},f_2(n)<A+\frac{\eta}{2},\forall n>N'.\tag{7.3}$$

于是当 $n>N'$, 由(7.2),(7.3)我们知道

$$A-\eta=A-\frac{\eta}{2}-\frac{\eta}{2}<a_n<A+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}=A+\eta,$$

即 $|a_n-A|<\eta$, 这就完成了命题7.3的证明.

7.4 子列极限

命题 7.4 (子列极限命题)

(a): 给定 $x\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 的充分必要条件是对任何广义存在的 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x.$

(b): 设 $m\in\mathbb{N}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{mn+r},\forall r=0,1,2,\cdots,m-1$ 相同, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{mn}.$$

笔记 当 $m=2$, 命题7.4是在说如果序列奇偶子列极限存在且为同一个值, 则序列的极限存在且极限和偶子列极限值相同. 所谓奇偶, 就是看除以 2 的余数是 1 还是 0. 对一般的 $m\in\mathbb{N}$, 我们也可以看除以 m 的余数是 $\{0,1,2,\cdots,m-1\}$ 中的哪一个来对整数进行分类, 即 $\bmod m$ 分类. 严格的说, 我们有无交并[4]

$$\mathbb{Z}=\bigcup_{r=0}^{m-1}\{mk+r:k\in\mathbb{Z}\}.$$

[3]或者令 $\epsilon\to0^+$.

[4]即集合的划分, 一个集合划分成若干集合的并且这些集合两两无交.

证明

对 (a) : 考虑上下极限即可.

对 (b): 记 $A \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} x_{mn}$.

事实上对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $k>N$ 时, 我们有

$$|x_{mk+r}-A|<\epsilon, \forall r\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}. \tag{7.4}$$

我们知道对任何正整数 $n>mN+m-1$, 存在唯一的 $r\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$ 和 $k>N$, 使得 $n=km+r$, 于是运用(7.4)我们有 $|x_n-A|<\epsilon$, 因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = \lim_{n\to\infty} x_{mn}.$$

例题 7.2 子列极限小技巧 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续严格递增函数, $\{x_n\}\subset[a,b]$ 且满足和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(b)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$.

证明 因为 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 则由上下极限知识7.2知 x_n 没有趋于 $[a,b]$ 外的点的子列, 于是对所有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in[a,b]$, 我们都有

$$f(c)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(b),$$

这里第一个等号来自函数的连续性. 于是由 f 严格递增即知 $c=b$. 由命题7.4的 (a) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$. 我们完成了例7.2的证明.

例题 7.3 单调函数的类介值性, ♠ 考虑函数 $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}, f(0)>0, f(1)<0, g\in C[0,1]$. 若 $f(x)+g(x)$ 在 $[0,1]$ 递增, 则存在 $\xi\in[0,1], f(\xi)=0$.

笔记 本题积累的是想法.

证明 既然 $f(0)>0$, 那我们来看 $f>0$ 能蔓延到什么情况. 即构造集合

$$A\triangleq\{x\geqslant 0: f(y)\geqslant 0, \forall y\in[0,x]\}. \tag{7.5}$$

因为 $f(0)>0$, 所以在 $0\in A$, 运用定理7.1, 我们可记 $x_0\triangleq\sup A$, 不妨设[5]$x_0\in(0,1)$. 因为 x_0 是 A 上确界, 我们知道 $f(x)\geqslant 0, \forall x\in[0,x_0)$[6]. 运用 $f+g$ 递增我们有

$$g(x)\leqslant f(x)+g(x)\leqslant f(x_0)+g(x_0), \forall x\in[0,x_0), f(x)+g(x)\geqslant f(x_0)+g(x_0), \forall x\in[x_0,1]. \tag{7.6}$$

在(7.6)中令 $x\to x_0^-$, 我们有

$$g(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} g(x)\leqslant \lim_{x\to x_0^-}[g(x)+f(x)]\leqslant g(x_0)+f(x_0)\Rightarrow f(x_0)\geqslant 0.$$

现在注意到 $x_0\in A$, 我们知道存在[7]$x_n>x_0, n=1,2,\cdots$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0, f(x_n)<0, \forall n=1,2,\cdots.$$

运用(7.6), 就有

$$g(x_n)>f(x_n)+g(x_n)\geqslant f(x_0)+g(x_0).$$

两边令 $n\to\infty$ 就有

$$g(x_0)\geqslant f(x_0)+g(x_0)\Rightarrow f(x_0)\leqslant 0.$$

因此我们证明了 $f(x_0)=0$. 于是可取 $\xi=x_0$. 我们就完成了例7.3证明.

[5]读者可以在这种情况读完证明之后直接自行补充如果 $x_0=0,1$ 时分别的细节, 只需要依葫芦画瓢即可.

[6]试着用上确界定义和集合的定义来导出.

[7]仔细思考理由.

7.5 一致连续和一致收敛

定义 7.3

设 I 是一个区间, 我们称函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是一致连续的, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon, \forall\, |x_1 - x_2| \leqslant \delta, x_1, x_2 \in I.$$

定理 7.4 (一致连续的等价刻画)

设 I 是一个区间, 则 $f: I \to \mathbb{R}$ 是一致连续的充分必要条件是对任何 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

定理 7.5 (Cantor 定理)

设 $I = (a, b)$, 则 f 在 I 上一致连续的充分必要条件是 $f \in C(I)$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在. 特别的, 闭区间上连续函数一致连续.

定义 7.4 (一致收敛)

设 A 是任意一个非空集合, 我们称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $x \in A$ 一致收敛到函数 $f(x)$, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n \geqslant N, x \in A.$$

注因为对每个 x 来说, 你给定 ϵ 之后, 需要的 N 也会不同, 而所谓的一致收敛就是需要的 N 相同.

定理 7.6 (函数列一致收敛的充要条件)

函数列 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 一致收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

定理 7.7 (一致收敛可换序)

设连续函数 f_n 关于 $x \in [a, b]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

注实际上连续的函数列的一致收敛的极限函数也连续, 但我们这里是写给非数学专业的速成内容, 考虑到非数学的实际运用, 我们可以直接默认 f 是连续函数.

证明 注意到对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n \geqslant N, x \in [a, b].$$

所以当 $n \geqslant N$ 时就有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \epsilon(b - a),$$

这恰好就是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

的定义. 我们完成了定理7.7的证明.

7.6 换序常用手法 ♡

下面的定理十分有趣. 他严重超出非数学类大纲要求, 但却能在你实在无奈的时候救你一命. 他给出了一些合理的换序定理. 实际做题中你无脑换序了. 也不会扣多少分, 如果不会证明换序, 在带上下面一嘴, 就有可能不丢分. 第十届竞赛班学员在书写第十五届大学生数学竞赛非专业组的时候, 第四个极限大题采用的控制收敛定理, 但不符合规范的没有写出控制函数就得了 9 分, 可以看到如果规范写出控制函数, 说不定只会扣 1-2 分或者根本不扣分.

定理 7.8 (控制收敛定理)

设 $f(x,y)\in L^1(E),\forall y\in\Omega$, 这里 Ω 是某个给定集合. 若极限 $\lim\limits_y f(x,y),\forall x\in E$ 存在且存在 $g\in L^1(E)$, 使得

$$|f(x,y)|\leqslant g(x),\forall x\in E,y\in\Omega. \tag{7.7}$$

则

$$\lim_y\int_E f(x,y)\,dx=\int_E\lim_y f(x,y)\,dx. \tag{7.8}$$

♡

注$\lim\limits_y|f(x,y)|$ 表示对 y 取任何一种极限. 式(7.8)即积分极限交换顺序. 注意到除去至多可数[8]个点外[9], 不影响积分收敛性和数值, 因此定理中的条件允许对至多可数个点不必满足.

笔记 控制收敛定理的重点是找到绝对可积的控制函数 g. 这一步必须写出.

定理 7.9 (fubini 定理)

设 $f(x,y)$ 是集合 $E\times F$ 上的可测函数[a], 然后若 f 满足下列条件之一:

1. $f(x,y)\geqslant 0,\forall x,y\in E\times F$;
2. $f\in L^1(E\times F)$.

则

$$\int_E dx\int_F f(x,y)\,dy=\int_F dy\int_E f(x,y)\,dx=\int_{E\times F}f(x,y)\,dxdy.$$

[a]非数学类无需理解名词" 可测". 只需知道这样的函数可以拿去做积分.

♡

笔记 非数学无需阅读定理7.9, 只需要记住非负函数和绝对可积函数无脑交换积分顺序即可. 同样的至多可数个[10] f 的点不影响积分.

定理 7.10 (levi 定理)

设 $f_n(x)\geqslant 0,n=1,2,\cdots$ 是 E 上可测函数, 若 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx.$$

♡

笔记 非负递增可无脑换序, 哪怕积分不收敛也无所谓.

[8]即和自然数集之间存在一一映射.

[9]实际上, 可以除去 0 测集, 非数学不必掌握.

[10]更完整的, 除去 0 测集.

定理 7.11 (法图定理 🔥)

设 $f_n(x) \geqslant 0, n=1,2,\cdots$ 是 E 上可测函数, 则有

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

♡

笔记 用的比较少.

但是上述定理的离散版本却很容易直接在非数学框架下证明, 并且极度适合作为基本的高等数学训练题. 我们将内容后置.

第 7 章 练习

1. (1.) 利用单调有界定理证明闭区间套定理. 即设 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}], n=1,2,\cdots$, 则存在唯一的二元对 (c,d), 使得 $a_1\leqslant c\leqslant d\leqslant b_1$ 且 $[c,d]=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 特别的若 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)>0$, 则 $c<d$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则 $c=d$.
2. (2.) 本题命题7.3的更为一般的形式, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$f_1(n,\epsilon)\leqslant a_n\leqslant f_2(n,\epsilon), \forall n\geqslant N, \tag{7.9}$$

这里

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty} f_2(n,\epsilon)=\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty} f_1(n,\epsilon)=A\in\mathbb{R}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

第 8 章 极限和渐近分析方法非数学类

内容提要

- 余项的分析和计算 8.1
- Stolz 定理的应用 8.2
- 和式和积分的转换思想 8.3
- 递推数列方法 8.4
- 杂题 8.5

8.1 余项的分析和计算

定义 8.1 (阶的比较)

1. 称 $f=o(g)$, 如果 $\lim \frac{f}{g}=0$.
2. 称 $f=O(g)$, 如果 $|f| \leqslant C|g|$.

♣

注余项只能回到定义上操作, 不能积分不能求导. 余项不提供解决问题的方法, 只简化书写. 余项只能在你知道如何不用余项书写时才能用余项书写. 余项表述有时候会产生歧义. 初学者用余项的时候, 每时每刻都必须验证余项是否正确.

定理 8.1 (Taylor 公式的 peano 余项)

设 f 在 $x=a$ 是 n 阶右可微的[a]. 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right), x \to a^+. \tag{8.1}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O\left((x-a)^n\right), x \to a^+. \tag{8.2}$$

[a]即只考虑单侧的各阶导数, 这也是为了实际运用需要.

♡

注式(8.1),(8.2)的证明只能回到定义, 即证存在 $\delta>0$ 和 $C>0$, 使得

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=0.$$

和

$$\left|\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right| \leqslant C, x \in [a, a+\delta].$$

证明 反复洛必达得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}&=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}}\\&=\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)-\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!}(x-a)^{k-2}}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}\\&\cdots\\&=\lim_{x\to a^+}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)-f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)}\\&=0,\end{aligned}$$

这里最后一个等号不来自洛必达而是导数定义. 这就完成了式(8.1)的证明.

又

$$\left|\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right|+\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}.$$

因为收敛必有界和(8.1), 我们知道 $\left|\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}\right|$ 在 a 的右邻域有界, 因此这就证明了式(8.2).

我们完成了定理8.1的证明.

笔记 使用 taylor 公式时, O 余项可以把阶增大一点, 有时候写出来会更简洁好看.

读者应该自行阅读和积累常用函数的 taylor 公式A.0.1.

例题 8.1 计算

1. $$\lim_{x\to0}\frac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right].$$

3. 设 $a>0$, 计算
$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right].$$

4. 设 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)=a>0$, 计算
$$\lim_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{f(x)}}{f(x)-g(x)}.$$

注此类初等求极限问题我们不再赘述.

证明

1. 注意到
$$\begin{aligned}\cos\sin x&=\cos\left(x-\frac{1}{6}x^3+O\left(x^5\right)\right)\\&=1-\frac{\left[x-\frac{1}{6}x^3+O\left(x^5\right)\right]^2}{2}+\frac{\left[x-\frac{1}{6}x^3+O\left(x^5\right)\right]^4}{24}+o\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+O\left(x^5\right)\right)^4\right]\\&=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

以及
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).$$

这就给出了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

笔记 第一次做题的时候一定记得检查余项哟～, 熟练之后直接按代码taylor((cos(sin(x))-cos(x)))即可.

2. 本题目标是展开到常数项, 注意到为了运用 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o\left(\frac{x}{2}\right), x\to 0$, 我们需要提出 x^6 使得对 $\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$ 展开, 某种意义上来说本题是对 $x=\infty$ 进行展开.

事实上

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)-x^3-\frac{1}{2x^3}+o(1)\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)\\
=&\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

3. 笔记 看到拉中结构可以使用拉中, 此外积累想法, 中值定理可能保持阶不变.

由拉格朗日中值定理, 存在 $\theta_n\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, 使得

$$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=\ln a\cdot a^{\theta_n}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\ln a\cdot a^{\theta_n}}{n(n+1)}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\ln a\cdot a^{\theta_n}}{n(n+1)}=\ln a,$$

这里用到了

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\theta_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\theta_n=0.$$

4. 事实上

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{f(x)}}{f(x)-g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)\ln f(x)}-e^{f(x)\ln g(x)}}{f(x)-g(x)}\\
&=\lim_{x\to 0}e^{f(x)\ln g(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)\ln f(x)-f(x)\ln g(x)}-1}{f(x)-g(x)}\\
&=e^{a\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\ln f(x)-f(x)\ln g(x)}{f(x)-g(x)}\\
&=e^{a\ln a}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-f(x)]\ln f(x)}{f(x)-g(x)}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)[\ln f(x)-\ln g(x)]}{f(x)-g(x)}\right\}\\
&=a^a\left[-\ln a+a\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}\right]\\
&=a^a\left[-\ln a+a\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}\right]\\
&=a^a[-\ln a+1]=a^a\ln\frac{e}{a}.
\end{aligned}$$

命题 8.1 (a_n^n 型估计)

设 $a_n=1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 证明

$$a_n^n=e^a+\frac{e^a\left(b-\frac{a^2}{2}\right)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$



笔记 本结果主要为后续简化计算服务. 本结果即表明

$$\lim_{n\to\infty}n\left(a_n^n-e^a\right)=e^a\left(b-\frac{a^2}{2}\right).$$

证明 利用 $a_n-1\sim\frac{a}{n},\ln(1+x)\sim x$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_n^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{n\frac{a}{n}}=e^a.$$

进一步, 我们考虑

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n\left(a_n^n-e^a\right)&=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}-e^a\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}e^an\left(e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-a}-1\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}e^an\left[n\ln\left[1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-a\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}e^a\left[n^2\ln\left[1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-an\right].\\
&=\lim_{n\to\infty}e^a\left[n^2\left[\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-an\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}e^a\left[n^2\left[\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{a}{n}\right]^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-an\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}e^a\left[b+o(1)-\frac{1}{2}a^2\right]=e^a\left(b-\frac{a^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

我们来看一组要处理余项的求极限题.

例题 8.2

1. $$\lim_{x\to0}\frac{x-\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{次复合}}x}{x^3}.$$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}.$$

3. 考虑 $f_n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{次复合}}x$, 证明

$$\sqrt{f_n(x)}=\sqrt{x}-\frac{nx^{\frac{5}{2}}}{12}+o\left(x^{\frac{5}{2}}\right).$$

4. 设 $n\in\mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\cdot\sqrt[3]{\cos(3x)}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos(nx)}}{x^2}.$$

证明

1. 考虑 $f_n(x)=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{次复合}}x$, 我们先证明

$$f_n(x)=x-\frac{n}{6}x^3+o\left(x^3\right).\tag{8.3}$$

当 $n=1$ 显然成立, 设 $n=k$ 成立, 则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \sin\left(x-\frac{k}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right) \\ &= x-\frac{k}{6}x^3+o\left(x^3\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{k}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{k}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)^3\right) \\ &= x-\frac{k}{6}x^3-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right) \\ &= x-\frac{k+1}{6}x^3+o\left(x^3\right), \end{aligned}$$

这样我们就证明了(8.3).

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{次复合}}x}{x^3}=\frac{n}{6}.$$

2. 注意到 $\cos(kx)=1-\frac{k^2x^2}{2}+o\left(x^2\right), k\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\prod_{k=1}^{n}\cos(kx)=1-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)=1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2+o\left(x^2\right), \tag{8.4}$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

笔记 仔细理解式(8.4), 乘积中每个括号各取一项, 除去都取常数, 或者仅有一项取二次项, 其余全部取常数外, 其余取法的阶都会被吸收进余项. 如果还是不知道怎么来的, 不妨试试 $\cos x\cos 2x, \cos x\cos 2x\cos 4x$ 无脑打开括号看看长什么样子.

3. 现在运用(8.3), 我们就有

$$\begin{aligned} \sqrt{f_n(x)} &= \sqrt{x-\frac{n}{6}x^3+o\left(x^3\right)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{6}x^2+o\left(x^2\right)} \\ &= \sqrt{x}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{n}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)+o\left(-\frac{n}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right) \\ &= \sqrt{x}\cdot\left(1-\frac{n}{12}x^2+o\left(x^2\right)\right) \\ &= \sqrt{x}-\frac{nx^{\frac{5}{2}}}{12}+o\left(x^{\frac{5}{2}}\right), \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f_n(x)}-\sqrt{x}}{x^{\frac{5}{2}}}=-\frac{n}{12}.$$

4. 首先

$$\sqrt[k]{\cos(kx)}=\sqrt[k]{1-\frac{k^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=1-\frac{k}{2}x^2+o\left(x^2\right), k=1,2,\cdots,n,$$

于是

$$\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\cos(kx)}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)=1-\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\right)x^2+o\left(x^2\right)=1-\frac{n(n+1)}{4}x^2+o\left(x^2\right).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\cdot\sqrt[3]{\cos(3x)}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\cos(nx)}}{x^2}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

我们来看个全国大学生数学竞赛真题的证明.

例题 8.3 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}.$$

注有读者给出了如下证明方法: 他不知道为什么是 $\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 因为用到的是 $\sin x=x+o(x)$, 而

【例 1.9】（首届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}.$$

解析　利用泰勒展开式和定积分定义

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\pi\int_0^1(1+x)x\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

评注：本题若直接用定积分定义，将很难分离出代表区间长度的项 $\frac{1}{n}$，故先用泰勒展

14

$k=n-1$ 的时候是

$$o\left(\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right)\neq o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

其实这里用到的是 $\sin x=x+0x^2+o\left(x^2\right)$, 因此

$$o\left(\frac{(n-1)^2\pi}{n^4}\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

笔记 有读者猜到本题可以直接把 $\sin x\sim x$, 但这样没有任何定理可以保证你在本题这么做. 注意使用余项书写的人一定知道不用余项该怎么书写, 否则你就不能使用余项, 余项是简写手段而非解决问题的技术.

证明 注意到 $\sin x=x+o\left(x^2\right)$, 由余项的定义, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$x-\epsilon x^2\leqslant\sin x\leqslant x+\epsilon x^2,\forall x\in[-\delta,\delta]. \tag{8.5}$$

现在当 $n>\frac{\pi}{\delta}$, 我们有 $\frac{k\pi}{n^2}\in[-\delta,\delta],\forall k=1,2,\cdots,n-1$. 因此运用不等式(8.5)夹逼得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}&\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+\epsilon\frac{k^2\pi^2}{n^4}\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+\epsilon\frac{\pi^2}{n^2}\right)\\&\leqslant\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}+\frac{\epsilon\pi^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n}{n}\right)\\&=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}+\frac{2\epsilon\pi^2}{n}.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\epsilon\frac{k^2\pi^2}{n^4}\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\epsilon\frac{\pi^2}{n^2}\right)\\&=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}-\frac{\epsilon\pi^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\\&\geqslant\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}-\frac{2\epsilon\pi^2}{n}.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\tfrac{k}{n}\right)\sin\tfrac{k\pi}{n^2}\leqslant\pi\int_0^1 x\left(1+x\right)dx=\tfrac{5\pi}{6}. \tag{8.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\tfrac{k}{n}\right)\sin\tfrac{k\pi}{n^2}\geqslant\pi\int_0^1 x\left(1+x\right)dx=\tfrac{5\pi}{6}. \tag{8.7}$$

结合式(8.6)和(8.7)和夹逼准则, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\pi\int_0^1 x\left(1+x\right)dx=\frac{5\pi}{6}.$$

再来看一个标准的例子.

例题 8.4 设 f 在 $x=0$ 可微且 $f\left(0\right)=0$, 严格证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'\left(0\right)}{2}. \tag{8.8}$$

笔记 对此类套路方法熟悉之后, 我们可以如下书写: 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f'\left(0\right)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]=f'\left(0\right)\left(\frac{n+1}{2n}+\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{f'\left(0\right)}{2}\cdot\frac{n+1}{n}+o\left(1\right),$$

我们有(8.8)成立.

证明 注意到

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+o\left(x\right),x\to0.$$

我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$f'\left(0\right)x-\epsilon x\leqslant f\left(x\right)\leqslant f'\left(0\right)x+\epsilon x,\forall x\in\left[0,\delta\right].$$

于是当 $n>\frac{1}{\delta}$ 我们有 $0<\frac{k}{n^2}<\delta,k=1,2,\cdots,n$ 且

$$\left(f'\left(0\right)-\epsilon\right)\frac{k}{n^2}\leqslant f\left(\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\left(f'\left(0\right)+\epsilon\right)\frac{k}{n^2},k=1,2,\cdots,n.$$

利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$, 求和得

$$\left(f'\left(0\right)-\epsilon\right)\frac{n+1}{2n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\left(f'\left(0\right)+\epsilon\right)\frac{n+1}{2n}, \tag{8.9}$$

即

$$f'\left(0\right)-\epsilon\leqslant\frac{2n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\leqslant f'\left(0\right)+\epsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f'\left(0\right).$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'\left(0\right)}{2}.$$

笔记 其实到(8.9)之后, 我们更喜欢如下书写[1]. 上面的书写纯属为了完全非数化, 因此带来了繁琐性.

在(8.9)两边让 $n \to +\infty$ 得

$$\frac{f'(0)-\epsilon}{2} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{f'(0)+\epsilon}{2}.$$

由 ϵ 任意性得

$$\frac{f'(0)}{2} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{f'(0)}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2},$$

这就证明了(8.8).

接下来我们可以随意使用余项来计算基础极限题.

例题 8.5

1. 计算
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)^n.$$
2. 计算
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{i}}\right).$$
3. 计算
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n.$$
4. 证明
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \tag{8.10}$$
并计算
$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]. \tag{8.11}$$

证明

1. 笔记 注意到 $\frac{\sqrt{k}}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, 所以可以走 Taylor 公式.

[1] 如果你对这样的逻辑有疑惑, 见非数学类数学分析常识习题2.

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{k}}{n}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}+\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k\sqrt{k}}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}+\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sqrt{k}}{n}+\frac{k}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n}+\frac{n+1}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(n-\frac{\frac{2}{3}n\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n}}{2}+o\left(\sqrt{n}\right)}{n}+\frac{n+1}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=1-\frac{2}{3\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

这里倒数第二个等号如果用 Stolz 定理9.1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}-(n-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{2}{3}n\sqrt{n}+o\left(n\sqrt{n}\right),$$

但这样阶不够精美[2], 我们需要更强的工具, 即定理9.10, 有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}-\int_0^1\sqrt{x}dx\right)=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{2}{3}n\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n}}{2}+o\left(\sqrt{n}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{2}{3\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{n}+O(1)}=0.$$

2. 注意到上一问已经给出

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}=1-\frac{2}{3\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty,$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)=\frac{2}{3}.$$

3. 利用

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+O\left(x^2\right),$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right)=1-\frac{n+1}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

[2]虽然也能算出答案.

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left[1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

4. 由 Taylor 公式的 Peano 余项得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}-\frac{\pi^3}{6\left(n^2+k\right)^{\frac{3}{2}}}+O\left(\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^5\right)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\pi}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}-\frac{\pi^3}{6n^3\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\pi}{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3k^2}{8n^4}+O\left(\frac{k^3}{n^6}\right)\right)-\frac{\pi^3}{6n^3}\left(1+o\left(1\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\pi}{n}\left(1-\frac{k}{2n^2}+\frac{3k^2}{8n^4}\right)-\frac{\pi^3}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}-\frac{k}{2n^3}+\frac{3k^2}{8n^5}-\frac{\pi^2}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\&=1-\frac{n+1}{4n^2}+\frac{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{16n^4}-\frac{\pi^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=1-\frac{1}{4n}+\left(-\frac{1}{8}-\frac{\pi^2}{6}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

由命题8.1得(8.10)以及

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right]=-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{5}{32}+\frac{\pi^2}{6}\right).$$

我们给一个用余项判断收敛性的例子. 回忆课本结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

例题 8.6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ 存在.

笔记 我们称 $\gamma\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ 为欧拉常数.

证明 运用 Taylor 公式8.1, 我们有

$$x+\ln\left(1-x\right)=O\left(x^2\right),x\to0.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)&=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\\&=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right).\end{aligned}$$

现在由命题8.4知

$$\sum_{k=2}^{n}\left|O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right|\leqslant M\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ 存在.

8.2 Stolz 定理的应用

笔记 正如定理9.1的笔记所说, stolz 定理有着很强降阶作用, 他是洛必达法则的离散版本. 和洛必达有着类似的效果.

例题 8.7 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}.$$

笔记 本题还能积累一个估阶思想, 即当数列增长速度足够快的时候, 求和的阶和原本的阶没有区别.

证明 由 Stolz 定理9.1, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!-(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)!}{(n-1)(n-1)!}=1.$$

例题 8.8 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-100)=100$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}j^2a_j}{n^3}-\frac{100}{3}\right)=100.$$

证明 运用 Stolz 定理9.1, 我们知道

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}j^2a_j-\frac{100}{3}n^3}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2a_{n+1}-\frac{100}{3}(n+1)^3+\frac{100}{3}n^3}{(n+1)^2-n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-\frac{100}{3}(n+1)^2+\frac{100}{3}\frac{n^3}{(n+1)}}{\frac{2n+1}{n+1}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(a_{n+1}-100)+100(n+1)-\frac{100}{3}(n+1)^2+\frac{100}{3}\frac{n^3}{(n+1)}}{2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{100+\frac{100}{3}\frac{3n+2}{n+1}}{2}\\
&=100.
\end{aligned}$$

例题 8.9 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n^2}.$$

笔记 注意到, 分子求和时, 不是单纯的 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_n^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$, 而是 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$.

笔记 组合数的定义和性质可以参考Binomial Coefficient.

证明 事实上, 直接运用 Stolz 定理9.1两次, 就有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n+1}\\
&\overset{C_{n+1}^k=\frac{n+1}{k}C_n^{k-1}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{n+1}{k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^{k-1}-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{2n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{2n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)-(n-1)\ln n-\ln n}{2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

我们来看数学类真题, 在第十二届大学生数学竞赛数学类中, 竞赛班三届元老云佬失利之题[3].

例题 8.10 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}.$$

证明 直接运用 Stolz 定理9.1, 就有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sum\limits_{k=1}^{n+1}k^{2020}-\ln\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{(n+1)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2020}}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2020}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2020}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}}} = \int_0^1 x^{2020}dx = \frac{1}{2021}.
\end{aligned}$$

为了解决更多问题, 我们引入一个重要恒等式, 他是离散的分部积分[4].

命题 8.2 (Abel 变换[5])

设 $\{a_n\}_{n=1}^N, \{b_n\}_{n=1}^N$ 是数列, 则有恒等式

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}a_kb_k &= (a_1-a_2)b_1+\cdots+(a_{N-1}-a_N)(b_1+b_2+\cdots+b_{N-1})+a_N(b_1+b_2+\cdots+b_N)\\
&= \sum_{j=1}^{N-1}(a_j-a_{j+1})\sum_{i=1}^{j}b_i+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i. \qquad (8.12)
\end{aligned}$$

[3]除此之外其余题满分.

[4]遇事不决, 分部积分. 分部积分是常用的改善阶的方法, 因此 abel 变换8.12也有类似的效果.

笔记 命题8.2的证明想法”强行裂项”一种很重要的思想.

证明 为了计算 $\sum_{j=1}^{N-1}(a_j-a_{j+1})\sum_{i=1}^{j}b_i+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i$, 我们来强行构造裂项, 差什么就给他补上去再补回来, 即:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N-1}(a_j-a_{j+1})\sum_{i=1}^{j}b_i+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i&=\sum_{j=1}^{N-1}\left(a_j\sum_{i=1}^{j}b_i-a_{j+1}\sum_{i=1}^{j}b_i\right)+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i\\&=\sum_{j=1}^{N-1}\left(a_j\sum_{i=1}^{j}b_i-a_{j+1}\sum_{i=1}^{j+1}b_i\right)+\sum_{j=1}^{N-1}\left(a_{j+1}\sum_{i=1}^{j+1}b_i-a_{j+1}\sum_{i=1}^{j}b_i\right)+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i\\&=a_1b_1-a_N\sum_{i=1}^{N}b_i+\sum_{j=1}^{N-1}a_{j+1}b_{j+1}+a_N\sum_{i=1}^{N}b_i\\&=\sum_{j=1}^{N}a_jb_j.\end{aligned}$$

我们知道 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在是推不出 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$, 但是我们有更弱的均值极限成立:

命题 8.3

设 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}=0.$$

笔记 命题8.3是一个重要的需要记忆的结论, 在很多难题时可能是一个很微不足道的中间步骤, 但却会把人狠狠的卡住. 此外, 此类问题还不是直接应用 Stolz 定理9.1就可以的.

笔记 如果我们直接使用 Stolz 定理9.1, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}na_n.$$

遗憾的是, 上式最后的极限可能不存在.

证明 使用 abel 变换8.2, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(k-(k+1))\sum_{j=1}^{k}a_j+n\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}a_j}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sum_{j=1}^{n}a_j}{n+1-n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=0.\end{aligned}$$

推论 8.1

设 $a_n>0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞, 那么我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.\tag{8.13}$$

注 Stolz 定理9.1不可以逆用, 所以本题也不可以逆用.

证明 由 Stolz 定理9.1, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln a_n}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{n+1-n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

这就证明了极限(8.13).

引理 8.1 (经典级数收敛性)

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}k^\alpha\ln^\beta k$ 存在的充分必要条件是 $\alpha<-1$, 或者 $\alpha=-1,\beta<-1$.

♡

笔记 数列 $\sum\limits_{k=2}^{n}k^\alpha\ln^\beta k$ 显然递增, 由单调收敛定理知这个极限存在的充分必要条件是 $\sum\limits_{k=2}^{n}k^\alpha\ln^\beta k$ 有上界. 本结果应该牢记于心, 证明的想法是标准的单调时积分与和式等价的思想.

证明 当 $\beta=0,\alpha\geqslant 0$, 由 $\sum\limits_{k=2}^{n}k^\alpha\geqslant\sum\limits_{k=2}^{n}1=n-1$ 知极限发散.

当 $\beta=0,-1\leqslant\alpha<0$, 我们有

$$\sum_{k=2}^{n}k^\alpha=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha}}\int_k^{k+1}1dx=\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k^{-\alpha}}dx\geqslant\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^{-\alpha}}dx=\int_2^{n+1}x^\alpha dx=\frac{(n+1)^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

于是原极限发散.

当 $\beta=0,\alpha<-1$, 我们有

$$\sum_{k=2}^{n}k^\alpha=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha}}\int_{k-1}^{k}1dx=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^{-\alpha}}dx\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^{-\alpha}}dx=\int_1^n x^\alpha dx=\frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1},$$

于是原极限收敛.

笔记 即证完了所谓 p 级数的收敛性.

当 $\alpha>-1$, 由于

$$\lim_{k\to\infty}\ln k=+\infty,\ \lim_{k\to\infty}k^{-\frac{\alpha+1}{2}}=0,$$

因此存在 $C>0,N\in\mathbb{N}$ 使得 $\ln^\beta k\geqslant Ck^{-\frac{\alpha+1}{2}},\forall k\geqslant N$. 此时 $\frac{\alpha-1}{2}>-1$, 因此

$$\sum_{k=N}^{n}k^\alpha\ln^\beta k\geqslant C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha+\frac{\alpha+1}{2}}}=C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\frac{\alpha-1}{2}}},$$

于是原极限发散.

当 $\alpha<-1$, 由于对数的阶慢于幂函数的阶[6], 因此存在 $C>0,N\in\mathbb{N}$ 使得 $\ln^\beta k\leqslant Ck^{-\frac{\alpha+1}{2}},\forall k\geqslant N$. 此时 $\frac{\alpha-1}{2}<-1$, 因此

$$\sum_{k=N}^{n}k^\alpha\ln^\beta k\leqslant C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\alpha+\frac{\alpha+1}{2}}}=C\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k^{-\frac{\alpha-1}{2}}},$$

于是原极限收敛.

笔记 证明的想法在于 α 不在临界点 $\alpha=-1$, 而 ln 的阶无法影响幂函数的阶, 所以可以对 α 微调使得仍然在需要的范围内.

当 $\alpha=-1$, 我们希望读者可以自行类比思想完成证明. 熟练之后, 我们会如下书写

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{\ln^\beta k}{k}\sim\int_N^n\frac{\ln^\beta x}{x}dx=\int_{\ln N}^{\ln n}y^\beta dy,$$

显然上式最后的积分极限存在等价于 $\beta<-1$.

命题 8.4 (一些重要等价式)

我们有

[6]例如 $\ln k\leqslant\sqrt{k},k\to\infty$.

1.
$$\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha}\ln^{\beta}k=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n+o\left(n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n\right), & \alpha>-1,\beta\in\mathbb{R}\\ \frac{1}{\beta+1}\ln^{\beta+1}n+o\left(\ln^{\beta+1}n\right), & \alpha=-1,\beta>-1\\ \ln\ln n+o\left(\ln\ln n\right), & \alpha=-1,\beta=-1\end{cases}.$$

2.
$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha}\ln^{\beta}k=\begin{cases}-\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n+o\left(n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n\right), & \alpha<-1,\beta\in\mathbb{R}\\ -\frac{1}{\beta+1}\ln^{\beta+1}n+o\left(\ln^{\beta+1}n\right), & \alpha=-1,\beta<-1\end{cases}.$$

注本题主要是给出结论方便以后查阅.

笔记 大部分情况下, 拉中保持阶不变, 本题为了书写简便将会灵活运用这一点, 读者务必严格证明一次. 考试的时候也需要严格证明.

证明 当 $\alpha<-1,\beta\in\mathbb{R}$ 或者 $\alpha=-1,\beta<-1$, 由引理8.1, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}\ln^{\beta}k=\sum\limits_{k=2}^{\infty}k^{\alpha}\ln^{\beta}k$ 收敛.

当 $\alpha<-1,\beta\in\mathbb{R}$, 由 Stolz 定理9.1, 我们有
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}k^{\alpha}\ln^{\beta}k}{n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n}&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}{(n+1)^{\alpha+1}\ln^{\beta}(n+1)-n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n}\\&\overset{\text{拉格朗日保持阶不变}}{=}-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}{(\alpha+1)n^{\alpha}\ln^{\beta}n+\beta n^{\alpha}\ln^{\beta-1}n}\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(\alpha+1)\ln n+\beta}\\&=-\frac{1}{\alpha+1}.\end{aligned}$$
即得
$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{\alpha}\ln^{\beta}k=-\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n+o\left(n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n\right).$$
当 $\alpha=-1,\beta<-1$, 由 Stolz 定理9.1, 我们有
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}k^{-1}\ln^{\beta}k}{\ln^{\beta+1}n}&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}\ln^{\beta}n}{\ln^{\beta+1}(n+1)-\ln^{\beta+1}n}\\&\overset{\text{拉格朗日保持阶不变}}{=}-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}\ln^{\beta}n}{(\beta+1)n^{-1}\ln^{\beta}n}\\&=-\frac{1}{\beta+1}.\end{aligned}$$
即得
$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\ln^{\beta}k=-\frac{1}{\beta+1}\ln^{\beta+1}n+o\left(\ln^{\beta+1}n\right).$$
当 $\alpha=-1,\beta>-1$, 此时由 Stolz 定理9.1, 我们有
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}k^{-1}\ln^{\beta}k}{\ln^{\beta+1}n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}\ln^{\beta}n}{\ln^{\beta+1}n-\ln^{\beta+1}(n-1)}\\&\overset{\text{拉格朗日保持阶不变}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}\ln^{\beta}n}{(\beta+1)n^{-1}\ln^{\beta}n}\\&=\frac{1}{\beta+1}.\end{aligned}$$

于是得

$$\sum_{k=2}^{n} k^{-1}\ln^{\beta}k=\frac{1}{\beta+1}\ln^{\beta+1}n+o\left(\ln^{\beta+1}n\right).$$

当 $\alpha=-1,\beta=-1$, 此时由 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}k^{-1}\ln^{-1}k}{\ln\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}\ln^{-1}n}{\ln\ln n-\ln\ln(n-1)}\overset{\text{拉格朗日保持阶不变}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}\ln^{-1}n}{\frac{1}{n\ln n}}=1.$$

于是得

$$\sum_{k=2}^{n}k^{-1}\ln^{-1}k=\ln\ln n+o(\ln\ln n).$$

当 $\alpha>-1,\beta\in\mathbb{R}$, 由 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}\ln^{\beta}k}{n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}{n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n-(n-1)^{\alpha+1}\ln^{\beta}(n-1)}\\&\overset{\text{拉格朗日保持阶不变}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}{(\alpha+1)n^{\alpha}\ln^{\beta}n+\beta n^{\alpha}\ln^{\beta-1}n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(\alpha+1)\ln n+\beta}\\&=\frac{1}{\alpha+1}.\end{aligned}$$

于是得

$$\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}\ln^{\beta}k=\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n+o\left(n^{\alpha+1}\ln^{\beta}n\right).$$

这就完成了证明.

我们知道 Stolz 定理9.1不可逆用, 因此下面给一个可以逆用的最简单的条件, 更深刻的逆用条件我们留到数学类完成.

例题 8.11 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=A,\ \lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0.\tag{8.14}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

证明 事实上由 Abel 变换8.2, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot 1=\sum_{k=1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})+na_n.$$

于是利用 Stolz 定理9.1和条件(8.14), 我们就有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})=A-\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n+1})=A.$$

这就完成了证明.

我们运用 Stolz 定理来处理一些竞赛真题的例子, 当然其可能会结合起来知识点, 我们剥离出来 Stolz 定理部分.

例题 8.12

1. 计算

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right).$$

2. 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right).$$

证明

1. 由例8.6知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)=0.$$

运用 Stolz 定理9.1我们有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma}{\frac{1}{n}}\overset{Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$

$$\overset{\text{等价无穷大替换}}{=}-\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=-\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

2. 注意到定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

运用 Stolz 定理9.1我们有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right)\overset{Stolz}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$

$$\overset{\text{等价无穷大替换}}{=}-n^2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=-n^2\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

来看经典跨项 Stolz 定理运用题.

例题 8.13 设 $a\in\mathbb{R}$ 且对某个 $p\in\mathbb{N}$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-p})=a$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$.

笔记 觉得本题证明抽象的可以先考虑 $p=2$.

证明 对 $p\in\mathbb{N}$, 我们知道对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $k\in\mathbb{N}_0, r\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 使得 $n=kp+r$. 于是运用 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{kp+r}}{kp+r}=\lim_{k\to\infty}\frac{x_{(k+1)p+r}-x_{kp+r}}{p}=\frac{a}{p}.$$

于是由命题7.4的 (b) 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{a}{p}.$$

例题 8.14 设正值函数 f 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=a>0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1}f(k)}-\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}f(k)}\right].$$

证明

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=a>0$, 我们知道 $f(n)=an+o(n), n\to\infty$, 于是不妨设 $a=1$, 否则 af 替换 f 即. 事实上,

注意到

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln(k+o(k))}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k+o(k))}{n} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}[\ln k+\ln(1+o(1))]}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[\ln k+\ln(1+o(1))]}{n} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}+\frac{o(n+1)}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}-\frac{o(n)}{n} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1}+o(1) \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1}f(k)}-\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}f(k)}\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n+1}}-e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}}\cdot\left[e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}}-1\right]\right\}\\
&\overset{\text{等价替换}}{=} \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}}\cdot\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}\right]\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}}\cdot\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}\right]\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(k)}{n}}\cdot\left[\frac{\ln f(n+1)}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln f(k)}{n(n+1)}\right]\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}+o(1)}\cdot\left[\frac{\ln(n+1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}+o(1)}\cdot n\left[\frac{\ln(n+1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{-n\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}+o(1)}\cdot n\left[\frac{\ln(n+1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\\
&\overset{\text{等价替换, 即结论8.2.可对左边指数部分用 Stolz9.1进行证明}}{=} \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+1)-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}\right]\\
&= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{n+1}\right]\\
&\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{1}\right]=\frac{1}{e},
\end{aligned}$$

因此我们就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1}f(k)}-\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}f(k)}\right]=\frac{a}{e}.$$

笔记 在证明中有个非常重要的技巧, $f(k)=k+o(k)$, 很多同学说, 这个等式不是对充分大的 k 才对吗? 实则不

然, 这个等式的意义是 $f(k)=k+g(k), k=1,2,\cdots$, 其中 g 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k}=0$. 所以等式 $f(k)=k+o(k)$ 对 k 比较小的时候也成立. 此外余项方法本来就是简化书写的作用, 完全可以不被余项代替, 但读者可以看到, 在本题证明中, 余项的出现让我们清晰的看到了极限的阶的结构.

从证明中可以看到, 我们得到了一个经典结论

结论 [$\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}, n\to\infty$] 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

笔记 完整的 String 公式见数学类定理9.4. 本公式在非数学类可以直接使用而无需掌握证明.

证明 为方便, 我们仍然给出一个证明.

由 Stolz 定理9.1可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}&=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}-\ln n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(n+1)-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n}{1}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{n}{n+1}}=e^{-1}.\end{aligned}$$

8.3 和式和积分的转换思想

在高等数学中, 最重要的技巧之一就是和式和积分的转换, 它有一个明确的特点, 即有某种单调性.

例题 8.15 求出下列等价无穷大

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, n\to\infty$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k, n\to\infty$.

注 在章节8.2中, 我们通过 Stolz 定理9.1证明了上述和式的阶. 它有一个特点是出题人将阶告诉你, 你去验证. 而积分和式转化的方法却是一个你不提前知道阶但是可以自己算出来的方法.

笔记 很多同学会把我们的证明用所谓"面积原理"去理解. 我们强调应该规避这种靠几何的来理解这个方法的思维. 因为他并不是最快和普适的.

证明

1. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1);\\\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\leqslant1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n.\end{aligned}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+1}{\ln n}=1,$$

于是由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=1.$$

2. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln k&=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\ln k\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\ln x\mathrm{d}x=\int_{1}^{n+1}\ln x\mathrm{d}x=(n+1)\ln(n+1)-n;\\\sum_{k=1}^{n}\ln k&=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln k\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln x\mathrm{d}x=\int_{0}^{n}\ln x\mathrm{d}x=n\ln n-n.\end{aligned}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n\ln n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n}{n\ln n}=1,$$

于是由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)=1.$$

注[♠] 在数学类中, 我们将应用欧拉麦克劳林公式9.9得到更广泛的估计.

✍ **练习 8.1** 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的正值单调递减函数且 $\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛, 证明

$$\lim_{h\to0^+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\int_0^{\infty}f(x)\,dx.$$

笔记 证明的想法是同样的, 通过积分和和式关系得到.

证明 一方面, 我们有

$$h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)\geqslant h\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(xh)\,dx=h\int_1^{\infty}f(xh)\,dx=\int_h^{\infty}f(y)\,dy.$$

另外一方面, 我们有

$$h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)\leqslant h\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f(xh)\,dx=h\int_0^{\infty}f(xh)\,dx=\int_0^{\infty}f(y)\,dy.$$

于是

$$\int_0^{\infty}f(x)\,dx\geqslant\lim_{h\to0^+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)\geqslant\lim_{h\to0^+}\int_h^{\infty}f(x)\,dx=\int_0^{\infty}f(x)\,dx,$$

由夹逼准则即得

$$\lim_{h\to0^+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\int_0^{\infty}f(x)\,dx.$$

✍ **练习 8.2** 设二阶可微函数 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足

$$f''(x)\leqslant0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.\tag{8.15}$$

求极限

$$\lim_{s\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}.$$

笔记 本例非常经典, 来自北京大学考研. 深刻体现了"拉格朗日中值定理"保持阶不变和"和式和积分"转化的思想.

证明 **Step 1** 先做一些简单的函数性态分析, 条件(8.15)告诉我们 f 在趋于 $+\infty$ 的上凸函数, 而上凸函数只能递增, 递减, 先增后减这三个中发生一个, 因此我们知道 f 一定在 $[1,+\infty)$ 递增.

Step 2 接下来我们就可以专注于求极限了. 事实上我们容易知道

$$\lim_{s\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}=\lim_{s\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{f^s(2n)}-\frac{1}{f^s(2n-1)}\right]=\lim_{s\to0^+}-s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)},$$

这里 $\theta_n\in(2n-1,2n),n=1,2,\cdots$ 来自拉格朗日中值定理, 然后利用 f' 是递减函数, 于是我们由拉格朗日中值定理保持阶不变的思想, 严格来说即利用夹逼

$$\lim_{s\to0^+}-s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(2n-1)}{f^{s+1}(2n-1)}\leqslant\lim_{s\to0^+}-s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}\leqslant\lim_{s\to0^+}-s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}.\tag{8.16}$$

然后分别计算(8.16)中左边右边的极限即可发现他们是相等的[7]. 所谓拉格朗日中值定理保持阶不变的思想, 即可

[7]在 **Step 3** 中我们证明了一边, 另外一边类似, 你足够熟练之后就直接等价了, 但考试需要严谨.

提前猜测

$$\lim_{s\to 0^+} -s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(\theta_n)}{f^{s+1}(\theta_n)}=\lim_{s\to 0^+} -s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}.$$

Step 3 现在我们注意到

$$\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}=\frac{f''(x)f(x)-(s+1)(f'(x))^2}{f^{s+2}(x)}\leqslant 0.$$

于是就有

$$\lim_{s\to 0^+} -\frac{s}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{2n-2}^{2n}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}dx-\lim_{s\to 0^+} s\frac{f'(2)}{f^{s+1}(2)}\leqslant\lim_{s\to 0^+} -s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(2n)}{f^{s+1}(2n)}\leqslant\lim_{s\to 0^+} -\frac{s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n}^{2n+2}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}dx.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} -s\sum_{n=2}^{\infty}\int_{2n-2}^{2n}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}dx&=\lim_{s\to 0^+} -s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n}^{2n+2}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}dx=-\lim_{s\to 0^+} s\int_{2}^{\infty}\frac{f'(x)}{f^{s+1}(x)}dx\\&=-\lim_{s\to 0^+} s\int_{f(2)}^{\infty}\frac{1}{y^{s+1}}dy=-1,\end{aligned}$$

于是我们证明了

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}=-\frac{1}{2}.$$

8.4 递推数列方法

本节大多采用固定操作的方法, 在竞赛课程中, 固定操作都视为基础问题, 不会像基础课程那样带着大家反复训练. 因此我们只一种方法列举一个题即可.

8.4.1 单调性分析法

笔记 本节思想十分固定, 单调性分析法只适用于

$$x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}. \tag{8.17}$$

f 是递增或者递减的类型, 且大多数情况只适用于 f 递增情况, 其余情况不如压缩映像思想方便快捷. 显然递推数列(8.17)确定的 x_n 如果收敛于 $x\in\mathbb{R}$, 则当 f 连续时一定有 $f(x)=x$, 此时我们也把这个 x 称为 f 的不动点. 因此 $f(x)=x$ 是 x_n 收敛于 $x\in\mathbb{R}$ 的必要条件.

结论 [递增函数递推数列] 设 f 是递增函数, 则递推(8.17)确定的 x_n 一定单调, 且和不动点大小关系恒定.

笔记 本结论表明由递增递推(8.17)确定的数列的单调性和有界性, 完全由其 x_2-x_1 和 x_1 与不动点的大小关系确定.

证明 我们只证一种情况, 其余情况是完全类似的. 设 x_0 是 f 的不动点且 $x_1\leqslant x_0,x_2\geqslant x_1$, 则若 $x_n\leqslant x_{n+1},x_n\leqslant x_0,n\in\mathbb{N}$, 运用 f 递增性有

$$x_{n+1}=f(x_n)\leqslant f(x_0)=x_0,x_{n+2}=f(x_{n+1})\geqslant f(x_n)=x_{n+1}.$$

由数学归纳法即证明了结论8.4.1.

类似的我们可以给出

结论 [递减函数递推数列] 设 f 是递减函数, 则递推(8.17)确定的 x_n 一定不单调, 且和不动点大小关系交错.

笔记 我们注意到 $f\circ f$ 递增就能把 f 递减转化递增的情况, 本结论无需记忆或证明, 只记得思想即可.

例题 8.16

1. 设 $x_1>-6,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n},n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
2. 设 $x_1,a>0,x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right),n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. 设 $x_1=2, x_n+(x_n-4)\,x_{n-1}=3, (n=2,3,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
4. 设 $x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1, n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
5. 设 $x_1>-1, x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}, n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明

1. 因为极限不受 x_n 有限项影响可不妨设 $x_1>0$, 显然递推函数递增且有不动点 3. 又
$$x_2-x_1=\sqrt{6+x_1}-x_1=\frac{(3-x_1)\,(2+x_1)}{\sqrt{6+x_1}+x_1},$$
于是当 $x_1>3$ 有 x_n 递减且大于不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$. 于是当 $x_1\leqslant 3$ 有 x_n 递增且小于等于不动点, 因此无论如何 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.
2. 注意到
$$\frac{d\left[\frac{1}{4}\left(3x+\frac{a}{x^3}\right)\right]}{dx}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{a}{x^4}\right)=\frac{3}{4x^4}\left(x^2+\sqrt{a}\right)\left(x+a^{\frac{1}{4}}\right)\left(x-a^{\frac{1}{4}}\right).$$
又
$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(3\sqrt[4]{a}+\frac{a}{a^{\frac{3}{4}}}\right)=\sqrt[4]{a}.$$
于是我们知道 $\{x_n\}_{n\geqslant 2}$ 落在递推函数的递增区间. 因此可以继续使用结论8.4.1. 现在
$$x_3-x_2=\frac{1}{4}\left(3x_2+\frac{a}{x_2^3}\right)-x_2=\frac{\left(\sqrt{a}+x_2^2\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-x_2\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+x_2\right)}{4x_2^3}\leqslant 0,$$
故 x_n 递减有下界, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a^{\frac{1}{4}}$.
3. 显然 $x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, n=2,3,\cdots$ 且递推函数在 $(0,+\infty)$ 递增. 因此可以使用结论8.4.1. 注意到
$$\frac{3+4x}{1+x}-x=\frac{\left(x+\frac{\sqrt{21}-3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{21}+3}{2}-x\right)}{x+1},$$
显然 $x_1<\frac{\sqrt{21}+3}{2}$ 以及 x_n 递增且小于不动点 $\frac{\sqrt{21}+3}{2}$, 于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{\sqrt{21}+3}{2}$.
4. 显然 $x_{n+1}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}, n=1,2,\cdots$ 的递推函数递增且有唯一不动点 0. 注意到 $\ln\frac{e^x-1}{x}\leqslant x, \forall x\geqslant 0$, 我们有 x_n 递减且有下界 0, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.
5. 不妨设 $x_1>0$, 递推函数递减, 使用结论8.4.1. 采取二次复合技巧即:
$$x_{n+2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}=\frac{1+x_n}{2+x_n}.$$
注意到
$$\frac{1+x}{2+x}-x=\frac{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)}{x+2}.$$
于是当 $x_1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}, x_{2n-1}$ 递减到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 因为奇偶子列和不动点大小关系交错, 此时 x_{2n} 递增到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 同样的, 当 $0<x_1\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}, x_{2n-1}$ 递增 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 因为奇偶子列和不动点大小关系交错, 此时 x_{2n} 递减到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故无论如何都有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

笔记 可以看到最后一题虽然操作是固定的, 但是步骤书写将会相当繁琐, 所以处理递推函数递减的手法最好还是用后续的压缩映像方法.

上一题最后一例其实反应了处理递推递减的核心是不产生增根, 我们举如下的例子, 其也是必须二重复合而不能压缩映像的典型例子. 更复杂的例子较为困难一般只有数学类才会考察, 我们将其放在数学类.

例题 8.17♠ 设 $x>e^e, u_0=e, u_{n+1}=\frac{\ln x}{\ln u_n}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在.

证明 注意到 $y\ln y=\ln x$ 有唯一解 $y_0>1$, 其也是递推函数的不动点且
$$e\ln e=e<\ln x\Rightarrow u_0<y_0.$$
由结论8.4.1, 我们知道 $u_0<y_0<u_1$. 考虑
$$u_0-u_2=e-\frac{\ln x}{\ln\ln x}=e-\frac{t}{\ln t}<0, (t=\ln x>e),$$

因此 u_{2n} 递增小于 y_0, u_{2n-1} 递减大于 y_0. 因为 y_0 仍然是二次复合的不动点, 只需研究 $u_{n+2}=\frac{\ln x}{\ln\ln x-\ln\ln u_n}$ 是否在 $[u_0,u_1]$ 之间产生其他不动点[8]

因此只需判断 $\frac{\ln x}{\ln\ln x-\ln\ln y}=y$ 在 $[u_0,u_1]=[e,\ln x]$ 上是否有不同于 y_0 的解. 事实上, 记 $t=\ln x>e$, 则原问题等价于 $\frac{t}{\ln t-\ln\ln y}=y$ 在 $[e,t]$ 上是否有不同于 y_0 的解.

考虑 $g(y)=y\ln t-y\ln\ln y-t$, 则有

$$g'(y)=\ln t-\ln\ln y-\frac{1}{\ln y},g''(y)=-\frac{1}{y\ln y}+\frac{1}{y\ln^2 y}=\frac{1-\ln y}{y\ln^2 y}\leqslant 0,$$

故

$$g'(y)\geqslant g'(t)=\ln t-\ln\ln t-\frac{1}{\ln t}=h(t),h'(t)=\frac{\ln^2 t-\ln t+1}{t\ln^2 t}>0.$$

现在就有 $h(t)\geqslant h(e)=0$, 从而 $g'(y)\geqslant 0,\forall y\in[e,t]$. 这就证明了 g 的递增性, 从而 y_0 是唯一的解.

于是我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=y_0$.

例题 8.18 设数列 $a_{n+1}=\frac{2}{1+a_n^2},n=1,2,\cdots,a_1\in\mathbb{R}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 首先由递推显然有 $0<a_n\leqslant 2,\forall n\geqslant 2$. 不妨设 $0<a_1\leqslant 2$. 考虑递推函数 $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$, 这是递减递推, 于是我们考虑

$$f(f(x))-x=\frac{2}{1+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}=\frac{(1-x)^3\left(x^2+x+2\right)}{x^4+2x^2+5}.$$

注意到若 $a_1<1$, 则

$$a_3-a_1=f(f(a_1))-a_1>0.$$

由递减递推数列结论8.4.1知 $a_{2n-1}\uparrow 1,a_{2n}\downarrow 1$, 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

结论 设 $x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\in\mathbb{R},x_n\neq a,\forall n\in\mathbb{N},$$

证明: 若 f 在 $x=a$ 可导, 则 $|f'(a)|\leqslant 1$.

证明 若 $|f'(a)|>1$, 所以存在 $r>1,\delta>0$ 使得

$$|f(x)-f(a)|\geqslant r|x-a|,\forall x\in[a-\delta,a+\delta].$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0$, 所以存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$ 有

$$|x_{n+1}-a|=|f(x_n)-f(a)|\geqslant r|x_n-a|,$$

这说明了

$$|x_{n+1}-a|\geqslant r^{n+1-N}|x_N-a|,\forall n\geqslant N,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $|f'(a)|\leqslant 1$.

来看第十五届数学类 A 类的压轴题:

例题 8.19 设 $x_1=a=\sqrt[3]{3}$ 且 $x_{n+1}=a^{x_n},n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在但不等于 3.

证明 注意到递推函数 a^x 递增, 所以由递增递推数列结论8.4.1, x_n 一定单调且和不动点大小关系恒定.

现在由 $a>1$ 得

$$x_2=a^{x_1}>a=x_1,$$

即 x_n 严格递增. 又

$$a^x=x\Leftrightarrow x\ln a=\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln 3}{3}=\frac{\ln x}{x}.$$

注意到 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 于是作出函数图像我们知道存在 $0<x_0<e$ 使得 $a^{x_0}=x_0$. 又

$$\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln 3}{3a}<\frac{\ln 3}{3},$$

[8]否则产生一个 $[u_0,u_1]$ 之间新的不动点且 u 的奇偶子列会趋于最接近他它的那个不动点.

于是我们有 $a<x_0$. 因此我们知道 $x_n<x_0, \forall n \geqslant 1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq 3.$$

8.4.2 压缩映像方法

我们来看一种重要的处理模型, 压缩映像方法, 它是我们以后解决基础题的重要方法. 其思想内核有两种, 一种是找到不动点 x_0, 然后得到某个 $L\in(0,1)$, 使得

$$|x_n - x_0| \leqslant L|x_{n-1}-x_0| \leqslant \cdots \leqslant L^{n-1}|x_1-x_0|.$$

还有一种是得到某个 $L\in(0,1)$, 使得

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant L|x_{n-1}-x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant L^{n-2}|x_2-x_1|.$$

当数列由递推(8.17)确定时, 我们有

$$|x_n-x_0| = |f(x_{n-1})-f(x_0)|, |x_n-x_{n-1}| = |f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|,$$

因此往往可使用中值定理或者直接放缩法来得到渴望的 $L\in(0,1)$, 特别强调 $L=1$ 是不对的.

例题 8.20

1. 设 $x_1>-1, x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}, n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. 求数列 $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \cdots$ 极限.
3. 设数列 $x_1\in\mathbb{R}, x_{n+1}=\cos x_n, n\in\mathbb{N}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明

1. 不妨设 $x_1>0$, 于是设 $x_0=\frac{1}{1+x_0}$, 即 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$. 然后

   $$|x_{n+1}-x_0| = \left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_0}\right| = \frac{|x_n-x_0|}{(1+x_n)(1+x_0)} \leqslant \frac{1}{1+x_0}|x_n-x_0| \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{1}{1+x_0}\right)^n |x_1-x_0|,$$

   于是我们有

   $$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_0| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x_0}\right)^n |x_1-x_0| = 0.$$

   由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. 笔记 考虑到是跨项了, 所以我们分奇偶分别讨论本题.

   注意到 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}$, 于是

   $$|x_{n+2}-2| = \left|\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}-2\right| = \frac{\left|3-\sqrt{7+x_n}\right|}{\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}+2} = \frac{|2-x_n|}{\left(2+\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}\right)\left(3+\sqrt{7+x_n}\right)} \leqslant \frac{1}{6}|x_n-2|.$$

   因此无论奇偶子列都成立压缩映像不等式, 所以由命题7.4的 (b) 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

3. 本题虽然 cos 的导数绝对值上界达到了 1, 但是实际上 $x_n, n\geqslant 2$ 落在的范围使得 cos 导数绝对值在这个范围上界严格小于 1, 因此也可以压缩.

   注意到 $|x_n|\leqslant 1, \forall n\geqslant 2$, 设

   $$C \triangleq \max_{x\in[-1,1]}|\sin x| \in (0,1), x_0\in(-1,1), x_0=\cos x_0,$$

   我们有

   $$|x_{n+1}-x_0| = |\cos x_n - \cos x_0| = |\sin\alpha_n|\cdot|x_n-x_0| \leqslant C|x_n-x_0|, \forall n\geqslant 2.$$

   于是压缩印象的方法我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

例题 8.21 设可微函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足 $|f'(x)|<1, \forall x\in[a,b]$. 证明: 对

$$x_1\in[a,b], x_{n+1}=f(x_n), n\in\mathbb{N},$$

必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

注注意到 f' 未必是连续函数, 所以 $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ 未必可以严格小于 1.

证明 由命题12.3知 f 有不动点 $x_0\in[a,b]$. 于是由拉格朗日中值定理得

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(x_0)|<1, \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<1.$$

即 $\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$ 是 $[a,b]$ 上严格小于 1 的连续函数. 因此

$$r\triangleq \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\in[0,1).$$

于是

$$|x_{n+1}-x_0| = |f(x_n)-f(x_0)|\leqslant r|x_n-x_0|\leqslant r^2|x_{n-1}-x_0|\leqslant\cdots\leqslant r^n|x_1-x_0|,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

例题 8.22♠ 设函数 $f:(a,b)\to(a,b)$ 满足

$$|f(y)-f(x)|<|y-x|, \forall x,y\in(a,b). \tag{8.18}$$

证明: 对

$$x_1\in(a,b), x_{n+1}=f(x_n), n\in\mathbb{N},$$

必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明

由(8.18)知 f 在 (a,b) 一致连续, 因此由 Cantor 定理知 f 可以连续延拓到 $[a,b]$, 从而可视为连续函数 $f:[a,b]\to[a,b]$. 现在由命题12.3知 f 在 $[a,b]$ 有不动点 x_0 且由(8.18)得

$$|f(y)-f(x)|\leqslant|y-x|, \forall x,y\in[a,b]. \tag{8.19}$$

由(8.19)得

$$f(y)-y\leqslant f(x)-x, \forall a\leqslant x\leqslant y\leqslant b,$$

于是若 f 有两个不动点会导致 f 在一个区间上恒为 x, 这和(8.18)矛盾!. 故 f 只有唯一一个不动点且

$$0\leqslant|x_{n+1}-x_0| = |f(x_n)-f(x_0)|\leqslant|x_n-x_0|, \forall n\in\mathbb{N}.$$

由单调有界必收敛我们有

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0| = r\geqslant 0.$$

若 x_n 不收敛, 则 $r>0$ 且 $\{x_n\}$ 聚点有且只有 $x_0\pm r$. 设 $x_{n_k}\to x_0+r$, 则

$$x_{n_k+1} = f(x_{n_k})\to f(x_0+r)\neq x_0+r\Rightarrow f(x_0+r) = x_0-r.$$

类似可得 $f(x_0-r) = x_0+r$. 注意到若 $x_0\pm r$ 有一个落在端点, 因为 $|x_n-x_0|$ 递减, 当 n 充分大我们有 $|x_n-x_0|=r$, 这告诉我们 x_n 会有一些点落在端点而矛盾! 故 $x_0\pm r\in(a,b)$. 现在由(8.18)得

$$r = |x_0-r-x_0| = |f(x_0+r)-f(x_0)|<|x_0+r-x_0| = r,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

8.4.3 折线图 (蛛网图) 方法

例题 8.23

1. 设 $u_1=b, u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$, 判断 u_n 的收敛性.
2. 设 $x_{n+1}(2-x_n)=1, n=1,2,\cdots$, 判断 x_n 收敛性.
3. 定义数列 $a_0=x, a_{n+1}=\frac{a_n^2+y^2}{2}, n=0,1,2,\cdots$, 求 $D\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:$ 数列a_n收敛$\}$ 的面积.

证明

1. 折线图方法知当且仅当 $a-1\leqslant b\leqslant a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛且极限值为 a.
2. 折线图或者直接求通项的方法知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 我们给出通项法证明：
   注意到由题目条件得
   $$x_n\neq 2, x_{n+1}-1=\frac{x_n-1}{2-x_n}, n=1,2,\cdots. \tag{8.20}$$
   若 $x_{n_0}=1$，则 $x_n=1,\forall n\geqslant n_0$，此时当然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 因此下面假设 $x_n\neq 1,\forall n\geqslant 1$. 于是在式(8.20)中取倒数得
   $$\frac{1}{x_{n+1}-1}=\frac{2-x_n}{x_n-1}=\frac{1}{x_n-1}-1\Rightarrow\frac{1}{x_{n+1}-1}=\frac{1}{x_1-1}-n\to-\infty,$$
   因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=1$.
3. **Step 1**
   $t=\frac{t^2+y^2}{2}$ 关于 t 有解可知 $\triangle=4-4y^2\geqslant 0$，即 $|y|\leqslant 1$.
   Step 2
   解 $t^2-2t+y^2=0$ 知 $t=1\pm\sqrt{1-y^2}$，由折线图技巧我们知道
   $$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2},|y|\leqslant 1\right\}.$$
   由初中数学得面积为 $4+\pi$.

8.4.4 递推数列估阶的初等方法

例题 8.24

1. 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n), n=1,2,\cdots, x_1>0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n}$.
2. 设 $x_{n+1}=\sin x_n, n=1,2,\cdots, x_1\in(0,\pi)$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)$.
3. 设 $x_1=1, x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}, n=1,2,\cdots$，计算
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}\left(x_n-\sqrt{2n}\right)}{\ln n}.$$

证明

1. 显然 x_n 递减到 0 以及
   $$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}\overset{Stolz定理9.1}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=2.$$
   于是继续运用 Stolz 定理9.1，我们有
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n\left(n-\frac{2}{x_n}\right)}{\ln n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x_{n+1}}+\frac{2}{x_n}}{\ln\frac{n+1}{n}}$$
   $$\overset{\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}x_n}{=}4\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x_{n+1}}+\frac{2}{x_n}}{x_n}=4\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{2}{\ln(1+x)}+\frac{2}{x}}{x}=\frac{2}{3}.$$
2. 显然 x_n 递减到 0 以及
   $$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}\overset{Stolz定理9.1}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=3.$$
   于是继续运用 Stolz 定理9.1，我们有
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{n}{3}x_n^2\right)}{\ln n\left(1+\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n^2\left(\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}\right)}{\ln n\left(1+\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\right)}$$
   $$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}-\frac{n}{3}}{\ln n}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{n}}$$
   $$=\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{3}}{x_n^2}=\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}}{x^2}=\frac{3}{10}.$$

3. 容易知道 x_n 递增到 ∞, 于是由 Stolz 定理9.1我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+x_n}{2x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n+\frac{1}{x_n}}{2x_n}=1.$$

即 $x_n\sim\sqrt{2n}$. 现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}\left(x_n-\sqrt{2n}\right)}{\ln n}\overset{\text{平方差公式}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}\left(x_n^2-2n\right)}{\left(x_n+\sqrt{2n}\right)\ln n}\overset{\text{等价替换}}{=}\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-2n}{\ln n}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2-2}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}\left(x_{n+1}+x_n\right)-2}{\frac{2}{x_n^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}\left(2x_n+\frac{1}{x_n}\right)-2}{\frac{2}{x_n^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\left(2x+\frac{1}{x}\right)-2}{\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{4}$$

笔记 更一般的总结见定理8.2.

推论 8.2 (♠)

在一般的兴趣问题中, 往往不给出具体的 x_n 的阶, 那么我们该如何确定 x_n 的阶呢?

解 事实上当递推函数的 Taylor 展开的一次系数为 1 时, 往往要取倒数来估计. 且倒数的估计应该有常数项. 事实上

$$\ln(1+x)=x+o(x),\sin x=x+o(x),$$

因此都需要对 $\frac{1}{x_n}$ 估计. 又

$$\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{x}{12}+O\left(x^2\right),\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+o(x),$$

可以看到 $\frac{1}{\ln(1+x)}$ 的展开就够了, 但是 $\frac{1}{\sin x}$ 没有常数项所以不够, 因此需要考虑

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+o\left(x^2\right),$$

此时有常数项就够用了. 有些人不会处理 $\frac{1}{\sin x},\frac{1}{\ln(1+x)},\frac{1}{\sin^2 x}$ 这种展开, 可以学习B.3.

让我们来看是怎么导出例8.24的估计的, 仅以 ln 为例, 希望读者可以自行举一反三. 事实上,

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{\ln(1+x_n)}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}+o(1),$$

于是存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$, 我们知道

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}>\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_N}>\frac{1}{4}(n-N+1)\Rightarrow x_{n+1}<\frac{1}{\frac{1}{x_N}+\frac{1}{4}(n-N+1)}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{\ln(1+x_n)}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}-\frac{x_n}{12}+o(x_n)=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

现在

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}n+O(\ln n)\Rightarrow\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}n+O(\ln n)\Rightarrow\frac{1}{nx_n}=\frac{1}{2}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}nx_n=2,$$

以及

$$x_n=\frac{1}{\frac{n}{2}+O(\ln n)}=\frac{2}{n}\frac{1}{1+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)}=\frac{2}{n}\left(1+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)=\frac{2}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

由

$$\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{x}{12}+O\left(x^2\right),$$

我们知道

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{2}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}{12}+O\left(x_n^2\right)=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{2}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}{12}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6k}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}=C+\frac{1}{2}n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

$$\overset{8.12\text{即}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)\text{和}8.4}{\Rightarrow}\quad \frac{1}{x_{n+1}}=C'+\frac{1}{2}n-\frac{\ln n}{6}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\Rightarrow x_n=\frac{1}{C'+\frac{1}{2}n-\frac{\ln n}{6}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow x_n=\frac{1}{\frac{n}{2}-\frac{\ln n}{6}}\frac{1}{1+\frac{C'}{\frac{n}{2}-\frac{\ln n}{6}}}\frac{1}{1+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\Rightarrow x_n=\frac{2}{n}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{3n}}\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}\frac{1}{1+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}$$

$$\Rightarrow x_n=\frac{2}{n}\left(1+\frac{\ln n}{3n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)\Rightarrow x_n=\left(\frac{2}{n}+\frac{2\ln n}{3n^2}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow x_n=\frac{2}{n}+\frac{2\ln n}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

从而得到了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(nx_n-2\right)}{\ln n}=\frac{2}{3}.$$

我们来看一个首系数展开不为 1 的例子.

例题 8.25♠ 设 $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n},a_1=1$, 证明存在 $c,\ell>0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}c^n\left(\ell-a_n\right)$ 存在.

注注意 ♠ 表示这题目如果不感兴趣可以跳过, 非数学类考试不会考.

证明 显然 a_n 递增趋于 $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 注意到

$$\ell-a_{n+1}=\frac{\ell-a_n}{\sqrt{1+\ell}+\sqrt{1+a_n}},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ell-a_{n+1}}{\ell-a_n}=\frac{1}{2\ell},$$

以及

$$a_{n+1}=\sqrt{1+\ell}\sqrt{1+\frac{a_n-\ell}{1+\ell}}=\ell\left(1+\frac{a_n-\ell}{2\left(1+\ell\right)}\right)+O\left(\left(a_n-\ell\right)^2\right).$$

故

$$(2\ell)^n\left(\ell-a_{n+1}\right)=(2\ell)^{n-1}\left(\ell-a_n\right)+(2\ell)^n O\left(\left(a_n-\ell\right)^2\right).$$

从而

$$(2\ell)^n\left(\ell-a_{n+1}\right)=\ell-1+\sum_{k=1}^{n}(2\ell)^k O\left(\left(a_k-\ell\right)^2\right).$$

注意到

$$\left|(2\ell)^k O\left(\left(a_k-\ell\right)^2\right)\right|\leqslant M(2\ell)^k\left(\ell-a_k\right)^2,\ \lim_{k\to\infty}\frac{(2\ell)^{k+1}\left(\ell-a_{k+1}\right)^2}{(2\ell)^k\left(\ell-a_k\right)^2}=\frac{2\ell}{(2\ell)^2}=\frac{1}{2\ell}<1,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}(2\ell)^n\left(\ell-a_n\right)\text{存在}.$$

笔记 c,ℓ 未必有初等值, 这是这类递推数列能求极限的关键所在.

来看一个北京大学考研真题.

例题 8.26 设 $x_0=1,x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1},n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

证明 首先 $x+\cos x$ 递增, 递推的不动点为 $\frac{\pi}{2}$, $x_1=1+\cos 1>x_0$. 所以由递增递推确定的数列一定单调且和不动点大小关系恒定的结论8.4.1, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

考虑 $y_n=\frac{\pi}{2}-x_n, n=0,1,2,\cdots$, 则由 $\frac{\pi}{2}-y_n=\frac{\pi}{2}-y_{n-1}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y_{n-1}\right)$ 知

$$y_n=y_{n-1}-\sin y_{n-1}=\frac{1}{6}y_{n-1}^3+O\left(y_{n-1}^5\right), n\to\infty.$$

Taylor 展开首系数不为 1, 所以我们考虑

$$\begin{aligned}\ln y_n&=\ln\left(\frac{1}{6}y_{n-1}^3+O\left(y_{n-1}^5\right)\right)=\ln\frac{1}{6}+3\ln y_{n-1}+\ln\left(1+O\left(y_{n-1}^2\right)\right)\\&=\ln\frac{1}{6}+3\ln y_{n-1}+O\left(y_{n-1}^2\right)=\ln\frac{1}{6}+3\ln y_{n-1}+o(1),\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\ln y_n}{3^n}-\frac{\ln y_{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{1}{3^n}\ln\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{3^n}\right), n=1,2,\cdots.$$

求和得[9]

$$\begin{aligned}\frac{\ln y_n}{3^n}&=\ln y_1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\ln\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{3^k}\right)\\&=C-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\ln\frac{1}{6}+\sum_{k=n+1}^{\infty}o\left(\frac{1}{3^k}\right)\\&=C+\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\ln 6+o\left(\frac{1}{3^n}\right)\\&=C+\frac{\ln 6}{2\cdot 3^n}+o\left(\frac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

即

$$y_n=e^{C\cdot 3^n+\frac{\ln 6}{2}+o(1)}=\sqrt{6}K^{3^n}\left(1+o(1)\right), n\to\infty.$$

注意到 $C=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln y_n}{3^n}<0$ 现在我们有 $0<K=e^C<1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}n^n\left(x_n-\frac{\pi}{2}\right)=-\lim_{n\to\infty}\sqrt{6}n^nK^{3^n}\left(1+o(1)\right)=0.$$

实际上我们证明了更强的: 存在 $K\in(0,1)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\frac{\pi}{2}}{K^{3^n}}=-\sqrt{6}.$$

我们来看一个竞赛真题需要数列估阶方法的例子.

例题 8.27 设 $a_1=\frac{\pi}{2}, a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}\sin a_n, n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 收敛.

笔记 注意到递推一次项系数为 1, 因此我们要采取取倒数的方法来估计.

证明 显然, 利用 $\sin x\leqslant x, \forall x\geqslant 0$ 归纳可得 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n\leqslant\frac{\pi}{2}, \forall n\in\mathbb{N}$, 以及

$$\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_n-\sin a_n}=\frac{a_n-\sin a_n}{na_n\left[(n+1)a_n-\sin a_n\right]}\geqslant 0.$$

于是利用 $\sin x\geqslant x-\frac{1}{6}x^3, x\geqslant 0$, 我们有

$$\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}\leqslant\frac{\frac{1}{6}a_n^3}{n^2a_n^2}\leqslant\frac{a_1}{6n^2}, n=1,2,\cdots.$$

然后求和得

$$\frac{1}{a_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}\right)\leqslant\frac{a_1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{a_1}{36}\pi^2,$$

---

9 $$C=\ln y_1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\ln\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{3^k}\right).$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\,a_{n+1}}\geqslant\frac{1}{a_1}-\frac{a_1}{36}\pi^2>0,$$

这只能有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 收敛.

笔记 可以看到即使我们注意到了取倒数估计, 但是之后的放缩可能仍然具有一定技巧性, 怎么办呢? 实际上加强归纳可以给我们一个满意的答案. 读者可以尝试归纳证明 $\sqrt{n}a_n$ 有界.

8.4.5 加强归纳法

加强归纳的核心是先猜后证.

例题 8.28

1. 设 $a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+n,a_1=\frac{1}{2}$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.
2. 设 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}},a_1=1$, 证明

$$a_n=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

证明

1. 我们证明

$$n-1\leqslant a_n\leqslant n. \tag{8.21}$$

当 $n=1$ 命题显然成立, 设 n 时命题成立, 当 $n+1$ 时, 我们有

$$n\leqslant\frac{n-1}{n}+n\leqslant a_{n+1}=\frac{a_n}{n}+n\leqslant\frac{n}{n}+n=n+1,$$

于是由数学归纳法得(8.21). 运用(8.21)和夹逼准则表明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$.

2. 显然 $a_n\geqslant0,\forall n\in\mathbb{N}$, 然后 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\geqslant\sqrt{n}$.

笔记 如果不强行归纳得到另外一侧的不等式, 那么我们无法提前判断 a_n 的阶, 那么期望通过 $\sqrt{n+a_{n-1}}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{a_{n-1}}{n}}$ 和 Taylor 展开的想法就无法实现.

我们证明

$$a_n\leqslant1+\sqrt{n},\forall n\in\mathbb{N}. \tag{8.22}$$

事实上 $n=1$ 时(8.22)显然成立, 假设 n 时(8.22)成立, 则 $n+1$ 时, 我们有

$$a_{n+1}=\sqrt{n+1+a_n}\leqslant\sqrt{n+2+\sqrt{n}}\leqslant1+\sqrt{n+1},$$

这里最后一个不等号成立的原因是

$$\sqrt{n+2+\sqrt{n}}\leqslant1+\sqrt{n+1}\Leftrightarrow n+2+\sqrt{n}\leqslant n+2+2\sqrt{n+1}\Leftrightarrow\sqrt{n}\leqslant2\sqrt{n+1}.$$

因此我们证明了不等式(8.22).

于是就可以使用 Taylor 公式8.1了. 现在我们得到了 $a_n=\sqrt{n}+O(1)$, 又利用 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)$, 我们有

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{a_{n-1}}{n}}=\sqrt{n}\left(1+\frac{a_{n-1}}{2n}+O\left(\frac{a_{n-1}^2}{n^2}\right)\right)=\sqrt{n}+\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n-1}+O(1)}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

再利用得到的 a_n 的渐近公式, 我们有

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{a_{n-1}}{n}}=\sqrt{n}\left(1+\frac{a_{n-1}}{2n}-\frac{a_{n-1}^2}{8n^2}+o\left(\frac{a_{n-1}^2}{n^2}\right)\right)=\sqrt{n}+\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{n}}-\frac{a_{n-1}^2}{8n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\sqrt{n}}-\frac{\left[\sqrt{n-1}+O\left(1\right)\right]^2}{8n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\sqrt{n}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

8.4.6 强求通项和强行裂项法

本部分也适用级数的强求通项和强行裂项的方法.

例题 8.29 设 $a_1\in(0,1),a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}},n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$.

笔记 本题是经典的例子, 注意到我们在例8.25强调过此类问题如果不能求出通项就无法求出具体值, 本题便是一个能求出通项从而算出极限值的经典例子.

证明 利用

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},\theta\in\mathbb{R},$$

我们选取 $a_1=\cos\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 此时有

$$a_2=\cos\frac{\theta}{2},a_3=\cos\frac{\theta}{2^2},\cdots,a_n=\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\theta}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\theta}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}\prod_{k=0}^{n-2}\cos\frac{\theta}{2^k}\\&=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin2\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}=\frac{\sin2\theta}{2\theta}=\frac{\sin\left(2\arccos a_1\right)}{2\arccos a_1}=\frac{a_1\sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}.\end{aligned}$$

例题 8.30

1. 设 $x_1=\sqrt{5},x_{n+1}=x_n^2-2$, 计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}.$$
2. 设 $a_1=3,a_n=2a_{n-1}^2-1,n=2,3,\cdots$, 则计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^na_1a_2\cdots a_{n-1}}.$$
3. 设 $y_0\geqslant2,y_n=y_{n-1}^2-2,n\in\mathbb{N}$, 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$.
4. 设 $y_0>2,y_n=y_{n-1}^2-2,n\in\mathbb{N}$, 计算 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)$.

证明

1. 注意到 $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无解, 因此推测类似的双曲三角函数可以做到.
设 $x_1=2\cosh\theta,\theta\in(0,+\infty)$, 利用
$$\cosh x=2\cosh^2\frac{x}{2}-1,\forall x\in\mathbb{R},\tag{8.23}$$
我们归纳可证
$$x_n=2\cosh\left(2^{n-1}\theta\right),n=1,2,\cdots.$$

于是利用 $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}\cosh\left(2^k\theta\right)}{2\cosh\left(2^n\theta\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sinh\theta\prod\limits_{k=0}^{n-1}\cosh\left(2^k\theta\right)}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\sinh(2\theta)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\cosh\left(2^k\theta\right)}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\sinh\left(2^2\theta\right)\prod\limits_{k=2}^{n-1}\cosh\left(2^k\theta\right)}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sinh 2^n\theta}{2\sinh\theta\cosh\left(2^n\theta\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tanh 2^n\theta}{2\sinh\theta}=\frac{1}{2\sinh\theta}=1,$$

这里倒数第二个等号来自 $\lim\limits_{x\to+\infty}\tanh x=1$.

2. 设 $a_1=3=\cosh\theta,\theta>0$, 则由递推(8.23)知

$$a_n=\cosh 2^{n-1}\theta,n=1,2,\cdots.$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^na_1a_2\cdots a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)}{2^n\prod\limits_{j=1}^{n-1}\cosh\left(2^{j-1}\theta\right)}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\cosh\left(2^{n-1}\theta\right)}{2^{n-2}\prod\limits_{j=0}^{n-2}\cosh\left(2^j\theta\right)}=\frac{1}{4}\cdot 2\sinh\theta=\sqrt{2},$$

这里倒数第二个等号来自第一问.

3. 设 $y_0=2\cos h\theta,\theta\geqslant 0$, 和第一问类似可得

$$y_n=2\cosh\left(2^n\theta\right),n\in\mathbb{N}_0.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}\prod\limits_{k=0}^{n}\cosh\left(2^k\theta\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh\theta}{2^{n+1}\sinh\theta\prod\limits_{k=0}^{n}\cosh\left(2^k\theta\right)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh\theta}{\sinh\left(2^{n+1}\theta\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\sinh\theta}{e^{2^{n+1}\theta}-e^{-2^{n+1}\theta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2e^{2^{n+1}\theta}\sinh\theta}{e^{2^{n+2}\theta}-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\sinh\theta}{e^{2^{n+1}\theta}-1}-\frac{2\sinh\theta}{e^{2^{n+2}\theta}-1}\right)=\frac{2\sinh\theta}{e^{2\theta}-1}=e^{-\theta}=e^{-\operatorname{arccosh}\frac{y_0}{2}}\\&=\frac{1}{\frac{y_0}{2}+\sqrt{\frac{y_0^2}{4}-1}}=\frac{2}{y_0+\sqrt{y_0^2-4}}.\end{aligned}$$

4. 一方面

$$y_n+1=y_{n-1}^2-1=(y_{n-1}-1)(y_{n-1}+1)\Rightarrow y_{n-1}-1=\frac{y_n+1}{y_{n-1}+1}\Rightarrow y_n-1=\frac{y_{n+1}+1}{y_n+1}.$$

另外一方面

$$y_n-2=y_{n-1}^2-4=(y_{n-1}-2)(y_{n-1}+2)\Rightarrow y_n-2=(y_{n-1}-2)y_{n-2}^2\Rightarrow y_n=\sqrt{\frac{y_{n+2}-2}{y_{n+1}-2}}.$$

于是结合 $\lim\limits_{m\to\infty}y_m=+\infty$ 我们有

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)&=\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y_{n+1}+1}{y_n+1}\cdot\sqrt{\frac{y_{n+1}-2}{y_{n+2}-2}}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m}\left(\frac{y_{n+1}+1}{y_n+1}\cdot\sqrt{\frac{y_{n+1}-2}{y_{n+2}-2}}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{y_{m+1}+1}{y_0+1}\cdot\sqrt{\frac{y_1-2}{y_{m+2}-2}}=\lim_{m\to\infty}\frac{y_{m+1}+1}{\sqrt{y_{m+1}^2-4}}\cdot\frac{\sqrt{y_0^2-4}}{y_0+1}\\&=\frac{\sqrt{y_0^2-4}}{y_0+1}.\end{aligned}$$

上面的类型某种意义可以归类为自然可求通项, 我们来看强求通项的例子.

例题 8.31 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=a,|\lambda|<1$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 当 $\lambda=0$ 问题时显然的, 当 $\lambda\neq 0$, 记 $b_n=a_n-\lambda a_{n-1},n=1,2,\cdots$, 我们有

$$\frac{b_n}{\lambda^n}=\frac{a_n-\lambda a_{n-1}}{\lambda^n}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}},n=1,2,\cdots.$$

对 $n=1,2,\cdots$ 求和上式得

$$a_n=\lambda^n\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}+a_0\lambda^n,n=1,2,\cdots. \tag{8.24}$$

由于 $|\lambda|<1$, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_0\lambda^n=0$. 于是由 Stolz 定理9.1, 我们有:

当 $\lambda>0$, 直接

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{n+1}}-\frac{1}{\lambda^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{1-\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}. \tag{8.25}$$

当 $\lambda<0$, 对于(8.24)的偶子列, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n+2}\frac{b_k}{\lambda^k}-\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}}-\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{2n+2}}{\lambda^{2n+2}}+\frac{b_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}}}{\frac{1}{\lambda^{2n+2}}-\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+2}+\lambda b_{2n+1}}{1-\lambda^2}=\frac{a+\lambda a}{1-\lambda^2}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

对于(8.24)的奇子列, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2n-1}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{b_k}{\lambda^k}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}-\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{2n}}{\lambda^{2n}}}{\frac{1}{\lambda^{2n}}}\overset{\text{因为偶子列的极限}}{=}\frac{a}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{a}{\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

结合命题7.4的 (b), 无论如何我们都有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{1-\lambda}$.

例题 8.32 设 $a_1=2,a_n=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}a_{n-1}+\frac{1}{n},n\geqslant 2$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 存在.

笔记 待定 $c_na_n=\frac{n+1}{2n}c_na_{n-1}+\frac{c_n}{n}$, 则设 $c_1=1,\frac{n+1}{2n}c_n=c_{n-1},n=2,3,\cdots$, 我们得 $c_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{2k}{k+1}=\frac{(2n)!!}{(n+1)!}$ 且该式对 $n=1$ 也成立. 从而

$$c_na_n=c_{n-1}a_{n-1}+\frac{c_n}{n},n=2,3,\cdots. \tag{8.26}$$

证明 对 $m\in\mathbb{N}$, 由(8.26)得

$$c_ma_m-2=c_ma_m-c_1a_1=\sum_{n=2}^{m}(c_na_n-c_{n-1}a_{n-1})=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_n}{n}=\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n\,(n+1)!},$$

从而

$$a_m=\frac{1}{c_m}\left(2+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n\,(n+1)!}\right)=\frac{(m+1)!}{(2m)!!}\left(2+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n\,(n+1)!}\right).$$

现在

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}ma_m&=\lim_{m\to\infty}m\frac{(m+1)!}{(2m)!!}\left(2+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n\,(n+1)!}\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{(2n)!!}{n(n+1)!}}{\frac{(2m)!!}{m(m+1)!}}\overset{\text{Stolz定理9.1}}{=}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!}}{\frac{(2m+2)!!}{(m+1)(m+2)!}-\frac{(2m)!!}{m(m+1)!}}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2m+2}{m+1}}{\frac{2m+2}{m+1}-\frac{m+2}{m}}=\frac{2}{2-1}=2.\end{aligned}$$

我们来看第十届最火的题目.

练习 8.3 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 存在, 令

$$a_{n+1}=b_n-\frac{na_n}{2n+1},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

笔记 采用强求通项的方法, 我们考虑 $c_{n+1}a_{n+1}=c_{n+1}b_n-\frac{c_{n+1}na_n}{2n+1}$, 然后考虑

$$\frac{c_{n+1}n}{2n+1}=-c_n, n\in\mathbb{N}, c_1=1.$$

现在

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=-\frac{2n+1}{n}\Rightarrow c_{n+1}=(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{n!}\Rightarrow c_n=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}, n\in\mathbb{N},$$

从而

$$c_{m+1}a_{m+1}-c_1a_1=\sum_{n=1}^{m}(c_{n+1}a_{n+1}-c_na_n)=\sum_{n=1}^{m}c_{n+1}b_n,$$

就可以得到(8.27).

证明 强求通项可得

$$a_{n+1}=\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}a_1+\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k,\ n\geqslant 1. \tag{8.27}$$

由 wallis 公式9.18, 我们有

$$\frac{n!}{(2n+1)!!}=\frac{n!}{(2n-1)!!\,(2n+1)}\sim\frac{n!\sqrt{\pi n}}{(2n)!!\,(2n+1)}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{n}}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)!}{(4m+1)!!}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(4m+1)!!}{(2m)!}b_{2m}-\frac{(4m-1)!!}{(2m-1)!}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}-4^{m-1}\sqrt{m-1}}\\&=\frac{2\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2^{2m+1}\sqrt{2m}}{\sqrt{\pi}}b_{2m}-\frac{2^{2m}\sqrt{2m-1}}{\sqrt{\pi}}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}}=\frac{2}{3}b,\end{aligned} \tag{8.28}$$

以及

$$\begin{aligned}-\lim_{m\to\infty}\frac{(2m-1)!}{(4m-1)!!}\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k&=-\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}\sqrt{2m-1}}b_k\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}\\&=-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{4^m\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k\\&=-\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(4m-3)!!}{(2m-2)!}b_{2m-2}-\frac{(4m-1)!!}{(2m-1)!}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}}\\&=-\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2^{2m-1}\sqrt{2m-2}}{\sqrt{\pi}}b_{2m-2}-\frac{2^{2m}\sqrt{2m-1}}{\sqrt{\pi}}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}}=\frac{2}{3}b.\end{aligned} \tag{8.29}$$

故结合命题7.4的 (b) 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}a_1+\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k=\frac{2}{3}b,$$

我们完成了证明.

来看竞赛真题, 他是强行裂项和强求通项的结合体

例题 8.33 设 $a_n,b_n>0, a_1=b_1=1, b_n=a_nb_{n-1}-2, n\geqslant 2$ 且 b_n 有界, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$.

证明 待定 $c_n, c_1=1$, 然后 $c_nb_n=c_na_nb_{n-1}-2c_n$, 期望可以裂项 $c_na_n=c_{n-1}$, 即 $c_n=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$. 然后 $c_nb_n-c_{n-1}b_{n-1}=-2c_n, n\geqslant 2$, 求和得 $c_nb_n-1=-2\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$. 故

$$c_nb_n-3=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}. \tag{8.30}$$

又由(8.30)知 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\frac{3-c_nb_n}{2}\leqslant\frac{3}{2}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$ 存在, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=0$. 从而可由(8.30)知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{3}{2}.$$

例题 8.34♠

1. 设

$$a_1=2\sqrt{3},b_1=3,a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n},n\in\mathbb{N},$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\pi. \tag{8.31}$$

2. 设

$$a_0=a>0,b_0=b>0,a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},n\in\mathbb{N}_0,$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta}. \tag{8.32}$$

笔记 两个都是积累型问题, 建议直接背答案.

证明

1. 我们归纳证明

$$a_n=3\cdot2^n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right),b_n=3\cdot2^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right),n\in\mathbb{N}.$$

注意到

$$\frac{\tan x\cdot\sin x}{\tan x+\sin x}=\tan\frac{x}{2},\forall x\in\mathbb{R},$$

我们有

$$a_{n+1}=\frac{2\cdot3\cdot2^n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)\cdot3\cdot2^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)}{3\cdot2^n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)+3\cdot2^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)}=\frac{3\cdot2^{n+1}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)}=3\cdot2^{n+1}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}\right).$$

注意到

$$\frac{\tan\frac{x}{2}\cdot\sin x}{2}=\sin^2\frac{x}{2},\forall x\in\mathbb{R},$$

我们有

$$b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}=\sqrt{3\cdot2^{n+1}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}\right)\cdot3\cdot2^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\right)}=3\cdot2^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}\right).$$

利用 $\sin x\sim x,\tan x\sim x,x\to0^+$ 即得(8.31).

2. 由均值不等式得

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geqslant\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1},\forall\mathbb{N}_0,$$

即 $a_n\geqslant b_n,\forall n\in\mathbb{N}$, 从而

$$\begin{aligned}a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}&\leqslant\frac{a_n+a_n}{2}=a_n;\\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}&\geqslant\sqrt{b_nb_n}=b_n,\end{aligned}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

因此 $\{b_n\}$ 递增有上界 a_1, $\{a_n\}$ 递减有下界 b_1. 由单调有界必收敛知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=x,\lim_{n\to\infty}b_n=y.$$

于是

$$x=\frac{x+y}{2}\Rightarrow x=y\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x.$$

记

$$I(a,b) \triangleq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \mathrm{d}\theta, a, b > 0.$$

由非数学类积分计算习题6.我们有[10]

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right), \forall a, b > 0. \tag{8.33}$$

由(8.33)得

$$I(a_{n+1}, b_{n+1}) = I\left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = I(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}_0.$$

现在我们有

$$I(x,x) = \lim_{n\to\infty} I(a_n, b_n) = I(a_0, b_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \mathrm{d}\theta,$$

即

$$\frac{\pi}{2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \mathrm{d}\theta,$$

这就证明了(8.32).

8.5 杂题

例题 8.35 幂平均的极限 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 计算

$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

证明 我们有

$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}\left[\ln\left(\sum\limits_{j=1}^n a_j^r\right) - \ln n\right]}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{r\to 0} e^{\frac{\sum\limits_{j=1}^n \left(\ln a_j \cdot a_j^r\right)}{\sum\limits_{j=1}^n a_j^r}} = \lim_{r\to 0} e^{\frac{\sum\limits_{j=1}^n \ln a_j}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

例题 8.36 $f \in R[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right] = 0,
\end{aligned}$$

类似的有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n-1}\right) = 0.$$

[10]注意 a, b 大小是不重要的.

我们完成了证明.

例题 8.37 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}.$$

笔记 证明的想法要么是凑定积分定义[11]. 要么强行替换为自己熟悉的结构, 无需猜测放缩手段.

证明 **Method 1** 注意到

$$\frac{i}{n}<\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}<\frac{i+1}{n}, i=1,2,\cdots,n-1,$$

于是由定积分定义有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{i^2+1}}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Method 2 注意到

$$0\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\left(n+\frac{i^2+1}{n}\right)\left(n+\frac{i^2}{n}\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^2}\to 0, n\to\infty,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

来看一个川大半期考试据说只有十几个人做出来的题.

例题 8.38 设 $f\in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{-x}^{x}|t|f(|x-t|)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}.$$

证明 由条件极限知显然 f 在 0 的邻域非 0. 当 $x>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\int_{-x}^{x}|t|f(|x-t|)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}|t|f(|x-t|)\,dt+\int_{-x}^{0}|t|f(|x-t|)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}tf(|x-t|)\,dt-\int_{-x}^{0}tf(|x-t|)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}tf(x-t)\,dt-\int_{-x}^{0}tf(x-t)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}(x-t)f(t)\,dt-\int_{x}^{2x}(x-t)f(t)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^{x}f(t)\,dt-\int_0^{x}tf(t)\,dt-x\int_{x}^{2x}f(t)\,dt+\int_{x}^{2x}tf(t)\,dt}{\int_0^{\tan x}tf(t)\,dt}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}f(t)\,dt-\int_{x}^{2x}f(t)\,dt+2xf(2x)}{\left(1+\tan^2x\right)\tan xf(\tan x)}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}f(t)\,dt-\int_{x}^{2x}f(t)\,dt+2xf(2x)}{x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}f(t)\,dt-\int_{x}^{2x}f(t)\,dt+2xf(2x)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}f(t)\,dt-\int_{x}^{2x}f(t)\,dt}{x^2}+2\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2f(2x)+f(x)}{2x}+4\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{2x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)-2f(2x)}{2x}+4=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{2x}+4=3,
\end{aligned}$$

当 $x<0$ 可同样的计算.

来看一个不太常规的考研真题的例子.

例题 8.39 设 $x_{n+1}=x_n-x_n^3, x_1\in\mathbb{R}$, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛性.

证明 当 $|x_1|>\sqrt{2}$, 有

$$|x_{n+1}|=|x_n|\cdot\left|x_n^2-1\right|\geqslant|x_n|\geqslant\sqrt{2}.$$

因为 $|x_n|$ 满足的递推不动点只有 $0,\sqrt{2}$ 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

[11] 注意定积分定义是任意划分任意取点, 而不是只是等分取端点.

当 $|x_1|\leqslant\sqrt{2}$, 若 $|x_n|\leqslant\sqrt{2}$, 则

$$|x_{n+1}|=|x_n|\cdot\left|x_n^2-1\right|\leqslant|x_n|\leqslant\sqrt{2},$$

于是由数学归纳法我们知道 $|x_n|\leqslant\sqrt{2}$ 恒成立. 因此

$$|x_{n+1}|=|x_n|\cdot\left|x_n^2-1\right|\leqslant|x_n|\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|x_n|=A\geqslant0.$$

现在

$$A=A\left(A^2-1\right)\Rightarrow A=0,\sqrt{2}.$$

若 $A=\sqrt{2}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=\sqrt{2}\Rightarrow|x_n|=\sqrt{2}\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}x_n\text{发散}, & |x_1|\geqslant\sqrt{2}\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0, & |x_1|<\sqrt{2}\end{cases}.$$

我们来处理一个压缩常数为 1 的例子.

例题 8.40 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in[a,b]. \tag{8.34}$$

设递推

$$x_1\in[a,b],x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+f\left(x_n\right)\right),n=1,2,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证明 因为 $a\leqslant f\leqslant b$, 归纳容易证明 $a\leqslant x_n\leqslant b,\forall n\in\mathbb{N}$. 令 $g(x)=\frac{x+f(x)}{2}$, 利用(8.34), 我们知道

$$g(y)-g(x)=\frac{y-x-[f(x)-f(y)]}{2}\geqslant0,\forall y\geqslant x,$$

即 g 递增.

由结论8.4.1, 我们知道 x_n 一定单调, 因此单调有界定理表明 x_n 收敛.

例题 8.41 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}.$$

笔记 长得神似定积分定义且很容易观察到 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}$ 和 $\frac{i}{n^2}$ 没有区别, 懒得去寻求放缩方法, 直接采用强行替换的方法, 即做差 $\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}$ 强估证明不影响极限.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|&=\left|\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}-\frac{i}{n^2}\right)\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^2\left(n^2+\frac{1}{i}\right)}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\frac{4n^2-1}{n^4}\\&=\frac{2n\left(4n^2-1\right)}{n^4},\end{aligned}$$

于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}\sin^4\frac{\pi i}{n}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2n\left(4n^2-1\right)}{n^4}=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i+4}{n^2+\frac{1}{i}}\sin^4\frac{\pi i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n}\sin^4\frac{\pi i}{n}=\int_0^2x\sin^4\pi x\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

一定要注意洛必达法则是 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{*}{\infty}$ 型, 即分子不要求 ∞.

例题 8.42 洛必达法则的应用 若 $f\in D^1[0,+\infty)$.

1. 设
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=s\in\mathbb{R},$$
证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=s$.
2. 设
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]=s\in\mathbb{R},$$
证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{s}{2}$.

证明

1. 由洛必达法则, 我们有
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f(x)+f'(x)\right]e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=s.$$
2. 为了得到构造函数考虑
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{g(x)}{g'(x)}f'(x)\right].\tag{8.35}$$
然后取 $\frac{g(x)}{g'(x)}=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x}$, 于是
$$\left[\ln g(x)\right]'=\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\to 2,$$
因为导数有正的增长率, 所以由结论12.1, 我们有
$$\lim_{x\to+\infty}\ln g(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty,$$
这就保证(8.35)的的洛必达法则合理.
现在
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{g'(x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{g(x)}\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{g(x)}{g'(x)}f'(x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{2x}\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]=\frac{s}{2}.\end{aligned}$$

来看一个国际大学生数学竞赛试题

例题 8.43 设可微函数 $a,b,f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足
$$f(x)\geqslant 0,g(x)>0,g'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to+\infty}a(x)=A>0,\lim_{x\to+\infty}b(x)=B>0,\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty,\tag{8.36}$$
以及
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}+a(x)\frac{f(x)}{g(x)}=b(x).\tag{8.37}$$
证明
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{A+1}.$$

证明 若 $g\in C^1(\mathbb{R})$ 由洛必达法则和等式(8.37), 我们有
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy}{A\ln g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{a(x)g'(x)}{g(x)}}{\frac{Ag'(x)}{g(x)}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}e^{\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy}=+\infty,$$

以及

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy}}{g(x)e^{\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+\frac{a(x)g'(x)f(x)}{g(x)}}{g'(x)+g(x)\frac{a(x)g'(x)}{g(x)}}\frac{e^{\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy}}{e^{\int_0^x\frac{a(y)g'(y)}{g(y)}dy}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f'(x)}{g'(x)}+a(x)\frac{f(x)}{g(x)}}{1+a(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{1+a(x)}=\frac{B}{1+A}.$$

♠ 当 $g\notin C^1(\mathbb{R})$, 我们不能对 g' 做积分, 此时需要替代技术. 由上面的推导启发来解决.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)=A$ 知对任何 $\epsilon\in(0,A)$, 当 x 充分大必有

$$A-\epsilon\leqslant a(x)\leqslant A+\epsilon,$$

即

$$a(x)-\epsilon\leqslant A\leqslant a(x)+\epsilon.$$

我们运用上下极限版的洛必达法则13.11就有

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)g^A(x)}{g^{A+1}(x)}\geqslant\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f'(x)g^A(x)+Af(x)g'(x)g^{A-1}(x)}{(A+1)g'(x)g^A(x)}$$
$$=\frac{1}{A+1}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{Af(x)}{g(x)}\right]\geqslant\frac{1}{A+1}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{[a(x)-\epsilon]f(x)}{g(x)}\right]$$
$$=\frac{1}{A+1}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\left[b(x)-\epsilon\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{1}{A+1}\left(B-\epsilon\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

类似的有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{1}{A+1}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{Af(x)}{g(x)}\right]\leqslant\frac{1}{A+1}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{[a(x)+\epsilon]f(x)}{g(x)}\right]$$
$$=\frac{1}{A+1}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[b(x)+\epsilon\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{1}{A+1}\left[B+\epsilon\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\right],$$

于是由上式得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{B}{(A+1)\left(1-\frac{\epsilon}{A+1}\right)},$$

由 ϵ 任意性得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{B}{A+1},\ \underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant\frac{B}{A+1}.$$

现在就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{A+1}.$$

我们来看一个一般化的总结

例题 8.44 二阶洛必达法则的应用 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微且 $a,b\in\mathbb{R}$, 满足 $a>0,a^2-4b<0$ 或者 $a>0,b>0,a^2-4b>0$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}(f''(x)+af'(x)+bf(x))=\ell\in\mathbb{R}.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\ell}{b},\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0.\tag{8.38}$$

证明 显然 $b\neq0$, 因此用 $f(x)-\frac{\ell}{b}$ 代替 $f(x)$ 可知不妨设 $\ell=0$, 设 x_1,x_2 是 $x^2+ax+b=0$ 的两个根.

- ♠ 如果 $a>0,a^2-4b<0$, 此时 x_1,x_2 是两个共轭的实部为负的复数, 此时对下述实部虚部分别用洛必达法

则, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x_1x}\left(f'-x_2f\right)}{e^{-\Re x_1\cdot x}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x_1x}\left(f''-x_2f'\right)-e^{-x_1x}\left(x_1f'-x_1x_2f\right)}{-\Re x_1\cdot e^{-\Re x_1\cdot x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x_1x}\left(f''+af'+bf\right)}{-\Re x_1\cdot e^{-\Re x_1\cdot x}}\\&=\frac{1}{-\Re x_1}\lim_{x\to+\infty}e^{-(x_1-\Re x_1)x}\left(f''+af'+bf\right)=0,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-(x_1-\Re x_1)x}\left(f'-x_2f\right)=0,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'-x_2f\right)=0,$$

这给出了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'-\Re x_2\cdot f\right)=0,\lim_{x\to+\infty}\Im x_2\cdot f=0,$$

因此我们证明了(8.38).

- 如果 $a>0,b>0,a^2-4b>0$, 此时 x_1,x_2 是两个不相等的负的实数. 那么我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x_1x}\left(f'-x_2f\right)}{e^{-x_1\cdot x}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x_1x}\left(f''-x_2f'\right)+e^{-x_1x}\left(-x_1f'+x_1x_2f\right)}{\left(-x_1\right)\cdot e^{-x_1\cdot x}}\\&=\frac{1}{-x_1}\lim_{x\to+\infty}\left(f''+af'+bf\right)=0,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'-x_2f\right)=0,$$

类似的有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f'-x_1f\right)=0.$$

于是两式相减即可得(8.38), 我们完成了证明.

例题 8.45 设 $a_n\in(0,1)$ 是 $x^n+x=1$ 的根, 证明

$$a_n=1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

笔记 作为一个普通题目, 他是 n 可以解出来的类型, 从而可以根据题目已知条件直接按初等极限计算.

证明 由于 $t_n=1-a_n,n=\frac{\ln t_n}{\ln(1-t_n)}$, 我们知道若 $\lim\limits_{k\to\infty}t_{n_k}=a\in[0,1]$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln t_{n_k}}{\ln\left(1-t_{n_k}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ 知 $a=0$, 因此由命题7.4的 (a), 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$. 进一步有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{nt_n}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{t_n\ln t_n}{\ln(1-t_n)}}{\ln\frac{\ln t_n}{\ln(1-t_n)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{\ln(1-x)\ln\frac{\ln x}{\ln(1-x)}}\\&=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln(-\ln x)-\ln(-\ln(1-x))}=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}-\frac{\ln(-\ln(1-x))}{\ln x}}=1.\end{aligned}$$

于是 $t_n=\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, 这就完成了证明.

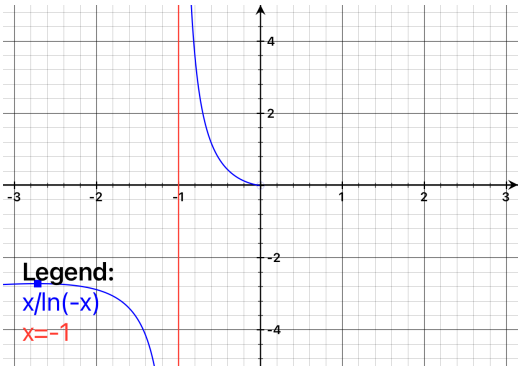
练习 8.4 设 $x^{2n+1}+e^x=0$ 的根记为 x_n, 计算

$$\lim_{n\to\infty}x_n,\lim_{n\to\infty}n\left(1+x_n\right).$$

注

证明 注意到 $0^{2n+1}+e^0>0,(-1)^{2n+1}+e^{-1}<0$ 且 $x^{2n+1}+e^x$ 递增, 所以对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n\in(-1,0)$,

图 8.5.1: $\frac{x}{\ln(-x)}$ 图像



使得

$$x_n^{2n+1}+e^{x_n}=0\Rightarrow\frac{x_n}{\ln\left(-x_n\right)}=2n+1\to\infty.$$

设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[-1,0]$, 显然[12] $\frac{c}{\ln(-c)}=+\infty\Rightarrow c=-1$, 于是由命题7.4知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$. 注意到本题属于 n 可以解出来的类型, 因此

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1+x_n\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2n+1\right)\left(1+x_n\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\left(1+x_n\right)}{\ln\left(-x_n\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x\left(1+x\right)}{\ln\left(-x\right)}=\frac{1}{2}.$$

笔记 [♠] 有些同学想要自己探索 $x_n,n\to\infty$ 的阶, 实际上可以让 $y_n=1+x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0,y_n>0$, 于是我们有

$$\frac{1}{2n+1}=\frac{\ln\left(1-y_n\right)}{y_n-1}=y_n+\frac{3}{2}y_n^2+O\left(y_n^3\right).$$

运用拉格朗日反演9.14, 我们知道

$$\begin{aligned}y_n&=\frac{1}{1!}\lim_{y\to0}\frac{y}{\frac{\ln(1-y)}{y-1}}\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2!}\lim_{y\to0}\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{\frac{\ln(1-y)}{y-1}}\right)^2\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=\frac{1}{2n+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\end{aligned}$$

即

$$x_n=-1+\frac{1}{2n+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

例题 8.46 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}},x\to1^-.$$

证明 **Method 1**

我们来看标准方法, 即和式和积分同阶, 注意到

$$\int_0^{\infty}x^{y^2}dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{y^2}dy\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}x^{y^2}dy=\int_1^{\infty}x^{y^2}dy.$$

再注意到

$$\int_0^{\infty}x^{y^2}dy=\int_0^{\infty}e^{-y^2\ln\frac{1}{x}}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}},x\to1^-.$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}},x\to1^-.\tag{8.39}$$

[12] 见函数图像8.5.1.

Method 2 ♠

我们知道 **Method 1** 得到的(8.39)比较粗糙, 因此我们运用欧拉麦克劳林公式9.9来得到更好的估计. 运用命题9.3, 我们有

$$\sum_{n=0}^{m} x^{n^2} = \int_0^m x^{y^2} dy + \frac{1+x^{m^2}}{2} + 2\int_0^m yb_1(y) \ln x \cdot x^{y^2} dy. \tag{8.40}$$

在(8.40)中令 $m \to \infty$ 并注意到 $x < 1$, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = \int_0^\infty x^{y^2} dy + \frac{1}{2} + 2\ln x \int_0^\infty yb_1(y) x^{y^2} dy. \tag{8.41}$$

又

$$\left| 2\ln x \int_0^\infty yb_1(y) x^{y^2} dy \right| \overset{|b_1(y)| \leqslant \frac{1}{2}}{\leqslant} \ln \frac{1}{x} \int_0^\infty yx^{y^2} dy = \frac{1}{2}.$$

于是我们得到了更强的估计

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = \int_0^\infty x^{y^2} dy + O(1).$$

例题 8.47 设 $f(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{y} dy$, 求 $f'(0)$.

笔记 想法即分部积分改善阶, 通过分部积分提高分母的次方从而增加收敛速度方便估计.

证明 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{1}{y^2} \sin y dy}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\int_x^\infty \frac{\sin y}{y^2} dy = -\lim_{x\to+\infty} x\int_x^\infty \frac{1}{y^2} d\cos y \\ &= -\lim_{x\to+\infty} x\left[-\frac{\cos x}{x^2} + \int_x^\infty \frac{2\cos y}{y^3} dy \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\cos x}{x} - x\int_x^\infty \frac{2\cos y}{y^3} dy \right].\end{aligned}$$

注意到

$$\left| \int_x^\infty \frac{2\cos y}{y^3} dy \right| \leqslant 2\int_x^\infty \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{x^2},$$

于是我们证明了

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} = 0.$$

因为被积函数奇函数, 对称的可以得到

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^x \sin \frac{1}{y} dy}{x} = 0,$$

这恰好蕴含 $f'(0) = 0$.

例题 8.48 要求不高的只掌握 $k = 0$ 的情形. 对 $k \in \mathbb{N}_0$, 若

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1} \sin\left(2\pi \left(en! - \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{n^i} \right) \right)$$

存在, 计算极限值和 $a_0, a_1, \cdots, a_k$.

笔记 本题阶蕴含在 e 的 Taylor 展开之中, 注意到要用 Taylor 中值定理而非 Peano 余项, 原因可见第十一届清疏大学生数学竞赛课程视频.

证明 当 $k = 0$: 若 $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi(en! - a_0))$ 存在, 则必然有

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi(en! - a_0)) = 0.$$

注意到

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + O\left(\frac{1}{(n+2)!} \right). \tag{8.42}$$

于是

$$\sin\left(2\pi en!-2\pi a_0\right)=\sin\left(2\pi\sum_{k=0}^{n+1}\frac{n!}{k!}+O\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)-2\pi a_0\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-2\pi a_0\right),$$

因此必须有 $2a_0\in\mathbb{Z}$. 当 $2a_0\in\mathbb{Z}$, 我们继续用(8.42), 于是就有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi\left(en!-a_0\right)\right)&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi en!\right)\\&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+O\left(\frac{1}{(n+2)!}\right)\right)n!\right)\\&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi\left(\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2\pi(-1)^{2a_0},\end{aligned}$$

注意这里 $(-1)^{2a_0}\neq\left[(-1)^2\right]^{a_0}$.

♠ 当 $k>0$, 显然若极限存在, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi\left(en!-a_0\right)\right)=0$, 故 $2a_0\in\mathbb{Z}$.

待定 $m=n+p\in\mathbb{N}$ 且 $p>0$, 我们有

$$e=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(m+1)!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}+O\left(\frac{1}{(m+1)!}\right).\tag{8.43}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(en!-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!}+O\left(\frac{n!}{(m+1)!}\right)-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{n!}{k!}+O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right),\end{aligned}$$

我们为了上式极限可以存在, p 越大越好, 我们可取 $p=k+1$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(en!-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{k=n+1}^{n+k+1}\frac{n!}{k!}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{t=1}^{k+1}\frac{n!}{(n+t)!}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{t=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{t}\frac{1}{n+j}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right).\end{aligned}$$

本质上就是探索 $\sum\limits_{t=1}^{k+1}\prod\limits_{j=1}^{t}\frac{1}{n+j}-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}$ 的阶, 我们采用经典的留数法. 待定 $A_{t\ell}\in\mathbb{R}$, 使得

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+t)}=\sum_{\ell=1}^{t}\frac{A_{t\ell}}{n+\ell}.$$

则

$$\frac{1}{(n+1)\cdots(n+\ell-1)(n+\ell+1)\cdots(n+t)}=A_{t\ell}+(n+\ell)\left(\frac{A_{t1}}{n+1}+\cdots\frac{A_{t\ell-1}}{n+\ell-1}+\frac{A_{t\ell+1}}{n+\ell+1}+\cdots+\frac{A_{tt}}{n+t}\right),$$

两边让 $n\to-\ell$ 就有

$$A_{t\ell}=(-1)^{\ell-1}\prod_{i=1}^{\ell-1}\frac{1}{i}\prod_{j=1}^{t-\ell}\frac{1}{j},$$

这里乘积上标小于下标时视为 1. 现在

$$\sum_{t=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{t}\frac{1}{n+j}=\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}\frac{A_{t\ell}}{n+\ell}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}\frac{A_{t\ell}}{1+\frac{\ell}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}\sum_{i=0}^{\infty}A_{t\ell}\left(-\frac{\ell}{n}\right)^{i}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{i}}{n^{i}}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}\frac{A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{i}}{n^{i+1}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sum\limits_{t=1}^{k+1}\sum\limits_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{i}}{n^{i+1}}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\sum\limits_{t=1}^{k+1}\sum\limits_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{i}}{n^{i+1}}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right),$$

于是取

$$a_i=\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{i-1},i=1,2,\cdots,k,$$

就有

$$\begin{aligned}&(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{t=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{t}\frac{1}{n+j}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)-\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{k+1}\sum\limits_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{k}}{n^{k+1}}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}2\pi\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{k+1}\sum\limits_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{k}}{n^{k+1}}+O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)\right)\\&=(-1)^{2a_0}2\pi\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{k},\end{aligned}$$

这就给出了

$$\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(en!-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)=(-1)^{2a_0}2\pi\sum_{t=1}^{k+1}\sum_{\ell=1}^{t}A_{t\ell}\left(-\ell\right)^{k}.$$

例题 8.49 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[n!e-[n!e]\right]$.

证明 由 Taylor 中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$n!e=m+\frac{1}{n+1}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)(n+1)},m\in\mathbb{Z}.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}n\left[n!e-[n!e]\right]=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^{\theta}}{(n+2)(n+1)}\right)=1.$$

✍ **练习 8.5♠** 设 $x_{n+1}=x_n+\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x_n},x_1>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{\ln n}{\ln\pi}\right)=\frac{\ln\ln\pi}{\ln\pi}.$$

证明 显然 x_n 严格递增到 ∞ 且 $x+\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x}$ 在 $\left(0,\frac{\ln(\ln\pi)}{\ln\pi}\right)$ 递减, 在 $\left(\frac{\ln(\ln\pi)}{\ln\pi},+\infty\right)$ 递增, 故不妨设 $x_1>\frac{\ln(\ln\pi)}{\ln\pi}$.

显然 $x_1\geqslant\frac{\ln 1}{\ln\pi}$,

$$x_2\geqslant\frac{\ln\ln\pi}{\ln\pi}+\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\ln\ln\pi}{\ln\pi}}\geqslant\frac{\ln 2}{\ln\pi}.$$

若 $x_n \geqslant \frac{\ln n}{\ln \pi} > \frac{\ln \ln \pi}{\ln \pi}, n \geqslant 2$, 则我们有

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{\ln \pi} &\geqslant \frac{\ln n}{\ln \pi} + \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\ln n}{\ln \pi}} - \frac{\ln(n+1)}{\ln \pi} \\ &= e^{\frac{\ln n}{\ln \pi} \cdot \ln \frac{1}{\pi}} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln \pi} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln \pi} \geqslant 0. \end{aligned}$$

因此我们证明了

$$x_n \geqslant \frac{\ln n}{\ln \pi}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

现在令 $x_n = \frac{y_n}{\ln \pi}, n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$y_{n+1} = y_n + \ln \pi \cdot e^{-y_n}, n \in \mathbb{N},$$

于是

$$e^{y_{n+1}} = e^{y_n} e^{\ln \pi \cdot e^{-y_n}} = e^{y_n}\left(1 + \ln \pi \cdot e^{-y_n} + O\left(e^{-2y_n}\right)\right) = e^{y_n} + \ln \pi + O\left(e^{-y_n}\right).$$

注意到

$$e^{-y_n} = e^{-\ln \pi \cdot x_n} \leqslant e^{-\ln n} = \frac{1}{n},$$

我们有

$$e^{y_{m+1}} - e^{y_1} = \sum_{n=1}^{m}\left(e^{y_{n+1}} - e^{y_n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{m}\left(\ln \pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln \pi \cdot m + O(\ln m),$$

因此

$$e^{y_m} = \ln \pi \cdot m + O(\ln m),$$

这给出了

$$y_m = \ln(\ln \pi \cdot m + O(\ln m)) = \ln(\ln \pi \cdot m) + \ln\left(1 + O\left(\frac{\ln m}{m}\right)\right) = \ln m + \ln \ln \pi + o(1),$$

于是我们证明了

$$x_m = \frac{\ln m}{\ln \pi} + \frac{\ln \ln \pi}{\ln \pi} + o(1),$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{\ln n}{\ln \pi}\right) = \frac{\ln \ln \pi}{\ln \pi}.$$

✍ **练习 8.6** 设 $x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{\pi}\right)^{x_n}, x_1 > 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[n]{\ln^2 n}} \int_0^{\pi} \frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi} dx.$$

证明 首先由训练8.5, 我们知道 $x_n \sim \frac{\ln n}{\ln \pi}$, 于是我们计算

$$\frac{1}{\ln \pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{\ln^2 n}} \int_0^{\pi} \frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi} dx.$$

事实上由

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi} dx &\geqslant \int_0^{\pi} \frac{\ln n}{x^2+n\pi} dx = \frac{\ln n \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{\pi}{n}}\right)}{\sqrt{n\pi}} \\ \int_0^{\pi} \frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi} dx &\leqslant \int_0^{\pi} \frac{\ln(\pi+n)}{x^2+n\pi} dx = \frac{\ln(\pi+n) \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{\pi}{n}}\right)}{\sqrt{n\pi}}, \end{aligned}$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \int_0^{\pi} \frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{\ln n \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{\pi}{n}}\right)}{\sqrt{n\pi}} = 1.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt[n]{\ln^2 n}}\int_0^{\pi}\frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi}dx&=\frac{1}{\ln\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{n\cdot\sqrt[n]{\ln^2 n}}\cdot\frac{n}{\ln n}\int_0^{\pi}\frac{\ln(x+n)}{x^2+n\pi}dx\right)\\&=\frac{1}{\ln\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n\cdot\sqrt[n]{\ln^2 n}}\\&=\frac{1}{\ln\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{2-\frac{2}{n}}n}{n}\\&=0.\end{aligned}$$

✍ **练习 8.7** 计算

$$\lim_{x\to+\infty}x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}.$$

证明 对每个 $k\in\mathbb{N}_0$, 注意到

$$\sqrt{x^2+k}=x\sqrt{1+\frac{k}{x^2}}=x\left(1+\frac{k}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\frac{k}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

和

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k=(1-1)^n=0.$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}=\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\left(x^2+\frac{k}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kC_n^k.$$

又对二项式定理等式两边求导得

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}kC_n^k(-1)^k=\begin{cases}0, & n\geqslant 2\\ -\frac{1}{2}, & n=1\end{cases}.$$

✍ **练习 8.8** 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}.$$

笔记 证明的想法即运用组合数的单峰性导致的阶集中在 k 靠近边界的时候.

证明 当 n 充分大, 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}\right)=2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}.$$

又

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{C_n^k}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{C_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{\frac{n(n-1)}{2}}=0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=2.$$

练习 8.9 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(nC_n^k\right)^{-1}.$$

证明 注意到当 $k<n$ 时, 我们有[13]

$$(n+1-k)\left(nC_n^k\right)^{-1}=n^{-2}\frac{k!}{(n-1)\cdots(n-k+2)}\leqslant 2n^{-2}.$$

因此

$$0<\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(nC_n^k\right)^{-1}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}2n^{-2}+\frac{1}{n}\to 0,$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(nC_n^k\right)^{-1}=0.$$

练习 8.10 计算

$$\lim_{x\to 0^+}f_n(x),$$

这里

$$f_1(x)=x, f_n(x)=x^{f_{n-1}(x)}, n=1,2,\cdots.$$

证明 注意到

$$\lim_{x\to 0^+}f_1(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0,\ \lim_{x\to 0^+}f_2(x)=\lim_{x\to 0^+}x^x=1,$$

因此我们归纳证明

$$\lim_{x\to 0^+}f_n(x)=\begin{cases}1, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}. \tag{8.44}$$

假设已经证明了(8.44)中 n 为偶数的情况, 那么

$$\lim_{x\to 0^+}f_{n+1}(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{f_n(x)}=0^1=0,$$

就能说明(8.44)中 n 为奇数的情况.

下面归纳证明 n 为偶数时的(8.44). 事实上, 若(8.44)对偶数 n 成立, 则存在 $\delta>0$ 使得 $f_n(x)>\frac{2}{3}, \forall x\in(0,\delta)$, 那么对 $x\in(0,\delta)$ 我们有不等式

$$1\geqslant f_{n+2}(x)=x^{x^{f_n(x)}}>x^{x^{\frac{2}{3}}}=e^{x^{\frac{2}{3}}\ln x}.$$

于是由夹逼准则就有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f_{n+2}(x)=1$, 这就证明了(8.44).

练习 8.11 设

$$0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ 来说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在是错误的.

证明 证明的想法是把 $\frac{1}{n^2}$ 拆成两部分配给 x_n. 我们待定

$$0\leqslant x_{n+1}+b_{n+1}\leqslant x_n+b_n,$$

[13]注意到分子分母一一匹配的放大为 1, 然后分子仅仅保留一个 2.

则 $b_n - b_{n+1} = \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \cdots$, 于是

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

因此这样的 b_n 是存在的. 现在 $x_n + b_n$ 递减有下界, 于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + b_n)$$

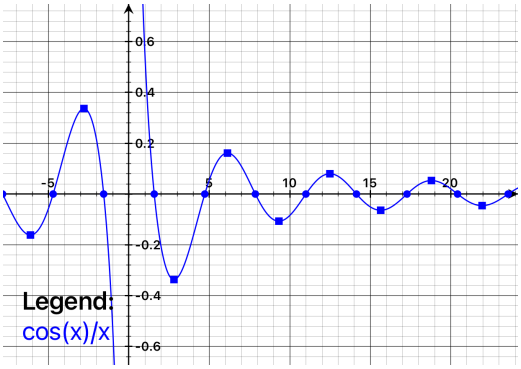
存在.

练习 8.12

1. 记 $f_n(x) = C_n^1 \cos x - C_n^2 \cos^2 x + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \cos^n x$. 设 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), n = 1, 2, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n, n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 1$ 在 $[0, 1]$ 的根为 x_n. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

注

图 8.5.2: $\frac{\ln(2x-1)}{\ln x}$ 函数图像



笔记 本题注意体会利用命题7.4巧算极限的想法.

证明

1. 由二项式定理我们有

$$1 - (1 - \cos x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} \cos^k x.$$

现在我们有 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$ 以及

$$f_n(0) = 1 - (1-1)^n = 1 > \frac{1}{2}, f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (1-0)^n = 0 < \frac{1}{2}.$$

显然 f_n 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 递减, 故存在唯一的 $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), n = 1, 2, \cdots$ 使得 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$. 现在

$$(1 - \cos x_n)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos x_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = 0,$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$ 属于 x_n 可以解出来类型.

2. 当 $n \geqslant 2$, 注意到 f_n 在 $[0, 1]$ 严格递增且

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1, f_n(1) = n,$$

我们知道 f_n 在 $[0, 1]$ 存在唯一实根 $x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

由等比数列求和得

$$1 = f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n}, n \geqslant 2,$$

即

$$n + 1 = \frac{\ln(2x_n - 1)}{\ln x_n}.$$

设

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in [\frac{1}{2}, 1],$$

我们有

$$+\infty = \lim_{k\to\infty} (n_k + 1) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(2x_{n_k} - 1)}{\ln x_{n_k}},$$

此时只能有[14]

$$\frac{\ln(2a-1)}{\ln a} = +\infty \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

由命题7.4知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

例题 8.50 设 $a > 0, f_n(x) = x^n + nx - a, n \in \mathbb{N}$. 证明 f_n 在 $(0, +\infty)$ 有唯一零点 x_n 并计算

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^n.$$

证明 首先 f_n 严格递增且

$$f_n(0) = -a < 0, f_n\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)^n + a - a > 0.$$

于是存在唯一的 $x_n \in \left(0, \frac{a}{n}\right)$ 使得 $f_n(x_n) = 0$.

现在

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n^n \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n = 0, \lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} (a - x_n^n) = a,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+x_n)} = \lim_{n\to\infty} e^{nx_n} = e^a.$$

练习 8.13

1. 计算

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right\}.$$

2. ♠ 证明

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left|\left(\sqrt{2} + 3\right)^n\right|\right| \neq 0,$$

这里 $||x||$ 表示 x 到距离 x 最近整数距离.

证明

1. 设 $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}, A_n, B_n \in \mathbb{Z}$, 则 $\left(2 - \sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left\{\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right\} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \left(A_n + B_n\sqrt{3} - \left[A_n + B_n\sqrt{3}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(B_n\sqrt{3} - \left[B_n\sqrt{3}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \left(A_n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n - \left[A_n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(-\left(2 - \sqrt{3}\right)^n - \left[-\left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right]\right) = 1.\end{aligned}$$

可以看到, 在本题中 $2 + \sqrt{3}$ 的对偶 $2 - \sqrt{3} \in (0, 1)$ 起到了关键作用. 证明的想法也即考虑对偶式来解决问题.

2. 和上一题不一致, 因为 $\sqrt{2} + 3$ 的对偶为 $\sqrt{2} - 3$, 其绝对值比 1 大, 需要新的技术手法.

事实上, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\left|\left(\sqrt{2} + 3\right)^n\right|\right| = 0$, 设 $a = \sqrt{2} + 3$, 则 $a^2 - 6a + 7 = 0$. 再设 $a^n = s_n + r_n$, s_n 是到 a^n 最近的整数, 于是

$$a^{n+2} - 6a^{n+1} + 7a^n = 0 \Rightarrow s_{n+2} - 6s_{n+1} + 7s_n = -\left(r_{n+2} - 6r_{n+1} + 7r_n\right).$$

[14] 见函数图像8.5.2.

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(s_{n+2}-6s_{n+1}+7s_n\right)=-\lim_{n\to\infty}\left(r_{n+2}-6r_{n+1}+7r_n\right)=0,$$

且 $s_{n+2}-6s_{n+1}+7s_n\in\mathbb{Z}$, 于是存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时有 $s_{n+2}-6s_{n+1}+7s_n=0$. 于是我们知道

$$s_n=c_1a^n+c_2\left(3-\sqrt{2}\right)^n,n\geqslant N.$$

又

$$0=\lim_{n\to\infty}|r_n|=\lim_{n\to\infty}|s_n-a^n|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(c_1-1\right)a^n+c_2\left(3-\sqrt{2}\right)^n\right|,$$

于是 $c_1=1,c_2=0$, 因此 $s_n=a^n\Rightarrow\frac{s_{n+1}}{s_n}=a\in\mathbb{Q}$, 这是一个矛盾! 我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|\left(\sqrt{2}+3\right)^n\right|\right|\neq 0.$$

来看一类由不等式确定的递推数列极限.

例题 8.51

1. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<2,n=1,2,\cdots. \tag{8.45}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.

2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$a_{n+1}+\frac{4}{a_n}<4,n=1,2,\cdots. \tag{8.46}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求极限.

3. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$x_n+\frac{4}{x_{n+1}^2}<3,n=1,2,\cdots. \tag{8.47}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.

4. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1,n=1,2,\cdots. \tag{8.48}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限.

证明

笔记 此类问题其实就是把 x_{n+1},x_n 部分全部换成 x, 数字部分往往是 x 部分的一个最值, 从把这个数字用不等式放缩为数列来得到估计.

1. 由均值不等式得

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2,\forall x\in(0,+\infty),$$

于是我们有

$$x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<2\leqslant x_n+\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_n<x_{n+1}<2,n=1,2,\cdots.$$

由单调有界必收敛得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in[0,+\infty)$ 存在, 因此在(8.45)两边取极限得

$$2\leqslant x+\frac{1}{x}\leqslant 2\Rightarrow x=1,$$

即我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

2. 注意到

$$x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4,\forall x\in(0,+\infty).$$

类似 1 的推导我们得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

3. 注意到

$$x+\frac{4}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3,\forall x\in(0,+\infty),$$

类似 1 的推导我们得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

4. 设

$$g(x)\triangleq\ln x+\frac{1}{x},x>0,$$

我们有

$$g'(x)=\frac{x-1}{x^2}\Rightarrow g(x)\geqslant g(1)=1,\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1,\forall x\in(0,+\infty).$$

类似 1 的推导我们得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例题 8.52 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right)$$

存在.

笔记 研究和式的收敛性, 可以考虑研究差分的阶, 使得容易估计.

证明 设

$$a_n\triangleq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln\ln n,n=2,3,\cdots.$$

我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\ln(n+1)+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\ln n-\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)+\ln\ln n\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right|<\infty,\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{n\ln n}\right]=-\frac{1}{2\ln 2},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_2\right]$$

存在.

练习 8.14 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right).$$

证明 **Method 1** 积累想法: 联想和式由积分而来. 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left(x^{3k-3}+x^{3k-2}-2x^{3k-1}\right)dx$$

$$\overset{\text{暂时无脑交换积分级数顺序}}{=}\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{3k-3}+x^{3k-2}-2x^{3k-1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1+x-2x^2}{1-x^3}\right)dx$$

$$=\ln\left(1+x+x^2\right)|_0^1=\ln 3.$$

Method 2 积累想法, 用估阶的手法计算. 事实上运用例题8.12我们知道

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o\left(1\right). \tag{8.49}$$

于是在(8.49)中用 $3n$ 替换 n 知

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k}\right)=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}=\ln\left(3n\right)+\gamma+o\left(1\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k-2}\right)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln\left(3n\right)+\gamma+o\left(1\right).$$

现在再代入(8.49)知

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k-2}\right)=\ln\left(3n\right)+\gamma+o\left(1\right)-\frac{1}{3}\left(\ln n+\gamma+o\left(1\right)\right). \tag{8.50}$$

于是运用(8.49)和(8.50)就有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k-2}-\frac{2}{3k}\right)=\ln\left(3n\right)+\gamma+o\left(1\right)-\frac{1}{3}\left(\ln n+\gamma+o\left(1\right)\right)-\frac{2}{3}\left(\ln n+\gamma+o\left(1\right)\right)$$

$$=\ln 3+o\left(1\right).$$

上题的 **Method 1** 没那么简单!, 我们来看

例题 8.53 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{2k+2}\right).$$

注 我们来看

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{2k+2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{4k}+x^{4k+2}-x^{2k+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1-x^4}+\frac{x^2}{1-x^4}-\frac{x}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

但实际上这并非正确答案!, 因为这里交换积分级数顺序没有理由!, 因此例题8.14的 **Method 1** 只能视为一种猜答案的方法.

证明 由例题8.6得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o\left(1\right),n\to\infty,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{2k+2}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+4}+\frac{1}{4k+3}\right)\\
&\quad-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+4}+\frac{1}{2k+2}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\\
&=\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\\
&=\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\\
&=\ln(4n+4)+\gamma-\frac{1}{2}\ln(2n+2)-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\ln(n+1)-\frac{1}{2}\gamma+o(1)\\
&=\ln\frac{4n+4}{\sqrt{(2n+2)(n+1)}}+o(1)\to\ln\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\ln 2, n\to\infty.
\end{aligned}$$

来看一个高中数学的不等式, 它可以直接使用

引理 8.2 (幂平均不等式)

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 则下述函数是连续递增函数

$$f(r)=\begin{cases}\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, & r\neq 0\\ \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, & r=0\end{cases}. \tag{8.51}$$

其中若 $r_1\neq r_2$, 则 $f(r_1)=f(r_2)$ 的充要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. ♡

注 f 连续性来自8.35, 仅仅需要在 0 处洛必达即可. 递增性读者可以直接使用而不管证明.

来看一些多元递推.

✍ **练习 8.15** 设 $a_1>b_1>c_1>0$, 定义

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}, b_{n+1}=\sqrt[3]{a_nb_nc_n}, \frac{1}{c_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}\right), n=1,2,\cdots.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n\text{存在}.$$

笔记 你当然可以不用区间套而用单调有界来叙述.

证明 由幂平均不等式8.2我们知 $a_n\geqslant b_n\geqslant c_n, n=1,2,\cdots$ 以及

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}\leqslant\frac{a_n+a_n+a_n}{3}=a_n.$$
$$c_{n+1}=\frac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{c_n}+\frac{1}{c_n}+\frac{1}{c_n}}=c_n.$$

现在

$$a_{n+1}-c_{n+1}\leqslant\frac{a_n+b_n+c_n}{3}-c_n=\frac{a_n-c_n+b_n-c_n}{3}\leqslant\frac{2}{3}(a_n-c_n),$$

所以

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}|a_n-c_n|\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|a_1-c_1|=0.$$

注意到 $[c_n,a_n],n=1,2,\cdots$ 构成区间套, 由区间套定理1.我们知道

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n,$$

夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

练习 8.16 设 $a_1,b_1,c_1>0,a_1+b_1+c_1=1$ 定义

$$a_{n+1}=a_n^2+2b_nc_n,b_{n+1}=b_n^2+2a_nc_n,c_{n+1}=c_n^2+2a_nb_n,$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}b_n,\lim_{n\to\infty}c_n.$$

证明 显然 $a_n,b_n,c_n>0$ 且

$$(a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1})=(a_n+b_n+c_n)^2,n=1,2,\cdots,$$

于是我们有

$$a_n+b_n+c_n\equiv1,n=1,2,\cdots. \tag{8.52}$$

考虑

$$T_n=\max\{a_n,b_n,c_n\},S_n=\min\{a_n,b_n,c_n\},n=1,2,\cdots,$$

则对 n 时设 $a_n\geqslant b_n\geqslant c_n$, 那么有

$$\begin{aligned}a_{n+1}=a_n^2+2b_nc_n\leqslant a_n^2+a_nc_n+b_na_n\overset{(8.52)}{=}a_n,\\ b_{n+1}=b_n^2+2a_nc_n\leqslant a_nb_n+a_nc_n+a_na_n\overset{(8.52)}{=}a_n,\\ c_{n+1}=c_n^2+2a_nb_n\leqslant c_na_n+a_nb_n+a_na_n\overset{(8.52)}{=}a_n.\end{aligned}$$

于是我们就有 $T_{n+1}\leqslant T_n$.

还有

$$\begin{aligned}a_{n+1}=a_n^2+2b_nc_n\geqslant a_nc_n+b_nc_n+c_nc_n\overset{(8.52)}{=}c_n,\\ b_{n+1}=b_n^2+2a_nc_n\geqslant b_nc_n+a_nc_n+c_nc_n\overset{(8.52)}{=}c_n,\\ c_{n+1}=c_n^2+2a_nb_n\geqslant c_n^2+a_nc_n+b_nc_n\overset{(8.52)}{=}c_n.\end{aligned}$$

于是我们就有 $S_{n+1}\geqslant S_n$.

还有

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-c_{n+1}|=\left|a_n^2+2b_nc_n-c_n^2-2a_nb_n\right|=|a_n-c_n|\cdot|a_n-b_n-(b_n-c_n)|\leqslant|a_n-c_n|^2,\\ |b_{n+1}-c_{n+1}|=|a_n-b_n-(a_n-c_n)|\cdot|a_n-b_n+a_n-c_n|=(a_n-c_n)^2-(a_n-b_n)^2\leqslant(a_n-c_n)^2,\\ |a_{n+1}-b_{n+1}|=|a_n-c_n-(b_n-c_n)|\cdot|a_n-c_n+b_n-c_n|=(a_n-c_n)^2-(b_n-c_n)^2\leqslant(a_n-c_n)^2.\end{aligned}$$

于是我们就有

$$T_{n+1}-S_{n+1}\leqslant(T_n-S_n)^2\leqslant\cdots\leqslant(T_1-S_1)^{2^n}\leqslant T_1^{2^n},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n-S_n)=0$, 现在 $[S_n,T_n],n=1,2,\cdots$ 构成长度趋于 0 的区间套, 因此由区间套定理1.和夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}S_n=x,$$

现在由等式(8.52)知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

练习 8.17

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,dx, b_{n+1} = \int_0^1 \operatorname{mid}(x, a_n, c_n)\,dx, c_{n+1} = \int_0^1 \max(x, a_n, b_n)\,dx, n = 1, 2, \cdots,$$

这里 mid 表示取中间值.

证明 注意到

$$a_{n+1} \leqslant \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, c_{n+1} \geqslant \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

于是不妨设

$$a_n \leqslant \frac{1}{2}, c_n \geqslant \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8.53}$$

读者可以直接分类讨论并注意到

$$\max(x, a_n, b_n) \geqslant \operatorname{mid}(x, a_n, c_n) \geqslant \min(x, b_n, c_n),$$

于是 $c_{n+1} \geqslant b_{n+1} \geqslant a_{n+1}$, 因此不妨设

$$c_n \geqslant b_n \geqslant a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

显然归纳可得 $a_n, b_n, c_n, n = 3, 4, \cdots$ 非负, 不妨设 $a_n, b_n, c_n, n = 1, 2, \cdots$ 非负.

于是就有

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \int_0^1 \operatorname{mid}(x, a_n, c_n)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \max(x, a_n)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \min(x, c_n)\,dx \\ &= \int_0^{a_n} a_n dx + \int_{a_n}^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{c_n} x dx + \int_{c_n}^1 c_n dx \\ &= \frac{1}{2}a_n^2 + c_n - \frac{1}{2}c_n^2 \leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \textstyle\int_0^1 \min(x, b_n)\,dx = \int_0^{b_n} x dx + \int_{b_n}^1 b_n dx = b_n - \frac{1}{2}b_n^2. \\ c_{n+1} &= \textstyle\int_0^1 \max(x, b_n)\,dx = \int_0^{b_n} b_n dx + \int_{b_n}^1 x dx = \frac{1}{2}b_n^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{8.54}$$

现在

$$b_{n+2} = \frac{\left(\frac{2b_n - b_n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+b_n^2}{2}\right)^2 + b_n^2 + 1}{2} = \frac{3 + 6b_n^2 - 4b_n^3}{8}.$$

不妨设 $b_1 \in [0, \frac{5}{8}]$. 注意到上述递推函数在 $[0, \frac{5}{8}]$ 单调递增, 所以由结论8.4.1我们知道 b_n 的奇偶子列都趋于唯一不动点 $\frac{1}{2}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{8}, \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{8}, \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

练习 8.18 设 $f_n(x) = e^{nx} + x - e^n, n = 1, 2, \cdots$, 证明对任何 $n \in \mathbb{N}$, 都存在唯一的 $r_n \in (0, 1)$ 使得 $f_n(r_n) = 0$, 并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 存在和计算 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

证明 事实上因为 f_n 是 $[0, 1]$ 上的严格递增函数和 $f_n(0) = 1 - e^n < 0, f_n(1) = 1 > 0$, 由零点定理我们知道存在唯一的 $r_n \in (0, 1)$ 使得 $f_n(r_n) = 0$. 显然这是 n 可以解出来的类型, 所以

$$e^{nr_n} + r_n - e^n = 0 \Rightarrow r_n = \frac{\ln(e^n - r_n)}{n} = 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{r_n}{e^n}\right)}{n}.$$

又因为 $r_n \in (0, 1)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{r_n}{e^n}\right)}{n} = 0$, 从而直接导出 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$.

(♠) 我们同样希望给出 r_n 渐近估计, 我们运用标准的迭代法: 注意到

$$\ln(1-x)=O(x)\Rightarrow r_n=1+\frac{\ln\left(1-\frac{r_n}{e^n}\right)}{n}=1+O\left(\frac{e^{-n}}{n}\right),$$

于是由 $\ln(1-x)=-x+O\left(x^2\right)$ 得

$$r_n=1+\frac{\ln\left(1-\frac{r_n}{e^n}\right)}{n}=1-\frac{r_n}{ne^n}+O\left(\frac{e^{-2n}}{n}\right)=1-\frac{1}{ne^n}+O\left(\frac{e^{-2n}}{n}\right).$$

运用 $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)$, 我们有

$$r_n=1+\frac{\ln\left(1-\frac{r_n}{e^n}\right)}{n}=1-\frac{r_n}{ne^n}-\frac{r_n^2}{2ne^{2n}}+O\left(\frac{e^{-3n}}{n}\right)=1-\frac{1-\frac{1}{ne^n}+O\left(\frac{e^{-2n}}{n}\right)}{ne^n}-\frac{\left(1-\frac{1}{ne^n}+O\left(\frac{e^{-2n}}{n}\right)\right)^2}{2ne^{2n}}+O\left(\frac{e^{-3n}}{n}\right)$$

$$\overset{\text{因为余项展开出来会被吸收进末尾的余项}}{=}1-\frac{1-\frac{1}{ne^n}}{ne^n}-\frac{\left(1-\frac{1}{ne^n}\right)^2}{2ne^{2n}}+O\left(\frac{e^{-3n}}{n}\right)=1-\frac{1}{ne^n}-\frac{1}{2ne^{2n}}+\frac{1}{n^2e^{2n}}+O\left(\frac{e^{-3n}}{n}\right).$$

于是我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[e^n\left[ne^n(1-r_n)-1\right]-\frac{1}{2}\right]=-1.$$

例题 8.54 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}.$$

证明 由 Stolz 定理9.1就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^k(n+1-k)}\overset{\text{倒序求和}}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{2^{n-k+1}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2n}{n+1}-1}=1.$$

例题 8.55 设 x_n 是 $x=\tan x$ 从小到大排列的全部正根, 设

$$\lim_{n\to\infty}n\left(x_n-An-B\right)=C,$$

求 A,B,C.

证明 事实上在有意义的时候必然有

$$(\tan x-x)'=\tan^2x\geqslant 0.$$

结合

$$\lim_{x\to(n\pi)^+}(\tan x-x)=-n\pi,\quad\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-}(\tan x-x)=+\infty,$$

我们知道

$$x_n\in\left(n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right),n=1,2,\cdots.$$

注意到

$$x_n=\tan x_n=\tan\left(x_n-n\pi\right)\Rightarrow x_n=\arctan x_n+n\pi,n=1,2,\cdots.$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan x_n=\frac{\pi}{2}$, 于是

$$x_n=\arctan x_n+n\pi=\frac{\pi}{2}+o(1)+n\pi.$$

进一步

$$\begin{aligned} x_n &= \arctan x_n + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\ &= \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\left(\frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} + n\pi - \arctan\left(\frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x_n - \frac{\pi}{2} - n\pi\right) = -\frac{1}{\pi},$$

即 $A=\pi, B=\frac{\pi}{2}, C=-\frac{1}{\pi}$.

我们来看函数 Stolz 题型. 注意函数 Stolz 题型可以直接运用定理13.10, 但实际考试中可能针对具体题目进行书写过程反而会更容易些. 我们仅举一例该如何书写, 其余情况直接引用定理.

例题 8.56 解决如下问题

1. 设 $\alpha > -1$, 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t| dt}{x^{\alpha+1}}$.
2. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt}{\ln x}$.
3. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])\,dt$, 这里 $[\cdot]$ 表示向下取整函数.

注注意第一题如果直接洛必达得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|\sin x|}{\alpha+1} \text{不存在},$$

因此无法运用洛必达, 但也无法判断原本的极限, 而需要其他方法确定其极限.

证明

1. **Method 1** 我们展示函数 Stolz 在具体题目中的细节书写. 对每个 $x \geqslant 0$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$(n-1)\pi \leqslant x < n\pi. \tag{8.55}$$

于是由(8.55)夹逼得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t|\,dt}{(n-1)^{\alpha+1}\pi^{\alpha+1}} \geqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{(n-1)\pi} t^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}\pi^{\alpha+1}}.$$

注意 $n^{\alpha+1} \sim (n-1)^{\alpha+1}, n\to\infty$, 故只需计算

$$\frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}}.$$

注意到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n\pi} t^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_0^{\pi} [t+(k-1)\pi]^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}} \\ \geqslant\ & \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_0^{\pi} [(k-1)\pi]^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}} \\ \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\ & \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_0^{\pi} [t+(k-1)\pi]^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{\pi^{\alpha+1}} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_0^{\pi} [\pi+(k-1)\pi]^\alpha |\sin t|\,dt}{n^{\alpha+1}} \\ =\ & \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

由夹逼定理就知道

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^\alpha |\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}} = \frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

Method 2 我们直接运用定理13.10, 注意到有限区间不影响极限值, 因此广义积分没什么好担心的, 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}t^\alpha|\sin t|\,dt}{(x+\pi)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}=\frac{1}{\pi(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^\pi(x+\pi)^\alpha|\sin t|\,dt}{x^\alpha},$$

这里最后一个等号替换分母可以通过拉格朗日中值定理得到[15]. 显然类似 **Method 1** 我们可以通过把 x 放大放小为积分上下限来夹逼证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha|\sin t|\,dt}{x^{\alpha+1}}=\frac{2}{\pi(\alpha+1)}.$$

2. 类似的, 运用函数 Stolz13.10得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln(x+\pi)-\ln x}=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt\right).$$

由

$$x\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{x+\pi}dt\leqslant x\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt\leqslant x\int_x^{x+\pi}\frac{|\sin t|}{x}dt.$$

于是由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}dt}{\ln x}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$$

3. 由函数 Stolz 定理13.10得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t-[t])\,dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1-x}\int_x^{x+1}(t-[t])\,dt=\int_0^1(t-[t])\,dt=\frac{1}{2}.$$

例题 8.57 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_{3n}$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 收敛.

笔记 证明的想法就是考虑公共子列.

证明 注意到[16]

$$\lim_{n\to\infty}a_{6n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{3n},$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}a_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{3n}.$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{3n},$$

于是由命题7.4的第二个结论我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 收敛.

例题 8.58 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(x)>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}=\max_{[0,1]}f.$$

证明 回忆 Stolz 定理9.1的推论8.1.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{\int_0^1 f^{n+2}(x)\,dx\int_0^1 f^n(x)\,dx}{(\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx)^2}\\&=\frac{\int_0^1|f^{\frac{n+2}{2}}(x)|^2dx\int_0^1|f^{\frac{n}{2}}(x)|^2dx}{(\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx)^2}\\&\geqslant\frac{\left(\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx\right)^2}{(\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx)^2}=1,\end{aligned}$$

[15] 即拉格朗日中值定理保持阶不变的思想.

[16] 注意从除以 2, 3 的余数的角度去分类考虑, 即考虑 $6n+k, k=0,1,2,3,4,5$, 然后看看它除以 2 的余数和除以 3 的余数是多少, 例如第一个式子考虑 $6n$, 因为它除以 2 和 3 的余数都是 0, 从而说明 a_{2n} 和 a_{3n} 极限相同.

即 a_n 递增, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在或为 ∞, 因此我们可以逆用 Stolz 定理9.1, 即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)\,dx}.$$

设[17]

$$\operatorname{argmax} f(x) = x_0, x_0 \in [0,1],$$

不失一般性, 我们设 $x_0 \in (0,1)$, 因此

$$\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n}} f(\theta_n) = \sqrt[n]{\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f^n(x)\,dx} \leqslant \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)\,dx} \leqslant \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x_0)\,dx} = f(x_0).$$

于是我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx} = \max_{[0,1]} f.$$

来看一些稍微复杂的例子, 其来自美国数学月刊.

例题 8.59 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} a_n$.

证明 因为 n 充分大时 $a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > \frac{1}{2}$, 所以不妨设 $a_n > 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 矛盾! 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

注意到我们有替换

$$a_n \sim \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}. \tag{8.56}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n a_n^3} \overset{(8.56)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3}{n} \overset{Stolz9.1}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^3 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 \left[\left(\frac{a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} + 1\right)^3 - 1\right]$$

$$\overset{\text{等价替换}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^3 \frac{3a_{n+1}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} = 3\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 a_{n+1}^2 = 3\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - a_{n+1}^2\right)^2 a_{n+1}^2$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^2 a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}^4 \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + a_{n+1}^6\right] = 3.$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

我们来看一个类似的训练

✍ **练习 8.19** 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n}, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$.

证明 显然 a_n 正值递增, 于是 $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 1 \Rightarrow S_n \geqslant n$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 故

$$a_n \leqslant A \Rightarrow S_n \leqslant An \Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_n + \frac{1}{An} \Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_1 + \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty,$$

这里最后一个趋于见定义8.6. 这是一个矛盾! 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

[17] argmax 表示达到最大值的点.

由 Stolz9.1, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right). \tag{8.57}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_nS_n}\right)=1,$$

故

$$\begin{aligned}(8.57)&=\lim_{n\to\infty}n\frac{a_{n+1}+a_n}{S_n}=2\lim_{n\to\infty}n\frac{a_n}{S_n}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(n+1-\frac{na_n}{a_{n+1}}\right)=2+2\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right).\end{aligned} \tag{8.58}$$

利用

$$n\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=n\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{a_nS_n}}\right)=\frac{n}{1+a_nS_n}\overset{S_n\geqslant n}{\leqslant}\frac{n}{1+na_n}=\frac{1}{\frac{1}{n}+a_n}\to 0,$$

我们有

$$(8.58)=2+2\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=2.$$

因此我们得到了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}=\sqrt{2}$.

例题 8.60 设 $k\in\mathbb{N}$ 且整数 $0\leqslant p\leqslant k-1$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{kn}^p+C_{kn}^{p+k}+\cdots+C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}}.$$

证明 我们记 k 次单位根全体为 $w_j=e^{\frac{2\pi ij}{k}},j=0,1,2,\cdots,k-1$. 由二项式定理, 对每个 j, 我们有

$$(1+w_j)^{kn}=\sum_{i=0}^{kn}C_{kn}^iw_j^i=1+\sum_{t=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{t+sk}w_j^{t+sk}=1+\sum_{t=0}^{k-1}w_j^t\sum_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{t+sk}.$$

于是我们写成

$$\begin{pmatrix}w_0^0&w_0^1&w_0^2&\cdots&w_0^{k-1}\\w_1^0&w_1^1&w_1^2&\cdots&w_1^{k-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\w_{k-1}^0&w_{k-1}^1&w_{k-1}^2&\cdots&w_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{sk}\\\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{1+sk}\\\vdots\\\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{k-1+sk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+w_0)^{kn}-1\\(1+w_1)^{kn}-1\\\vdots\\(1+w_{k-1})^{kn}-1\end{pmatrix},$$

即

$$\frac{1}{2^{kn}}\begin{pmatrix}\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{sk}\\\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{1+sk}\\\vdots\\\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{k-1+sk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_0^0&w_0^1&w_0^2&\cdots&w_0^{k-1}\\w_1^0&w_1^1&w_1^2&\cdots&w_1^{k-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\w_{k-1}^0&w_{k-1}^1&w_{k-1}^2&\cdots&w_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{(1+w_0)^{kn}-1}{2^{kn}}\\\frac{(1+w_1)^{kn}-1}{2^{kn}}\\\vdots\\\frac{(1+w_{k-1})^{kn}-1}{2^{kn}}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{kn}}\begin{pmatrix}\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{sk}\\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{1+sk}\\ \vdots\\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{k-1+sk}\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}w_0^0 & w_0^1 & w_0^2 & \cdots & w_0^{k-1}\\ w_1^0 & w_1^1 & w_1^2 & \cdots & w_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ w_{k-1}^0 & w_{k-1}^1 & w_{k-1}^2 & \cdots & w_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{(1+w_0)^{kn}-1}{2^{kn}}\\ \frac{(1+w_1)^{kn}-1}{2^{kn}}\\ \vdots\\ \frac{(1+w_{k-1})^{kn}-1}{2^{kn}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}w_0^0 & w_0^1 & w_0^2 & \cdots & w_0^{k-1}\\ w_1^0 & w_1^1 & w_1^2 & \cdots & w_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ w_{k-1}^0 & w_{k-1}^1 & w_{k-1}^2 & \cdots & w_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{pmatrix}w_0^0 & w_0^1 & w_0^2 & \cdots & w_0^{k-1}\\ w_1^0 & w_1^1 & w_1^2 & \cdots & w_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ w_{k-1}^0 & w_{k-1}^1 & w_{k-1}^2 & \cdots & w_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{k}\\ \frac{1}{k}\\ \vdots\\ \frac{1}{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}w_0^j\\ \frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}w_1^j\\ \vdots\\ \frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}w_{k-1}^j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k}\cdot k\\ \frac{1}{k}\cdot\frac{1-w_1^k}{1-w_1}\\ \vdots\\ \frac{1}{k}\cdot\frac{1-w_{k-1}^k}{1-w_{k-1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{kn}}\begin{pmatrix}\sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{sk}\\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{1+sk}\\ \vdots\\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}C_{kn}^{k-1+sk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k}\\ \frac{1}{k}\\ \vdots\\ \frac{1}{k}\end{pmatrix}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{C_{kn}^{p}+C_{kn}^{p+k}+\cdots+C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}}=\frac{1}{k},\forall 0\leqslant p\leqslant k-1.$$

例题 8.61 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+y_n,n\in\mathbb{N},\sum_{n=1}^{\infty}y_n<\infty. \tag{8.59}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

笔记

1. 利用

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}y_n<\infty$$

来说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在是错的, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 不一定是正项级数.

2. 虽然不能直接有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调, 但是我们期待对某个 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有 $\{x_n+c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调. 采用强行裂项的想法, 我们由(8.59)待定

$$0\leqslant x_{n+1}+c_{n+1}\leqslant x_n+y_n+c_{n+1}=x_n+c_n,$$

即需要

$$c_n-c_{n+1}=y_n,n\in\mathbb{N}.$$

因此需要

$$c_n=\sum_{j=n}^{\infty}y_j,n\in\mathbb{N}.$$

证明 由(8.59)知

$$0\leqslant x_{n+1}+\sum_{j=n+1}^{\infty}y_j\leqslant x_n+\sum_{j=n}^{\infty}y_j,\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是 $\left\{x_n+\sum\limits_{j=n}^{\infty}y_j\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减有下界, 因此极限存在. 故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(x_n+\sum_{j=n}^{\infty}y_j\right)\text{存在}.$$

来看牛顿迭代法时遇到的一个递推极限:

例题 8.62 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)<0<f(1)$ 且 $f'(x)>0,f''(x)>0$. 考虑递推数列

$$x_1=1,x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},n\in\mathbb{N}.$$

解答下述问题:

1. 证明: 存在唯一的 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$;
3. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}.$$

证明

1. 因为 $f(0)<0<f(1)$ 且 f 严格递增, 我们知道存在唯一的 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$.
2. 注意到

$$\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=1-\frac{(f'(x))^2-f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}.$$

由第 1 问知 $g(x)\triangleq x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 在 $[0,\xi)$ 严格递减, 在 $(\xi,1]$ 严格递增. 于是 $g(x)\geqslant\xi$. 不妨设 $x_n\geqslant\xi$, 否则用 x_2 为初值即可. 现在 $x_2=g(x_1)\leqslant x_1$. 假设 $x_{n+1}\leqslant x_n$, 则有

$$x_{n+2}=g(x_{n+1})\leqslant g(x_n)=x_{n+1},$$

因此数学归纳法表明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递减, 因此由单调有界必收敛知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\in[0,1].$$

现在

$$a=a-\frac{f(a)}{f'(a)}\Rightarrow a=\xi.$$

3. 由洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)-\xi}{(x_n-\xi)^2}=\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-\xi}{(x-\xi)^2}=\lim_{x\to\xi}\frac{g'(x)}{2(x-\xi)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2(x-\xi)}\\&=\frac{f''(\xi)}{2(f'(\xi))^2}\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{x-\xi}=\frac{f''(\xi)}{2(f'(\xi))^2}\cdot f'(\xi)=\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.\end{aligned}$$

例题 8.63 设 $a_n\geqslant0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=a\geqslant0,\tag{8.60}$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+...+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+...+a_{n-1}a_n}{n^2}=\frac{a^2}{2}. \tag{8.61}$$

证明 注意到

$$2\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}a_ka_j+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2.$$

然后利用(8.60)得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2=a^2.$$

利用数学类极限习题44.有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2=0,$$

从而(8.61)成立.

例题 8.64 存在实数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=+\infty,\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty, \tag{8.62}$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\neq+\infty$.

笔记 本题给了 Stolz 定理9.1的一个分母不严格递增时的反例.

证明 我们设

$$a_n=n+(-1)^n,b_n=n+(-1)^n\sqrt{n},n=2,3,\cdots.$$

显然(8.62)成立, 但是

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^n}\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{1+2(-1)^{n+1}}=+\infty,$$

这就完成了证明.

例题 8.65 设

$$a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,n=0,1,\cdots.$$

证明:a_n 递减以及

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2},n=2,3,\cdots. \tag{8.63}$$

再计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

证明 因为

$$x^n\leqslant x^{n-1},\forall x\in[0,1],n\in\mathbb{N},$$

我们知道 a_n 递减.

又对 $n\geqslant2$, 成立

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1x^{n-2}\left(x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+a_{n-2}\\&=-\frac{1}{n-1}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x^{n-1}+a_{n-2}=\frac{1}{n-1}\int_0^1x^{n-1}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+a_{n-2}\\&=-\frac{3}{n-1}\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+a_{n-2}=-\frac{3}{n-1}a_n+a_{n-2},\end{aligned}$$

即(8.63)成立.

由(8.63)得

$$\frac{n-1}{n+2}\leqslant\frac{n-1}{n+2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant1.$$

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

♠ 第二问我们希望计算更强的结果, 直接得出 a_n 的阶, 其方法是 Laplace 方法9.3. 但读者可以无需专门阅读9.3.

换元得

$$a_n=\int_0^1 e^{n\ln x}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-ny}\sqrt{1-e^{-2y}}e^{-y}\mathrm{d}y.$$

一方面

$$\int_0^\infty e^{-ny}\sqrt{1-e^{-2y}}e^{-y}\mathrm{d}y\leqslant\int_0^\infty e^{-ny}\sqrt{2y}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-y}\sqrt{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

另外一方面注意到

$$\lim_{y\to0+}\frac{\sqrt{1-e^{-2y}}e^{-y}}{\sqrt{y}}=\sqrt{2},$$

于是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\sqrt{1-e^{-2y}}e^{-y}\geqslant\left(\sqrt{2}-\epsilon\right)\sqrt{y},\forall y\in[0,\delta].$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ny}\sqrt{1-e^{-2y}}e^{-y}\mathrm{d}y&\geqslant\left(\sqrt{2}-\epsilon\right)\int_0^\delta e^{-ny}\sqrt{y}\mathrm{d}y\\&\geqslant\frac{\sqrt{2}-\epsilon}{n\sqrt{n}}\int_0^{n\delta}e^{-y}\sqrt{y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由夹逼准则我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-ny}\sqrt{1-e^{-2y}}e^{-y}\mathrm{d}y\right)\geqslant\left(\sqrt{2}-\epsilon\right)\int_0^\infty e^{-ny}\sqrt{y}\mathrm{d}y=\left(\sqrt{2}-\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

于是由 ϵ 任意性我们证明了 $a_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}},n\to\infty$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{(n-1)\sqrt{n-1}}}=1.$$

例题 8.66

1. 设 $x_0=\ln a,a>0$,
$$x_n=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a-x_k\right),n\in\mathbb{N}.$$
计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
2. 设
$$x_0=\frac{\pi}{2},x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin x_k,n=1,2,\cdots,$$
计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\sqrt{\ln n}\right)$.
3. 设
$$x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],x_{n+1}=\sqrt[3]{\frac{\sin^3x_1+\cdots+\sin^3x_n}{n}},n=1,2,\cdots.$$
计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2\ln n\right).$$

证明

1. 注意到
$$x_{n+1}=x_n+\ln\left(a-x_n\right),n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$[x+\ln(a-x)]'=1-\frac{1}{a-x}=\frac{a-1-x}{a-x}\Rightarrow x+\ln(a-x)\leqslant a-1.$$

现在当 $n\geqslant 2$, 我们知道 $x_n\leqslant a-1$, 从而

$$a>x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)\geqslant x_n+\ln(1)=x_n,\forall n\geqslant 2,$$

即由单调有界定理知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c, c=c+\ln(a-c)\Rightarrow c=a-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=a-1.$$

2. 类似 1 的操作可得

$$x_{n+1}=\frac{nx_n+\sin x_n}{n+1}, n=1,2,\cdots.$$

利用 $\sin x\leqslant x$ 可得

$$x_{n+1}=\frac{nx_n+\sin x_n}{n+1}\leqslant\frac{nx_n+x_n}{n+1}=x_n, n=1,2,\cdots.$$

归纳可得 x_n 是正数列. 现在[18]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(x_n\sqrt{\ln n}\right)&=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{x_n^2}}}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}}\\&=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)^2}x_n^2\left(nx_n+\sin x_n\right)^2}{x_n^2-\left(\frac{nx_n+\sin x_n}{n+1}\right)^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)^2}\left(nx_n+\sin x_n\right)^2}{1-\left(\frac{n+\frac{\sin x_n}{x_n}}{n+1}\right)^2}}\\&=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_n^2}{n(n+1)^2}\left(n+\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^2}{\left(1-\frac{n+\frac{\sin x_n}{x_n}}{n+1}\right)\left(1+\frac{n+\frac{\sin x_n}{x_n}}{n+1}\right)}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_n^2}{n(n+1)^2}n^2}{2\left(1-\frac{n+\frac{\sin x_n}{x_n}}{n+1}\right)}}\\&=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_n^2}{n}}{2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{\sin x_n}{x_n}}{n+1}\right)}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2\frac{n}{n+1}\left(\frac{x_n-\sin x_n}{x_n}\right)}}\\&=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{x_n-\sin x_n}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{6}=\sqrt{3},\end{aligned}$$

这里最后一个等号可以如下得到: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n\sqrt{\ln n}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{x_n-\sin x_n}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{a^3}{a-\sin a}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

这就是一个矛盾!, 所以

$$\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{x_n-\sin x_n}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}}=\sqrt{6}.$$

3. 显然 x_n 为正. 注意到

$$nx_{n+1}^3-(n-1)x_n^3=\sin^3 x_n, n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$x_{n+1}^3=\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n^3+\frac{\sin^3 x_n}{n}, n=1,2,\cdots.$$

[18] 虽然我们暂时不知道是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 但是如果把 $\ln n$ 放分母, 分子就不需要其他信息也能使用 Stolz 定理9.1, 因此不用提前判断极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

由 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n^3+\frac{\sin^3 x_n}{n}\right)^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x_n^2}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\left\{\left[1-\frac{1}{n}+\frac{\sin^3 x_n}{nx_n^3}\right]^{-\frac{2}{3}}-1\right\}=-\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{\sin^3 x_n}{nx_n^3}\right)\\&=-\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(-1+\frac{\sin^3 x_n}{x_n^3}\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3-\sin^3 x_n}{x_n^5}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{x^3-\sin^3 x}{x^5}\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)\left(x^2+\sin^2 x+x\sin x\right)}{x^5}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3\cdot3x^2}{x^5}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

这里最后一个等号理由同 2 问. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2\ln n\right)=3$.

例题 8.67 设 f 在 $[a,b]$ 二次可微且

$$f(a)f(b)<0,f(a)+f'(a)(b-a)\geqslant0,f'(x)>0,f''(x)>0,\forall x\in[a,b].$$

考虑

$$x_1\in[a,b],x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},n=1,2,\cdots.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求值.

证明 因为 $f'>0$, 我们有 $f(a)<0,f(b)>0$ 且存在唯一的 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$. 于是

$$\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=1-\frac{(f')^2-f''f}{(f')^2}=\frac{f''f}{(f')^2}\begin{cases}>0, & x\in(c,b]\\<0, & x\in[a,c)\end{cases}.$$

考虑 $g(x)\triangleq x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, 我们结合 $f(a)+f'(a)(b-a)\geqslant0$ 有

$$g(x)\geqslant g(c)=c>a,g(x)\leqslant\max\{g(a),g(b)\}\leqslant b.$$

这就证明了 $x_n,n=1,2,\cdots$ 良定义且 $x_n\geqslant c,n=2,3,\cdots$.

现在

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\leqslant x_n,\forall n=2,3,\cdots,$$

于是我们由单调有界必收敛得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x\in[a,b].$$

因此

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x=c,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

第 8 章 练习

1. (1.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2^x}+\cdots+\frac{1}{n+n^x}\right),x\in(-\infty,+\infty).$$

2. (2.) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{t}dt$ 等价量.
3. (3.) 设正值函数 $f\in C[0,1]$, 证明

(1): 对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n\in[0,1]$, 使得

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx=\frac{1}{n}\int_0^1f(x)dx,\forall k=1,2,\cdots,n.$$

(2): 设 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 如 (1) 所定义, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(x_k\right)=\frac{\int_0^1 f^2\left(x\right)dx}{\int_0^1 f\left(x\right)dx}.$$

4. (4.) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[e^{(x-t)^2}-1\right]\sin t dt}{x\tan^3 x}$.
5. (5.) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^{\frac{1}{2}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n}.$$

6. (6.) 设非负数列 x_n 满足

$$2x_{n+2}\leqslant x_{n+1}+x_n,\forall n\in\mathbb{N},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.
7. (7.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n-1}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{1}}}}.$$

8. (8.,$*$) 设 $x_1\in(0,3),x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}6^n\left(x_n-3\right)$.
9. (9.) $a_{n+1}=a_n+\ln a_n,a_1=2$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-n\ln n}{n\ln\ln n}$.
10. (10.) 设非负函数 $f,g\in C\left[a,b\right]$ 且 $g(x)>0,\forall x\in[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n\left(x\right)g\left(x\right)dx}=\max_{x\in[a,b]}f\left(x\right).\tag{8.64}$$

且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b f^{n+1}\left(x\right)g\left(x\right)dx}{\int_a^b f^n\left(x\right)g\left(x\right)dx}=\max_{x\in[a,b]}f\left(x\right).\tag{8.65}$$

♠ 此外如果 g 非负且只可能有孤立的零点[19], 则 (8.64), (8.65)也成立.
11. (11.) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\sqrt{k}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\sqrt{k}}{n}=0.$$

12. (12.) 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\underbrace{\tan\tan\cdots\tan}_{\text{复合}n\text{次}}x-\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{\text{复合}n\text{次}}x}{x^3}.$$

13. (13.) 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\underbrace{\arcsin\arcsin\cdots\arcsin}_{n\text{次复合}}x}{x^3}.$$

14. (14.) 设

$$\theta_1=1,\theta_2=2,\theta_{n+1}=\theta_n-\frac{1}{n+1}\theta_{n-1},n=2,3,\cdots,$$

证明

$$0<n\theta_n-3<\frac{6}{n-1},\forall n\geqslant 3.$$

15. (15.) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=A.$$

[19] 即 g 零点处存在一个去心邻域没有零点.

16. (16.) 计算

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{m+2}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|i-j|^m.$$

17. (17.♠) 证明如下定理

定理 8.2 (Stolz 递推极限一般化总结)

(a). 设

$$x\to 0^+, f(x)=x-Ax^{1+a}+Bx^{1+2a}+O\left(x^{1+3a}\right), A, a>0.$$

若正数列 a_n 递减到 0 且由 $a_{n+1}=f(a_n)$ 确定, 那么我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{a}}}{\ln n}\left[a_n-\frac{1}{n^{\frac{1}{a}}(aA)^{\frac{1}{a}}}\right]=\frac{1}{(aA)^{2+\frac{1}{a}}}\left(B-\frac{(a+1)A}{2}\right).$$

(b). 设

$$x\to 0^+, f(x)=x-Ax^{1+a}+Bx^{1+2a}\ln x+O\left(x^{1+3a}\right), A, a>0.$$

若正数列 a_n 递减到 0 且由 $a_{n+1}=f(a_n)$ 确定, 那么我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left[n^{\frac{1}{a}}(aA)^{\frac{1}{a}}a_n-1+\frac{B}{2a^3A^2}\frac{\ln^2 n}{n}\right]=-\frac{2B\ln(aA)+a(1+a)A^2}{2a^3A^2}.$$

♡

18. (18.) 当 $n\to\infty$ 时, $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$ 的等价无穷大是什么?

19. (19.) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}},$$

这里

$$\gamma\triangleq\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

是欧拉常数[20].

20. (20.) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

21. (21.) 设 a_n, b_n 是正实数列, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=a>0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{nb_n}=b>0,$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}-\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}\right).$$

22. (22.) 计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+53^{\frac{1}{x}}+49069^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^{3x}.$$

23. (23.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}dx.$$

[20] 见8.6.

24. (24.) 设 $f\in C[0,a],a\in(0,\pi)$, 计算
$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{\sin^2 x}dx.$$
25. (25.) 计算
$$\lim_{x\to0}\frac{[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\tan x}}+e(x-1)}{x^2}.$$
26. (26.) 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{k^2}}{k},y_n=\int_0^n e^{x^2}dx,n\in\mathbb{N}$, 计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}.$$
27. (27.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\frac{x^{n-2}}{x^{2n}+x^n+1}dx.$$
28. (28.) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty),\alpha,\beta\in(0,1),\alpha+\beta\leqslant1$. 若有
$$a_{n+2}\leqslant\alpha a_{n+1}+\beta a_n,n\in\mathbb{N},\tag{8.66}$$
证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.
29. (29.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}n^3\left[\tan\left(\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}dx\right)+\sin\left(\int_0^{\pi}\sqrt[n]{\sin x}dx\right)\right].$$
30. (30.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^n\frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{n-x}}dx.$$
31. (31.) 设 α 不为非正整数. 计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}.$$
32. (32.) 设 $b>1$, 计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}.$$
33. (33.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}dy\right).$$
34. (34.♠) 证明
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\int_x^{x+1}\frac{\sqrt{1+4t^2}}{\ln(1+e^t)}dt-2\right]=\frac{1}{4}.$$
35. (35.) 设 $x_1=A\in(a,b)$ 且
$$2x_{n+1}=(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x_n+b-2a}-\sqrt{b-x_n}\right)+2a,n\geqslant1,$$
计算 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n(x_n-a)$.
36. (36.) 设
$$\lim_{x\to0}\left|\frac{\ln(1+\sin^2x)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}\right|=\frac{q}{p},$$
这里 p,q 是互素正整数, 求 $p+q$.
37. (37.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\ln k\cdot\ln(n-k)}$.
38. (38.) 计算
$$\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

39. (39.) 设 $a_1>0, a_{n+1}=a_n e^{\frac{1}{a_n}}, n=1,2,\cdots$, 求 $a_n, n\to\infty$ 的阶.
40. (40.) 设 $x^n+2023x=2023$ 的正根为 x_n, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}x_n^n$.
41. (41.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
42. (42.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n^2+n}\right).$$
43. (43.) 设 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n.$$
44. (44.) 设 $a_n\geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 证明
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1(1+a_nx^n)^n\,\mathrm{d}x}=a+1.$$
45. (45.) 设 $a_n\geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 证明
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\frac{a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}}{n}\right)^n\mathrm{d}x}=a+1.$$
46. (46.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdots\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}$.
47. (47.) 设 $m\in\mathbb{N}$, 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 的渐近估计.
48. (48.) 设 $x_1=-2, y_1=1, z_1=-1$, 且对 $n\geqslant 1$ 有
$$\begin{cases}x_{n+1}=3x_n-6y_n-z_n\\ y_{n+1}=-x_n+2y_n+z_n\\ z_{n+1}=x_n+3y_n-z_n\end{cases}.$$
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n+z_n}{3^n+5^n}$.
49. (49.) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(\theta-t)\,\mathrm{d}t$ 存在, 求 θ.
50. (50.) 设
$$a_0=0, a_{n+1}=a_n+\cos a_n+\pi, n=0,1,2,\cdots,$$
计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.
51. (51.) 设
$$A_n(x)=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}}, x>0,$$
其中有 n 个根号, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n(2)}{A_n(3)}$.
52. (52.) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k=x.$$
53. (53.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\sin^2 k}{n^2+k\sin^2 k}$.
54. (54.) 计算极限
$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}.$$
55. (55.) 设 $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{a_na_{n+1}}{2}, n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

56. (56.♠) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{n}-2n\right)$.

57. (57.) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-x_{n-2}\right)=0$, 则计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}$.

58. (58.) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,1)$ 满足

$$e^{a_n}-e^{-a_n}=a_n\left(e^{b_n}+e^{-b_n}\right),n=1,2,\cdots.$$

证明:

$$a_n>b_n,n=1,2,\cdots,\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n-a_n}{a_n}\right)^n=0. \tag{8.67}$$

59. (59.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^1+n^2+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}.$$

60. (60.) 设 $a\in\mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{an}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

61. (61.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2+n+1}+\frac{4}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{2n}{n^2+n+n}\right)^n.$$

62. (62.) 设 $r_n,n=1,2,\cdots$ 是方程 $x=\tan\sqrt{x}$ 的全部正根, 判断 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cot\sqrt{r_k}\right)^2\right\}$ 有界性和收敛性.

63. (63.) 设 $f_n(x)=e^n\left[e^{n(x-1)}-1\right]+x,n=1,2,\cdots$, 证明: $f_n(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根 r_n, 并求

$$\lim_{n\to\infty}r_n,\lim_{n\to\infty}ne^n\left(1-r_n\right).$$

64. (64.) 设

$$x_1=1,x_3=1,x_2=0,\begin{cases}x_{3k+3}=x_{3k-2}\\ x_{3k+2}=x_{3k}+x_{3k-1}\\ x_{3k+1}=x_{3k}+x_{3k-2}\end{cases},k\in\mathbb{N},$$

求 x_n 通项. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(c_1x_{3k+1}+c_2x_{3k+2}+c_3x_{3k+3}\right)$ 存在, 求 c_1,c_2,c_3 满足的条件.

65. (65.) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n^2a_n}=b>0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{n+1}-\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)=\frac{b}{e^2}. \tag{8.68}$$

66. (66.) 设 $a_1=1,b_1=c_1=0$, 且当 $n\geqslant2$ 时必有

$$a_n=a_{n-1}+\frac{c_{n-1}}{n},b_n=b_{n-1}+\frac{a_{n-1}}{n},c_n=c_{n-1}+\frac{b_{n-1}}{n}.$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left[\left(a_n-b_n\right)^2+\left(b_n-c_n\right)^2+\left(c_n-a_n\right)^2\right]\right).$$

67. (67.) 设

$$f\in C^1[0,1],A=f(1),C=f(0),B=\int_0^1x^{-\frac{1}{m}}f(x)\,\mathrm{d}x,m\in\mathbb{N},$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right].$$

68. (68.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^{1+\frac{2k}{n^2}}.$$

69. (69.) 设 $a_1=6$ 且

$$n(n+1)a_{n+1}=3(n+2)\left(a_n+n(n+1)3^n\right),n\in\mathbb{N}.$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

70. (70.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2023}\int_k^n\frac{1}{x^{2025}+n^{2025}}\mathrm{d}x\right).$$

71. (71.) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[e^{(t-x)^2}-1\right]\sin t\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+x^2)}$.

72. (72.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x$.

73. (73.) 证明 $x=\ln x-\frac{2}{x}+3$ 在 $(2,+\infty)$ 有且只有一个实根 a. 对

$$2<x_1<a,x_{n+1}=\ln x_n-\frac{2}{x_n}+3,n=1,2,\cdots,$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

74. (74.) 设 $f\in C(0,+\infty)$ 满足 $x=f(x)5^{f(x)}$, 证明: f 严格递增以及

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\frac{1}{\ln 5}.$$

75. (75.) 设 $\alpha>0$, 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}}{x^{\alpha}}.$$

76. (76.) 设 $k\in\mathbb{N},f\in D^{k+1}[0,1]$ 满足

$$f(0)=0,f'(0)=1,f^{(i)}(0)=0,i=2,3,\cdots,k,f^{(k+1)}(0)\neq0.$$

且对任意的 $x\in(0,1]$ 有 $f'(x)\in(0,1)$, 证明: 数列

$$x_1\in(0,1],x_{n+1}=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right),n\in\mathbb{N}$$

存在极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n\sqrt[k]{\ln n}=\sqrt[k]{-\frac{(k+1)!}{kf^{(k+1)}(0)}}.\tag{8.69}$$

77. (77.) 设 $f(x)=\arctan\sin x$, 数列

$$x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N},$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$.

78. (78.) 设 $\frac{1}{2}<a_n<1,n\in\mathbb{N}_0$,

$$x_0=a_0,x_n=\frac{a_n+x_{n-1}}{1+a_nx_{n-1}},n\in\mathbb{N}.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

79. (79.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{kn-1}}{kn}$.

80. (80.) 证明: $e^{-x}+\cos(2x)+x\sin x=0$ 在区间 $((2n-1)\pi,(2n+1)\pi)$ 恰有两个根 $x_{2n-1}<x_{2n},n=1,2,\cdots$. 并计算

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(x_n-n\pi).$$

81. (81.) 设 $x_1=1,x_n=x_{n+1}+2\ln(1+x_{n+1}),n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}2^nx_n$.

82. (82.) 设 $s>0$, 记 $\cos x=sx$ 的全部正根从小到大排列为 $x_1,x_2,\cdots,x_{N(s)}$. 计算

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{k=1}^{N(s)-1}\frac{1}{x_kx_{k+1}}.$$

83. (83.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n\right].$$

84. (84.) 设 $a>0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt[n]{a^nx^n+(1-x)^n}\mathrm{d}x$$

85. (85.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{i+j+k}.$$

86. (86.) 设 A_n,G_n 分别是 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 的算数平均数和几何平均数, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}}$.

87. (87.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且周期为 $T>0$, 证明:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.70}$$

88. (88.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left[\frac{\pi}{e^{\frac{1}{2n}}-1}\right]$.

89. (89.) 设

$$C_0=-1,C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k},n=0,1,2\cdots,$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}$.

90. (90.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{\sin(nx)}{x}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

91. (91.) 不用黎曼引理计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2(nx)}\mathrm{d}x.$$

92. (92.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{1+|\sin x|}{x}\mathrm{d}x.$$

93. (93.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{2k(k-1)}{2k-1}}.$$

94. (94.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2x}\mathrm{d}x}{n}\right).$$

95. (95.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}(n!\sin 1-\lfloor n!\sin 1\rfloor).$$

96. (96.) 给定 $a\in\mathbb{R}$, 考虑

$$f_0(x)=e^{-x}\sin(ax),f_n(x)=\int_x^\infty f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots,$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

97. (97.) 计算

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

98. (98.♠, ∗) 考虑

$$a_0, a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = \frac{1}{n}a_n + a_{n-1}, n = 1, 2, \cdots.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

99. (99.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n^2+k}{n^2-k}-e\right)\right].$$

100. (100.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\cdots+\sqrt[n]{n}}}.$$

101. (101.) 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{2x}\frac{\cos(t+\cos t)}{\sin(t+\sin t)}\mathrm{d}t\right).$$

102. (102.) 设 $\alpha, \beta > -1$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right]^{\alpha+1}}.$$

103. (103.) 设 $x \in \mathbb{R}$ 以及

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x^n + nx_n, n = 1, 2, \cdots.$$

证明:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{x_{n+1}}\right) = e^{-x}.$$

104. (104.) 设 $\alpha, \beta > 0$, 求

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t^\beta}\right)\mathrm{d}t\right)$$

存在的充要条件.

105. (105.) 设

$$x_1 = 1, x_n = x_{n+1} + 2\ln(1+x_{n+1}), n = 1, 2, \cdots,$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n x_n)$.

106. (106.) 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上内闭黎曼可积的周期 $T > 0$ 函数, 计算

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\mathrm{d}x\right),$$

其中 $\int_0^T \frac{\varphi(\lambda x)}{x}\mathrm{d}x$ 在 $\lambda \in \mathbb{N}$ 收敛.

107. (107.) 设 $\alpha, \beta, \delta > 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}}{1+\frac{\beta+k\delta}{n}}.$$

108. (108.) 设

$$a_1 = 5, 3a_{n+1} = (1+a_n)^3 - 5, n = 1, 2, \cdots,$$

计算

(1): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}$.

(2): 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{3^n}$ 存在?

109. (109.) 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$, 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}.$$

110. (110.) 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是递增可微函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, f' 有界, 并定义 $F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$. 考虑

$$a_0=1,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{f(a_n)},n\in\mathbb{N}_0.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-F^{-1}(n)\right)=0.$$

111. (111.) 设 $f\in C^2[0,a]$ 满足

$$f'(0)=1,f''(0)\neq 0,0<f(x)<x,\forall x\in(0,a).$$

考虑

$$x_1\in(0,a),f(x_n)=x_{n+1},n=1,2,\cdots.$$

证明:$\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{nx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均收敛.

112. (112.) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=L\in(0,+\infty).$$

证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln(n+1)}$ 存在并求值.

113. (113.) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\int_x^{2x}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)$.

114. (114.) 设 $f\in C^4[0,2]$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}n^4\left(\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)+4f\left(\frac{2i-1}{n}\right)+f\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\right).$$

115. (115.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\ln((n+1)!)}{n+1}-\frac{\ln(n!)}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k^2+\sin k}\right].$$

116. (116.) 设

$$x_1=1,x_{n+1}=\left(\sqrt{x_n}+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2,n=1,2,\cdots,$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\frac{\ln n}{2}-x_n\right)$ 存在.

117. (117.) 设

$$a_1>0,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{na_n},n=1,2,\cdots.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}$.

118. (118.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i}{n^2}\right)\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right).$$

119. (119.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)^n}\mathrm{d}x\right).$$

120. (120.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2\sqrt[n]{x^{\frac{n}{2}}+x^{2n}}\mathrm{d}x$.

121. (121.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3!!}+\frac{4}{5!!}+\cdots+\frac{2n}{(2n+1)!!}\right]^{(2n)!!}$.

122. (122.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i}\left(j\sin\left(\frac{n-i}{n}\right)^3\right)\right).$$

123. (123.) 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{1+e^x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^x t\mathrm{d}t\right).$$

124. (124.) 设 $f\in C^2[a,b],\widehat{x}\in(a,b)$ 满足 $f(\widehat{x})=0,f'(\widehat{x})\neq 0$. 证明: 存在 $\widehat{x}$ 的邻域 U 使得对一切 $x_0\in U$ 都有数列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},n=0,1,2,\cdots$$

满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\widehat{x}$.

125. (125.) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 满足

$$\cos a_{n+1}-\cos a_n\cos a_{n-1}>\frac{1}{4},n=1,2,\cdots.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

126. (126.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2+k^2}\right).$$

127. (127.) 设 $f_n(x)\triangleq x^n+x-1,n=1,2,\cdots$.

(a). 若 n 为奇数, 存在唯一的 $x_n>0$ 使得 $f_n(x_n)=0$. 若 n 为偶数, f_n 仅有两个实数根 $y_n<0<x_n$.

(b). 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在. 这里极限为沿着有定义的 n 的进行.

128. (128.) 设周期 1 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\forall x\neq y.$$

证明:

$$x_1\in\mathbb{R},x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$$

满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且与初值无关.

129. (129.) 设 $a_1>0,\alpha>0$, 考虑数列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,a_{n+1}=a_n+\left(\frac{n}{S_n}\right)^{\alpha},n=1,2,\cdots.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$ 存在, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\alpha+1}}{n},\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}.$$

130. (130.) 设 $a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n.$$

131. (131.) 考虑数列

$$a_1>a_0>0,a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}^2}{a_n+a_{n+1}},n=0,1,2,\cdots.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且为正数.

132. (132.) 设 $a>0,p>1$, 函数 f 在 $x=1$ 连续. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a^{\frac{k}{n^p}}\right)\right).$$

第 9 章 极限和渐近分析方法数学类

内容提要

- Stolz 定理和 toeplitz 定理 9.1
- cauchy 积型极限 9.2
- Laplace 方法和局部化原理 9.3
- 黎曼引理 Friedrichs mollifier technique. 9.4
- 欧拉麦克劳林公式 9.5
- 渐近分析方法 9.6
- 数列极限技巧 9.7
- 无理数的逼近 9.8
- 杂例 9.9

9.1 Stolz 定理和 toeplitz 定理

定理 9.1 (Stolz 定理)

(a): 设 x_n 是严格递增数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(b): 设 x_n 是严格递减数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}.$$

(c):♡ 分别在 (a),(b) 的条件基础上, 若还有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{9.1}$$

♡

注注意 (c) 由 $(a),(b)$ 是显然的, 且只有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ 存在或者为确定符号的 ∞ 时才有(9.1)成立. 他和我们的洛必达法则有一定的相似程度. 即他是离散的洛必达法则. 非数学可不必管定理9.1的 (c) 的证明而直接使用.

笔记 容易从定理9.1的 (a) 得出若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在或者为确定符号的 ∞, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

因此 Stolz 定理是一种有效的把求和消去的降阶方法.

证明 我们仅证明 x_n 是严格递增数列且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} < \infty$ 时有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n}{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}. \tag{9.2}$$

笔记 考虑到证明就是怎么说怎么列, 其余情况希望学员可以自行书写证明. 学数学一定要有自己思考的能力!.

记 $A \triangleq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$, 由上极限定义7.2我们知道对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \leqslant A+\epsilon, \forall n \geqslant N.$$

利用 x_n 严格递增时, 成立 $y_{n+1}-y_n \leqslant (A+\epsilon)(x_{n+1}-x_n), n \geqslant N$, 然后求和得

$$\sum_{j=N}^{n-1} (y_{j+1}-y_j) \leqslant (A+\epsilon) \sum_{j=N}^{n-1} (x_{j+1}-x_j), \forall n \geqslant N+1,$$

即

$$y_n - y_N \leqslant (A+\epsilon)(x_n - x_N), \forall n \geqslant N+1.$$

取上极限就得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{y_n}{x_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\frac{y_n}{x_n}-\frac{y_N}{x_n}}{1-\frac{x_N}{x_n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{y_n-y_N}{x_n-x_N}\leqslant A+\epsilon. \tag{9.3}$$

由 ϵ 任意性得式(9.2).

笔记 有人对式(9.3)的第一个等号表示疑惑, 实际上因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_N}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_N}{x_n}=0.$$

于是对所有广义存在子列 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{y_{n_k}}{x_{n_k}}$, 我们都有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\frac{y_{n_k}}{x_{n_k}}-\frac{y_N}{x_{n_k}}}{1-\frac{x_N}{x_{n_k}}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{y_{n_k}}{x_{n_k}}$, 特别的对上极限也对.

应学员要求我们再对 $\frac{0}{0}$ 型且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}<\infty$ 时证明式(9.2).

事实上, 记 $A\triangleq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$, 由上极限定义7.2我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}\leqslant A+\epsilon,\forall n\geqslant N.$$

利用 x_n 严格递减时, 成立 $y_n-y_{n+1}\leqslant(A+\epsilon)(x_n-x_{n+1}),n\geqslant N$, 我们有[1]

$$y_m=\sum_{n=m}^{\infty}(y_n-y_{n+1})\leqslant(A+\epsilon)\sum_{n=m}^{\infty}(x_n-x_{n+1})=(A+\epsilon)x_m,\forall m\geqslant N.$$

于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{y_n}{x_n}\leqslant A+\epsilon$. 由 ϵ 任意性得式(9.2).

我们有 Stolz 定理的推广

定理 9.2 (Toeplitz 定理 ♡)

(a): 设 $\{t_{nk}\}_{1\leqslant k\leqslant n}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a. \tag{9.4}$$

(b): 设 $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k=a. \tag{9.5}$$

♡

笔记 无需记忆 Toeplitz 定理的叙述, 其证明的思想更为重要. 一句话证明定理9.2, 即当 n 比较小的时候, 用 t_{nk} 趋于 0 来控制, 当 n 比较大的时候, 用 a_n 趋于 a 来控制.

证明

(a): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可[2].

对任何 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k\right|&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=N+1}^{n}|t_{nk}a_k|\\&\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\end{aligned}$$

从而由 N 任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=0,$$

这就证明了式(9.4).

[1]级数可以理解为部分和的极限.

[2]此时也用到了 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$.

(b): 事实上, 不妨设 $a=0$, 否则用 a_n-a 代替 a_n 即可[3].

对任何 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right| &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{N}t_{nk}a_k\right|+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=N+1}^{\infty}|t_{nk}a_k|\\ &\leqslant \sup_{k\geqslant N+1}|a_k|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}=\sup_{k\geqslant N+1}|a_k|,\end{aligned}$$

从而由 N 任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k=0,$$

这就证明了式(9.5).

作为 Toeplitz 定理9.2的应用, 我们考虑如下经典习题.

例题 9.1♡ 设 $p_k>0,k=1,2,\cdots,n$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=a. \tag{9.6}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_1+\cdots+p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a. \tag{9.7}$$

笔记 理解到本质之后不需要记忆 Toeplitz 定理, 但是如果可以直接用 Toeplitz 定理我们就引用了.

证明 记 $t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\geqslant 0,k=1,2,\cdots,n$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$. 运用式(9.6)和夹逼准则就有

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}t_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-k+1}}=0,\forall k\in\mathbb{N}.$$

因此由 Toeplitz 定理9.2的 (a), 我们完成了式(9.7)证明.

例题 9.2♡ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $b_n\geqslant 0$. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS. \tag{9.8}$$

证明 如果 $S=0$, 则 b_n 恒为 0, 则式(9.8)显然成立. 当 $S>0$, 注意到 $t_{nk}=\frac{1}{S}b_{n-k+1},k=1,2,\cdots,n$ 满足定理9.2的 (b) 的条件. 这就证明了式(9.8).

例题 9.3 设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0. \tag{9.9}$$

且存在常数 $K>0$, 使得 $\sum\limits_{j=0}^{n}|y_j|\leqslant K,\forall n\in\mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_iy_{n-i}=0.$$

证明 因为收敛必有界我们设 $|x_n|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$, 因为(9.9), 我们知道存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|x_n|\leqslant\epsilon,\forall n\geqslant N. \tag{9.10}$$

[3]此时也用到了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1$.

则我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i}\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_{n-i}\right| + \left|\sum_{i=N+1}^{n} x_i y_{n-i}\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i y_{n-i}| + \sum_{i=N+1}^{n} |x_i y_{n-i}| \\ &\overset{(9.10)}{\leqslant} M\sum_{i=1}^{N} |y_{n-i}| + \epsilon \sum_{i=0}^{n-N-1} |y_i| \\ &\leqslant M\sum_{i=1}^{N} |y_{n-i}| + \epsilon K,\end{aligned}$$

于是由上式知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i}\right| \overset{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0}{\leqslant} \epsilon K,$$

由 ϵ 任意性可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i}\right| = 0,$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n-i} = 0.$$

再来看一个 Toeplitz 定理的运用, 我们不再直接应用 Toeplitz 定理.

例题 9.4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab. \tag{9.11}$$

证明 如果已经证明了 $a = b = 0$ 的情况, 用 $a_n - a, b_n - b$ 分别代替 a_n, b_n, 即有

$$\begin{aligned}0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - a)(b_{n-k+1} - b)}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_{n-k+1}}{n} + \frac{abn}{n} - b\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n} - a\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k+1}}{n}\right) \\ &\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_{n-k+1}}{n} - ab\right),\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_{n-k+1}}{n} = ab.$$

下面不妨设 $a = b = 0$.

Method 1

我们有

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}\right| \leqslant \sup_{k\geqslant 1} |b_k| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{n} \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} 0$$

由夹逼准则得(9.11).

Method 2[4]

由极限性质, 我们知道

$$|a_n| \leqslant M, |b_n| \leqslant M. \tag{9.12}$$

[4]一种复杂的方法, 但能体现一种依赖 n 的 N 取法.

然后由极限定义, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$, 就有

$$|a_n|\leqslant\epsilon,|b_n|\leqslant\epsilon. \tag{9.13}$$

于是当 $n>2N$, 此时 $n-N\geqslant N$, 我们运用(9.12)和(9.13)知

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|=\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}}{n}\right|\leqslant\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{N}a_kb_{n+1-k}\right|}{n}+\frac{\left|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_kb_{n+1-k}\right|}{n}\leqslant\frac{NM\epsilon}{n}+\frac{M\epsilon(n-N)}{n}.$$

于是让 $n\to+\infty$ 我们得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|\leqslant M\epsilon,$$

由 ϵ 任意性我们得(9.11)成立.

命题 9.1 (经典乘积极限结论 ♡)

设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)a_n=0.$$

笔记 为了估计 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$, 前面的有限项不影响. 而要用上级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 自然想到 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_j=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b_ja_j}{a_j}$ 和 Abel 变换(8.12). 而 a_j 的单调性能用在 Abel 变换之后去绝对值[5].

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$. 则由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\sum_{i=N+1}^{m}a_ib_i\right|\leqslant\epsilon,\forall m\geqslant N+1.$$

当 $n\geqslant N+1$, 由 Abel 变换8.2, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=N+1}^{n}b_j\right|&=\left|\sum_{j=N+1}^{n}\frac{a_jb_j}{a_j}\right|\\&=\left|\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_{j+1}}\right)\sum_{i=N+1}^{j}a_ib_i+\frac{1}{a_n}\sum_{i=N+1}^{n}a_ib_i\right|\\&\leqslant\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_{j+1}}\right|\cdot\left|\sum_{i=N+1}^{j}a_ib_i\right|\right)+\frac{1}{|a_n|}\left|\sum_{i=N+1}^{n}a_ib_i\right|\\&\leqslant\epsilon\left[\sum_{j=N+1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{j+1}}-\frac{1}{a_j}\right)+\frac{1}{a_n}\right]\\&=\epsilon\left(\frac{2}{a_n}-\frac{1}{a_{N+1}}\right).\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{n}b_j\right|&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{N}b_j\right|+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=N+1}^{n}b_j\right|\\&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{N}b_j\right|+\epsilon\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(2-\frac{a_n}{a_{N+1}}\right)\\&=2\epsilon.\end{aligned}$$

[5]课本中证明A-D 判别法也有类似的思想.

由 ϵ 任意性即可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_n\sum_{j=1}^{n}b_j\right|=0,$$

于是就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)a_n=0.$$

来看一个某种意义下的反向 Toeplitz 结果.

例题 9.5 设数列 $\{a_{nk}\}_{1\leqslant k\leqslant n<\infty}$ 满足

- $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k,\forall k\in\mathbb{N}$;
- 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}$ 存在;
- 存在 $M>0$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$,

证明对任何 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 存在, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}z_k$ 存在.

证明 约定 $a_{nk}=0,k>n$, 则由法图引理18.18, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}|a_{nk}|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|=\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|\leqslant M.$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$, 于是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $n\geqslant N$, 都有 $|z_n|\leqslant\epsilon$.

于是对 $n>\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k-\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\epsilon\sum_{k=N+1}^{n}|a_{nk}-a_k|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\epsilon\sum_{k=N+1}^{n}|a_{nk}|+\epsilon\lim_{m\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n}|a_{mk}|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\epsilon M+\epsilon\lim_{m\to\infty}\sum_{k=N+1}^{m}|a_{mk}|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+2\epsilon M,\end{aligned}$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k-\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|\leqslant2M\epsilon,$$

由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k-\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|=0.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kz_k|\leqslant\sup_{k\geqslant1}|z_k|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,$$

因此有下面极限存在

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kz_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz_k.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz_k.$$

9.2 cauchy 积型极限 ♡

我们先来看一个引理, 他是为了后续计算的方便.

引理 9.1

设 $p,q>-1$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p\left(n+1-k\right)^q}{n^{p+q+1}}=\int_0^1x^p\left(1-x\right)^q\,dx.$$

♡

注本结果非数学只需要掌握 $p,q\geqslant 0$ 的情形, 此时恰好可以用定积分定义代替控制收敛定理[6].

证明 注意这里只是形式上是定积分定义, 但并非定积分定义, 我们仅仅讨论 $-1<p,q<0$, 其他情况是类似的, 只是不等式放缩方向的问题.

一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p\left(n+1-k\right)^q}{n^{p+q+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^q\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^q\,dx\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\left(1-x\right)^q\,dx\\&=\int_0^1x^p\left(1-x\right)^q\,dx.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p\left(n+1-k\right)^q}{n^{p+q+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^q\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^q\,dx\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{1}{n}+x\right)^p\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^q\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(\frac{1}{n}+x\right)^p\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^q\,dx\\&=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+x\right)^p\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^q\,dx\\&=\int_0^1x^p\left(1-x\right)^q\,dx,\end{aligned}$$

这里换序来自 $\int_0^1\left(\frac{1}{n}+x\right)^p\left(1+\frac{1}{n}-x\right)^q\,dx\leqslant\int_0^1x^p\left(1-x\right)^q\,dx<\infty$ 和控制收敛定理. 于是我们证明了引理9.1.

[6]读者应该仔细思考如何用定积分定义书写.

命题 9.2 (cauchy 积型极限)

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, p, q > -1$, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} = a, \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^q} = b,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+q+1}} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = ab \cdot \beta(p+1, q+1). \tag{9.14}$$

笔记 本题就是类 Toeplitz 定理方法题, 所以理解透彻 Toeplitz 定理方法比会用 Toeplitz 定理方法更重要.

证明 记

$$\left|\frac{a_n}{n^p}\right| + \left|\frac{b_n}{n^q}\right| + \left|\frac{a_n}{n^p} - a\right| + \left|\frac{b_n}{n^q} - b\right| \leqslant M, \forall n \geqslant 1.$$

我们证明

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+q+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{k^p} - a\right) \frac{b_{n-k+1}}{(n-k+1)^q} k^p (n-k+1)^q = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^{p+q+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_{n-k+1}}{(n-k+1)^q} - b\right) k^p (n-k+1)^q = 0 \quad . \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{ab}{n^{p+q+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p (n-k+1)^q = ab \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx
\end{aligned} \tag{9.15}$$

第三个式子直接由引理9.1得到. 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left|\frac{a_n}{n^p} - a\right| \leqslant \epsilon, \left|\frac{b_n}{n^q} - b\right| \leqslant \epsilon, \forall n \geqslant N.$$

注意到当 $n > N$, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n^{p+q+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{k^p} - a\right) \frac{b_{n-k+1}}{(n-k+1)^q} k^p (n-k+1)^q \right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n^{p+q+1}} \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant N} \left|\frac{a_k}{k^p} - a\right| k^p (n-k+1)^q + \sum_{N<k\leqslant n} \left|\frac{a_k}{k^p} - a\right| k^p (n-k+1)^q \right) \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n^{p+q+1}} \left(M \sum_{1\leqslant k\leqslant N} k^p n^q + \epsilon \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^p (n-k+1)^q \right) \\
&= M\epsilon\beta(p+1, q+1),
\end{aligned}$$

这里最后一个等号用到了引理9.1, 由 ϵ 任意性可得(9.15)中第一个式子为 0, 类似的可以知道得(9.15)中第二个式子也为 0, 这就证明了式得(9.15)中的三个等式.

现在由把式(9.15)中三个相加, 我们得到了式(9.14). 这就完成了证明.

9.3 Laplace 方法

9.3.1 前言

Laplace 方法, 又称 Laplace 定理, 给出一类积分明确的渐近表达式, 但是清疏竞赛班总结为一套具体的思想, 而不局限于具体的定理, 使得其容易记忆, 并且适用面更加广泛! 再次强调, 不可以记忆定理.

讲解视频地址25 分钟教会你最牛逼的求积分极限方法-laplace 方法合集篇.

9.3.2 一些基本例子 ♡

例题 9.6♡ 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m>0,m\in\mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j. \tag{9.16}$$

注熟知, 极限蕴含在 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的最大值中.

证明 显然

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j^n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j,$$

从而我们证明了(9.16).

例题 9.7♡ 设非负函数 $f\in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx}=\max_{x\in[a,b]}f(x). \tag{9.17}$$

注熟知, 极限蕴含在 f 的最大值中.

证明 事实上记 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),x_0\in[a,b]$, 不失一般性我们假设 $x_0\in(a,b)$. 那么对充分大的 $n\in\mathbb{N}$, 我们由积分中值定理知道存在 $\theta_n\in\left(x_0-\frac{1}{2n},x_0+\frac{1}{2n}\right)$, 使得

$$f(\theta_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}}f^n(x)\,dx}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x_0)\,dx}=f(x_0)\sqrt[n]{b-a}.$$

两边取极限即得(9.17).

笔记 这两个基本例子也暗示了离散和连续之间有时候存在某种类似的联系.

做为引用, 我们来看竞赛真题

例题 9.8[♡] 设非负严格递增函数 $f\in C[a,b]$, 由积分中值定理我们知道存在 $x_n\in[a,b]$, 使得

$$f^n(x_n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\,dx.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 由例题9.7, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b-a}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx}=f(b).$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]$, 我们知道对任何 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)=f(b)$. 因此只能有 $c=b$, 利用命题7.4的 (a), 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$. 证毕!

9.3.3 Laplace 方法 ♡,♠

笔记 大体上, Laplace 方法适用于 $\int_a^b f^n(x)g(x)\,dx$ 型积分的渐近估计, 要记得还可以做变形和换元法转化为标准模型, 此外要注意整体思想就是抓极值部分和所谓的局部化原理.

定理 9.3 (wallis 公式, ♡)

有渐近估计

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi n}+\frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{9.18}$$

♡

注(9.18)的意思是说

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\sqrt{\pi n}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{8}.$$

证明的想法是把表达式用积分表示并运用 Laplace 方法.

证明 注意到高数课本积分表的经典公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

利用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们知道

$$\ln \sin^2 x = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{9.19}$$

即 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\ln \sin^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = -1$. 于是利用(9.19), 对任何 $\epsilon \in (0,1)$, 我们知道存在 $\delta \in (0,1)$, 使得对任何 $x \in \left[\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}\right]$, 都有

$$-(1+\epsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqslant \ln \sin^2 x \leqslant -(1-\epsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2. \tag{9.20}$$

现在一方面

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin^2 x} dx \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} e^{n \ln \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1-\epsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + \int_0^{\delta} e^{-n(1-\epsilon)y^2} dy \\
&= \left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)n}} \int_0^{\delta\sqrt{(1-\epsilon)n}} e^{-z^2} dz \\
&\leqslant \left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + \frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)n}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz.
\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx &\geqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n(1+\epsilon)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} dx \\
&= \int_0^{\delta} e^{-n(1+\epsilon)y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{n(1+\epsilon)}} \int_0^{\delta\sqrt{n(1+\epsilon)}} e^{-z^2} dz.
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

由 ϵ 任意性即可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

笔记 可以看到在远离最值点 $\frac{\pi}{2}$, 积分是指数级别这种阶快速趋于 0 的. 因此问题集中在 $\frac{\pi}{2}$, 然后用 Taylor 去拟合一般的函数 (因为 Taylor 本身就是局部的拟合).

笔记 可以看到 Laplace 方法书写还是有一定繁琐度的, 花点时间仔细理解, 以后就是一句话就证明了, 属于一劳永逸. 实际做题中一般只需要估计到等价量就够了, 下面展示 Laplace 方法的高阶渐近方法, 不过他几乎不可能被考察.

事实上

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n \ln \sin^2 x} dx \overset{x=\arcsin e^{-\frac{y}{2}}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ny} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}} dy. \tag{9.21}$$

注意到用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{8} + o\left(\sqrt{y}\right), \tag{9.22}$$

即

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}-\frac{1}{2\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}=-\frac{1}{8}. \tag{9.23}$$

注有些同学会产生疑问, 如何计算 $\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}$ 在 $y=0$ 的 Peano 余项, 他不是不可微吗? 事实上, 你乘上 $\sqrt{y}$ 他就可微了, 最后再把得到的 Taylor 公式除以 $\sqrt{y}$ 即可. 这里严格来说叫做 Puiseux 级数, 需要复分析才能严格说清楚, 所以我们只需要会验证极限(9.23)即可, 这自然在高数范围内严格的证明了(9.22). 有些同学会继续问, 那如何先验的知道是要乘 $\sqrt{y}$ 呢? 或者如何提前知道要求的极限是(9.23)呢? 事实上你可以直接按照标准的复合函数 Taylor 展开求余项的方法操作即可. 但考虑到不是本部分内容的细节, 我们略去这个探索过程. 更简单的你可以在软件中输入 (反正考试也不考)taylor(exp(-x/2)/(2sqrt(-(exp(-x))+1))).

现在利用(9.22), 我们知道对任何 $\epsilon\in(0,\frac{1}{8})$, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\sqrt{y}\leqslant\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{y}}-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\sqrt{y},\forall y\in(0,\delta].$$

从而一方面

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy&=\frac{1}{2}\int_0^\delta e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy+\frac{1}{2}\int_\delta^\infty e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy\\
&\leqslant\int_0^\delta e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\sqrt{y}\right)dy+\frac{e^{-\frac{\delta}{2}n}}{2}\int_\delta^\infty\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy\\
&=\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^{n\delta}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{n\delta}e^{-y}\sqrt{y}dy+\frac{e^{-\frac{\delta}{2}n}}{2}\int_\delta^\infty\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy\\
&=\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-y}\sqrt{y}dy-\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_{n\delta}^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\\
&\quad+\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{n\delta}^\infty e^{-y}\sqrt{y}dy+\frac{e^{-\frac{\delta}{2}n}}{2}\int_\delta^\infty\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}edy\\
&\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{n\sqrt{n}}+\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{e^{-\frac{n\delta}{2}}}{n\sqrt{n}}\int_{n\delta}^\infty e^{-\frac{y}{2}}\sqrt{y}dy+\frac{e^{-\frac{\delta}{2}n}}{2}\int_\delta^\infty\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}edy\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}+O\left(e^{-\frac{n\delta}{2}}\right).
\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy&\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\delta e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy\\
&\geqslant\int_0^\delta e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\sqrt{y}\right)dy\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ny}y^{-\frac{1}{2}}dy-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\int_0^\infty e^{-ny}y^{\frac{1}{2}}dy-\frac{1}{2}\int_\delta^\infty e^{-ny}y^{-\frac{1}{2}}dy+\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\int_\delta^\infty e^{-ny}y^{\frac{1}{2}}dy\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}\int_{n\delta}^\infty e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy+\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{n\delta}^\infty e^{-y}y^{\frac{1}{2}}dy\\
&\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}-\frac{e^{-\frac{n\delta}{2}}}{2\sqrt{n}}\int_{n\delta}^\infty e^{-\frac{y}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}+O\left(e^{-\frac{n\delta}{2}}\right).
\end{aligned}$$

从上面两个估计我们得到

$$-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}+O\left(n\sqrt{n}e^{-\frac{\delta}{2}n}\right)\leqslant n\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]\leqslant-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}+O\left(n\sqrt{n}e^{-\frac{\delta}{2}n}\right).$$

于是就有

$$-\left(\frac{1}{8}+\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\leqslant\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]\leqslant-\left(\frac{1}{8}-\epsilon\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由 ϵ 任意性即可得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}\int_0^{\infty} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]=-\frac{\sqrt{\pi}}{16},$$

也即

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-e^{-y}}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{\pi}}{16n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \tag{9.24}$$

由(9.21)我们知道(9.24)可以改写为

$$\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{\pi}}{16n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \tag{9.25}$$

笔记 再一次注意到 Laplace 方法省去的余项都是指数级别.

然后我们用(9.25)就有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\sqrt{\pi n}\right]&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{1}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\frac{(2n-1)!!}{(2n!!)}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\frac{1}{8\sqrt{\pi}n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8\sqrt{\pi}n\sqrt{n}}}{\frac{1}{\pi n\sqrt{n}}}\\
&=\frac{\sqrt{\pi}}{8}.
\end{aligned}$$

我们就完成了定理9.3的证明.

笔记 从证明看到, 如果我们展开(9.22)足够多项就可以实现无穷阶 (任意阶) 渐近. 考虑到历届竞赛课程造成了不好的数学学习导向, 如无必要, 我们不在做这种无聊的事情.

笔记 相信读者也已经发现了, Laplace 方法本质上可以代替拟和法, 或者说拟和法就是特殊的 Laplace 方法.

wallis 公式9.18一个自然的推论是 Stirling 公式, 他给出了阶乘函数阶的估计.

定理 9.4 (Stirling 公式 ♡)

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,n\to\infty. \tag{9.26}$$

♡

笔记 积累重要恒等式

$$(2n)!!=2^n n!,n=0,1,2,\cdots. \tag{9.27}$$

证明 由A-D 判别法, 我们知道 $\int_1^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx=\int_1^{\infty}\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x}dx$ 收敛. 运用 0 阶欧拉麦克劳林公式9.3, 我们知道

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\ln k&=\frac{\ln n+\ln 1}{2}+\int_1^n\ln xdx+\int_1^n\frac{b_1(x)}{x}dx\\
&=\frac{\ln n}{2}+n\ln n-n+1+\int_1^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx-\int_n^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx\\
&=\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln n-n+C-\int_n^{\infty}\frac{1}{x}db_2(x)\\
&=\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln n-n+C+\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}dx,
\end{aligned}$$

这里 $C=1+\int_1^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx$ 是某个常数[7].

注意到周期连续函数必有界, 因此

$$\left|\frac{b_2(n)}{n}-\int_n^{\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}dx\right|\leqslant M\left(\frac{1}{n}+\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}dx\right)=\frac{2M}{n},$$

从而

$$n!=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}=e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)}=e^C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ 存在.

现在运用 wallis 公式9.18和恒等式(9.27), 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=C>0,$$

我们知道

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n n!^2}{\sqrt{n}(2n)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n}}\frac{n!^2}{n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\frac{n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\frac{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(2n)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n}}C^2\frac{n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\frac{1}{C}=\frac{C}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

由此推出(9.26). 我们完成了证明.

笔记 本证明中再次体现分部积分改善阶的想法.

注下述两个例子表明 Laplace 方法的思想和其证明不一定要局限于标准形式, 关键是找到问题的主要部分.

例题 9.9 拟合法基本模型, ♡

1. 设 $f\in R[0,1]$ 且 f 在 $x=1$ 连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)x^n dx=f(1).$$

2. 设 $f\in R[0,1]$ 且

$$f^{(j)}(1)=0,j=0,1,2,\cdots,k-1,f^{(k)}(1)=a\in\mathbb{R},$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right]=(-1)^k a.$$

注问题集中在 $x=1$, 当然题目暗示得也很明显. 显然这也符合我们的 Laplace 方法的标准模型, 因此我们可以完全类似定理9.3的书写完成证明, 即最后可以得 (希望读者自己可以完成)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)x^n dx&=\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)e^{n\ln x}dx\\&=f(1)\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 e^{-n(1-x)}dx\\&=f(1)\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\infty}e^{-nx}dx=f(1).\end{aligned}$$

当然我们下面换一种写法以力求读者不要死板的照抄我们的书写.

证明

1. 因为 f 在 $x=1$ 连续, 所以对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)-f(1)|\leqslant\epsilon,\forall x\in[1-\delta,1].$$

[7]em 方法往往不能求出具体极限值, 只能断言极限存在. 当然如果你运用积分计算方法强行计算积分 $1+\int_1^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx$ 会出现循环论证的嫌疑 (因为计算积分就要用定理9.4), 具体计算方法留到积分计算课的例14.32.

因为 $f\in R[0,1]$, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[0,1]$. 于是我们有

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 f(x)\,x^n dx-n\int_0^1 f(1)\,x^n dx\right| &\leqslant n\int_0^1 |f(x)-f(1)|\cdot x^n dx\\ &\leqslant 2Mn\int_0^{1-\delta} x^n dx+n\epsilon\int_{1-\delta}^1 x^n dx\\ &\leqslant 2Mn\int_0^{1-\delta}(1-\delta)^n\,dx+n\epsilon\int_0^1 x^{n-1}dx\\ &=2Mn(1-\delta)^{n+1}+\epsilon.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|n\int_0^1 f(x)\,x^n dx-n\int_0^1 f(1)\,x^n dx\right|\leqslant\epsilon.$$

即由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\,x^n dx=\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(1)\,x^n dx=\lim_{n\to\infty} f(1)\,\frac{n}{n+1}=f(1).$$

我们完成了证明.

2. 注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(x-1)^k\,\mathrm{d}x\right]=(-1)^k\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\beta(n+1,k+1)\right]\\ &=(-1)^k\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot k!\cdot n^{k+1}}{(n+k+1)!}=(-1)^k k!\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k+1}}{(n+k+1)(n+k)\cdots(n+1)}\\ &=(-1)^k k!,\end{aligned}$$

即我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^{k+1}\int_0^1 x^n\left[f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right]\mathrm{d}x\right\}=0. \tag{9.28}$$

事实上, 对任何 $\delta\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|n^{k+1}\int_0^1 x^n\left[f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant n^{k+1}\int_0^1 x^n\left|f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right|\mathrm{d}x\\ &=n^{k+1}\int_0^\delta x^n\left|f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right|\mathrm{d}x+n^{k+1}\int_\delta^1 x^n\left|f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right|\cdot n^{k+1}\int_0^\delta\delta^n\mathrm{d}x+\sup_{x\in[\delta,1]}\left|\frac{f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k}{(x-1)^k}\right|\cdot n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n^{k+1}\int_0^1 x^n\left[f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{x\in[\delta,1]}\left|\frac{f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k}{(x-1)^k}\right|\cdot k!.$$

由 Taylor 公式 Peano 余项得

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-\frac{a}{k!}(x-1)^k}{(x-1)^k}=0.$$

现在让 $\delta\to1^-$ 得(9.28), 从而我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right]=(-1)^k a.$$

例题 9.10 设 $f\in R[0,1]$ 且在 $x=1$ 连续. 对 $k\in\mathbb{N}$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k f(x)\,\mathrm{d}x\right]=f(1)\,k!.$$

证明 首先

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\beta(n+1,k+1)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot k!\cdot n^{k+1}}{(n+k+1)!} = k!\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k+1}}{(n+k+1)(n+k)\cdots(n+1)}\\ &= k!.\end{aligned}$$

然后对任何 $\delta\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left[\delta^n n^{k+1}\int_0^\delta (1-x)^k|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\right]\\ &\quad+\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\varlimsup_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_\delta^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant 0+\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant k!\sup_{x\in[\delta,1]}|f(x)-f(1)|.\end{aligned}$$

令 $\delta\to1^-$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\right]=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{k+1}\int_0^1 x^n(1-x)^k f(x)\,\mathrm{d}x\right]=k!f(1).$$

再来看竞赛真题的例子.

例题 9.11 多个最值点 Laplace 处理的例子 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n dx}.$$

证明 考虑 $f(x)=1-x^2+x^3, g(x)=\ln(x+2)$, 容易知道 $0\leqslant f(x)\leqslant1$ 且等号成立条件是 $x=0,1$.

笔记 这一次我们遇到了两个最值点, 因此问题会分别集中在两个最值点上.

运用 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有

$$\ln\left(1-x^2+x^3\right)=-x^2+o\left(x^2\right),\ln\left(1-x^2+x^3\right)=x-1+o(x-1).$$

方法完全类似于例题9.3和9.9, 我们知道对连续函数 $h\neq0$, 我们有

$$\int_0^{\frac12} f^n(x)h(x)\,dx \sim h(0)\int_0^\infty e^{-nx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}h(0)}{2\sqrt{n}}, \tag{9.29}$$

$$\int_{\frac12}^1 f^n(x)h(x)\,dx \sim h(1)\int_{-\infty}^1 e^{-n(1-x)}dx=\frac{h(1)}{n}. \tag{9.30}$$

注 其中(9.29)相似于例题9.18, (9.30)相似于例题9.9.

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n h(x)\,dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2+x^3\right)^n h(x)\,dx\\
&\quad+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{1}{2}}^1\left(1-x^2+x^3\right)^n h(x)\,dx\\
&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{h(0)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{h(1)}{n}\\
&=\frac{h(0)\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

笔记 你注意到了吗, 0 最大值点非 0 Taylor 系数到了 2 次, 提供 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 级别的估计, 1 最大值点非 0 Taylor 系数到了 1 次, 提供 $\frac{1}{n}$ 级别估计, 在探索等价无穷小的时候, 阶就体现在了非 0 Taylor 系数的项的次数最大的那个最大值点处.

回到原题我们知道

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n dx}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n\ln(x+2)\,dx}{\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n dx}\\
&=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\ln(0+2)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 1}=\ln 2.
\end{aligned}$$

我们就完成了例题9.11的计算.

作为 Laplace 方法的训练, 我们举例复旦大学考研题.

练习 9.1 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx. \tag{9.31}$$

证明 我们不再书写严格的步骤而是在理解透彻之后直接写出答案. 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx=\lim_{n\to\infty}n\int_0^{10}(1-|\sin y|)^n\,dy.$$

因此本题仍然是标准的 Laplace 方法模型, 所以问题集中在 $1-|\sin y|$ 最大值点处, 显然在区间 $[0,10]$, 最大值点有 $y=0,\pi,2\pi,3\pi$. 由于在最值点 $\pi,2\pi,3\pi$ 处是双侧的 Laplace 方法

笔记 拿不准是双侧的读者可以尝试严格证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_{\pi-1}^{\pi+1}(1-|\sin y|)^n\,dy$.

而在 $0,3\pi$ 是单侧的, 又由于 $|\sin y|$ 是周期 π, 所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n\int_0^{10}(1-|\sin y|)^n\,dy&=\lim_{n\to\infty}7n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin y|)^n\,dy\\
&=\lim_{n\to\infty}7n\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{n\ln(1-\sin y)}dy\\
&=\lim_{n\to\infty}7n\int_0^{\infty}e^{-ny}dy\\
&=7.
\end{aligned}$$

这样就完成练习9.1的计算.

笔记 和之前的 Laplace 方法一样, 问题是局部的 (集中在 0), 上限的 $\frac{\pi}{2}$ 是随便取的一个好算的数字, 实际上上限落在 $(0,\pi)$ 都是可以的.

注有兴趣的读者可以参观本题的高阶渐近估计.

例题 9.12 计算

$$\lim_{n\to\infty}n\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{(1+x^2)^n}dx.$$

笔记 读者容易发现最大值点 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 取到, 但是 $\sin 0=0$, 这个时候阶就有所变化, 当仍然集中在 $x=0$.

证明 容易知道

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{(1+x^2)^n}dx &= \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}\int_0^\infty x^2e^{-nx^2}dx\\ &=\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx\\ &=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.\end{aligned}$$

严格的, 一方面事实上还有

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{(1+x^2)^n}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4n^{\frac{3}{2}}}+\frac{15\sqrt{\pi}}{32n^{\frac{5}{2}}}+\frac{305\sqrt{\pi}}{512n^{\frac{7}{2}}}-\frac{315\sqrt{\pi}}{4096n^{\frac{9}{2}}}-\frac{605493\sqrt{\pi}}{131072n^{\frac{11}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{13}{2}}}\right),n\to\infty.$$

9.3.4 laplace 方法的变式应用 *

注本节属于兴趣内容, 需要对 Laplace 方法有较高熟练度, 否则不建议阅读.

首先来处理一个无穷多个极值点的 Laplace 方法.

例题 9.13 严格计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-1}^\infty \frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx.$$

证明 首先利用 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{n\pi}$, 然后

$$\ln\cos^2 x=-(x-k\pi)^2+o(x-k\pi)^2,k=0,1,2,\cdots.$$

注意到 $\ln\cos^2 x$ 有周期 π, 所以 $\forall\epsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta\in(0,\epsilon)$(不依赖 k), 使得对任何 $x\in\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[k\pi-\delta,k\pi+\delta]$, 都有

$$-(1+\epsilon)(x-k\pi)^2\leqslant\ln\cos^2 x\leqslant-(1-\epsilon)(x-k\pi)^2.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{n\pi}\int_{-1}^\infty\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx &\geqslant \sqrt{n\pi}\sum_{k=0}^\infty\int_{k\pi-\delta}^{k\pi+\delta}\frac{e^{-(1+\epsilon)n(x-k\pi)^2}}{2^x}dx\\ &\geqslant \sqrt{n\pi}\sum_{k=0}^\infty\int_{k\pi-\delta}^{k\pi+\delta}\frac{e^{-(1+\epsilon)n(x-k\pi)^2}}{2^{k\pi+\delta}}dx\\ &=\sqrt{n\pi}\sum_{k=0}^\infty\sqrt{\frac{1}{n(1+\epsilon)}}\int_0^{\delta^2(1+\epsilon)n}\frac{e^{-x}}{2^{k\pi+\delta}\sqrt{x}}dx\\ &=\frac{1}{2^\delta}\sqrt{\frac{\pi}{1+\epsilon}}\frac{2^\pi}{2^\pi-1}\int_0^{\delta^2(1+\epsilon)n}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx\\ &\geqslant\frac{1}{2^\epsilon}\sqrt{\frac{\pi}{1+\epsilon}}\frac{2^\pi}{2^\pi-1}\int_0^{\delta^2(1+\epsilon)n}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n\pi}\int_{-1}^\infty\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx\geqslant\frac{1}{2^\epsilon}\sqrt{\frac{\pi}{1+\epsilon}}\frac{2^\pi}{2^\pi-1}\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2^\epsilon\sqrt{1+\epsilon}}\frac{\pi 2^\pi}{2^\pi-1},$$

以及

$$\begin{aligned}\sqrt{n\pi}\int_{-1}^{\infty}\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx&=\sqrt{n\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi-\delta}^{k\pi+\delta}\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx+\sqrt{n\pi}\int_{[-1,+\infty)\setminus\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[k\pi-\delta,k\pi+\delta]}\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx\\&\leqslant\sqrt{n\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi-\delta}^{k\pi+\delta}\frac{e^{-n(1-\epsilon)(x-k\pi)^2}}{2^{k\pi-\delta}}dx+\sqrt{n\pi}\int_{-1}^{\infty}\frac{\cos^{2n}\delta}{2^x}dx\\&=\sqrt{n\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1-\epsilon)}}\int_0^{n(1-\epsilon)\delta^2}\frac{e^{-x}}{2^{k\pi-\delta}\sqrt{x}}dx+\frac{2}{\ln 2}\sqrt{n\pi}\cos^{2n}\delta\\&=\frac{1}{2^{-\delta}}\sqrt{\frac{\pi}{1-\epsilon}}\frac{2^\pi}{2^\pi-1}\int_0^{n(1-\epsilon)\delta^2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx+\frac{2}{\ln 2}\sqrt{n\pi}\cos^{2n}\delta\\&\leqslant 2^{\epsilon}\sqrt{\frac{\pi}{1-\epsilon}}\frac{2^\pi}{2^\pi-1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx+\frac{2}{\ln 2}\sqrt{n\pi}\cos^{2n}\delta,\end{aligned}$$

因此我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n\pi}\int_{-1}^{\infty}\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx\leqslant\frac{2^\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon}}\frac{\pi 2^\pi}{2^\pi-1},$$

由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-1}^{\infty}\frac{\cos^{2n}x}{2^x}dx=\frac{\pi 2^\pi}{2^\pi-1}.$$

例题 9.14 设 $a\in\mathbb{R}$, 证明

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}-a}\int_1^{\infty}x^a\left(\frac{te}{x}\right)^x\frac{dx}{x}=\sqrt{2\pi}.$$

证明 首先注意到

$$e^{-t}t^{\frac{1}{2}-a}\int_1^{\infty}x^a\left(\frac{te}{x}\right)^x\frac{dx}{x}\overset{\text{换元}}{=}\sqrt{t}e^{-t}\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}}x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx+\sqrt{t}e^{-t}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx,$$

又由 $\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}$ 在 $x\in(0,1)$ 递增, 我们知道

$$\sqrt{t}e^{-t}\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}}x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx\leqslant\sqrt{t}e^{-t}\left(\sqrt{2e}\right)^t\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}}x^{a-1}dx\to 0,t\to+\infty.$$

因此由 laplace 方法9.3我们知道

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}-a}\int_1^{\infty}x^a\left(\frac{te}{x}\right)^x\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}x^{a-1}e^{-t(1-x\ln\frac{e}{x})}dx=2\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\int_0^{\infty}e^{-t\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi},$$

这里用到了

$$1-x\ln\frac{e}{x}=\frac{(x-1)^2}{2}+o(x-1)^2,x\to 1$$

且 $x=1$ 是双侧的极值点.

例题 9.15 设 $a>0$, 证明

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-\frac{a}{e}t^{\frac{1}{a}}}t^{-\frac{1}{2a}}\int_0^{\infty}x^{-ax}t^xdx=\sqrt{\frac{2\pi}{ae}}.$$

证明 首先期望 $c\ln t-ac\ln c=ac,c>0$, 即 $c=e^{-1}t^{\frac{1}{a}}$, 换元 $x=c(x+1)$, 就有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x^{-ax}t^xdx&=\int_0^{\infty}e^{-ax\ln x+x\ln t}dx\\&=c\int_{-1}^{\infty}e^{-ac(x+1)\ln[c(x+1)]+c(x+1)\ln t}dx\\&=c\int_{-1}^{\infty}e^{[c\ln t-ac\ln c]\cdot(x+1)-ac(x+1)\ln(x+1)}dx\\&=ce^{ac}\int_{-1}^{\infty}e^{-ac[(x+1)\ln(x+1)-x]}dx.\end{aligned}\tag{9.32}$$

因此由 laplace 方法9.3我们知道

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-ac}\sqrt{\frac{a}{c}}\int_0^\infty x^{-ax}t^x dt = \lim_{t\to\infty}\sqrt{ac}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi},$$

故

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{a}{e}t^{\frac{1}{a}}}t^{-\frac{1}{2a}}\int_0^\infty x^{-ax}t^x dx = \sqrt{\frac{2\pi}{ae}}.$$

9.4 黎曼引理和 Friedrichs mollifier technique.♡

引理 9.2 (黎曼引理 ♡)

设 $E\subset\mathbb{R}$ 是可测集且 $f\in L^1(E)$, g 是定义在 $\mathbb{R}$ 的周期 $T>0$ 的有界可测函数, 则我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f(y)\,g(xy)\,dy = \frac{1}{T}\int_E f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy. \tag{9.33}$$

♡

笔记 非数学类只掌握 E 为区间, f,g 都是连续函数的情况. 不过单独看这里的证明对非数学类过于困难, 非数学类先记忆结论. 以后遇到具体情况我们再来谈怎么证明.

证明 先考虑 $E=\mathbb{R}$, f 在有限闭区间黎曼可积的情况.

事实上, 如果用 $g(Ty)-\int_0^1 g(Ty)\,dy$ 代替 g, 则不妨设 $T=1$ 且 g 在一个周期积分为 0, 同时不妨设

$$\sup_{\mathbb{R}}|g|>0.$$

现在对任何 $\beta>\alpha$, 我们有

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,dt\right| = \left|\int_{\alpha-[\alpha]}^{\beta-[\beta]} g(t)\,dt\right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}}|g|.$$

因此

$$\left|\int_\alpha^\beta g(xt)\,dt\right| \leqslant \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}, \forall x>0, \beta>\alpha.$$

对任何 $\epsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\int_{|y|>N}|f(y)|\,dy < \frac{\epsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}.$$

取划分

$$-N=t_0<t_1<\cdots<t_n=N,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n\left(\sup_{[t_{i-1},t_i]}f-\inf_{[t_{i-1},t_i]}f\right)(t_i-t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{3\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}.$$

那么当 $x>\frac{3\sum_{j=1}^{n}\left|\inf\limits_{[t_{j-1},t_j]}f\right|\cdot\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{\epsilon}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(xy)\,dy\right|&\leqslant\left|\int_{-N}^{N}f(y)g(xy)\,dy\right|+\left|\int_{|y|>N}f(y)g(xy)\,dy\right|\\&\leqslant\left|\int_{-N}^{N}f(y)g(xy)\,dy\right|+\sup_{\mathbb{R}}|g|\int_{|y|>N}|f(y)|\,dy\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}f(y)g(xy)\,dy\right|+\frac{\epsilon}{3}\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(f(y)-\inf_{[t_{j-1},t_j]}f\right)g(xy)\,dy\right|+\frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|g|}{x}\sum_{j=1}^{n}\left|\inf_{[t_{j-1},t_j]}f\right|+\frac{\epsilon}{3}\\&\leqslant\sup_{\mathbb{R}}|g|\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{[t_{i-1},t_i]}f-\inf_{[t_{i-1},t_i]}f\right)(t_i-t_{i-1})+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}\\&<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon,\end{aligned}$$

因此(9.33)成立.

对一般情况, 我们让 f 在 E 外定义值为 0, 不妨设 $\int_0^T g(x)\,dx=0$, 然后利用定理13.49知 $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 稠密, 于是我们对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\varphi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}}|f(y)-\varphi(y)|\,dy<\epsilon,$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}f(y)g(xy)\,dy\right|&\leqslant\left|\int_{\mathbb{R}}[f(y)-\varphi(y)]g(xy)\,dy\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)g(xy)\,dy\right|\\&\leqslant\sup_{\mathbb{R}}|g|\cdot\epsilon+\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)g(xy)\,dy\right|,\end{aligned}$$

于是

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_{\mathbb{R}}f(y)g(xy)\,dy\right|\leqslant\sup_{\mathbb{R}}|g|\cdot\epsilon.$$

这恰好是

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_{\mathbb{R}}f(y)g(xy)\,dy\right|=0,$$

因此我们证明了(9.33). 这就对一般情况证明了定理9.2.

定理9.2可以看成 L^1 版本的黎曼引理, 我们来看 $L^p, 1\leqslant p<\infty$ 版本的黎曼引理, 且我们重点引入 Friedrichs mollifier technique.

所谓 Friedrichs mollifier technique, 不严格的说, 设 T,T_y 是一个线性算子, X 是一个空间, 为了证明

$$\lim_y||T_yf-Tf||=0,\forall f\in X.\tag{9.34}$$

设 $||\cdot||,||\cdot||^{\sim}$ 满足

$$||f+g||\leqslant||f||+||g||,||f+g||^{\sim}\leqslant||f||^{\sim}+||g||^{\sim},||f||,||g||\geqslant0,\forall f,g.\tag{9.35}$$

我们去建立不等式

$$||T_yf-Tf||\leqslant C||f||^{\sim},\forall f\in X,$$

然后对 X 某个稠子集 Y, 即对任何 $f\in X$ 和 $\epsilon>0$, 存在 $g\in Y$, 使得 $||f-g||^{\sim}<\epsilon$. 然后再对所有 $g\in Y$ 去验证(9.34), 我们就有

$$\overline{\lim_y}||T_yf-Tf||\leqslant\overline{\lim_y}||T_y(f-g)-T(f-g)||+\lim_y||T_yg-Tg||\leqslant C||f-g||^{\sim}<\epsilon,$$

由 ϵ 任意性可得

$$\lim_y ||T_y f - Tf|| = 0.$$

定理 9.5 (L^p 版本黎曼引理)

设 E 是有界勒贝格可测集, $f \in L^p(E), x \in L^q[0,T], \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1$ 且 x 周期为 $T>0$, 则

$$\lim_{y\to+\infty} \int_E f(t)\, x(yt)\, dt = \frac{1}{T}\int_E f(t)\, dt \int_0^T x(t)\, dt. \tag{9.36}$$

♡

笔记 没学过实变函数的同学可以只掌握 $E=[a,b]$ 的版本.

证明 不妨设 $E=[-mT,mT], m\in\mathbb{N}$, 否则取 $[-mT,mT]$ 包含 E 且让 f 在 $[-mT,mT]\setminus E$ 上为 0 即可. 显然 x 在任何有限闭区间是 q 次绝对可积的, 现在由 Holder 不等式我们知道

$$\int_{-mT}^{mT} |f(t)\, x(yt)|\, dt \leqslant \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-mT}^{mT} |x(nt)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} = y^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-ymT}^{ymT} |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

因此(9.36)的左边积分有意义. 由

$$\int_{-mT}^{mT} |f(x)|\, dx \leqslant \left(\int_{-mT}^{mT} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-mT}^{mT} 1^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \int_0^T |x(t)|\, dt \leqslant \left(\int_0^T |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T 1^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

知(9.36)右边积分有意义.

现在让 $x(t) - \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\, ds$ 代替 x, 我们可不妨设 $\int_0^T x(s)\, ds = 0$, 只需断言

$$\lim_{y\to+\infty} \int_{-mT}^{mT} f(t)\, x(yt)\, dt = 0. \tag{9.37}$$

注意到由 Holder 不等式, 当 $y \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-mT}^{mT} f(t)\, x(yt)\, dt\right| &\leqslant \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-mT}^{mT} |x(yt)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{y}\int_{-ymT}^{ymT} |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{y}\int_{-([ym]+1)T}^{([ym]+1)T} |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2([ym]+1)}{y}\int_0^T |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2(ym+y)}{y}\int_0^T |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} = (2m+2)^{\frac{1}{q}} ||f||_p ||x||_q,
\end{aligned}$$

这里

$$||f||_p \triangleq \left(\int_{-mT}^{mT} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, ||x||_q \triangleq \left(\int_0^T |x(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由闵可夫斯基不等式, 我们知道 $||f||_p, ||x||_q$ 都满足(9.35). 定义 $T_y(f,x) \triangleq \int_{-mT}^{mT} f(t)\, x(yt)\, dt$, 于是我们知道

$$|T_y(f,x)| \leqslant (2m+2)^{\frac{1}{q}} ||f||_p ||x||_q. \tag{9.38}$$

因为定理13.49, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $g\in C_c^\infty(a,b)$ 和连续周期 T 函数 z, 使得

$$||f-g||_p < \epsilon, ||x-z||_q < \epsilon.$$

因此我们有三角不等式和(9.38)知

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|T_y\left(f,x\right)\right| &\leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|T_y\left(f,x-z\right)\right|+\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|T_y\left(f-g,z\right)\right|+\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|T_y\left(g,z\right)\right|\\ &\leqslant (2m+2)^{\frac{1}{q}}\left\|f\right\|_p\left\|x-z\right\|_q+(2m+2)^{\frac{1}{q}}\left\|f-g\right\|_p\left\|z\right\|_q\\ &\leqslant (2m+2)^{\frac{1}{q}}\epsilon\left\|f\right\|_p+(2m+2)^{\frac{1}{q}}\epsilon\left\|z\right\|_q,\end{aligned}$$

于是我们由 ϵ 任意性可得 $\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|T_y\left(f,x\right)\right|=0$, 其中 $\lim_{y\to+\infty}\left|T_y\left(g,z\right)\right|=0$ 可使用经典的黎曼引理9.2.

再来看看更强的黎曼引理:

定理 9.6

设 $E\subset\mathbb{R}$ 是可测集且 $f\in L^1\left(E\right)$, g 是定义在 $\mathbb{R}$ 的有界可测函数, 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g\left(t\right)\mathrm{d}t=A\in\mathbb{R}. \tag{9.39}$$

则我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_E f\left(y\right)g\left(xy\right)\mathrm{d}y=A\cdot\int_E f\left(y\right)\mathrm{d}y. \tag{9.40}$$

♡

笔记 注意条件(9.39)是双侧的极限条件, 实际做题的时候一般是在某个具体 E 上操作, 比如 $E=(0,+\infty)$, 此时只需要 $x\to+\infty$ 部分的极限即可, 因为你大不了在 $(-\infty,0]$ 补充定义 $g=A$, 显然这不影响题目条件和要证明的极限(9.40).

证明 和黎曼引理9.2的证明一样, 不妨设 $E=\mathbb{R}, A=0$. 注意到有估计

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\left(y\right)g\left(xy\right)\mathrm{d}y\right|\leqslant\sup\left|g\right|\cdot\left\|f\right\|_1,$$

于是由逼近结果13.49和 Friedrichs mollifier technique 知可不妨设 $f\in C_c^\infty\left(\mathbb{R}\right)$. 现在假设 $\mathrm{supp}f\subset[a,b]$. 分部积分有

$$\begin{aligned}\int_a^b f\left(y\right)g\left(xy\right)\mathrm{d}y&=\frac{1}{x}\int_{xa}^{xb}f\left(\frac{y}{x}\right)g\left(y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\int_{xa}^{xb}f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\left(\int_0^y g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)\\ &=\frac{1}{x}\left(\int_0^{xb}g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)f\left(b\right)-\frac{1}{x}\left(\int_0^{xa}g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)f\left(a\right)-\frac{1}{x^2}\int_{xa}^{xb}\left(\int_0^y g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)f'\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由条件(9.39)知

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(\int_0^{xb}g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)f\left(b\right)-\frac{1}{x}\left(\int_0^{xa}g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)f\left(a\right)\right]=0,$$

以及

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x^2}\int_{xa}^{xb}\left(\int_0^y g\left(z\right)\mathrm{d}z\right)f'\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\right|\\ &\leqslant\sup\left|f'\right|\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_{xa}^{xb}\left|\int_0^y g\left(z\right)\mathrm{d}z\right|\mathrm{d}y\\ &\overset{\text{洛必达}}{=}\sup\left|f'\right|\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|\int_0^{xb}g\left(z\right)\mathrm{d}z\right|-\left|\int_0^{xa}g\left(z\right)\mathrm{d}z\right|}{2x}\\ &=0,\end{aligned}$$

这就证明了(9.40).

来看多个周期函数的黎曼引理:

定理 9.7

设 $f_k, k=1,2,\cdots,n$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期 $T_k>0$ 的有界可测函数且满足 $\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2},\cdots,\frac{1}{T_k}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关, 则对

$g\in L^1(E)$ 我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_E\left[g(x)\cdot\prod_{k=1}^n f_k(\lambda x)\right]\mathrm{d}x=\prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\int_E g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.41}$$

♡

证明 考虑多重线性算子

$$T_\lambda(g,f_1,f_2,\cdots,f_n)\triangleq\int_E\left[g(x)\cdot\prod_{k=1}^n f_k(\lambda x)\right]\mathrm{d}x-\prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\int_E g(x)\,\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\begin{aligned}|T_\lambda(g,f_1,f_2,\cdots,f_n)|&\leqslant\int_E\left|g(x)\cdot\prod_{k=1}^n f_k(\lambda x)\right|\mathrm{d}x+\prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}|f_k(x)|\,\mathrm{d}x\right)\cdot\int_E|g(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty\cdots\|f_n\|_\infty\int_E|g(x)|\,\mathrm{d}x+\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty\cdots\|f_n\|_\infty\cdot\int_E|g(x)|\,\mathrm{d}x\\&=2\|f_1\|_\infty\|f_2\|_\infty\cdots\|f_n\|_\infty\cdot\|g\|_{L^1(E)}.\end{aligned}$$

于是由第二逼近定理13.15和阶梯函数在 $L^1(E)$ 中稠密[8]可只对 $f_k,k=1,2,\cdots$ 是三角多项式, g 是分段常值函数证明(9.41). 由线性性知只需对

$$f_k=e^{\frac{2\pi ij_k}{T_k}x},j_k\in\mathbb{Z},k=1,2,\cdots,n,g=1,m(E)<\infty$$

验证(9.41)即可.

事实上(9.41)右边为

$$\prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k}e^{\frac{2\pi ij_k}{T_k}x}\mathrm{d}x\right)\cdot\int_E g(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}m(E),&j_1=j_2=\cdots=j_n=0\\0,&\text{其他}\end{cases}.$$

(9.41)左边为

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_E\left[g(x)\cdot\prod_{k=1}^n f_k(\lambda x)\right]\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_E\prod_{k=1}^n e^{\frac{2\pi ij_k}{T_k}x}\mathrm{d}x\\&=\int_E e^{\left(\sum\limits_{k=1}^n\frac{j_k}{T_k}\right)\cdot 2\pi ix}\mathrm{d}x=\begin{cases}m(E),&j_1=j_2=\cdots=j_n=0\\0,&\text{其他}\end{cases}.\end{aligned}$$

现在我们完成了证明.

再来看看二元函数的黎曼引理:

定理 9.8 (二元函数黎曼引理)

设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的可测函数且 f 的值域含于区间 $[c,d]$, g 是可测周期 $T>0$ 函数且值域含于 $[s,t]$, 则对 $F\in C([c,d]\times[s,t])$ 和可测集 $E\subset[a,b]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E F(f(t),g(nt))\,dt=\frac{1}{T}\int_E\int_0^T F(f(x),g(y))\,dxdy. \tag{9.42}$$

♡

证明 对任何 $i,j\in\mathbb{N}_0$, 由黎曼引理9.2, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f^i(t)\,g^j(nt)\,dt=\frac{1}{T}\int_E f^i(t)\,dt\int_0^T g^j(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_E\int_0^T f^i(x)\,g^j(y)\,dydx.$$

因此当 $F(x,y)=x^iy^j$, 我们有(9.42)成立. 显然所求对线性运算封闭, 因此(9.42)对所有二元多项式 F 都成立.

[8]首先你可以用定理13.49使得 $L^1(E)$ 中的函数被有紧支撑的连续函数逼近. 然后用定理13.51可以知道阶梯函数在 $L^1(E)$ 中稠密.

由 Stone weierstrass 定理13.45, 我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在二元多项式 p, 使得 $\sup\limits_{[c,d]\times[s,t]}|F-p|<\frac{\epsilon}{|E|}$, 于是

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E F\left(f\left(t\right),g\left(nt\right)\right)dt&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E p\left(f\left(t\right),g\left(nt\right)\right)dt+\epsilon=\frac{1}{T}\int_E\int_0^T p\left(f\left(x\right),g\left(y\right)\right)dxdy+\epsilon\\&\leqslant\frac{1}{T}\int_E\int_0^T F\left(f\left(x\right),g\left(y\right)\right)dxdy+2\epsilon,\\\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E F\left(f\left(t\right),g\left(nt\right)\right)dt&\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E p\left(f\left(t\right),g\left(nt\right)\right)dt-\epsilon=\frac{1}{T}\int_E\int_0^T p\left(f\left(x\right),g\left(y\right)\right)dxdy-\epsilon\\&\geqslant\frac{1}{T}\int_E\int_0^T F\left(f\left(x\right),g\left(y\right)\right)dxdy-2\epsilon.\end{aligned}$$

于是由 ϵ 任意性可得对一般的 $F\in C\left(\left[c,d\right]\times\left[s,t\right]\right)$ 都有(9.42)成立.

我们来看定理9.8的一个数学分析考研题推论:

推论 9.1

设 $F\in C\left(\left[0,1\right]\times\left[-1,1\right]\right)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 F\left(t,\sin nt\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}F\left(x,\sin y\right)dxdy.$$

♡

例题 9.16 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上的有界内闭黎曼可积函数, 若 $b>0$ 且存在 $\mu\in\mathbb{R}$ 使得对任何 $f\in C\left[a,b\right]$ 成立

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f\left(x\right)g\left(\lambda x\right)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x.\tag{9.43}$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x g\left(y\right)\mathrm{d}y}{x}=\mu.\tag{9.44}$$

证明 考虑子区间可以不妨设 $a>0$. 在(9.43)中取 $f=1$ 并用 $g-\mu$ 代替 g 得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g\left(\lambda x\right)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b}g\left(x\right)\mathrm{d}x=0.$$

记

$$G\left(x\right)\triangleq\frac{1}{x}\int_0^x g\left(y\right)\mathrm{d}y,$$

我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[bG\left(\lambda b\right)-aG\left(\lambda a\right)\right]=0\Rightarrow\lim_{\lambda\to+\infty}\left[G\left(\lambda\right)-\frac{a}{b}G\left(\frac{a}{b}\lambda\right)\right]=0.$$

对任何 $\epsilon>0$, 存在 $X>0$, 当 $x\geqslant X$, 我们有

$$\left|G\left(x\right)-\frac{a}{b}G\left(\frac{a}{b}x\right)\right|\leqslant\epsilon.$$

现在对 $x\geqslant\frac{bX}{a}$, 我们有

$$\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}G\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}x\right)-\left(\frac{a}{b}\right)^{n}G\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}x\right)\right|\leqslant\epsilon\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1},\forall n=1,2,\cdots,n_x,$$

这里 $n_x\triangleq\left\lfloor\frac{\ln\frac{X}{x}}{\ln\frac{a}{b}}\right\rfloor$. 上式对 $n=1,2,\cdots,n_x$ 求和得

$$\left|G\left(x\right)-\left(\frac{a}{b}\right)^{n_x}G\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n_x}x\right)\right|\leqslant\epsilon\sum_{n=1}^{n_x}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\leqslant\epsilon\frac{b}{b-a}.$$

注意到

$$0<\left(\frac{a}{b}\right)^{n_x}x\leqslant\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\ln\frac{X}{x}}{\ln\frac{a}{b}}-1}x=\frac{b}{a}X,$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{n_x}G\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n_x}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{n_x}x}g\left(y\right)\mathrm{d}y\right)=0.$$

现在就有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|G\left(x\right)\right|\leqslant\epsilon\frac{b}{b-a}.$$

由 ϵ 任意性可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}G\left(x\right)=0$, 即(9.44)成立.

9.5 欧拉麦克劳林公式及其应用

在章节8.3中我们知道当处理的函数或者数列具有单调性时, 可以通过夹逼来实现积分和式的转换. 但我们现在需要处理非单调对象, 于是我们指出欧拉麦克劳林公式是真正的建立和式和积分关系的等式.

9.5.1 欧拉麦克麦克劳林公式 ♡, ♠

先来看核心等式:

命题 9.3 (0 阶欧拉麦克劳林公式)

设 $a,b\in\mathbb{Z},f\in D\left[a,b\right],f'\in L^1\left[a,b\right]$, 让我们有

$$\sum_{k=a}^{b}f\left(k\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx+\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}+\int_a^b\left(x-\left[x\right]-\frac{1}{2}\right)f'\left(x\right)dx. \tag{9.45}$$

♠

注 显然欧拉麦克劳林公式是严重超纲的, 所以不可以直接使用. 但是它的证明就是一个基本的计算, 本身经常出现在各种考试中. 所以我们只要求大家记忆并掌握命题9.3这种最基本的欧拉麦克林公式. 对于高阶的部分可以通过分部积分来得到.

笔记 在 $[0,1)$ 上 $x-[x]-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}$, 它也是 $x-\frac{1}{2}$ 做周期 1 延拓得到的函数.

证明 我们直接自然计算有

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(x-\left[x\right]-\frac{1}{2}\right)f'\left(x\right)dx&=\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1}\left(x-\left[x\right]-\frac{1}{2}\right)f'\left(x\right)dx=\sum_{k=a}^{b-1}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'\left(x+k\right)dx\\&=\sum_{k=a}^{b-1}\left[\frac{f\left(k\right)+f\left(k+1\right)}{2}-\int_0^1 f\left(k+x\right)dx\right]=\sum_{k=a}^{b-1}\left[\frac{f\left(k\right)+f\left(k+1\right)}{2}-\int_k^{k+1}f\left(x\right)dx\right]\\&=\sum_{k=a}^{b}f\left(k\right)-\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}-\int_a^b f\left(x\right)dx,\end{aligned}$$

这就得到了式(9.45).

记 $b_1\left(x\right)=x-\left[x\right]-\frac{1}{2}$, b_1 并非连续函数, 为了把 $\int_a^b\left(x-\left[x\right]-\frac{1}{2}\right)f'\left(x\right)dx$ 继续分部积分, 我们需要寻求 b_1 的原函数 b_2 使得

$$\int_a^b b_1\left(x\right)f'\left(x\right)dx=\int_a^b f'\left(x\right)db_2\left(x\right),$$

同时期望 b_2 仍然有周期 1. 因此需要

$$b_2\left(1\right)=b_2\left(0\right),b_2\left(x\right)=\int_0^x b_1\left(y\right)dy,$$

即需要 $\int_0^1 b_1\left(y\right)dy=0$. 显然

$$\int_0^1 b_1\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0$$

是自带条件. 因此 $b_2\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c,x\in[0,1)$. 如果我们想要继续分部积分, 需期望 b_3 是周期函数, 即

$b_3(1)=b_3(0)$, 就需要 $\int_0^1 b_2(x)\,dx=0$. 这样

$$\int_0^1 b_2(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c\right)dx=0\Rightarrow c=\frac{1}{12},$$

就唯一确定了 b_2. 依次下去我们给出计算 $b_n, n\in\mathbb{N}$ 的算法.

定义 9.1 ($b_n(x)$ 定义和算法)

我们令 $b_1(x)$ 为 $x-\frac{1}{2}, x\in[0,1)$ 的周期 1 延拓. 对所有 $n\in\mathbb{N}$, $b_n(x)$ 是 $b_{n-1}(x)$ 的一个原函数使得 $\int_0^1 b_n(x)\,dx=0$.

♣

注

1. 从定义可以看到 b_1 在整数点右连续但不左连续, 其余点处处连续. 因为积分必然提升正则性知 $b_n\in C^{n-2}(\mathbb{R}), n=2,3,\cdots$.
2. 容易看到 $|b_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$. 我们计算一些 b_n 以备用.

我们计算一些 b_n 以备用.

✍ **练习 9.2 $b_n(x)$ 的初等表达式** 当 $x\in[0,1)$, 有

$$b_1(x)=x-\frac{1}{2}, b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}, b_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}, b_4(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{24}-\frac{1}{720}.$$

因为 $b_n, n\in\mathbb{N}$ 都是周期 1 函数, 因此可以展开为傅立叶级数, 我们直接写出傅立叶级数结果为[9]

命题 9.4 ($b_n(x)$ 的傅立叶级数表达式)

对 $k\in\mathbb{N}$, 我们有

$$b_1(x)\sim-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}, b_{2k}(x)=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}}, b_{2k+1}(x)=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2k+1}}.$$

♠

注 $b_1(x)$ 的傅立叶级数并不总是收敛到 $b_1(x)$. 事实上, 由狄利克雷收敛定理, 我们知道

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}=\begin{cases}b_1(x), & x\text{不是整数}\\ 0, & x\text{是整数}\end{cases}.$$

推论 9.2 ($b_n(x)$ 基本性质的补充)

对每个 $k\in\mathbb{N}$, 我们有

1. $$b_{2k+1}(0)=0.$$
2. $$|b_k(x)|\leqslant\frac{2\zeta(k)}{(2\pi)^k}.$$

♡

现在就可以给出我们最终的欧拉麦克劳林公式了.

[9] 只需要算 $b_1(x)$ 的傅立叶级数, 其余 $b_n, n\geqslant 2$ 可以直接对 b_{n-1} 的傅立叶级数逐项积分得到傅立叶级数.

定理 9.9 (欧拉麦克劳林公式)

设 $a,b,m\in\mathbb{Z},m\geqslant 2,f\in D^m[a,b],f^{(m)}\in L^1[a,b]$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=a}^{b}f(k)-\int_a^b f(x)\,dx\\&=\frac{f(b)+f(a)}{2}+\sum_{k=2}^{m}\left[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right]b_k(0)+(-1)^{m+1}\int_a^b b_m(x)f^{(m)}(x)\,dx.\end{aligned}\tag{9.46}$$

♡

证明 由命题9.3, 我们知道式(9.45)成立, 即

$$\sum_{k=a}^{b}f(k)=\int_a^b f(x)\,dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b b_1(x)f'(x)\,dx.\tag{9.47}$$

现在利用 b_2 周期性和分部积分得

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)\,dx=\int_a^b f'(x)\,db_2(x)=[f'(b)-f'(a)]b_2(0)-\int_a^b b_2(x)f''(x)\,dx.$$

代入等式(9.47), 就证明了(9.46)中 $m=2$ 的情况, 类似的反复分部积分即可对一般 m 得等式(9.46). 这就完成了定理9.9的证明.

因为推论9.2中的 $b_{2k+1}(0)=0,k\in\mathbb{N}$, 我们可以将定理9.9改写为:

推论 9.3 (欧拉麦克劳林公式不同形式)

设 $a,b\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N},f\in D^{2m}[a,b],f^{(2m)}\in L^1[a,b]$, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=a}^{b}f(k)-\int_a^b f(x)\,dx\\&=\frac{f(b)+f(a)}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]b_{2k}(0)-\int_a^b b_{2m}(x)f^{(2m)}(x)\,dx.\end{aligned}\tag{9.48}$$

♡

现在来看一个最基本的应用:

例题 9.17 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k},n\to\infty$ 的渐近估计.

注 从证明可以看到, EM 公式9.9往往只能确定阶, 不能精确确定常数, 常数需要用其他方法来确定.

证明 由 EM 公式9.9, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_1^n\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}+\ln n-\int_1^\infty\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x+\int_n^\infty\frac{b_1(x)}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+C+\int_n^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}b_2(x)\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+C-\frac{b_2(n)}{n^2}-\int_n^\infty b_2(x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+C-\frac{b_2(n)}{n^2}+2\int_n^\infty\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x\\&=\ln n+\frac{1}{2n}+C+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

这里

$$\left|-\frac{b_2(n)}{n^2}+2\int_n^\infty\frac{b_2(x)}{x^3}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\sup|b_2|}{n^2}+2\sup|b_2|\cdot\int_n^\infty\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{2\sup|b_2|}{n^2}.$$

我们来看一个经典应用.

例题 9.18 设 $f\in C^1[1,+\infty)$ 且 $\int_1^\infty |f'(x)|\,dx<\infty$, 证明 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ 收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

证明 因为 $\int_1^\infty |f'(x)|\,dx<\infty$, 我们有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f'(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty} f(A)-f(1)\text{ 存在.} \tag{9.49}$$

由

$$\int_1^\infty |b_1(x)f'(x)|\,dx\overset{|b_1(x)|\leqslant\frac12}{\leqslant}\frac12\int_1^\infty |f'(x)|\,dx<\infty,$$

我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n b_1(x)f'(x)\,dx$ 存在. 由 EM 公式9.9, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{f(1)+f(n)}{2}+\int_1^n f(x)\,dx+\int_1^n b_1(x)f'(x)\,dx. \tag{9.50}$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=0$. 结合(9.49)知 $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)=0$.

在(9.50)中让 $n\to\infty$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} f(k)-\frac{f(1)}{2}-\int_1^\infty b_1(x)f'(x)\,dx.$$

对每个 $x\geqslant 1$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\leqslant x<n+1$, 我们有

$$\int_1^x f(y)\,dy=\int_1^n f(y)\,dy+\int_n^x f(y)\,dy,\left|\int_n^x f(y)\,dy\right|\leqslant\int_n^{n+1}|f(y)|\,dy\leqslant\sup_{y\geqslant n}|f(y)|.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(y)\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(y)\,dy+\lim_{x\to+\infty}\int_n^x f(y)\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(y)\,dy,$$

这就证明了 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ 收敛.

若 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ 收敛, 由结论14.3.1和(9.49)知 $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)=0$. 在(9.50)中让 $n\to\infty$, 就有

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)=\frac{f(1)}{2}+\int_1^\infty f(x)\,dx+\int_1^\infty b_1(x)f'(x)\,dx,$$

这就完成了证明.

注[*] 有同学指出想推导二元 EM 公式, 我们做一下计算: 对 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 有

$$\begin{aligned}
\int_a^b b_1(x)b_1(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\int_c^d b_1(x)b_1(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\overset{\text{EM 公式9.3}}{=}\int_a^b b_1(x)\left[\sum_{i=c}^{d}\frac{\partial f}{\partial x}(x,i)-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,d)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,c)}{2}-\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{EM 公式9.3}}{=}\sum_{j=a}^{b}\left[\sum_{i=c}^{d} f(j,i)-\frac{f(j,d)+f(j,c)}{2}-\int_c^d f(j,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{\sum\limits_{i=c}^{d}[f(b,i)+f(a,i)]-\frac{f(b,d)+f(a,d)+f(a,c)+f(b,c)}{2}-\int_c^d[f(b,y)+f(a,y)]\,\mathrm{d}y}{2}\\
&\quad-\sum_{i=c}^{d}\int_a^b f(x,i)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{f(x,d)+f(x,c)}{2}\mathrm{d}x+\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

可以看到表达式是如此复杂以至于我们没必要对此提出一套有意义的理论.

9.5.2 定积分定义型的渐近估计,♡

定积分定义型的基本模型是 $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, 即在 f 里面, k 与 n 最多要同阶. 为计算方便, 我们以在 $[0,1]$ 上的函数的积分为例, 一般情况可以通过换元 $x=a+(b-a)t$ 得到.

经典证明方法, 第一次渐近会更好用也更适合考场:

定理 9.10 (最常见定积分定义渐近估计 ♡)

设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 且导数在 $[0,1]$ 上黎曼可积, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}. \tag{9.51}$$

♡

笔记 标准的和与积分转化的思想.

证明 事实上, 由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta_{k,n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, 使得

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)}{\frac{k}{n}-x}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(\theta_{k,n})}{\frac{k}{n}-\theta_{k,n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx. \tag{9.52}$$

再由拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\eta_{k,n}\in\left[\theta_{k,n},\frac{k}{n}\right]$, 使得

$$f'(\eta_{k,n})=\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(\theta_{k,n})}{\frac{k}{n}-\theta_{k,n}}. \tag{9.53}$$

于是由(9.52)和(9.53)知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx\right)&=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)}{\frac{k}{n}-x}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(\theta_{k,n})}{\frac{k}{n}-\theta_{k,n}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(\theta_{k,n})}{\frac{k}{n}-\theta_{k,n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_{k,n})\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx\\
&=\frac{f(1)-f(0)}{2},
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号来自定积分定义[10]. 这就证明了式(9.51).

遗憾的是, 定理9.10在 f 连续时并不总是正确, 事实上

例题 9.19* 存在 $f\in C[0,1]$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx\right)$$

不存在.

证明 我们用泛函分析工具来解决这个问题, 想法参考mse.

考虑 $C[0,1]$ 上的一列连续线性泛函

$$T_n f=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)\,dx, n\in\mathbb{N}.$$

[10]非数学专业需要仔细阅读教材定积分定义, 仔细体会任意划分, 任意取点的想法.

注意到

$$\begin{aligned}|T_nf| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + n\int_0^1 |f(x)|\,dx \\ &\leqslant n\,||f||_{C[0,1]} + n\,||f||_{C[0,1]} = 2n\,||f||_{C[0,1]},\end{aligned}$$

我们有 $||T_n||_{(C[0,1])^*} \leqslant 2n$.

另外一方面, 对 $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{2n}\right)$, 考虑

$$f_{n,\epsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n}, k = 0,1,2,\cdots,n \\ -1, & \frac{k}{n} + \epsilon \leqslant x < \frac{k+1}{n} - \epsilon, k = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ \text{线性连接}. & \text{其他} \end{cases}$$

画图计算面积得 $\int_0^1 f_{n,\epsilon}(x)\,dx = -1 + 2n\epsilon$. 于是 $T_nf_{n,\epsilon} = 2n - 2n^2\epsilon$, 这就证明了 $||T_n||_{(C[0,1])^*} = 2n$. 于是由共鸣定理, 存在 $f_0 \in C[0,1]$ 使得 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_nf_0| = +\infty$. 这当然有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_0\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_0(x)\,dx\right) \text{不存在}.$$

还有一个类似的例子:

例题 9.20* 存在 $f \in C[0,1]$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

不存在.

证明 **Method 1**

构造线性泛函

$$T_n : C[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}, f \in C[0,1]$ 我们有

$$|T_n(f)| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant (2n+1)\max_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

即 T_n 是连续的.

设不交集合

$$A \triangleq \left\{\frac{k}{n+1} : k = 1,2,\cdots,n\right\}, B \triangleq \left\{\frac{k}{n} : k = 1,2,\cdots,n-1\right\}.$$

我们把集合 $S \triangleq A \bigcup B \bigcup \{0,1\}$ 排序为

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n+1} = 1$$

显然存在分段线性函数 $p \in C[0,1]$ 使得

$$p(t_i) = \begin{cases} 1, & t_i \in A \\ -1, & t_i \in B \bigcup \{0,1\} \end{cases}, i = 1,2,\cdots,2n+1.$$

于是 $T_n(p) = 2n-1$, 从而 $||T_n|| = 2n-1$.

如果对任何 $f \in C[0,1]$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(f)$ 存在. 由共鸣定理我们知道 $||T_n||$ 有界, 这就和 $||T_n|| = 2n-1$ 矛盾!. 因此我们知道满足条件的 f 存在.

Method 2

取正奇素数列 $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{p_j}<\infty$. 于是考虑

$$f(x)\triangleq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi p_j x)}{p_j}\in C[0,1].$$

现在计算得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\pi\frac{p_j}{n}k\right)=\begin{cases}0, & n\text{不整除}p_j\\ n, & n\text{整除}p_j\end{cases}.$$

对 $n\geqslant 2$ 我们要

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(2\pi\frac{p_j}{n}k\right)}{p_j}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(2\pi\frac{p_j}{n}k\right)}{p_j}=\begin{cases}1, & n=p_j,j=1,2,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

由

$$\sum_{k=1}^{p_j+1}f\left(\frac{k}{p_j+1}\right)-\sum_{k=1}^{p_j}f\left(\frac{k}{p_j}\right)=-1;$$

$$\sum_{k=1}^{p_j}f\left(\frac{k}{p_j}\right)-\sum_{k=1}^{p_j-1}f\left(\frac{k}{p_j-1}\right)=1,$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}f\left(\frac{k}{n+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

不存在.

我们还有一个不等式变形:

练习 9.3 设 $f\in D^1[0,1]$ 使得 $|f'(x)|\leqslant M,\forall x\in(0,1)$, 证明: 对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}.\tag{9.54}$$

证明 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right|&=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\overset{\text{拉中}}{\leqslant}M\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left|x-\frac{i}{n}\right|\mathrm{d}x\\ &=M\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}.\end{aligned}$$

然后我们来看真正完整的版本.

定理 9.11 (标准型定积分定义渐近估计)

设 f 在 $[0,1]$ 上 $2m$ 阶可微且 $2m$ 阶导数在 $[0,1]$ 上勒贝格可积 (非数学类视为黎曼可积或者直接连续), 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2n}+\int_0^1 f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\right)}{n^{2k}}b_{2k}(0)+o\left(\frac{1}{n^{2m}}\right),\tag{9.55}$$

笔记 为了计算方便, 我们从 $k=0$ 开始求和, 要注意区别.

证明 由 EM 公式9.3, 我们知道

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx + \frac{f(1)+f(0)}{2n} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\right)b_{2k}(0)}{n^{2k}} - \frac{1}{n^{2m+1}}\int_0^n b_{2m}(x) f^{(2m)}\left(\frac{x}{n}\right)dx \\ &\overset{x=ny}{=} \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{f(1)+f(0)}{2n} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\right)b_{2k}(0)}{n^{2k}} - \frac{1}{n^{2m}}\int_0^1 b_{2m}(nx) f^{(2m)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

利用黎曼引理9.2和 b_{2m} 是周期 1 函数, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 b_{2m}(nx) f^{(2m)}(x)\,dx = \int_0^1 b_{2m}(x)\int_0^1 f^{(2m)}(x)\,dx = 0,$$

因此我们仔细对比[11]就得到了式(9.55).

注从定理9.11的证明可以看到, 定理9.10的条件 f' 黎曼可积可以削弱为勒贝格可积且其证明方法推不出这么强的结果.

例题 9.21 二元定积分定义的渐近估计 设 $f\in C^1\left([0,1]^2\right)$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) - \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]. \tag{9.56}$$

证明 利用二元函数的 Taylor 中值定理, 积分中值定理和二重积分定义有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) - \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\left(f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)-f(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &= -\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\left(f_x(\theta_{ij},\xi_{ij})\left(x-\frac{i}{n}\right)+f_y(\theta_{ij},\xi_{ij})\left(y-\frac{j}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f_x(\theta'_{ij},\xi'_{ij})\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\left(\frac{i}{n}-x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f_y(\theta''_{ij},\xi''_{ij})\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\left(\frac{j}{n}-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{f_x(\theta'_{ij},\xi'_{ij})}{n^2}+\frac{f_y(\theta''_{ij},\xi''_{ij})}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left[f_x(x,y)+f_y(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[f(1,y)-f(0,y)\right]\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1\left[f(x,1)-f(x,0)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

9.6 渐近分析方法

9.6.1 迭代方法 ♡, ♠

例题 9.22Lampert W 的 $n\to\infty$ 设 $x_n>0$ 满足 $x_n e^{x_n}=n, n=1,2,\cdots$, 证明

$$x_n = \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right), n\to\infty.$$

[11]注意求和脚标是从 0 开始.

证明 注意到

$$1 \leqslant x_n = \ln n - \ln x_n \leqslant \ln n \Rightarrow x_n = O(\ln n), n = 3, 4, \cdots$$

于是

$$\begin{aligned}\ln x_n &= \ln\ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln\ln n - \frac{\ln x_n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln x_n}{\ln n}\right) = \ln\ln n - \frac{\ln O(\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln O(\ln n)}{\ln n}\right)\\ &= \ln\ln n - \frac{\ln\ln n + \ln O(1)}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n + \ln O(1)}{\ln n}\right)\\ &= \ln\ln n - \frac{\ln\ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right),\end{aligned}$$

即

$$x_n = \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right).$$

定义 9.2 (Lempert W 函数)

因为 xe^x 在 $[-1, +\infty)$ 严格递增, 且值域为 $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$. 由于 $(xe^x)' \neq 0, \forall x \in (-1, +\infty)$, 由反函数定理13.8, 我们确定了 $W_0 \in C^\infty(-1, +\infty)$ 是 xe^x 反函数. 又由导数极限定理12.2容易证明 $W_0 \in C^\infty[-1, +\infty)$. 由于 xe^x 实解析, 故 W_0 也实解析. 且在 $x = 0$ 附近有

$$W_0(x) \overset{\text{拉格朗日反演9.14}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\zeta^n}{(\zeta e^{\zeta})^n}\right]^{(n-1)}\Big|_{\zeta=0} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n. \tag{9.57}$$

♣

注因为(9.57)两边都定义的实解析函数且在 $x = 0$ 附近恒等, 由实解析函数零点孤立性19.7, 我们知道(9.57)左右两端在有意义的情况下是恒等的, 而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{n!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \overset{\text{结论8.2}}{=} e,$$

我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$ 收敛半径为 $\frac{1}{e}$. 又由9.4, 我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left(\pm\frac{1}{e}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2\pi n}},$$

从而我们有(9.57)在 $x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ 恒成立.

9.6.2 幂级数方法

核心是利用幂级数系数的阶蕴含和函数的阶, 即定理19.1.

例题 9.23

1. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot x^n \sim \frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x}, x \to 1^-. \tag{9.58}$$

2. 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \sim \frac{1}{(1-x)\ln\frac{1}{1-x}}, x \to 1^-. \tag{9.59}$$

证明

1. 由例题8.6, 我们有

$$\ln n \sim 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \to \infty.$$

现在用幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\cdot x^n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x},x\to1^-,$$

这就证明了(9.58).

2. 不方便直接寻找可以计算出和函数的 $\frac{1}{\ln n}$ 的等价量, 于是我们考虑

$$-\ln(1-x)\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\right)x^n.$$

一方面

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\geqslant\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(n-1)}\overset{\text{例题8.6}}{\sim}\frac{\ln(n-2)}{\ln(n-1)}\sim1,n\to\infty.$$

另外一方面, 对任何 $\epsilon>0$, 我们考虑

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}&=\sum_{2\leqslant k\leqslant\epsilon n}\frac{1}{(n-k)\ln k}+\sum_{\epsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\\&\leqslant\frac{1}{(1-\epsilon)n}\sum_{2\leqslant k\leqslant\epsilon n}\frac{1}{\ln k}+\sum_{\epsilon n\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(\epsilon n)}\\&\leqslant\frac{1}{(1-\epsilon)n}\frac{\epsilon n}{\ln 2}+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(\epsilon n)}\\&\overset{\text{例题8.6}}{\sim}\frac{1}{1-\epsilon}\frac{\epsilon}{\ln 2}+\frac{\ln n}{\ln(\epsilon n)}\to\frac{1}{\ln 2}\frac{\epsilon}{1-\epsilon}+1,n\to\infty.\end{aligned}$$

于是我们由 ϵ 任意性有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}=1.$$

从而由幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1得(9.59).

例题 9.24 证明:

$$\lim_{y\to1^-}\frac{1}{\ln(1-y)}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}}=-\frac{1}{2}.\tag{9.60}$$

证明 利用 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}x^k$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2x^2)}}&=\int_0^1\frac{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}y^{2k}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}y^{2k}\int_0^1\frac{(2k-1)!!\cdot x^{2k}}{2^k k!\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}y^{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\sin^{2k}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2y^{2k}\overset{\bigstar}{\sim}\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}y^{2k}\\&\sim-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)\sim-\frac{1}{2}\ln(1-y),y\to1^-,\end{aligned}$$

这里 ★ 来自 Wallis 公式9.18和幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1.

例题 9.25 设

$$a_0=1,a_1=\frac{5}{4},a_n=\frac{(2n+3)a_{n-1}+(2n-3)a_{n-2}}{4n},n=2,3,\cdots.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

笔记 从证明可以看到本题实质上是通过幂级数法求出了 a_n 的通项. 此外考虑 $\frac{1}{1-x}f(x)$ 的幂级数并用 Cauchy 积可以导出 $\sum_{k=0}^{n} a_k$ 的信息.

证明 注意到递推是多项式系数, 因此生成级数法一定适用. 考虑 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则有

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4na_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n+3)a_{n-1} + (2n-3)a_{n-2}\right] x^n.$$

整理得[12]

$$\left(2x^2+2x^3-4x\right) f'(x) + \left(5x+x^2\right) f(x) = 0, f(0)=1, f'(0)=\frac{5}{4}.$$

解可分离变量微分方程得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x+2}}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) x^n,$$

这里用到了幂级数的 Cauchy 积19.1以及[13]

$$\sqrt{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow \sqrt{3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

现在我们关心我们很难求出 f 的幂级数的系数情况.

例题 9.26 设 $a_1=0, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{2n}, n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi e}}$.

注本过程缺乏 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 存在性.

证明 事实上考虑 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n} x^n,$$

从而

$$\frac{f(x)}{x^2} - 1 = \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{f(y)}{y} dy.$$

即转化为微分方程

$$\left(2x^2-2x\right) f'(x) = \left(-x^2+2x-4\right) f(x), f''(0)=2.$$

解得

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-\frac{x}{2}}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们知道

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}, (1-x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

运用幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1和 Wallis 公式9.18, 我们知道

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}, f(x) \sim e^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{3}{2}}, a_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi e}}\sqrt{n}.$$

那么如何严格说明这件事情呢? 实际上这并非总是可以做到的, 本题就只能继续硬着头皮展开 f 而得到 a_n 通项来严格证明. 不管如何这也是一个猜答案的绝佳方法.

[12] 计算细节可以在18.1节中训练.

[13] $\sqrt{x+2}$ 收敛半径为 2.

我们来看一个绝对严格的例子.

例题 9.27* 设 $a_1=1$, 对于 $n>1$, 有递推

$$a_n=\frac{1}{n!}+\frac{a_1}{(n-1)!}+\frac{a_2}{(n-2)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{1!},$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\ln^n 2\cdot a_n=\frac{1}{2\ln 2}.$$

笔记 核心想法即减去奇项来变得解析, 从而可以用收敛半径公式.

证明 注意到 a_n 的递推是一个 Cauchy 乘积, 如果我们令 $a_0=1$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, 那么我们有 $f(x)(e^x-1)=f(x)-1$, 即 $f(x)=\frac{1}{2-e^x}$, 注意到 f 在 $|z|<\ln 2$ 解析且除 $z=\ln 2$ 外, 在 $|z|=\ln 2$ 没有其他奇点, 我们由

$$\frac{1}{2-e^z}=\frac{1}{2(\ln 2-z)}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

以及

$$\frac{1}{2(\ln 2-z)}=\frac{1}{2\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\ln^n 2},$$

知存在 $\epsilon>0$, 使得 $f(z)-\frac{1}{2(\ln 2-z)}$ 在 $|z|<\ln 2+\epsilon$ 解析, 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_n-\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{1}{\ln^n 2}\right|}\leqslant\frac{1}{\ln 2+\epsilon},$$

从而对任何 $\eta>0$, 当 n 充分大, 我们有

$$\left|\ln^n 2\cdot a_n-\frac{1}{2\ln 2}\right|\leqslant\left(\frac{\ln 2}{\ln 2+\epsilon}+\ln 2\cdot\eta\right)^n,$$

选取 $\eta>0$ 使得 $\frac{\ln 2}{\ln 2+\epsilon}+\ln 2\cdot\eta<1$, 我们就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\ln^n 2\cdot a_n=\frac{1}{2\ln 2}.$$

9.6.3 傅立叶型积分渐近方法

9.6.4 正常傅立叶积分渐近方法 ♡

对于正常的函数 f 的积分 $\int_a^b f(x)\sin nxdx$ 渐近展开可以通过反复分部积分来完成. 于是我们不作讨论. 对于其余情况, 我们先来看两个特例, 他们都可以求通项.

例题 9.28

1. 证明 $\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}dx=\ln n+2\ln 2+\gamma+o(1),n\to\infty.$
2. 证明 $\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx=n\pi+o(1),n\to\infty.$

证明

$$\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x-y)\sin(x+y).\tag{9.61}$$

1. 利用公式(9.61), 我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\sin[(2n+1)x]dx=\frac{2}{2n+1},n\in\mathbb{N}_0.$$

于是利用欧拉常数定义8.6, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}dx&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}=2\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\&=2\ln(2n)+2\gamma-\ln n-\gamma+o(1)=\ln n+2\ln 2+\gamma+o(1).\end{aligned}$$

2. 利用公式(9.61), 我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin^2((n-1)x)}{\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}dx.$$

又

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}2\cos(2nx)\,dx=0,n\in\mathbb{N}.$$

故

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\pi,$$

从而

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin^2((n-1)x)}{\sin^2 x}dx=\pi,n\in\mathbb{N}.$$

我们就有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx=n\pi.$$

例题 9.29 证明

1. $\int_0^x\frac{\sin^2 y}{y}dy=\frac{1}{2}\ln x+\frac{\gamma+\ln 2}{2}+o(1),x\to+\infty.$
2. $\int_0^x\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-\frac{\cos x}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),x\to+\infty.$
3. $\int_0^x\frac{\sin^2 y}{y^2}dy=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),x\to+\infty.$
4. $\int_0^x\frac{\sin^4 y}{y}dy=\frac{3}{8}\ln x+\frac{3\gamma+2\ln 2}{8}+o(1),x\to+\infty.$
5. $\int_0^x\frac{\sin^4 y}{y^2}dy=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),x\to+\infty.$
6. $\int_0^x\frac{\sin^4 y}{y^4}dy=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{8x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right),x\to+\infty.$
7. $\int_0^x\frac{\sin^3 y}{y^3}dy=\frac{3\pi}{8}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),x\to+\infty.$
8. $\int_0^x\frac{\sin^3 y}{y}dy=\frac{\pi}{4}+O\left(\frac{1}{x}\right),x\to+\infty.$
9. $\int_0^x\frac{\sin^4 y}{y^3}dy=\ln 2-\frac{3}{16x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),x\to+\infty.$
10. $\int_0^x\frac{\sin^3 y}{y^2}dy=\frac{3\ln 3}{4}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),x\to+\infty.$
11. $\int_0^x\frac{1-e^{-y}}{y}dy=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{xe^x}\right),x\to+\infty.$
12. $\int_0^x\frac{1-e^{-y}}{y}dy=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{xe^x}\right),x\to+\infty.$

笔记 证明的想法就是把奇点分开之后分部积分. 不必纠结具体积分计算, 主要是知道个阶的估计即可.

证明

1. 读者可以计算[14]有

$$\int_0^1\frac{\sin^2 y}{y}dy+\frac{\sin 2}{4}-\frac{1}{4}\int_1^{\infty}\frac{\sin(2y)}{y^2}dy=\frac{\ln 2+\gamma}{2},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{\sin^2 y}{y}dy&=\int_0^1\frac{\sin^2 y}{y}dy+\int_1^x\frac{\sin^2 y}{y}dy\\&=\int_0^1\frac{\sin^2 y}{y}dy+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{1-\cos(2y)}{y}dy\\&=\int_0^1\frac{\sin^2 y}{y}dy+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\int_1^x\frac{1}{y}d\sin(2y)\\&=\int_0^1\frac{\sin^2 y}{y}dy+\frac{1}{2}\ln x-\frac{\sin(2x)}{4x}+\frac{\sin 2}{4}-\frac{1}{4}\int_1^x\frac{\sin(2y)}{y^2}dy\\&=\int_0^1\frac{\sin^2 y}{y}dy+\frac{1}{2}\ln x+\frac{\sin 2}{4}-\frac{1}{4}\int_1^{\infty}\frac{\sin(2y)}{y^2}dy+o(1)\\&=\frac{\ln(2x)+\gamma}{2}+o(1),\end{aligned}$$

[14]不是积分爱好者可以不必算积分, 只需要知道是个数字即可.

因此我们证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \frac{\sin^2 y}{y}dy-\ln\sqrt{x}\right)=\frac{\ln 2+\gamma}{2}.$$

2. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
3. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
4. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
5. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
6. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
7. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
8. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
9. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
10. 随着次数增高，计算越来越复杂，思想上就是降次之后分部积分来得到阶. 方法同第一问，我们略去中间几个的计算.
11. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-e^{-y}}{y}dy&=\int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy+\int_1^x \frac{1-e^{-y}}{y}dy\\&=\ln x+\int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy-\int_1^x \frac{e^{-y}}{y}dy\\&=\ln x+\int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy-\int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy+\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy\\&=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{xe^x}\right),\end{aligned}$$

其中

$$\gamma=\int_0^1 \frac{1-e^{-y}}{y}dy-\int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy.$$

例题 9.30* 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\sin^4(nx)}{\sin^4 x}dx=\ln 2\cdot n^2+\frac{1}{4}\ln n+\frac{6\gamma+4\ln 2+5}{24}+o(1),n\to\infty.$$

笔记 诚然，读者可以通过 Stolz 或者直接求出积分值的方法来估计本题的阶，但是我们这里想呈现一般方法. 具体考试中往往直接 stolz 或者求出积分就够用了. 一句话来说，就是把 $\frac{1}{\sin^4 x}$ 在 $x=0$ 洛朗展开[15]，展开的阶数越高，我们得到的阶越高.

证明 运用

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{3x}\right|=0,$$

[15]没学过洛朗展开也不要紧，我们可以通过求极限或者常除法来确定.

对充分小的 $c>0$, 我们有

$$\left|\frac{x}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{3x}\right|\leqslant 1, x\in[0,c].$$

由黎曼引理9.2, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\sin^4(nx)}{\sin^4 x}dx=\frac{3}{8}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^4 x}dx,$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^c x\frac{\sin^4(nx)}{\sin^4 x}dx&\leqslant\int_0^c\frac{\sin^4(nx)}{x^3}dx+\frac{2}{3}\int_0^c\frac{\sin^4(nx)}{x}dx+\int_0^c\sin^4(nx)\,dx\\&\leqslant n^2\int_0^{nc}\frac{\sin^4(x)}{x^3}dx+\frac{2}{3}\int_0^{nc}\frac{\sin^4(x)}{x}dx+c\\&\overset{9.29}{=}n^2\left(\ln 2-\int_{nc}^{\infty}\frac{\sin^4(x)}{x^3}dx\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}\ln(nc)+\frac{3\gamma+2\ln 2}{8}\right)+c+o(1)\\&=\ln 2\cdot n^2-\int_c^{\infty}\frac{\sin^4(nx)}{x^3}dx+\left(\frac{1}{4}\ln(nc)+\frac{\gamma+\frac{2\ln 2}{3}}{4}\right)+c+o(1)\\&=\ln 2\cdot n^2-\frac{3}{16c^2}+\left(\frac{1}{4}\ln(nc)+\frac{\gamma+\frac{2\ln 2}{3}}{4}\right)+c+o(1),\end{aligned}$$

利用

$$\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^4 x}dx=c\left(\frac{\cot^3(c)}{3}+\cot(c)\right)+\frac{\cot^2(c)}{6}-\frac{2}{3}\ln\frac{\sin(c)}{c}-\frac{2}{3}\ln c,$$

我们有

$$\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{16c^2}+\frac{\ln c}{4}+\frac{3}{8}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^4 x}dx\right)=\frac{5}{24}.$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{\sin^4(nx)}{\sin^4 x}dx-\ln 2\cdot n^2-\frac{1}{4}\ln n\right)\leqslant\frac{\gamma+\frac{2\ln 2}{3}}{4}+\frac{5}{24},$$

类似的

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{\sin^4(nx)}{\sin^4 x}dx-\ln 2\cdot n^2-\frac{1}{4}\ln n\right)\geqslant\frac{\gamma+\frac{2\ln 2}{3}}{4}+\frac{5}{24},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{\sin^4(nx)}{\sin^4 x}dx-\ln 2\cdot n^2-\frac{1}{4}\ln n\right)=\frac{6\gamma+4\ln 2+5}{24}.$$

例题 9.31* 设 $f\in C^2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 计算

$$\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{f(0)}{2c}+\frac{f'(0)}{2}\ln c+\frac{1}{2}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}dx\right).$$

证明 记 $a=f(0), b=f'(0)$, 我们有

$$\frac{1}{2}\left(\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{a+bx}{\sin^2 x}dx\right)=\frac{1}{4}(2(a+bc)\cot c-2b\ln(\sin c))=-\frac{b}{2}\ln c+\frac{b}{2}+\frac{a}{2c}+O(c).$$

因此

$$\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{f(0)}{2c}+\frac{f'(0)}{2}\ln c+\frac{1}{2}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}dx\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-a-bx}{\sin^2 x}dx+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\sin^2 x}dx+\frac{f'(0)}{2}.$$

例题 9.32* 设 $f(x)\in C^2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx-\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f'(0)}{2}\ln n\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\sin^2 x}dx+\frac{f'(0)}{2}(1+\gamma+\ln 2).$$

证明 对任意 $\epsilon>0$, 存在充分小的 $c\in(0,\frac{\pi}{2})$, 我们

$$\left|\frac{f(x)}{\sin^2 x}-\frac{f(0)}{x^2}-\frac{f'(0)}{x}-\frac{f(0)}{3}-\frac{f''(0)}{2}\right|\leqslant\epsilon, x\in[0,c],$$

现在我们有

$$\int_c^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(nx)\frac{f(x)}{\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}dx+o(1),$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^c\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx\\
&\leqslant\int_0^c\sin^2(nx)\left(\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2}\right)dx+\frac{\pi}{2}\epsilon\\
&=\int_0^c\sin^2(nx)\left(\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}\right)dx+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c+\frac{\pi}{2}\epsilon+o(1)\\
&=nf(0)\int_0^{nc}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+f'(0)\int_0^{nc}\frac{\sin^2 x}{x}dx+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c+\frac{\pi}{2}\epsilon+o(1)\\
&=\frac{\pi f(0)}{2}n-nf(0)\int_{nc}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+f'(0)\int_0^{nc}\frac{\sin^2 x}{x}dx+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c+\frac{\pi}{2}\epsilon+o(1)\\
&=\frac{\pi f(0)}{2}n-f(0)\int_c^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{x^2}dx+\frac{f'(0)}{2}(\ln(2nc)+\gamma)+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c+\frac{\pi}{2}\epsilon+o(1)\\
&=\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f(0)}{2c}+\frac{f'(0)}{2}(\ln(2nc)+\gamma)+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c+\frac{\pi}{2}\epsilon+o(1).
\end{aligned}$$

类似的我们有

$$\int_0^c\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx\geqslant\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f(0)}{2c}+\frac{f'(0)}{2}(\ln(2nc)+\gamma)+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c-\frac{\pi}{2}\epsilon+o(1),$$

即

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx-\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f'(0)}{2}\ln(2n)\right)\\
&\leqslant-\frac{f(0)}{2c}+\frac{f'(0)}{2}(\ln(c)+\gamma)+\frac{1}{2}(\frac{f(0)}{3}+\frac{f''(0)}{2})c+\frac{1}{2}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}dx+\frac{\pi}{2}\epsilon,
\end{aligned}$$

令

$$\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{f(0)}{2c}+\frac{f'(0)}{2}\ln c+\frac{1}{2}\int_c^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sin^2 x}dx\right)=A,$$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx-\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f'(0)}{2}\ln(2n)\right)\leqslant\frac{f'(0)}{2}\gamma+A,$$

容易由另外一个不等式得到下极限的不等式, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx-\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f'(0)}{2}\ln(2n)\right)=\frac{f'(0)}{2}\gamma+A.$$

应用例题9.31, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}f(x)\,dx-\frac{\pi f(0)}{2}n-\frac{f'(0)}{2}\ln n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)\,x}{\sin^2 x}dx+\frac{f'(0)}{2}(1+\gamma+\ln 2).$$

这样就完成了证明.

来看奇异形傅立叶型积分的渐近方法, 我们仅援引北京大学期中数学分析全军覆没的例子.

9.6.5 奇异型傅立叶积分渐近方法 *

例题 9.33 一个特殊函数 对任何 $[a,b]$, 存在函数 $v\in C^\infty[a,b]$ 使得

1. $v(a)=1, v(b)=0$;
2. $v^{(j)}(a)=v^{(j)}(b)=0, \forall j\in\mathbb{N}$

证明 例如 $v(x)=1+\left(e^{\frac{1}{x-b}}-1\right)e^{-\frac{e^{\frac{1}{x-b}}}{x-a}}$.

例题 9.34* 对 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}, \rho\in\mathbb{R}$, 定义函数

$$I_\alpha(\rho)=\int_{-1}^1 e^{i\rho t}\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt.$$

证明存在只依赖 α 的常数 C, 使得

$$|I_\alpha(\rho)|\leqslant C(1+|\rho|)^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

笔记 处理奇异型傅立叶积分, 需要引入中和函数, 即例9.33. 中和函数的边界性态非常好.

证明 利用被积函数的奇偶性质, 我们知道

$$I_\alpha(\rho)=\int_{-1}^1 e^{i\rho t}\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt=2\int_0^1\cos(|\rho|t)\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt,$$

于是不妨假设 $\rho>0$. 当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$, 对 $[a,b]=[0,1]$, 引入 v 如例9.33, 注意到

$$2\int_0^1\cos(\rho t)\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-v(t))\,dt+2\int_0^1\cos(\rho t)\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}v(t)\,dt=2A+2B.$$

记

$$\varphi(t)=(1+t)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-v(t)), \phi(t)=\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}v(t).$$

注意到

$$|B|=\left|\int_0^1\cos(\rho t)\phi(t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{\rho}\int_0^1\sin(\rho t)\phi'(t)\,dt\right|,$$

因此

$$|B|\leqslant\frac{1}{\rho}\int_0^1|\phi'(t)|\,dt=O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{9.62}$$

以及

$$A=\int_0^1\cos(\rho t)(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}\varphi(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)\,d\left(\int_{-\infty}^t\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right)$$
$$=\left(\int_{-\infty}^1\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right)\varphi(1)-\int_0^1\varphi'(t)\left(\int_{-\infty}^t\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right)dt$$
$$=\left(\int_{-\infty}^1\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right)2^{\alpha-\frac{1}{2}}-\int_0^1\varphi'(t)\left(\int_{-\infty}^t\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right)dt,$$

然后由第二积分中值定理积分中值定理, 我们知道

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{t}\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right| &= \overline{\lim_{c\to-\infty}}\left|\int_{c}^{t}\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right| \\ &= \overline{\lim_{c\to-\infty}}\left|(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}\int_{\theta(c)}^{t}\cos(\rho x)dx\right| \leqslant \frac{2(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\rho}.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\left|\int_0^1\varphi'(t)\left(\int_{-\infty}^{t}\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right)dt\right| \leqslant \frac{2}{\rho}\int_0^1|\varphi'(t)|(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt = O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{9.63}$$

此外

$$\int_{-\infty}^{1}\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx = \int_0^{\infty}\frac{\cos(\rho-\rho x)}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}dx = \rho^{-\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\rho-x)}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}dx,$$

于是我们有

$$\left|\int_{-\infty}^{1}\cos(\rho x)(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx\right| \leqslant \rho^{-\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}dx = O\left(\rho^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right),\rho\to+\infty. \tag{9.64}$$

结合(9.62),(9.63),(9.64), 我们知道

$$|I_\alpha(\rho)| \leqslant 2|A|+2|B| = O\left(\rho^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right),\rho\to+\infty,$$

这就完成了证明.

接下来我们来看一个一般化的结果, 他需要读者熟悉复分析.

引理 9.3

设 f 是区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}^2$ 的邻域上的全纯函数, 一元函数 g 在 (a,b) 上是一个复值可微函数. 若

$$f'(x) = g'(x),\forall x\in(a,b). \tag{9.65}$$

则存在 $c\in\mathbb{C}$, 使得

$$f(x) = g(x)+c,\forall x\in(a,b).$$

♡

笔记 注意到 $f'(x)$ 是作为解析函数的导数.

证明 设

$$f(x,y) = u(x,y)+iv(x,y),u,v\text{是二元可微实值函数},$$

于是根据全纯函数的导数公式, 我们知道

$$f'(x,y) = u_x(x,y)+iv_x(x,y).$$

代入 $y=0$ 得

$$f'(x) = u_x(x,0)+iv_x(x,0),\forall x\in(a,b). \tag{9.66}$$

由(9.65)和(9.66)知

$$f'(x) = u_x(x,0)+iv_x(x,0) = g'(x),\forall x\in(a,b),$$

于是存在 $c\in\mathbb{C}$ 使得

$$u(x,0)+iv(x,0)+c = g(x),\forall x\in(a,b).$$

故

$$f(x)+c = g(x),\forall x\in(a,b).$$

考虑 $x>0,\lambda>0,\alpha\in\mathbb{R}$, 为了求 $f(t) = e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}$ 的一个原函数, 我们考虑复积分定义的解析函数

$$I^1f(z) = \int_{z+\infty i}^{z}e^{ix\sigma}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}d\sigma \triangleq \lim_{t\to+\infty}\int_{z+ti}^{z}e^{ix\sigma}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}d\sigma,\Re z>\alpha. \tag{9.67}$$

这里积分路近是沿着过 $z+ti, t\geqslant 0$ 进行.

为了说明(9.67)定义是良定的, 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_{z+ti}^{z}e^{ix\sigma}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}d\sigma &= i\lim_{t\to+\infty}\int_{t}^{0}e^{ix(z+hi)}(z+hi-\alpha)^{\lambda-1}dh\\ &= -ie^{ixz}\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}e^{-hx}(z+hi-\alpha)^{\lambda-1}dh,\end{aligned}$$

且

$$\left[I^{1}f(z)\right]'=e^{ixz}(z-\alpha)^{\lambda-1},\Re z>\alpha.$$

于是我们知道 $\left[I^{1}f(t)\right]'=f(t),\forall t>\alpha$, 从而由引理9.3知 $I^{1}f(t)$ 是 $f(t)$ 在 $(\alpha,+\infty)$ 一个原函数.

现在

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}I^{1}f(u) &= \lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}\int_{u+\infty i}^{u}e^{ix\sigma}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}d\sigma = i\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}\int_{\infty}^{0}e^{ix(u+hi)}(u+hi-\alpha)^{\lambda-1}dh\\ &= -i\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}e^{ixu}\int_{0}^{\infty}e^{-xh}(u+hi-\alpha)^{\lambda-1}dh = -ie^{ix\alpha}\int_{0}^{\infty}e^{-xh}(hi)^{\lambda-1}dh\\ &= -ie^{ix\alpha}e^{(\lambda-1)\frac{\pi}{2}i}\int_{0}^{\infty}e^{-xh}h^{\lambda-1}dh = -\frac{i\Gamma(\lambda)}{x^{\lambda}}e^{ix\alpha}e^{(\lambda-1)\frac{\pi}{2}i}.\end{aligned}$$

一般的我们可以考虑

$$I^{n}f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{z+\infty i}^{z}(z-\sigma)^{n-1}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}e^{ix\sigma}d\sigma,\Re z>\alpha,n=1,2,\cdots.$$

注意到

$$\frac{d^{n}}{dz^{n}}I^{n}f(t)=(t-\alpha)^{\lambda-1}e^{ixt},t>\alpha,$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}I^{n}f(u) &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}\int_{u+\infty i}^{u}(u-\sigma)^{n-1}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}e^{ix\sigma}d\sigma\\ &= \frac{i}{(n-1)!}\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}\int_{\infty}^{0}(u-u-hi)^{n-1}(u+hi-\alpha)^{\lambda-1}e^{ixu}e^{-hx}dh\\ &= \frac{i(-1)^{n}e^{ix\alpha}}{(n-1)!}\int_{0}^{\infty}(hi)^{n+\lambda-2}e^{-hx}dh\\ &= \frac{i(-1)^{n}e^{ix\alpha+\frac{(n+\lambda-2)\pi}{2}i}}{(n-1)!x^{n+\lambda-1}}\int_{0}^{\infty}h^{n+\lambda-2}e^{-h}dh\\ &= \frac{i(-1)^{n}e^{ix\alpha+\frac{(n+\lambda-2)\pi}{2}i}\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!x^{n+\lambda-1}}.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}|I^{n}f(z)| &= \frac{1}{(n-1)!}\left|\int_{z+\infty i}^{z}(z-\sigma)^{n-1}(\sigma-\alpha)^{\lambda-1}e^{ix\sigma}d\sigma\right|\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left|\int_{0}^{\infty}(z-z-hi)^{n-1}(z+hi-\alpha)^{\lambda-1}e^{ixz}e^{-xh}dh\right|\\ &\leqslant \frac{e^{\Re(ixz)}}{(n-1)!}\int_{0}^{\infty}|z+hi-\alpha|^{\lambda-1}h^{n-1}e^{-xh}dh.\end{aligned}$$

当 $z\in\mathbb{R}$ 且 $z>\alpha,\lambda\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}|I^{n}f(z)| &\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{\infty}\left[(z-\alpha)^{2}+h^{2}\right]^{\frac{\lambda-1}{2}}h^{n-1}e^{-xh}dh\\ &\leqslant \frac{|z-\alpha|^{\lambda-1}}{(n-1)!}\int_{0}^{\infty}h^{n-1}e^{-xh}dh = \frac{|z-\alpha|^{\lambda-1}}{x^{n}}.\end{aligned}$$

当 $z\in\mathbb{R}$ 且 $z>\alpha,\lambda\in[1,+\infty)$, 利用对每一个 $\gamma\geqslant 0$, 都有 $C_\gamma>0$ 使得[16]

$$(x+y)^\gamma\leqslant C_\gamma\left(x^\gamma+y^\gamma\right),\forall x,y\geqslant 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|I^nf(z)\right|&\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty\left[(z-\alpha)^2+h^2\right]^{\frac{\lambda-1}{2}}h^{n-1}e^{-xh}dh\\&\leqslant C_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{|z-\alpha|^{\lambda-1}}{(n-1)!}\int_0^\infty h^{n-1}e^{-xh}dh+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty h^{\lambda+n-2}e^{-xh}dh\right)\\&=C_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{|z-\alpha|^{\lambda-1}}{x^n}+\frac{\Gamma(\lambda+n-1)}{x^{\lambda+n-1}(n-1)!}\right).\end{aligned}$$

整理一下我们得到: 对 $t>\alpha$ 有

$$\left|I^nf(t)\right|\leqslant\begin{cases}\frac{|t-\alpha|^{\lambda-1}}{x^n}, & \forall\lambda\in(0,1)\\ C_{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{|t-\alpha|^{\lambda-1}}{x^n}+\frac{\Gamma(\lambda+n-1)}{x^{\lambda+n-1}(n-1)!}\right), & \forall\lambda\in[1,+\infty)\end{cases};\tag{9.68}$$

$$\lim_{u\to\alpha,u\in\mathbb{R}}I^nf(u)=\frac{e^{ix\alpha+\frac{\lambda}{2}\pi i-\frac{(n+1)\pi}{2}i}\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!x^{n+\lambda-1}}.\tag{9.69}$$

于是我们可以得到第一个命题:

命题 9.5

设复值 $\phi\in C^m[\alpha,\beta]$ 且

$$\phi^{(n)}(\beta)=0,n=0,1,2,\cdots,m-1,\tag{9.70}$$

则对 $\lambda>0$ 有

$$\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi(t)\,dt=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!x^{n+\lambda}}e^{ix\alpha+\frac{\lambda}{2}\pi i+\frac{n\pi i}{2}}\phi^{(n)}(\alpha)+O\left(\frac{1}{x^m}\right),x\to+\infty.\tag{9.71}$$

证明 继续延用上述讨论的符号, 我们分部积分知道

$$\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi(t)\,dt=\left(\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\phi^{(n)}(t)I^{n+1}f(t)\right)|_\alpha^\beta+(-1)^m\int_\alpha^\beta\phi^{(m)}(t)I^mf(t)\,dt.$$

一方面运用(9.68)知当 $x\to+\infty$, 我们有

$$\left|(-1)^m\int_\alpha^\beta\phi^{(m)}(t)I^mf(t)\,dt\right|\leqslant\begin{cases}x^{-m}\int_\alpha^\beta\left|\phi^{(m)}(t)\right|(t-\alpha)^{\lambda-1}\,dt, & \lambda\in(0,1)\\ C_{\frac{\lambda-1}{2}}x^{-m}\int_\alpha^\beta\left|\phi^{(m)}(t)\right|\left(|t-\alpha|^{\lambda-1}+\frac{\Gamma(\lambda+m-1)}{x^{\lambda-1}(m-1)!}\right)dt, & \lambda\in[1,+\infty)\end{cases}=O\left(x^{-m}\right).$$

另外一方面, 运用(9.70)和(9.69)知

$$\left(\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\phi^{(n)}(t)I^{n+1}f(t)\right)|_\alpha^\beta=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{e^{ix\alpha+\frac{\lambda}{2}\pi i+\frac{n\pi}{2}i}\Gamma(n+\lambda)}{n!x^{n+\lambda}}\phi^{(n)}(\alpha).$$

于是我们得到了(9.71).

命题 9.6

设复值函数 $\phi\in C^m[\alpha,\beta]$ 且

$$\phi^{(n)}(\alpha)=0,n=0,1,2,\cdots,m-1,\tag{9.72}$$

则对 $\lambda>0$ 有

$$\int_\alpha^\beta e^{ixt}(\beta-t)^{\lambda-1}\phi(t)\,dt=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!x^{n+\lambda}}e^{ix\beta-\frac{\lambda}{2}\pi i+\frac{n\pi i}{2}}\phi^{(n)}(\beta)+O\left(\frac{1}{x^m}\right),x\to+\infty.\tag{9.73}$$

[16]可设 $y=wx,w\in[0,+\infty)$ 来转化为关于 w 的不等式. 可以通过对 w 求导证明. 如果不关心 C_γ 精确值, 也可以直接从极限存在和函数必有界的分析角度得到 C_γ 存在性.

证明 做换元 $\beta-t=s-\alpha$, 即 $t=\alpha+\beta-s$, 则我们有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta e^{ixt}(\beta-t)^{\lambda-1}\phi(t)\,dt&=\int_\alpha^\beta e^{ix(\alpha+\beta-s)}(s-\alpha)^{\lambda-1}\phi(\alpha+\beta-s)\,ds\\&=\int_{-\beta}^{-\alpha}e^{ix(\alpha+\beta+s)}(-s-\alpha)^{\lambda-1}\phi(\alpha+\beta+s)\,ds\\&=e^{ix(\alpha+\beta)}\overline{\int_\alpha^\beta e^{ixs}(s-\alpha)^{\lambda-1}\overline{\phi(\alpha+\beta-s)}ds}\\&\overset{(9.71)}{=}e^{ix(\alpha+\beta)}\overline{\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!x^{n+\lambda}}e^{ix\alpha+\frac{\lambda}{2}\pi i+\frac{n\pi i}{2}}(-1)^n\overline{\phi^{(n)}(\beta)}+O\left(\frac{1}{x^m}\right)}\\&=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!x^{n+\lambda}}e^{ix\beta-\frac{\lambda}{2}\pi i+\frac{n\pi i}{2}}\phi^{(n)}(\beta)+O\left(\frac{1}{x^m}\right),\end{aligned}$$

这就完成了(9.73)的证明.

最后我们将给出本子节的主要结果.

定理 9.12 (奇异型傅立叶积分渐近展开)

设复值函数 $\phi\in C^m[\alpha,\beta]$ 则对 $\lambda,\mu>0$ 有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t)\,dt&=O\left(\frac{1}{x^m}\right)\\&+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)e^{\frac{n\pi i}{2}}}{n!x^{n+\lambda}}\left\{e^{ix\alpha+\frac{\lambda\pi}{2}i}[(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t)]^{(n)}|_{t=\alpha}+e^{ix\beta-\frac{\mu\pi}{2}i}[(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi(t)]^{(n)}|_{t=\beta}\right\}\end{aligned}$$

♡

证明 对 $[a,b]=[\alpha,\beta]$ 取 v 如例9.33, 考虑

$$\phi_1(t)=v(t)(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t),\phi_2(t)=(1-v(t))(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi(t),$$

则

$$\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t)\,dt=\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi_1(t)\,dt+\int_\alpha^\beta e^{ixt}(\beta-t)^{\mu-1}\phi_2(t)\,dt.\tag{9.74}$$

注意到 v 的边界信息, 对每个 $n\in\mathbb{N}_0$, 求导有

$$\begin{aligned}\frac{d^n\phi_1}{dt^n}|_{t=\alpha}&=[(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t)]^{(n)}|_{t=\alpha},\frac{d^n\phi_1}{dt^n}|_{t=\beta}=0;\\\frac{d^n\phi_2}{dt^n}|_{t=\beta}&=[(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi(t)]^{(n)}|_{t=\beta},\frac{d^n\phi_2}{dt^n}|_{t=\alpha}=0.\end{aligned}\tag{9.75}$$

因此我们对(9.74)中的两项分别用命题9.5和9.6知

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t)\,dt&=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)e^{\frac{n\pi i}{2}}}{n!x^{n+\lambda}}\left[e^{ix\alpha+\frac{\lambda\pi}{2}i}\phi_1^{(n)}(\alpha)+e^{ix\beta-\frac{\mu\pi}{2}i}\phi_2^{(n)}(\beta)\right]+O\left(\frac{1}{x^m}\right)\\&\overset{(9.75)}{=}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(n+\lambda)e^{\frac{n\pi i}{2}}}{n!x^{n+\lambda}}\left\{e^{ix\alpha+\frac{\lambda\pi}{2}i}[(\beta-t)^{\mu-1}\phi(t)]^{(n)}|_{t=\alpha}+e^{ix\beta-\frac{\mu\pi}{2}i}[(t-\alpha)^{\lambda-1}\phi(t)]^{(n)}|_{t=\beta}\right\}+O\left(\frac{1}{x^m}\right).\end{aligned}$$

从定理9.12我们可得到例9.34的加强. 设整数 $m>\alpha+\frac{1}{2}$ 并运用定理9.12, 就知道我们对任何 $\alpha>-\frac{1}{2}$, 都有

$$I_\alpha(\rho)=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)2^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\rho^{\alpha+\frac{1}{2}}}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}-\rho+\frac{\pi}{4}\right)+o\left(\frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right),\rho\to+\infty.$$

9.6.6 逼近方法

例题 9.35 设 $f\in R[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2x}dx=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

证明 我们先对一切多项式 $f\in\mathbb{R}[x]$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

由线性性质知我们只需对 $f=x^m,m=0,1,\cdots$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^m\sqrt{n}}\int_0^n\frac{x^m}{1+n\cos^2 x}dx=\frac{1}{m+1}.$$

我们实际上可以证明更强的

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^y\frac{x^m}{1+y\cos^2 x}dx=\frac{1}{m+1}. \tag{9.76}$$

事实上, 对每个 $y\geqslant\pi$, 存在唯一的 $k\in\mathbb{N}$, 使得

$$k\pi\leqslant y<(k+1)\pi.$$

于是我们就有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{((k+1)\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^{k\pi}\frac{x^m}{1+(k+1)\pi\cos^2 x}dx\leqslant\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^y\frac{x^m}{1+y\cos^2 x}dx$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^y\frac{x^m}{1+y\cos^2 x}dx\leqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^{(k+1)\pi}\frac{x^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx.$$

现在

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^{(k+1)\pi}\frac{x^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\sum_{j=0}^{k}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\frac{x^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx\\
&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\sum_{j=0}^{k}\int_0^{\pi}\frac{(x+j\pi)^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx\geqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\sum_{j=0}^{k}\int_0^{\pi}\frac{(j\pi)^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx\\
&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{k}j^m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+k\pi\cos^2 x}dx=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{k}j^m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+1+k\pi}d\tan x\\
&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{k}j^m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^2+1+k\pi}dt=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{k}\frac{j^m\pi}{\sqrt{1+k\pi}}\\
&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^{m+1}}\sum_{j=0}^{k}j^m=\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}.
\end{aligned}$$

类似的可证明

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^{(k+1)\pi}\frac{x^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx\leqslant\frac{1}{m+1}.$$

因此

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^{(k+1)\pi}\frac{x^m}{1+k\pi\cos^2 x}dx=\frac{1}{m+1}.$$

类似的可证明

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{((k+1)\pi)^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^{k\pi}\frac{x^m}{1+(k+1)\pi\cos^2 x}dx=\frac{1}{m+1}.$$

于是我们对 $f=x^m,m=0,1,\cdots$ 证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^m\sqrt{n}}\int_0^n\frac{x^m}{1+n\cos^2 x}dx=\frac{1}{m+1}.$$

对一般的黎曼可积函数 f, 利用定理13.50, 我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在多项式 $p,q\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$\int_0^1 p(x)-q(x)\,dx<\epsilon,q(x)\leqslant f(x)\leqslant p(x),\forall x\in[0,1].$$

于是

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2 x}dx\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{q\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2 x}dx=\int_0^1 q(x)\,dx\geqslant\int_0^1 f(x)\,dx-\epsilon\\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2 x}dx\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{p\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2 x}dx=\int_0^1 p(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx+\epsilon\end{aligned}.$$

由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^n\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

我们完成了证明.

定理 9.13

设 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}\subset[0,1]$, 下述结论等价

1.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi kix_j}}{n}=0,\forall k\in\mathbb{N}. \tag{9.77}$$

2. 对任何复值函数 $f\in R[0,1]$, 都有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}f(x_j)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{9.78}$$

♡

证明 由对任何复值函数 $f\in R[0,1]$, 都有(9.78)成立推(9.77)成立是显然的. 现在假定(9.77)成立. 对固定的黎曼可积函数 f, 显然分为实部虚部可不妨设 f 实值. 显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi kix_j}}{n}=\begin{cases}0, & k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ 1, & k=0\end{cases}.$$

用黎曼可积的上下逼近[17]13.16, 我们知道(9.77)和(9.78)当然是等价的.

我们计算一些基本等式备用.

命题 9.7 (∗)

记

$$p\in\mathbb{N},A_{n,m}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^m,m=1,2,\cdots,$$

则我们有

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^p dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n^p}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}\frac{p!}{k_1!\cdots k_n!(mk_1+1)\cdots(mk_n+1)}; \tag{9.79}$$

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{m+1}; \tag{9.80}$$

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^2 dx_1\cdots dx_n=\frac{\frac{n}{2m+1}+\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}}{n^2}; \tag{9.81}$$

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^3 dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n^3}\left(\frac{n}{3m+1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}+\frac{3n(n-1)}{(2m+1)(m+1)}\right). \tag{9.82}$$

♠

[17]这也表明为什么本题不能推广到勒贝格可积的情况.

证明 对每个 $p\in\mathbb{N}$, 运用n 项式展开, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^p dx_1\cdots dx_n&=\frac{1}{n^p}\int_{[0,1]^n}\left(\sum_{k=1}^n x_k^m\right)^p dx_1\cdots dx_n\\&=\frac{1}{n^p}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}\frac{p!}{k_1!\cdots k_n!}\int_{[0,1]^n}x_1^{mk_1}\cdots x_n^{mk_n}dx_1\cdots dx_n\\&=\frac{1}{n^p}\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}\frac{p!}{k_1!\cdots k_n!\left(mk_1+1\right)\cdots\left(mk_n+1\right)}.\end{aligned}$$

如此操作难以继续给出阶的估计. 因此我们只手算几个备用我们有

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^2 dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n^2}\int_{[0,1]^n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{2m}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_i^m x_j^m\right)dx_1\cdots dx_n=\frac{\frac{n}{2m+1}+\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}}{n^2}.$$

类似的打开计算有

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^3 dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n^3}\left(\frac{n}{3m+1}+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{\left(m+1\right)^3}+\frac{3n\left(n-1\right)}{\left(2m+1\right)\left(m+1\right)}\right).$$

$$\int_{[0,1]^n}A_{n,m}^4 dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n}{4m+1}+\frac{4n\left(n-1\right)}{\left(3m+1\right)\left(m+1\right)}+\frac{3n\left(n-1\right)}{\left(2m+1\right)^2}+\frac{6n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{\left(2m+1\right)\left(m+1\right)^2}+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{\left(m+1\right)^4}\right)\tag{9.83}$$

例题 9.36 一类经典多重积分的渐近估计

设 $f\in C\left[0,1\right]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)dx=f\left(\frac{1}{2}\right).\tag{9.84}$$

证明 **Method 1** 注意到

$$\left|\int_{[0,1]^n}f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)dx\right|\leqslant 2\left\|f\right\|_\infty,\left\|f\right\|_\infty\triangleq\sup_{[0,1]}\left|f\right|,$$

于是考虑

$$T_nf=\int_{[0,1]^n}\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx,$$

就有

$$\left|T_nf-0\right|\leqslant 2\left\|f\right\|_\infty.$$

由章节9.4的 Friedrichs mollifier technique 和 sw 定理13.45, 注意到 $\operatorname{span}\left\{e^{\lambda x}:\lambda\in\mathbb{N}\right\}$ 满足 sw 定理条件, 因此我们只需对 $f\left(x\right)=e^{\lambda x},\lambda\in\mathbb{N}$ 去证明(9.84).

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}e^{\frac{\lambda(x_1+\cdots+x_n)}{n}}dV=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 e^{\frac{\lambda x}{n}}dx\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}}-1\right)\right)^n=e^{\frac{\lambda}{2}},$$

这就证明了不等式(9.84).

Method 2 本质方法: 即等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}A_n^2dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[0,1]^n}A_ndx\right)^2.\tag{9.85}$$

对于本题而言, $A_n=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, 由命题9.7知(9.85)成立. 现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $0\leqslant\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\delta$ 就有

$$\left|f\left(x\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\epsilon.$$

现在

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n}\left|f\left(A_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx&=\int_{\left|A_n-\frac{1}{2}\right|\leqslant\delta}\left|f\left(A_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx+\int_{\left|A_n-\frac{1}{2}\right|>\delta}\left|f\left(A_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx\\&\leqslant\epsilon+\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{\delta^2}\int_{\left|A_n-\frac{1}{2}\right|>\delta}\left|A_n-\frac{1}{2}\right|^2dx\\&\leqslant\epsilon+\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{\delta^2}\int_{[0,1]^n}\left|A_n-\frac{1}{2}\right|^2dx\\&=\epsilon+\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{\delta^2}\left(\int_{[0,1]^n}A_n^2dx-\int_{[0,1]^n}A_ndx+\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

所以由(9.85)我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\left|f\left(A_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx=0,$$

这就完成了证明.

例题 9.37* 设 $f\in C^2\left[0,1\right]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{[0,1]^n}\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx=\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{24}.\tag{9.86}$$

证明 设

$$K_nf=n\int_{[0,1]^n}\left[f\left(A_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)-f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(A_n-\frac{1}{2}\right)-\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2\right]dx.$$

注意到由命题9.7和 Taylor 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\left|K_nf\right|&=n\left|\int_{[0,1]^n}\left[\frac{f''\left(\theta\right)-f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2\right]dx\right|\\&\leqslant n\left\|f''\right\|_\infty\int_{[0,1]^n}\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{\left\|f''\right\|_\infty}{12}.\end{aligned}$$

记 $\left\|f\right\|_X=\left\|f''\right\|_\infty$.

由章节9.4的 Friedrichs mollifier technique 和 sw 定理13.45, 注意到 $M=\operatorname{span}\left\{e^{\lambda x}:\lambda\in\mathbb{N}\right\}$ 满足 sw 定理条件, 因此对 $\epsilon>0$, 取 $h=\sum c_je^{\lambda_jx}\in M$ 使得

$$\left\|f''-h\right\|_\infty<\epsilon,$$

那么可取 $g=\sum\frac{c_j}{\lambda_j^2}e^{\lambda_jx}\in M$ 使得

$$\left\|f-g\right\|_X=\left\|f''-h\right\|_\infty<\epsilon.$$

现在只需对 $e^{\lambda x},\lambda\in\mathbb{N}$ 验证(9.86). 注意到

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{[0,1]^n}\left[e^{\lambda A_n}-e^{\frac{\lambda}{2}}\right]dx=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(\frac{n}{\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}}-1\right)\right)^n-e^{\frac{\lambda}{2}}\right)=\frac{1}{24}\lambda^2e^{\frac{\lambda}{2}},$$

这就证明了(9.86).

例题 9.38 设 $\beta_n\to0$, 函数 f 在 $[-1,2]$ 有界, $[0,1]$ 黎曼可积, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nf\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1f\left(x\right)dx.$$

证明 当 $f\in C[-1,2]$ 时, 由一致连续性, 对任意 $\epsilon>0$, 当 n 充分大, 对每个 $k=1,2,\cdots,n$, 必有

$$\left|f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\epsilon,$$

这样就是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left|f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\epsilon=\epsilon.$$

现在假定 $f\in R[-1,2]$, 对任何 $\epsilon>0$, 由定理13.50知存在 $g,h\in C[-1,2]$, 使得

$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\int_0^1 g(x)\,dx-\epsilon\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\int_0^1 h(x)\,dx+\epsilon,$$

那么

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 g(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx+\epsilon\\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)&\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 h(x)\,dx\geqslant\int_0^1 f(x)\,dx-\epsilon\end{aligned},$$

由 ϵ 任意性, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

对于题目中的情形, 我们可以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant -n\beta_n\text{或}n\geqslant k\geqslant n(1-\beta_n)}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\right|\leqslant\sup_{[-1,2]}|f|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2|-n\beta_n|+1}{n}=0,$$

即在 $[0,1]$ 外 f 的值修正为 0 仍然不影响极限, 因此我们完成了证明.

9.7 数列极限技巧 ♠,♡

9.7.1 上下极限技巧

上下极限技巧是解决极限问题的重要, 强大, 且简洁的方法.

例题 9.39 类递增模型 ♡

1. 设 $c_1,c_2>0,c_{n+2}=\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n},n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.
2. 设 $a_k\in(0,1),1\leqslant k\leqslant 2021$ 且

$$(a_{n+2021})^{2022}=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+2020},n=1,2,\cdots,$$

这里 $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

笔记 此类问题一般先定界, 显然两边取上下极限即可, 难度不大.

证明

1. 取 $M=\max\{4,c_1,c_2\}$. 显然当 $n=1,2$ 时, $c_n\leqslant M$. 若 $c_j\leqslant M,j=1,2,\cdots,n+1$, 则

$$c_{n+2}=\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}\leqslant\sqrt{M}+\sqrt{M}=2\sqrt{M}\leqslant M.$$

于是容易由数学归纳法知 $0\leqslant c_n\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$. 类似的读者可以证明 c_n 有正下界.

记

$$A\triangleq\overline{\lim_{n\to\infty}}c_n,B\triangleq\underline{\lim_{n\to\infty}}c_n,$$

然后在递推两边取上极限就有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}c_{n+2}&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}\right)\\&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{c_{n+1}}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{c_n}\\&=2\sqrt{A},\end{aligned}$$

于是 $A\leqslant 2\sqrt{A}$, 两边取下极限就有

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} c_{n+2} &= \varliminf_{n\to\infty}\left(\sqrt{c_{n+1}}+\sqrt{c_n}\right)\\ &\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt{c_{n+1}}+\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{c_n}\\ &=2\sqrt{B},\end{aligned}$$

于是 $B\geqslant 2\sqrt{B}$. 因此 $4\leqslant B\leqslant A\leqslant 4$, 这就给出了

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A = B = 4.$$

2. 记 $M=\max\left\{2021^{\frac{1}{2021}}, a_1, a_2, \cdots, a_{2021}\right\}$, 相似 1 我们可以证明

$$0<a_n\leqslant M, \forall n\in\mathbb{N}.$$

现在完全类似 1 的证明, 记

$$A\triangleq \varlimsup_{n\to\infty} a_n, B\triangleq \varliminf_{n\to\infty} a_n,$$

则有

$$\begin{aligned}A^{2022}&\leqslant \underbrace{A+A+\cdots+A}_{2021个}=2021A\\ B^{2022}&\geqslant \underbrace{B+B+\cdots+B}_{2021个}=2021B\end{aligned}.$$

和 1 一致的, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2021^{\frac{1}{2021}}$.

例题 9.40 类递减模型

1. 设 $a_1,a_2>0, a_{n+2}=\frac{2}{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.
2. 设 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}, a_1,a_2>0, n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

笔记 此类问题一定要记住, 隔项抽子列. 如果不记住做题时会难以想到. 同样的一开始要定界.

证明

1. 取 $M>0$, 使得 $\frac{1}{M}\leqslant a_1,a_2\leqslant M$, 读者可以类似例9.39的方法归纳证明得 $\frac{1}{M}\leqslant a_n\leqslant M, \forall n\in\mathbb{N}$.

设

$$B\triangleq \varlimsup_{n\to\infty} a_n, A\triangleq \varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

我们有

$$\begin{aligned}B=\varlimsup_{n\to\infty} a_{n+2}&=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{2}{a_n+a_{n+1}}=\frac{2}{\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1})}\leqslant\frac{2}{\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}=\frac{1}{A},\\ A=\varliminf_{n\to\infty} a_{n+2}&=\varliminf_{n\to\infty}\frac{2}{a_n+a_{n+1}}=\frac{2}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1})}\geqslant\frac{2}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}=\frac{1}{B},\end{aligned}$$

因此 $AB=1$.

笔记 然后是最困难的一步, 即跨一项取子列.

取一个子列 a_{n_k} 使得[18]

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k+2}=A, \lim_{k\to\infty} a_{n_k+1}=\ell_1, \lim_{k\to\infty} a_{n_k}=\ell_2, \lim_{k\to\infty} a_{n_k-1}=\ell_3. \tag{9.87}$$

注意到 $a_{n_k+2}=\frac{2}{a_{n_k}+a_{n_k+1}}$, 结合(9.87), 我们知道

$$A=\frac{2}{\ell_1+\ell_2}\geqslant\frac{2}{2B}=A,$$

[18]许多同学会问如果我取了 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k+2}=A$, 那你不能保证剩下那三个子列收敛, 实际上如果剩下那三个子列不收敛, 我们可以利用有界必有收敛子列7.1继续抽子列, 不妨设仍然记为同一个子列即可.

于是不等式放缩之后却没有放, 因此 $\ell_1=\ell_2=B$. 同样的考虑 $a_{n_k+1}=\frac{2}{a_{n_k}+a_{n_k-1}}$, 结合(9.87), 我们知道

$$\ell_1=B=\frac{2}{\ell_2+\ell_3}\leqslant\frac{2}{2A}=B,$$

同样的放缩之后没有放, 因此 $\ell_2=\ell_3=A$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A=B=1.$$

2. 完全类似的可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$. 即取 $M>0$ 充分大使得 $\frac{2}{M}<a_1,a_2<M$. 现在归纳可得 $\frac{2}{M}<a_n<M,\forall n\in\mathbb{N}$.

设

$$B\triangleq\varlimsup_{n\to\infty}a_n,A\triangleq\varliminf_{n\to\infty}a_n.$$

我们有

$$B=\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+2}=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n}+\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}=\frac{2}{A},$$

$$A=\varliminf_{n\to\infty}a_{n+2}=\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}+\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n}+\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}=\frac{2}{B},$$

因此 $AB=2$.

笔记 然后是最困难的一步, 即跨一项取子列.

取一个子列 a_{n_k} 使得

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k+2}=A,\lim_{k\to\infty}a_{n_k+1}=\ell_1,\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\ell_2,\lim_{k\to\infty}a_{n_k-1}=\ell_3.\tag{9.88}$$

注意到由(9.88)得

$$A=\lim_{k\to\infty}a_{n_k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n_k}}+\frac{1}{a_{n_k+1}}\right)=\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}\geqslant\frac{2}{B}=A,$$

我们知 $\ell_1=\ell_2=B$.

再注意到由(9.88)得

$$B=\ell_1=\lim_{k\to\infty}a_{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n_k}}+\frac{1}{a_{n_k-1}}\right)=\frac{1}{\ell_2}+\frac{1}{\ell_3}\leqslant\frac{2}{A}=B,$$

我们知道 $\ell_2=\ell_3=A$.

现在我们就知道

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A=B=\sqrt{2}.$$

例题 9.41 设 $A,B>0,a_1>A$ 以及

$$a_{n+1}=A+\frac{B}{a_n},n\in\mathbb{N},$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 归纳可得 $A<a_n<A+\frac{B}{A},\forall n\in\mathbb{N}$, 于是我们设

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=L,\varliminf_{n\to\infty}a_n=l>0.$$

现在

$$L=\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+1}=A+\varlimsup_{n\to\infty}\frac{B}{a_n}=A+\frac{B}{l};$$

$$l=\varliminf_{n\to\infty}a_{n+1}=A+\varliminf_{n\to\infty}\frac{B}{a_n}=A+\frac{B}{L},$$

即

$$Ll=Al+B=AL+B\Rightarrow l=L\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2},$$

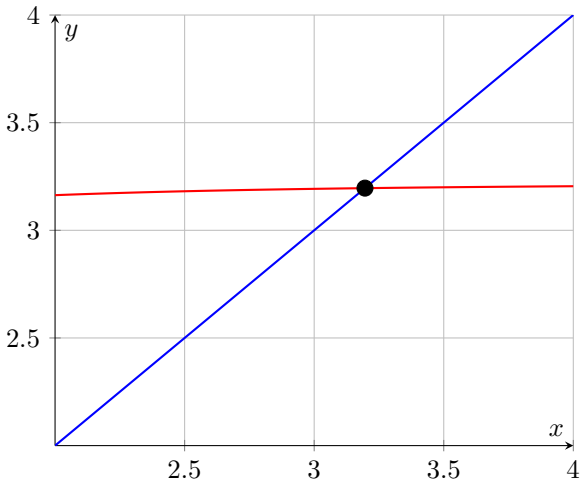
这里 $\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}$ 是 $t=A+\frac{B}{t}$ 的根.

例题 9.42 设

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{3},x_{n+2}=3+\frac{1}{x_{n+1}^2}+\frac{1}{x_n^2},n=1,2,\cdots,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注



证明 记 $x_0>0$ 满足 $x_0=3+\frac{2}{x_0^2}$. 注意到 $3\leqslant x_n\leqslant 3+\frac{2}{9},\forall n\geqslant 5$, 于是记

$$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n>0,B=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n>0,$$

就有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_{n+2}=3+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}+\frac{1}{x_n^2}\right)\leqslant 3+\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_{n+1}^2}+\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n^2},$$

于是 $A\leqslant 3+\frac{2}{B^2}$. 又注意到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_{n+2}=3+\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}+\frac{1}{x_n^2}\right)\geqslant 3+\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_{n+1}^2}+\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n^2},$$

于是就有 $B\geqslant 3+\frac{2}{A^2}$. 故[19]

$$B\geqslant 3+\frac{2}{A^2}\geqslant 3+\frac{2}{\left(3+\frac{2}{B^2}\right)^2}\Rightarrow B\geqslant x_0.$$

另外一方面有

$$3\leqslant A\leqslant 3+\frac{2}{B^2}\leqslant 3+\frac{2}{\left(3+\frac{2}{A^2}\right)^2}\Rightarrow A\leqslant x_0.$$

于是我们就有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A=B=x_0.$$

此类问题还有一种方法:

例题 9.43 设

$$a_1=a>0,a_2=b>0,a_{n+2}=2+\frac{1}{a_{n+1}^2}+\frac{1}{a_n^2},n=1,2,\cdots.$$

[19]几何上可以看函数图像, 代数上可以注意到

$$x-3-\frac{2}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}=\frac{\left(9x^2-2x+6\right)\left(x^3-3x^2-2\right)}{\left(3x^2+2\right)^2}.$$

证:$\{a_n\}$ 收敛.

证明 首先

$$a_{n+2}=2+\frac{1}{a_{n+1}^2}+\frac{1}{a_n^2}\geqslant 2, n=1,2,\cdots,$$

然后

$$a_{n+2}\leqslant 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}, n=3,4,\cdots.$$

于是当 $n\geqslant 6$, 我们有

然后

$$\begin{aligned}|a_{n+2}-a_{n+1}|&=\left|\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}\right|=|a_{n-1}-a_{n+1}|\cdot\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_{n+1}^2a_{n-1}^2}\\&\leqslant|a_{n-1}-a_{n+1}|\cdot\frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}{2^2\cdot 2^2}=\frac{5}{16}|a_{n-1}-a_{n+1}|\\&\leqslant\frac{5}{16}|a_{n-1}-a_n|+\frac{5}{16}|a_n-a_{n+1}|.\end{aligned}$$

取定 $c>1$ 使得 $c^2+c<\frac{16}{5}$. 设

$$c_n\triangleq c^n|a_{n-1}-a_n|,$$

由刚才得到的不等式我们有

$$c_{n+2}\leqslant\frac{5c^2}{16}c_n+\frac{5c}{16}c_{n+1}.$$

归纳可得

$$c_n\leqslant\max\{c_6,c_7\},$$

然后记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(c^n|a_n-a_{n-1}|\right)=L\geqslant 0,$$

我们有

$$L\leqslant\left(\frac{5c^2}{16}+\frac{5c}{16}\right)L\Rightarrow L=0.$$

现在由比较判别法和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n-1}-a_n|}{\left(\frac{1}{c}\right)^n}=0$$

我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n\text{存在}.$$

9.7.2 二次复合技巧

本部分证明方法未必是最简洁的, 但却是最一般且普适的.

例题 9.44

1. 设 $c\in(0,1), x_1\in(0,1), x_{n+1}=c\left(1-x_n^2\right), n=1,2,\cdots, x_1\neq c\left(1-x_1^2\right)$, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在性.
2. 设 $x_1=\frac{c}{2}\geqslant -2, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(c+x_n^2\right), n=1,2,\cdots$, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛情况.

笔记 二次复合的关键是看 $f(f(x))$ 会不会产生位于初值之间的增根.

证明

1. 归纳容易证明 $0\leqslant x_n\leqslant c<1, \forall n\in\mathbb{N}$, 于是 x_n 落在函数 $f(x)=c\left(1-x^2\right)$ 的递减区间. 因此直接计算表

明[20]

$$f\left(f\left(x\right)\right)-x=-\left(cx^2+x-c\right)\left(c^2x^2-cx+1-c^2\right). \tag{9.89}$$

注意到

$$cx^2+x-c=c\left(x-t_0^1\right)\left(x-t_0^2\right),t_0^1=\frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c},t_0^2=\frac{-\sqrt{1+4c^2}-1}{2c},$$

于是

$$f\left(f\left(x\right)\right)-x=-c\left(x-t_0^1\right)\left(x-t_0^2\right)\left(c^2x^2-cx+1-c^2\right). \tag{9.90}$$

Step 1

当 $4c^2-3<0\Leftrightarrow c<\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $c^2x^2-cx+1-c^2=0$ 无解, 此时 $c^2x^2-cx+1-c^2>0$, 因此从式(9.90)可以看到, 如果 $x_1>t_0^1$ 则 $x_3<x_1$, 由结论8.4.1, 我们知道 x_n 所有奇子列递减有下界 t_0^1, 所有偶子列递增有上界 t_0^1, 而 $f\left(f\left(x\right)\right)-x$ 没有在 $[x_2,x_1]$ 产生增根, 因此 x_n 奇偶子列都会收敛于 t_0^1, 从而由命题7.4知 x_n 收敛于 t_0^1. 如果 $x_1<t_0^1$ 则 $x_3>x_1$, 由结论8.4.1, 我们知道 x_n 奇子列递增有上界 t_0^1, 所有偶子列递减有上界 t_0^1, 而 $f\left(f\left(x\right)\right)-x$ 没有在 $[x_1,x_2]$ 产生增根, 因此 x_n 奇偶子列都会收敛于 t_0^1, 从而由命题7.4知 x_n 收敛于 t_0^1.

Step 2

当 $4c^2-3=0\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2},t_0^1=t_1=t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 于是式(9.90)变成

$$f\left(f\left(x\right)\right)-x=-c^3\left(x-t_0^1\right)^3\left(x-t_0^2\right). \tag{9.91}$$

此时和 **Step 1** 完全一致的讨论单调性即得 x_n 收敛于 t_0^1.

Step 3

当 $4c^2-3>0\Leftrightarrow c>\frac{\sqrt{3}}{2}$, 方程 $c^2x^2-cx+1-c^2=0$ 的解为 $t_1=\frac{1-\sqrt{4c^2-3}}{2c},t_2=\frac{1+\sqrt{4c^2-3}}{2c}$, 于是式(9.90)变为

$$f\left(f\left(x\right)\right)-x=-c^3\left(x-t_0^1\right)\left(x-t_0^2\right)\left(x-t_1\right)\left(x-t_2\right). \tag{9.92}$$

由

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+4c^2}-1-\left(1-\sqrt{4c^2-3}\right)=\sqrt{1+4c^2}+\sqrt{4c^2-3}-2>0,\\
&\sqrt{1+4c^2}-1-\left(1+\sqrt{4c^2-3}\right)=\frac{4}{\sqrt{1+4c^2}+\sqrt{4c^2-3}}-2<\frac{4}{\sqrt{1+0}+0}-2=0,\\
&1-\sqrt{4c^2-3}<1-\sqrt{4\cdot1^2-3}=0,
\end{aligned}$$

我们得到 $0<t_1<t_0^1<t_2$. 因为 x_{2n-1} 一定收敛于 x_1 附近的不动点, 因此 $x_1\geqslant t_2$ 和 $x_1\leqslant t_1$ 时, 数列都是发散的. 当 $t_1<x_1<t_0^1$, 由式(9.92)知 $x_3<x_1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=t_1$. 当 $t_0^1<x_1<t_2$, 由式(9.92)知 $x_3>x_1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=t_2$. 于是无论如何 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq t_0^1$, 因此 x_n 不收敛.

结合 **Step 1**,**Step 2**,**Step 3**, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在等价于 $0<c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在时有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}.$$

2. 考虑 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(c+x^2\right)$, 当 $c>1$, 则 f 无不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 发散.

   当 $0\leqslant c\leqslant1$, 由折线图[21]可以判断 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-c}$.

   当 $-4\leqslant c<0$, 注意到

   $$\frac{c}{2}\leqslant1-\sqrt{1-c},\forall c\leqslant1,$$

   由折线图容易知道[22]我们有 $x_n\leqslant0,\forall n\in\mathbb{N}$, 因此 x_n 落在 f 递减区间, 需要考虑二次复合.

[20]注意到 $t_0=f\left(t_0\right)\Rightarrow t_0=f\left(f\left(t_0\right)\right)$, 因此 $f\left(f\left(x\right)\right)-x$ 必然含有因子 $x-c\left(1-x^2\right)$, 这样就容易得到证明中的因式分解.

[21]读者应该自行用单调性语言来翻译.

[22]你要会用单调性语言严格叙述

我们有

$$f(x)-x=\frac{1}{2}\left(x-t_0^1\right)\left(x-t_0^2\right),t_0^1=1-\sqrt{1-c},t_0^2=1+\sqrt{1-c},$$

$$f(f(x))-x=\frac{\left(x^2-2x+c\right)\left(x^2+2x+4+c\right)}{8}=\frac{\left(x-t_0^1\right)\left(x-t_0^2\right)\left(x^2+2x+4+c\right)}{8}. \tag{9.93}$$

当 $c\in(-3,0)$, 方程 $x^2+2x+4+c=0$ 无解, 因此 $x^2+2x+4+c>0$, 从而由式(9.93), 当 $x_1>t_0^1$ 则 $x_3<x_1$, 由结论8.4.1, 我们知道 x_n 所有奇子列递减有下界 t_0^1, 所有偶子列递增有上界 t_0^1, 而 $f(f(x))-x$ 没有在 $[x_2,x_1]$ 产生增根, 因此 x_n 奇偶子列都会收敛于 t_0^1, 从而由命题7.4知 x_n 收敛于 t_0^1. 如果 $x_1<t_0^1$ 则 $x_3>x_1$, 由结论8.4.1, 我们知道 x_n 所有奇子列递增有上界 t_0^1, 所有偶子列递减有上界 t_0^1, 而 $f(f(x))-x$ 没有在 $[x_1,x_2]$ 产生增根, 因此 x_n 奇偶子列都会收敛于 t_0^1, 从而由命题7.4知 x_n 收敛于 t_0^1.

当 $c=-3$, 则式(9.93)变成

$$f(f(x))-x=(x-3)(x+1)^3. \tag{9.94}$$

和 $c\in(-3,0)$ 时类似的讨论知, x_n 收敛于 t_0^1.

当 $c\in[-4,-3)$, 则式(9.93)变成

$$f(f(x))-x=\frac{\left(x-t_0^1\right)\left(x-t_0^2\right)(x-t_1)(x-t_2)}{8},t_2=\sqrt{-c-3}-1,t_1=-\sqrt{c-3}-1. \tag{9.95}$$

由

$$\begin{aligned}&\sqrt{-c-3}-1-\left(1-\sqrt{1-c}\right)=\sqrt{-c-3}+\sqrt{1-c}-2>0,\\&-\sqrt{-c-3}-1-\left(1-\sqrt{1-c}\right)=\frac{4}{\sqrt{1-c}+\sqrt{-c-3}}-2<\frac{4}{\sqrt{1+3}+\sqrt{3-3}}-2=0,\\&\sqrt{-c-3}-1\leqslant\sqrt{4-3}-1=0,\end{aligned}$$

知 $t_1<t_0^1<t_2\leqslant 0$. 完全类似于第 1 题的讨论, 我们知道此时 x_n 奇偶子列趋于不同的值, 因此我们证明了 $c\in[-3,1]$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-c}$, 而 $c\in[-4,-3)\bigcup(1,+\infty)$, 数列 x_n 发散.

作为训练, 我们来看一个经典野题:

✍ **练习 9.4*** 设 $x>0$, 求 $x,x^x,x^{x^x},\cdots$ 收敛时 x 的范围.

证明 设 $x_1=x,x_{n+1}=x^{x_n},n=1,2,\cdots$, 当 $x\geqslant 1$ 时我们知道递推函数 $f_x(y)=x^y$ 单调递增, 因此由结论8.4.1, 我们知道 x_n 一定单调且和不动点大小关系恒定.

由 $\frac{\ln y}{y}\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ 知当 $x\geqslant 1$ 时, 必须有 $x\in\left[1,e^{\frac{1}{e}}\right]\subset[1,e)$ 才存在 $y>0$ 满足 $\ln x=\frac{\ln y}{y}$. 而 $x\in\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$ 时 $\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x}{x}\leqslant\ln x$, 从而 $x\leqslant f_x$ 的在 $[1,e)$ 的不动点. 现在 x_n 单调有界, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

重点和难点是 $x\in(0,1)$ 的情况, 此时 $f_x(y)$ 是单调递减且 $f_x(y)$ 的唯一不动点落在 $(0,1)$ 并记为 y_x. 我们运用结论8.4.1, 此时 f_x 递减且

$$f_x(y)>y,\forall y\in(0,y_x),f_x(y)>y,\forall y\in(y_x,+\infty). \tag{9.96}$$

注意到 $\frac{\ln x}{x}<\ln x\Rightarrow x_1=x\leqslant y_x$ 以及 $x_3=x^{x^x}>x=x_1,\forall x\in(0,1)$, 因此 x_n 的奇子列递增且有上界 y_x, 偶子列递减且有下界 y_x. 所以问题等价于 $f_x(f_x(y))=y$ 在 $[x,x^x]$ 是否有异于 y_x 的不动点.

现在

$$x^{x^y}=y\Leftrightarrow y\ln x+\ln\ln\frac{1}{x}=\ln\ln\frac{1}{y}\Leftrightarrow y\ln x-\ln\ln\frac{1}{y}+\ln\ln\frac{1}{x}=0.$$

于是我们让

$$g_x(y)=y\ln x-\ln\ln\frac{1}{y}+\ln\ln\frac{1}{x},g_x'(y)=\ln x+\frac{1}{y\ln\frac{1}{y}},y\in[x,x^x].$$

当 $x\in[\frac{1}{e^e},1)$, 我们知道 $g_x'(y)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ 递减且 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 递增以及 $g_x'(y)\geqslant g_x'\left(\frac{1}{e}\right)\geqslant 0,\forall y\in(0,1)$, 因此 $g_x(y)$ 在 $[x,x^x]$ 严格递增, 于是不会产生其他增根, 所以此时 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

当 $x\in(0,\frac{1}{e^e})$, 注意到

$$\frac{\ln y_x}{y_x}=\ln x<\ln e^{-e}=-e\Rightarrow y_x<\frac{1}{e}.$$

再注意到

$$g_x\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{\ln x}{e}+\ln\ln\frac{1}{x}<0,$$

以及

$$g_x\left(x^x\right)=x^x\ln x-\ln\ln\frac{1}{x^x}+\ln\ln\frac{1}{x}>\ln x-\ln\ln\frac{1}{x^x}+\ln\ln\frac{1}{x}=0, \tag{9.97}$$

于是由零点定理我们知道 g_x 在 $[x,x^x]$ 有异于 y_x 的不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

综上我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的充要条件是 $x\in\left[\frac{1}{e^e},e^{\frac{1}{e}}\right]$.

9.7.3 拉格朗日反演 *

定理 9.14 (拉格朗日反演)

设

$$w=f(z)=w_0+a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots,a_k\neq0,k\in\mathbb{N},$$

则

$$z=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\zeta-z_0}{(f(\zeta)-w_0)^{\frac{1}{k}}}\right)^n\right]_{\zeta=z_0}(w-w_0)^{\frac{n}{k}}.$$

♡

注定理9.14我们不打算叙述严格的版本也不需要证明, 也不会考察, 我们只介绍如何使用定理9.14严格的做题.

例题 9.45 给定 $f(x)=-x-\ln(1-x)$, 我们知道 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$ 且 f 在 $x=0$ 邻域的反函数记为 $g(x)$, 则有

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{2}{3}+o(1). \tag{9.98}$$

在定理9.14中取 $k=2$, 则我们有

$$g(x)=\lim_{\zeta\to0^+}\frac{\zeta}{\sqrt{-\zeta-\ln(1-\zeta)}}\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{2}\lim_{\zeta\to0^+}\left(\frac{\zeta^2}{-\zeta-\ln(1-\zeta)}\right)'\cdot x=\sqrt{2x}-\frac{2}{3}x+o(x).$$

两边求导得(9.98). 这样定理9.14就给了我们建立反函数[23]的 Taylor 公式 Peano 余项类似物[24]的工具. 实际运用中我们可以在用定理9.98猜出(9.98)之后用初等求极限方法验证(9.98).

证明 接下来严格证明(9.98). 注意到

$$g(f(x))=x\Rightarrow g'(f(x))f'(x)=1,$$

于是

$$\lim_{x\to0^+}\left(g'(x)-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)=\lim_{y\to0^+}\left(g'(f(y))-\frac{1}{\sqrt{2f(y)}}\right)=\lim_{y\to0^+}\left(\frac{1}{f'(y)}-\frac{1}{\sqrt{2f(y)}}\right)=-\frac{2}{3},$$

其中最后一个等号是显式的极限, 属于课内基础极限题, 应该自行完成[25].

9.8 无理数的逼近 *

来看一个可能考的比较重要的内容.

[23] 尤其是反函数求导公式失效或者难算的时候.

[24] 即Puiseux 展开.

[25] 相信你愿意看这个, 基础自然不成为问题.

定理 9.15 (狄利克雷定理)

设 $\theta\in\mathbb{R},Q\in\mathbb{R}$ 且 $Q>1$, 那么存在互素的 $p,q\in\mathbb{Z}$, 使得

$$1\leqslant q<Q,\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{Qq}. \tag{9.99}$$

♡

笔记 证明的想法即抽屉原理, 本结果需要记忆.

证明 **Step 1** 当 $Q\in\mathbb{N}$, 考虑

$$[0,\frac{1}{Q}),[\frac{1}{Q},\frac{2}{Q}),\cdots,\left[\frac{Q-1}{Q},1\right],$$

此时由抽屉原理知 $0,\{\theta\},\{2\theta\},\cdots\{(Q-1)\theta\},1$ 必有两个落入上述同一区间, 这两个数有三种可能.

(1): $\{r_1\theta\},\{r_2\theta\},r_1\neq r_2,r_1,r_2\in\{1,2,\cdots,Q-1\}$;

(2): $\{r_1\theta\},0,r_1\in\{1,2,\cdots,Q-1\}$;

(3): $\{r_1\theta\},1,r_1\in\{1,2,\cdots,Q-1\}$.

而 $\{r\theta\}=r\theta-[r\theta],0=0\cdot\theta+0,1=0\cdot\theta+1$, 因此存在 $r_1,r_2\in\{0,1,2,\cdots,Q-1\},s_1,s_2\in\mathbb{Z}$ 使得

$$|r_1\theta-s_1-(r_2\theta-s_2)|\leqslant\frac{1}{Q}. \tag{9.100}$$

不妨设 $r_1>r_2$, 因此由(9.100)知

$$|q\theta-p|\leqslant\frac{1}{Q},1\leqslant q=r_1-r_2<Q,$$

这就证明了(9.99)成立.

Step 2 $Q\notin\mathbb{N}$, 此时我们有 $[Q]+1>Q$, 因此由 **Step 1** 知存在 $p,q\in\mathbb{Z}$ 使得

$$1\leqslant q<[Q]+1,\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{([Q]+1)\,q}. \tag{9.101}$$

注意到此时 $q<[Q]+1$ 知 $q<Q$, 故对不等式(9.101)右边利用 $[Q]+1\geqslant Q$ 知(9.99)成立.

Step 3 设上述取到的 p,q 不互素, 则存在互素的 p',q' 使得

$$1\leqslant q'<q,\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}.$$

于是

$$\left|\theta-\frac{p'}{q'}\right|\leqslant\frac{1}{qQ}\leqslant\frac{1}{q'Q},$$

这就证明了不等式(9.99)成立.

作为一个应用, 我们来看当年科大数学分析考研压轴题.

例题 9.46 设 $a_1,a_2,a_3>0,f(x)=\sin(a_1x)+\sin(a_2x)+\sin(a_3x)$, 证明存在 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 使得关于 $x\in\mathbb{R}$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f(x+t_n)=f(x).$$

笔记 显然本题可以推广到一般情况.

例题 9.47 给定 $a_1,a_2,\cdots,a_m>0,m\in\mathbb{N}$. 设 $g\in C(\mathbb{R})$ 且有周期 $T>0$, 令 $f(x)=\sum_{k=1}^{m}g(a_kx)$. 证明存在趋于正无穷的数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 使得关于 $x\in\mathbb{R}$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f(x+t_n)=f(x).$$

证明 不失一般性, 不妨设 $T=1$, 否则用 $g(Tx)$ 代替 $g(x)$ 即可. 此外因为紧集上的连续函数一致连续和 g 有周期 T. 所以 g 在 $\mathbb{R}$ 是一致连续的[26]. 我们对 $x\in\mathbb{R}$, 记 $\delta(x)$ 是 x 到最近整数的距离[27] 我们的目标是找到 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$,

[26]因为 g 可以视为单位圆周上的函数 $g(x)=\tilde{g}\left(e^{2\pi ix}\right)$. 当然你可以用一致连续定义直接证明.

[27]例如,$\delta(1.2)=0.2,\delta(1.6)=0.4$.

使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} \delta(a_j t_n) = 0, j = 1, 2, \cdots, m. \tag{9.102}$$

当 $a_j \in \mathbb{Q}, j = 1, 2, \cdots, m$, 取 $t_n = n\ell$, ℓ 是 $a_j, j = 1, 2, \cdots, m$ 分母的最小公倍数, 此时就得到了(9.102).

当 $a_j, j = 1, 2, \cdots, m$ 至少有一个无理数. 对任何整数 $Q \geqslant 3$, 注意到分解

$$[0, 1) = \bigcup_{q=1}^{Q} [\frac{q-1}{Q}, \frac{q}{Q}). \tag{9.103}$$

考虑 $\{\{na_1\}\}_{n=1}^{\infty}$, 由抽屉原理, 必然有一个 $[\frac{q-1}{Q}, \frac{q}{Q})$ 包含 $\{\{na_1\}\}_{n=1}^{\infty}$ 的无穷多项, 记为 $\{\{r_n a_1\}\}_{n=1}^{\infty}$. 继续由抽屉原理, 有一个 $[\frac{q-1}{Q}, \frac{q}{Q})$ 包含 $\{\{r_n a_2\}\}_{n=1}^{\infty}$ 的无穷多项, 我们不妨设仍然记为 $\{\{r_n a_2\}\}_{n=1}^{\infty}$. 这样依次下去, 我们得到一个 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, 使得对任何 $j = 1, 2, \cdots, m$, 都存在一个(9.103)的区间包含 $\{\{r_n a_j\}\}_{n=1}^{\infty}$, 于是

$$|\{r_n a_j\} - \{r_1 a_j\}| \leqslant \frac{1}{q}, \forall j = 1, 2, \cdots, m, n \in \mathbb{N}. \tag{9.104}$$

式(9.104)恰好就意味着

$$|(r_n - r_1) a_j - [r_n a_j] + [r_1 a_j]| \leqslant \frac{1}{Q}, \forall j = 1, 2, \cdots, m, n \in \mathbb{N}. \tag{9.105}$$

现在对任何 $Q \geqslant 3$, 由(9.105), 我们知道存在 $t_Q \in \mathbb{N}_0$, 使得

$$\delta(t_Q a_j) \leqslant \frac{1}{Q}, j = 1, 2, \cdots, m. \tag{9.106}$$

如果 $\{t_Q\}_{Q\geqslant 3}$ 是有限集, 那么在(9.106)中令 $Q \to +\infty$ 知存在 t_{Q_0}, 使得 $\delta(t_{Q_0} a_j) = 0, j = 1, 2, \cdots, m$. 此时 $a_j \in \mathbb{Q}, j = 1, 2, \cdots, m$, 这就是一个矛盾! 因此 $\{t_Q\}_{Q\geqslant 3}$ 是无限集, 此时显然存在 $\lim_{i\to\infty} t_{Q_i} = +\infty$ 使得(9.102)成立.

注意到

$$f(x + t_n) = \sum_{k=1}^{m} g(a_k x \pm \delta(a_k t_n)),$$

由(9.102)知显然关于 $x \in \mathbb{R}$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f(x + t_n) = f(x).$$

命题 9.8 (无理数的平方充要条件)

设 $\theta \in \mathbb{R}$, 则 θ 是无理数的充要条件是存在无穷多对互素整数 $(p, q), q > 0$, 使得

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}. \tag{9.107}$$

♠

证明 如果 $\theta = \frac{a}{b}, b > 0, a, b \in \mathbb{Z}$, 此时如果 $\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, q > 0$ 成立. 那么

$$\frac{1}{q^2} \geqslant \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq},$$

当 $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$, 我们有 $|aq - bp| \in \mathbb{N}$. 因此 $\frac{1}{q^2} \geqslant \frac{1}{bq} \Rightarrow q \leqslant b$. 从而

$$\left|\frac{p}{q}\right| \leqslant \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \leqslant \left|\frac{a}{b}\right| + \frac{1}{q^2} \Rightarrow |p| \leqslant |q| \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \frac{1}{q^2}\right) \leqslant b\left(\left|\frac{a}{b}\right| + 1\right).$$

因此这样的话 p, q 是有限的, 所以 (p, q) 只能有限对.

当 θ 是无理数, 取趋于正无穷的严格递增的 $Q_i, i \geqslant 1$. 运用定理9.15, 对每个 Q_i, 存在满足迪利克雷定理条件的互素 (p_i, q_i), 有

$$0 < \left|\theta - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqslant \frac{1}{q_i Q_i} \leqslant \frac{1}{q_i^2}.$$

如果全体 (p_i,q_i) 只有有限对不同, 那么存在 (p_0,q_0), 使得

$$0<\left|\theta-\frac{p_0}{q_0}\right|\leqslant\frac{1}{q_0Q_i}\leqslant\frac{1}{Q_i}.$$

在上式让 $i\to+\infty$, 我们就有 $\theta=\frac{p_0}{q_0}$, 这就是一个矛盾!

推论 9.4

设 $\theta\in\mathbb{R}$, 则 θ 是无理数的充要条件就是对每个 $\epsilon>0$, 存在 $x,y\in\mathbb{Z}$, 使得

$$0<|\theta x-y|<\epsilon. \tag{9.108}$$

♡

笔记 本结果也可以表述为: 设 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 则 $\{m+n\alpha:m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密.

证明 充分性: 如果 $\theta=\frac{p}{q},q>0$, 那么由定理9.15, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $x,y\in\mathbb{Z},x>0$, 使得

$$\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{\epsilon}{x}.$$

取 $\epsilon=\frac{1}{q}$, 则 $0<|px-qy|<1$, 这和 $|px-qy|\in\mathbb{Z}$ 矛盾!

必要性: 如果 θ 是无理数, 那么由命题9.8, 存在无穷多个分数 $\frac{p_n}{q_n},q_n>0,q_n,p_n\in\mathbb{Z},n=1,2,\cdots$, 使得

$$0<\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{q_n^2}. \tag{9.109}$$

如果 $q_n\leqslant M$, 那么由(9.109)知

$$|p_n|\leqslant|q_n|\cdot\left(\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|+|\theta|\right)\leqslant|q_n|\left(1+|\theta|\right)\leqslant M\left(1+|\theta|\right).$$

此时和无穷个分数矛盾! 因此 q_n 无上界. 所存在 q_n 的子列 q_{n_i} 满足 $\lim\limits_{i\to\infty}q_{n_i}=+\infty$. 于是由9.109和 $0<|q_{n_i}\theta-p_{n_i}|\leqslant\frac{1}{q_{n_i}}$, 我们就可以得到(9.108)成立.

命题 9.9 ($\{n\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 稠密)

设 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 证明 $\{n\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 稠密.

♠

证明 只需对 $\eta\in(0,1)$ 证明, 首先注意到 $n\theta=n[\theta]+n\{\theta\}$, 则 $\{n\theta\}=\{n\{\theta\}\}$, 则不妨设 $\theta\in(0,1)$.

对 $\eta\in(0,1),\epsilon\in(0,1)$, 我们取自然数 $m>\max\left\{\frac{1}{1-\eta},\frac{1}{\epsilon}\right\}$, 考虑 $[0,1)=\bigcup\limits_{k=1}^{m}[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m})$, 则存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $[\frac{k_0-1}{m},\frac{k_0}{m})$ 含有 $\{s\theta\},\{j\theta\},s>j,s,j\in\mathbb{N}$. 若

$$0=\{s\theta\}-\{j\theta\}=(s-j)\theta-([s\theta]-|j\theta|),$$

则 $\theta\in\mathbb{Q}$, 矛盾!

因此我们有 $0<|\{s\theta\}-\{j\theta\}|<\frac{1}{m}$.

注意到 $\{s\theta\}-\{j\theta\}=(s-j)\theta-([s\theta]-|j\theta|)$, 因此

$$\{(s-j)\theta\}=\{\{s\theta\}-\{j\theta\}\}=\begin{cases}\{s\theta\}-\{j\theta\}, & \{s\theta\}>\{j\theta\}\\ 1+\{s\theta\}-\{j\theta\}, & \{s\theta\}<\{j\theta\}\end{cases}.$$

- 当 $t=\{(s-j)\theta\}=\{s\theta\}-\{j\theta\}$, 我们考虑 $[0,+\infty)=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}[(p-1)t,pt)$, 因此我们都可以找到 $p\in\mathbb{N}$, 使得 $\eta\in[(p-1)t,pt)$, 因此 $|\eta-pt|\leqslant|t|<\frac{1}{m}$, 而

$$\eta<pt\leqslant\eta+t\leqslant\eta+\frac{1}{m}.$$

此时

$$pt=p(s-j)\theta-p[(s-j)\theta],0<pt<1\Rightarrow pt=\{p(s-j)\theta\},$$

因此

$$|\eta-\{p(s-j)\theta\}|<\frac{1}{m}\leqslant\epsilon.$$

- 当 $\{(s-j)\theta\}-1=\{s\theta\}-\{j\theta\}$, 注意到 $1>\{(s-j)\theta\}>1-\frac{1}{m}$, 为了类似第一点的证明, 我们去找一个 $r\in\mathbb{N}$, 使得 $0<\{r(s-j)\theta\}<\frac{1}{m}$.

  取 $k\in\mathbb{N}_0$, 使得
  $$1-\frac{1}{m+k}<\{(s-j)\theta\}\leqslant 1-\frac{1}{m+k+1},$$
  此时
  $$m+k-1<(m+k)(s-j)\theta-(m+k)[(s-j)\theta]\leqslant m+k-1+\frac{1}{m+k+1},$$
  因此
  $$0<|\{(m+k)(s-j)\theta\}|\leqslant\frac{1}{m+k+1}<\frac{1}{m}.$$
  这样我们就可以类似第一点的证明完成证明.

推论 9.5 (三角函数聚点)

数列 $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty},\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ 都在 $[-1,1]$ 稠密. ♡

证明 事实上由 $\sin n=\sin\left(2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right),\cos n=\cos\left(2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right)$ 和 $\frac{1}{2\pi}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 我们用命题9.9知数列 $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty},\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ 都在 $[-1,1]$ 稠密.

本部分属于兴趣内容.

定义 9.3 (无理性测度定义)

设无理数 $\xi\in\mathbb{R}$, 我们定义 ξ 的无理数测度为
$$\mu(\xi)\triangleq\inf\left\{v:\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v}\text{仅有有限多个有理解}\frac{p}{q},q>0\right\}.\tag{9.110}$$
♣

笔记

1. 我们不考虑有理数的无理数测度.
2. 显然集合
   $$\left\{\frac{p}{q}:\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\right\}$$
   关于 v 单调. 即较大的 v 对应的集合一定是较小 v 对应的集合子集. 这可以通过对 $v_2\geqslant v_1$, 必有
   $$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v_2}\leqslant q^{-v_1}$$
   来看到.
3. 我们断言无理数测度一定是正数. 事实上如果无理数测度是非正数, 那么对任何 $v>0$, 我们都有
   $$\left\{\frac{p}{q}:\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\right\}$$
   是有限集, 于是我们容易知道存在 $\delta>0$, 使得对任何 $v\in(0,\delta)$, 集合 $\left\{\frac{p}{q}:\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\right\}$ 都是相等的. 于是当 $v\in(0,\delta)$ 时, 满足 $\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v}$ 的分数集合我们记为 $\frac{p_i}{q_i},i=1,2,\cdots,m$. 显然 ξ 到最近整数之间存在值异于 $\frac{p_i}{q_i},i=1,2,\cdots,m$ 的其他分数 $\frac{p'}{q'}$. 当 v 充分小时必有 $\left|\xi-\frac{p'}{q'}\right|\leqslant\frac{1}{(q')^v}$, 这就是一个矛盾!
4. (9.110)中仅有有限多个有理解可以改为有限多个互素的有理解. 因为如果只有有限对互素解的情况下, 记为 $\frac{p_i}{q_i},i=1,2,\cdots,m$. 若还有有一个解为 $\frac{p}{q},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}$, 写为 $\frac{p}{q}=\frac{p'k}{q'k},k\in\mathbb{N},q'\in\mathbb{N},p'\in\mathbb{Z},p',q'$ 互素. 则
   $$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v}\Rightarrow\left|\xi-\frac{p'}{q'}\right|\leqslant(kq')^{-v}\leqslant(q')^{-v},$$
   故所有解只可能是
   $$\frac{\ell p_i}{\ell q_i},i=1,2,\cdots,m,\ell\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

但是

$$\left|\xi-\frac{p_i}{q_i}\right|\leqslant(\ell q_i)^{-v}\to 0,|\ell|\to\infty,$$

于是实际能取的 ℓ 也只有有限个.

5. 设 ξ 的无理数测度为 v, 我们并不能说明合 $\left\{\frac{p}{q}:\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant q^{-v},p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\right\}$ 是有限集.

如下定理深刻程度甚至到了菲尔兹奖级别因此我们省去证明, 只记录结果备用.

定理 9.16

1. 几乎所有无理数的无理测度都为 2;
2. 无理代数数[a]无理测度都为 2;
3. 当无理数 ξ 的无理测度为 $+\infty$, 我们称为刘维尔数.

[a]超越数即 $\mathbb{Z}[x]$ 中多项式的根, 不是超越数就是代数数.

♡

定理 9.17 (一些特殊数据的无理数测度)

我们有

1. $\mu(\pi)\leqslant 7.10320534\cdots$;
2. $\mu\left(\pi^2\right)\leqslant 5.44124250\cdots$;
3. $\mu\left(\sqrt[3]{2}\right)\leqslant 2.429709513\cdots$;
4. $\mu\left(\sqrt[3]{17}\right)\leqslant 2.198220241\cdots$;
5. $\mu\left(\pi\sqrt{3}\right)\leqslant 1-\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+1}{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)-1}=8.30998634\cdots$;
6. $\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\leqslant 5.792613804\cdots$;
7. $\mu(\ln 2)\leqslant 4.134400029\cdots$;
8. $\mu\left(e^r\right)=2,\forall r$为非0有理数.

♡

我们来看无理数测度的应用.

例题 9.48 证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^7}=0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin n}=1$.

证明

1. 由9.17, 我们知道 $\mu(\pi)\leqslant 7.104\cdots$, 集合 $\left\{\frac{p}{q}:\left|\pi-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{7.2}},q\in\mathbb{N},p\in\mathbb{Z}\right\}$ 是有限集. 因此对充分大的 $p\in\mathbb{N}$, 我们必有

$$|q\pi-p|>\frac{1}{q^{6.2}}.\tag{9.111}$$

对充分大的 n, 取奇数 $q\in\mathbb{Z}$, 使得 $\left|n-\frac{q}{2}\pi\right|\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. 现在我们有

$$|q\pi-2n|>\frac{1}{q^{6.2}}\Rightarrow\left|\frac{q}{2}\pi-n\right|>\frac{1}{2q^{6.2}}.\tag{9.112}$$

利用

$$|\tan x|\geqslant|x|,\forall x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],$$

我们有

$$\left|\frac{\tan n}{n^7}\right|=\left|\frac{\cot\left(n-\frac{q}{2}\pi\right)}{n^7}\right|=\left|\frac{1}{n^7\tan\left(n-\frac{q}{2}\pi\right)}\right|\leqslant\frac{1}{n^7\left|n-\frac{q}{2}\pi\right|}\overset{(9.112)}{<}\frac{2q^{6.2}}{n^7}.$$

我们有

$$n-\frac{q}{2}\pi\geqslant-\frac{\pi}{4}\Rightarrow q\leqslant\frac{2n}{\pi}+\frac{1}{2}\Rightarrow 0\leqslant\left|\frac{\tan n}{n^7}\right|\leqslant\frac{2\left(\frac{2n}{\pi}+\frac{1}{2}\right)^{6.2}}{n^7}.$$

于是利用夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan n}{n^7}=0$.

2. 同样的, 对充分大的 n, 取 $q\in\mathbb{N}$, 使得 $n-q\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 利用 jordan 不等式, 我们有

$$|\sin x|\geqslant\frac{2}{\pi}|x|,\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

于是

$$1\geqslant|\sin n|=|\sin(n-q\pi)|\geqslant\frac{2}{\pi}|n-q\pi|\overset{(9.111)}{>}\frac{2}{\pi q^{6.2}}.$$

现在我们继续利用

$$n-q\pi\geqslant-\frac{\pi}{2}\Rightarrow q\leqslant\frac{n}{\pi}+\frac{1}{2}\Rightarrow 1\geqslant|\sin n|\geqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{\pi}+\frac{1}{2}\right)^{6.2}}.$$

由夹逼准则我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin n}=1$.

接下来我们看 Weyl 等分布理论.

定理 9.18 (Weyl 等分布理论)

用 $\#\{\}$ 表示集合元素个数.

设 $x_1,x_2,...,x_n,...\in[0,1]$, 如下结果等价:

(1): 对任何整数 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}e^{2\pi ikx_j}}{n}=0.$$

(2): 对任何 $f\in C[0,1],f(0)=f(1)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}f(x_j)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

(3): 对任何 $(a,b)\subset[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in(a,b)\}}{n}=b-a.$$

(4): 对任何 $I\subset[0,1],I$是一个区间, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\}}{n}=|I|.$$

(5): 对任何 $f\in R[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}f(x_j)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

♡

注本部分 $|A|$ 表示区间长度.

笔记 其中满足 (3) 的序列称为等分布. 为了叙述方便, 我们允许 x_n 在 $\mathbb{R}$ 里取值, 此时如果 x_n 的小数部分是等分布, 则称 x_n 为模 1 等分布. 显然模 1 等分布的小数部分在 $[0,1]$ 稠密.

证明 (1),(2),(5) 的等价性证明见定理9.13.

(5) $\Longrightarrow$ (3): 在 (5) 中取 $f(x)=\chi_{(a,b)}(x)$ 即可.

(3) $\Longrightarrow$ (4): 只需断言 $\forall x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j=x\}=0$, 事实上如果 $x\in(0,1)$, 则

$$2\epsilon=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in(x-\epsilon,x+\epsilon)\}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j=x\}.$$

令 $\epsilon\to0^+$ 即得注意到

$$1\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in[0,1]\}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in(0,1)\}=1,$$

易知 $x=0,1$ 满足断言.

(4) $\Longrightarrow$ (5): (4) 条件暗示对 $f(x)$ 为区间 I 上特征函数 (即在区间上取 1, 其余地方取 0, 记为 $\chi_I(x)$) 命题是

成立的, 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_I(x_j)=\int_0^1\chi_I(x)\,dx=|I|.$$

由线性性, 对所有阶梯函数也成立 (分段常值函数), 若 f 黎曼可积. 由黎曼可积条件, 对任何 $\epsilon>0$, 存在一种划分 $0=y_0<y_1<\ldots<y_m=1$ 使得

$$\sum_{j=1}^{m}(M_j-m_j)(y_j-y_{j-1})<\epsilon,$$

其中

$$M_j=\sup_{x\in[y_{j-1},y_j]}f(x),m_j=\inf_{x\in[y_{j-1},y_j]}f(x).$$

记

$$f_L(x)=\begin{cases}M_j & x\in[y_{j-1},y_j)\\ M_m & x\in[y_{m-1},y_m]\end{cases},f_U(x)=\begin{cases}m_j & x\in[y_{j-1},y_j)\\ m_m & x\in[y_{m-1},y_m]\end{cases},j=1,2,\ldots,m-1,$$

容易看到 $f_U(x)\leqslant f(x)\leqslant f_L(x)$ 并且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}f_L(x_j)}{n}=\int_0^1 f_L(x_j)\,dx,\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}f_U(x_j)}{n}=\int_0^1 f_U(x_j)\,dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f_L(x_j)\,dx-\int_0^1 f_U(x_j)\,dx<\epsilon,$$

令 $\epsilon\to0^+$ 即得.

命题 9.10

$x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\in[0,1]$ 是等分布的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\}}{n}\leqslant|I|,\forall I\subset[0,1]\text{是区间}.\tag{9.113}$$

♠

证明 必要性显然, 充分性只需注意到 $[0,1]$ 可以分解为若干不交区间的并且 I 是其中一个区间. 不妨设 $I\cup K=[0,1],I\cap K=\emptyset$, 这里 K 是一个区间. 结合(9.113)有

$$1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in[0,1]\}}{n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\}}{n}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in K\}}{n}\leqslant1.$$

这导致不等号必然是等号, 即

$$|I|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\}}{n},$$

以及

$$|K|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in K\}}{n}=1-\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\#\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\}}{n}.$$

于是由 Weyl 等分布原理9.18得证.

定理 9.19

设 $\{a_n\}_{n\geqslant1}\subset\mathbb{R}$, 若对任何正整数 h 有

$$\{a_{n+h}-a_n\}_{n\geqslant1}\text{是模 1 等分布},$$

则 $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ 是模 1 等分布.

♡

证明 我们先承认如下不等式成立

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ika_n}\right|^2\leqslant\frac{4}{HN}\sum_{h=0}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N-h}e^{2\pi ik(a_{n+h}-a_n)}\right|,\forall N>H,k\in\mathbb{N}. \tag{9.114}$$

故

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ika_n}\right|^2\leqslant\frac{4}{H}\sum_{h=0}^{H}\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-h}e^{2\pi ik(a_{n+h}-a_n)}\right|=\frac{4}{H},\forall H\geqslant 1.$$

由 H 的任意性即知

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ika_n}\right|^2=0,\forall k\in\mathbb{N}.$$

接下来证明我们断言的不等式(9.114). 固定 $N>H$, 我们记

$$c_i=\begin{cases}e^{2\pi ika_i} & 1\leqslant i\leqslant N\\ 0 & i>N\text{或者}i\leqslant 0\end{cases},$$

断言

$$\left|\sum_{i=1}^{N}c_i\right|^2\leqslant\frac{4N}{H}\sum_{h=0}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N-h}c_{n+h}\bar{c}_n\right|.$$

事实上

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{N}c_i\right|^2&=\frac{1}{H^2}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{H}c_{n+k}\right|^2\leqslant\frac{1}{H^2}(N+H-1)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{H}c_{n+k}\right|^2\\&=\frac{N+H-1}{H}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2+2\frac{N+H-1}{H^2}\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\Re\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n+h}\bar{c}_n\right)\\&\leqslant 2\frac{N+H-1}{H}\sum_{h=1}^{H-1}\left(1-\frac{h}{H}\right)\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n+h}\bar{c}_n\right|\leqslant\frac{4N}{H}\sum_{h=0}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N-h}c_{n+h}\bar{c}_n\right|,\end{aligned}$$

我们完成了证明(9.114).

例题 9.49 设 α 是无理数, 证明 $\{\alpha n\}_{n=1}^{\infty}$ 是模一等分布.

证明 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi ik\alpha j}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2\pi ik\alpha}-e^{2\pi ik\alpha(n+1)}}{n\left(1-e^{2\pi ik\alpha}\right)}=0,\forall k\in\mathbb{N},$$

由 Weyl 等分布原理9.18, 我们知道 $\{\alpha n\}_{n=1}^{\infty}$ 是模一等分布.

例题 9.50 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j-1}^{n}\left|\cos\left(j^2\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j-1}^{n}\left|\cos\left(\frac{\pi j^2}{\pi}\right)\right|=\int_0^1|\cos(\pi x)|\,dx=\frac{2}{\pi}. \tag{9.115}$$

证明 考虑 $f(x)=|\cos(\pi x)|, x_j=\frac{j^2}{\pi}-\left[\frac{j^2}{\pi}\right]$. 由于定理9.19和例题9.49, 我们知道对任何正整数 h 有

$$\frac{(n+h)^2}{\pi}-\frac{n^2}{\pi}=\frac{2hn}{\pi}+\frac{h^2}{\pi}$$

是等分布. 然后由 Weyl 等分布原理9.18, 我们知道(9.115)成立.

推论 9.6

设非常数多项式 p 的首系数是无理数, 则 $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是模一等分布. ♡

证明 我们归纳证明. 对于一次多项式, 显然模一等分布做了平移还是模一等分布以及例9.49知推论成立. 假定命题对 $j\in\mathbb{N}$ 次多项式成立, 当 p 为 $j+1$ 次多项式. 则设 $p(x)=\sum_{k=0}^{j+1}a_kx^k$, 这里系数都是实数且 a_{j+1} 是无理数. 则

对 $h\in\mathbb{N}$,

$$p(x+h)-p(x)=\sum_{k=0}^{j+1}\left[a_k(x+h)^k-a_kx^k\right]$$

的首系数是 $a_{j+1}C_{j+1}^{j}h\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 于是由定理9.19和归纳假设知命题对 $j+1$ 次多项式成立. 这就完成了证明.

定义 9.4 (差分)

$$\begin{aligned}\Delta f(n)&\triangleq f(n+1)-f(n);\\ \Delta^2 f(n)&\triangleq\Delta(\Delta f(n))=f(n+2)-2f(n+1)+f(n)\\ &\vdots\\ \Delta^k f(n)&\triangleq\Delta\left(\Delta^{k-1}f(n)\right)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j f(n+j).\end{aligned}$$

♣

我们有一个更强的等分布判定定理.

定理 9.20 (Fejers Theorem)

给定 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$,$k\in\mathbb{N}$. 若满足下述两组条件之一, 则 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是模一等分布, 这里 $\Delta^k f$ 表示差分9.4.

1. (a). $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta^k f(n)=0$ 且在 n 充分大时 $\Delta^k f(n)$ 单调;
   (b). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left|\Delta^k f(n)\right|\right)=+\infty$.
   或者
2. (a). $f\in C^k[1,+\infty)$;
   (b). $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$ 且当 x 充分大时 $f^{(k)}(x)$ 单调;
   (c). $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left|f^{(k)}(x)\right|=+\infty$.

♡

证明 证明.

9.9 杂例

定理 9.21 (Gamma 函数极限定义)

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}\ (s>0).$$

♡

笔记 本结果可以直接使用.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s\Gamma(n+1)\Gamma(s)}{\Gamma(s+n+1)}\\ &=\lim_{n\to\infty}n^s\beta(s,n+1)=\lim_{n\to\infty}n^s\int_0^1(1-x)^n x^{s-1}\mathrm{d}x\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x=\Gamma(s),\end{aligned}$$

这里换序的控制函数为

$$\int_0^\infty\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\chi_{[0,n]}(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x<\infty.$$

引理 9.4 (稠密聚点引理)

设 $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)\geqslant 0$ 或者 $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)\leqslant 0$, 则 x_n 的全体聚点[a]要么是空集, 要么是单点集, 要么是区间.

[a]这里允许为 $\pm\infty$.

证明 若 x_n 的全体聚点既不是空集, 也不是单点集, 记

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=a,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=b, \tag{9.116}$$

这里 a,b 允许为 $\pm\infty$. 若 $c\in(a,b)$ 不是 x_n 的聚点. 那么存在 $\delta>0$, 使得存在 $N\in\mathbb{N}$, 对任何 $n>N$ 都有 $x_n\notin(c-\delta,c+\delta)$.

又由(9.116)知对任何 $M>N$, 存在 $n_1,n_2>M$ 使得

$$x_{n_1}\leqslant c-\delta, x_{n_1+1}\geqslant c+\delta, x_{n_2}\geqslant c+\delta, x_{n_2+1}\leqslant c-\delta,$$

从而

$$x_{n_1+1}-x_{n_1}\geqslant 2\delta, x_{n_2+1}-x_{n_2}\leqslant -2\delta,$$

即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_{n+1}-x_n)\geqslant 2\delta,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_{n+1}-x_n)\leqslant -2\delta.$$

这就证明了 $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)<0$ 且 $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)>0$, 矛盾! 故 (a,b) 都是极限点. 我们完成了引理9.4的证明.

例题 9.51 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是连续函数, 证明数列 $x_{n+1}=f(x_n), x_1\in[a,b]$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0. \tag{9.117}$$

证明 事实上设 x_n 收敛到 $x\in[a,b]$, 自然有式(9.117)成立. 反之若式(9.117)成立但 x_n 不收敛, 则由引理9.4知 x_n 聚点集是 $[c,d]\subset[a,b]$. 又对 $x\in[c,d]$, 我们知道存在 $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$, 于是

$$0=\lim_{k\to\infty}(x_{n_k+1}-x_{n_k})=\lim_{n\to\infty}(f(x_{n_k})-x_{n_k})=f(x)-x.$$

现在 $f(x)=x,\forall x\in[c,d]$. 由于对某个 N 充分大, 有 $x_N\in[c,d]$, 因此 $x_n=x_N,\forall n\geqslant N$. 于是 x_n 收敛, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了 x_n 收敛.

例题 9.52 设连续函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 以及

$$x_0\in[a,b], x_{n+1}=f(x_n), n=0,1,2,\cdots.$$

若对某个 $m\in\mathbb{N}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+m}-x_n)=0,$$

证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点数不超过 m 个.

证明 记

$$F\triangleq\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{m次}.$$

考虑

$$y_0^{(r)}=x_r, y_{n+1}^{(r)}=F\left(y_n^{(r)}\right), n=1,2,\cdots, r=0,1,2,\cdots,m-1.$$

注意到条件给出

$$\lim_{n\to\infty}\left(y_{n+1}^{(r)}-y_n^{(r)}\right)=0, r=0,1,2,\cdots,m-1.$$

于是对 F 利用例题9.51得

$$\lim_{n\to\infty}y_n^{(r)}=c_r, r=0,1,2,\cdots,m-1.$$

因此我们证明了 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点数不超过 m 个.

练习 9.5 设 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\frac{1}{2}x_{2n}\right)$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛.

证明 记

$$b\triangleq\lim_{n\to\infty}\left(x_n+\frac{1}{2}x_{2n}\right),A\triangleq\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,B\triangleq\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

然后取 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=B$, 就有

$$b=\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}+\frac{1}{2}x_{2n_k}\right)=A+\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}x_{2n_k}\geqslant A+\frac{1}{2}B,$$

$$b=\lim_{k\to\infty}\left(x_{m_k}+\frac{1}{2}x_{2m_k}\right)=B+\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}x_{2m_k}\leqslant B+\frac{1}{2}A.$$

于是

$$A+\frac{1}{2}B\leqslant B+\frac{1}{2}A\Rightarrow A\leqslant B.$$

因为 $A\geqslant B$, 故 $A=B$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛.

命题 9.11 (连根式收敛性判别法和计算)

1. 设 $a_n,b_n,n\in\mathbb{N}$ 是正数, 并设

$$x_n=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}},n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的充分必要条件是 $\frac{\ln a_n}{2^n}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\ln b_k}{2^k}$ 有上界.

2. 若存在 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a_n}}{t_n}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}=1,\tag{9.118}$$

$$t_n^2=a_n+b_nt_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}.\tag{9.119}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=t_1$.

笔记 连根式一般都是自然放缩. 一般来说连根式极限是无法计算的, 第二题就给了一个可以计算出极限的充分条件.

证明

1. 显然 x_n 单调递增.

Step 1

当 $b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=1$. 设 $x_n\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$M\geqslant x_n\geqslant\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a_n}}}}=a_n^{\frac{1}{2^n}}.\tag{9.120}$$

从而

$$\frac{\ln a_n}{2^n}\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}.\tag{9.121}$$

反之, 设(9.121)成立, 则必有 $a_n\leqslant M^{2^n},\forall n\in\mathbb{N}$, 于是就有

$$x_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}}\leqslant\sqrt{M^2+\sqrt{M^{2^2}+\sqrt{M^{2^3}+\cdots+\sqrt{M^{2^n}}}}}=M\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}.$$

读者容易证明 $\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}$ 由 $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n},a_1=1,n=1,2,\cdots$ 确定. 因此由结论8.4.1的方法容易知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 因此我们证明了 x_n 有界.

Step 2

一般情况只需要把 b_i 凑入根号里面即可, 即

$$x_n=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}=\sqrt{a_1+\sqrt{b_1^2a_2+b_1^2b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}$$
$$=\sqrt{a_1+\sqrt{b_1^2a_2+\sqrt{b_1^{2^2}b_2^2a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}=\cdots=\sqrt{c_1+\sqrt{c_2+\cdots+\sqrt{c_n}}},$$

这里

$$c_1=a_1,c_n=b_1^{2^{n-1}}\cdot b_2^{2^{n-2}}\cdot\cdots\cdot b_{n-1}^2a_n,n\geqslant 2.$$

现在对 c_n 考虑 **Step 1** 的情况即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的充分必要条件是 $\frac{\ln a_n}{2^n}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\ln b_k}{2^k}$ 有上界.

2. 事实上一方面反复运用等式(9.119), 我们有

$$x_n=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}\leqslant\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n+b_nt_{n+1}}}}}$$
$$=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-3}\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}t_n}}}}}$$
$$=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-3}\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}t_{n-1}}}}}$$
$$=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-4}\sqrt{a_{n-3}+b_{n-3}t_{n-2}}}}}=\cdots$$
$$=\sqrt{a_1+b_1t_2}=t_1.$$

另外一方面, 为了得到反向的不等式, 我们运用(9.119)和

$$t_{n+1}\geqslant\sqrt{a_{n+1}}\Rightarrow t_n=\sqrt{a_n+b_nt_{n+1}}\leqslant\sqrt{\frac{t_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}}a_n+b_n\sqrt{a_{n+1}}\frac{t_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}}}$$

得到

$$\sqrt{a_n+b_n\sqrt{a_{n+1}}}\geqslant t_n\sqrt{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{t_{n+1}}},\forall n\in\mathbb{N}.\tag{9.122}$$

然后有

$$x_n=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}\geqslant\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-3}\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}t_{n-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a_n}}{t_n}}}}}}$$
$$\geqslant\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-3}\sqrt{a_{n-2}\sqrt{\frac{\sqrt{a_n}}{t_n}}+b_{n-2}t_{n-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a_n}}{t_n}}}}}}=t_1\left(\frac{\sqrt{a_n}}{t_n}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

现在利用(9.118), 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=t_1$.

这就完成了证明.

作为命题9.11的应用, 我们来看一个美国数学月刊的难题解答.

例题 9.53* 设 $p,q\in\mathbb{R}$ 满足 $p>0,q>-\frac{p^2}{4}$. 定义

$$U_0=0,U_1=1,U_{n+2}=pU_{n+1}+qU_n,n=0,1,2,\cdots.$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{U_1^2+\sqrt{U_2^2+\sqrt{U_4^2+\cdots+\sqrt{U_{2^{n-1}}^2}}}}.$$

笔记 本题仅供欣赏，想到恒等式的难度很大，需要学习更多的知识.

证明 求解通项得

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left[\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n-\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n\right].$$

取

$$R_n=\frac{\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\sqrt{p^2+4q+4}}{\sqrt{p^2+4q}}\left[\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^{2^n}-\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^{2^n}\right]}{2},n=0,1,\cdots,$$

我们有

$$R_n^2=U_{2^n}^2+R_{n+1},0,1,2,\cdots. \tag{9.123}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{2^n}}{R_n}\right)^{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left[\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n-\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n\right]}{\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n+\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{p^2+4q+4}}{\sqrt{p^2+4q}}\left[\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n-\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n\right]}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=1,$$

于是由命题9.11知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{U_1^2+\sqrt{U_2^2+\sqrt{U_4^2+\cdots+\sqrt{U_{2^{n-1}}^2}}}}=R_0=\frac{p+\sqrt{p^2+4q+4}}{2}.$$

例题 9.54 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\ell-\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{e}}{2}, \tag{9.124}$$

这里 $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$.

笔记 想法就是把 $\ell-a_n$ 用明确的表达式表示出来. 注意 $\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}$ 由 $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n},a_1=1,n=1,2,\cdots$ 确定. 因此由结论8.4.1的方法容易知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

证明 容易由命题9.11知 ℓ 有意义. 记 $b_n=\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt{n+1+\sqrt{n+2+\cdots+\sqrt{n+m}}}$, 我们有

$$b_n\leqslant\lim_{m\to\infty}\sqrt{n+1+\sqrt{n+2+\sqrt{(n+2)^2+\cdots+\sqrt{(n+2)^{2^{m-2}}}}}}=\sqrt{n+1+\sqrt{n+2}\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}},$$

以及 $b_n\geqslant\sqrt{n+1}$. 因此由夹逼准则，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{n}}=1. \tag{9.125}$$

于是我们可以得到渴望的表示

$$\ell=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+b_n}}}.$$

现在运用拉格朗日中值定理，我们知道存在 $\theta_n\in(0,b_n),n=1,2,\cdots$ 使得[28]

$$\ell-a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+b_n}}}-\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}=\frac{b_n}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{n+\theta_n}}}}.$$

[28]这里

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+x}}},f'(x)=\frac{1}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{n+x}}}}.$$

于是我们有

$$\ell-a_n\leqslant\frac{b_n}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}\Rightarrow\sqrt{n}\left(\ell-a_n\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant b_n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

以及

$$\frac{1}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{n+\theta_n}}}}\geqslant\frac{1}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}b_k}\Rightarrow\sqrt{n}\left(\ell-a_n\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant b_n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}b_k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

现在运用结论8.1和夹逼定理即得极限[29](9.124).

来看浙江大学数学分析最难考研压轴题, 他是一个典型的钓鱼题.

例题 9.55* 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上递增且 $f(x+1)=f(x)+1$, 给定数列 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在且与 x_1 无关.

证明 **Step 1**

我们用 $x_n=f^{n-1}(x),n\geqslant1,f^0(x)=x,f^n(x)=f\left(f^{n-1}(x)\right),n=1,2,\cdots$.

当 $|x-y|\leqslant1$ 时, 不妨设 $y<x\leqslant y+1$, 此时

$$\begin{aligned}&|f(y)-f(x)|=f(x)-f(y)\leqslant f(y+1)-f(y)=1\\&\Rightarrow\left|f^2(y)-f^2(x)\right|\leqslant1\cdots\Rightarrow|f^n(y)-f^n(x)|\leqslant1\end{aligned}$$

显然

$$f^n(x+k)=f^n(x)+k,\forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{Z}.\tag{9.126}$$

于是运用(9.126)就有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|f^n(x)-f^n(y)|}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{|f^n(x)-f^n(x-[x])+f^n(x-[x])-f^n(y-[y])+f^n(y-[y])-f^n(y)|}{n}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|[x]|+|[y]|+1}{n}=0\end{aligned}$$

故如果有某一个初值 x_0, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x_0)}{n}$ 存在, 则对所有 $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}$ 存在. 并且极限值

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f^n\left(x_0\right)}{n}.$$

Step 2

我们视 f^m 为初值迭代, 对 $f^m(x)-x\in\mathbb{Z}$ 可得

$$f^{jm}(x)=x+j\left(f^m(x)-x\right),\forall j\in\mathbb{N}_0.\tag{9.127}$$

我们用归纳法证明(9.127), 事实上, 当 $j=0$, 则没什么好证的. 假定 j 时有(9.127)成立, $j+1$ 时, 我们知道

$$\begin{aligned}f^{(j+1)m}(x)&=f^m\left(f^{jm}(x)\right)=f^m\left(x+j\left(f^m(x)-x\right)\right)\\&=x+f^m(x)-x+j\left(f^m(x)-x\right)=x+(j+1)\left(f^m(x)-x\right),\end{aligned}$$

这就由归纳法证明了(9.127).

如果对某个 $x\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}$ 成立 $f^m(x)-x\in\mathbb{Z}$, 则对任何 $n\in\mathbb{N}$, 我们 $\bmod m$ 分类, 即存在唯一的 $j\in\mathbb{N}_0,r\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$, 使得 $n=jm+r$. 并且有

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\frac{f^{jm+r}(x)}{jm+r}&=\lim_{j\to\infty}\frac{f^r\left(f^{jm}(x)\right)}{jm+r}\overset{(9.127)}{=}\lim_{j\to\infty}\frac{f^r\left(x+j\left(f^m(x)-x\right)\right)}{jm}\\&\overset{(9.126)}{=}\lim_{j\to\infty}\frac{f^r(x)+j\left(f^m(x)-x\right)}{jm}=\frac{f^m(x)-x}{m},\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}$ 存在.

[29]注意运用(9.125).

Step 3

如果对任何 $x\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}$, 都有 $f^m(x)-x\notin\mathbb{Z}$, 则存在 $k_m(x)\in\mathbb{Z}$ 使得

$$k_m(x)<f^m(x)-x<k_m(x)+1. \tag{9.128}$$

我们来证明 $k_m(x)$ 不依赖 x. 若有某个 $y\in\mathbb{R}$, 不妨设 $x<y$, 使得

$$f^m(y)-y<k_m(x)<f^m(x)-x,$$

注意到因为缺乏 f 连续, 所以介值定理不存在, 我们期望找一个 $z\in\mathbb{R}$, 使得 $f^m(z)-z=k_m(x)\in\mathbb{Z}$ 来导出矛盾的目标失败了! 但我们可以用单调函数的类介值性7.3来代替. 因此我们可以找到一个 $z\in\mathbb{R}$, 使得 $f^m(z)-z=k_m(x)\in\mathbb{Z}$, 矛盾! 综上所述, $k_m(x)$ 不依赖 x.

现在式(9.128)可以变为

$$k_m<f^m(x)-x<k_m+1,\forall m\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}. \tag{9.129}$$

令 $x=f^{jm}(0),j=0,1,2,\cdots$, 此时式(9.129)变为

$$k_m<f^m\left(f^{jm}(0)\right)-f^{jm}(0)<k_m+1,$$

即

$$k_m<f^{(j+1)m}(0)-f^{jm}(0)<k_m+1.$$

求和得

$$nk_m<f^{nm}(0)=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f^{(j+1)m}(0)-f^{jm}(0)\right]<n(k_m+1),$$

故

$$\frac{k_m}{m}<\frac{f^{nm}(0)}{nm}<\frac{k_m+1}{m},\frac{k_m}{m}<\frac{f^m(0)}{m}<\frac{k_m+1}{m}. \tag{9.130}$$

由(9.130)得

$$\left|\frac{f^{nm}(0)}{nm}-\frac{f^m(0)}{m}\right|\leqslant\frac{1}{m}.$$

交换 m,n 得

$$\left|\frac{f^{nm}(0)}{nm}-\frac{f^n(0)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

由绝对值不等式得

$$\left|\frac{f^m(0)}{m}-\frac{f^n(0)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

从而 $\left\{\frac{f^n(0)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 因此我们证明了下述极限是存在的

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n},$$

这就完成了证明.

在 Stolz 定理9.1中我们强调过 Stolz 定理不可以反向使用, 接下来我们看一个相对比较强的反向 Stolz 定理, 他的证明不是特别平凡的.

定理 9.22 (反向 Stolz 定理)

对某个 $C>0$, 如果有 $n(a_n-a_{n-1})\geqslant -C,\ \forall n\geqslant 2$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a\in\mathbb{R},$$

则我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

♡

笔记 反向洛必达本身是习题, 作为定理去应用的机会非常少.

笔记 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1=a_1,\ b_n=a_n-a_{n-1},\ \forall n\geqslant 2,\ S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

证明的想法是用 S_n,S_m 来表示 a_n, m 是一个待定的自然数. 即由

$$S_{n+m}=S_n+ma_n+mb_{n+1}+(m-1)\,b_{n+2}+\cdots+b_{n+m}$$

推出

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{S_{n+m}-S_n}{m}-\frac{mb_{n+1}+(m-1)\,b_{n+2}+\cdots+b_{n+m}}{m}\\&\leqslant\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}+\frac{1}{m}\left[m\frac{C}{n+1}+(m-1)\,\frac{C}{n+2}+\cdots+\frac{C}{n+m}\right].\end{aligned}$$

然后想办法取合适的 m 即可.

证明 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1=a_1,\ b_n=a_n-a_{n-1},\ \forall n\geqslant 2,\ S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

我们有 $b_n\geqslant-\frac{C}{n}$.

对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $|S_n|\leqslant n\varepsilon,\forall n\geqslant N$, 于是当 $n\geqslant N$, 有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}-S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\,b_{n+1}+\left([n\sqrt{\varepsilon}]-1\right)b_{n+2}+\ldots+b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right)\\&\leqslant\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\,\frac{C}{n+1}+\left([n\sqrt{\varepsilon}]-1\right)\frac{C}{n+2}+\ldots+\frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right)\\&\leqslant\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\,\frac{C}{n}+\left([n\sqrt{\varepsilon}]-1\right)\frac{C}{n}+\ldots+\frac{C}{n}\right)\\&=\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C\\&\leqslant\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C+\varepsilon,\end{aligned}\tag{9.131}$$

于是我们得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}+\frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon.$$

另外一方面, 当 $n\geqslant\frac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}}>N$, 有 $n-[n\sqrt{\varepsilon}]\geqslant n\,(1-\sqrt{\varepsilon})\geqslant N$, 因此

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{S_n-S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\,b_n+([n\sqrt{\varepsilon}]-2)\,b_{n-1}+\ldots+b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\\&\geqslant\frac{S_n-S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-\frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\,\frac{C}{n}+([n\sqrt{\varepsilon}]-2)\,\frac{C}{n-1}+\ldots+\frac{C}{n-[n\sqrt{\epsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\\&\geqslant\frac{S_n-S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-C\frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)+([n\sqrt{\varepsilon}]-2)+\ldots+1}{(n-[n\sqrt{\varepsilon}])\,[n\sqrt{\varepsilon}]}\\&\geqslant-\frac{|S_n|+\left|S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}\right|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-\frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}\\&\geqslant-\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-\frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}+\varepsilon.\end{aligned}\tag{9.132}$$

于是我们得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\geqslant-2\sqrt{\varepsilon}-\frac{C}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}+\varepsilon.$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

例题 9.56

1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 满足

$$0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n, m,n=1,2,\cdots. \tag{9.133}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n}.$$

2. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(1,+\infty)$ 满足

$$x_{m+n}\leqslant x_m x_n, \forall n,m\in\mathbb{N}. \tag{9.134}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\inf_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{x_n}.$$

3. 设

$$a_m+a_n-1\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n+1, \forall m,n\in\mathbb{N}. \tag{9.135}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 存在且若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=q\in\mathbb{R}$, 则

$$nq-1\leqslant a_n\leqslant nq+1, \forall n\in\mathbb{N}. \tag{9.136}$$

4. 设非负函数 $f\in C[0,+\infty)$ 满足

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y), \forall x,y\geqslant 0. \tag{9.137}$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在.

证明

1. 注意到由条件(9.133), 我们得到 $a_{kn}\leqslant ka_n, \forall k,n\in\mathbb{N}$. 于是对任何 $p\in\mathbb{N}$, 设 $n=mp+r, 0\leqslant r\leqslant p-1, m\in\mathbb{N}_0$, 我们有

$$\inf_{n\geqslant 1}\frac{x_n}{n}\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{x_{mp+r}}{mp+r}\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{x_{mp}+x_r}{mp+r}\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{mx_p+x_r}{mp+r}=\frac{x_p}{p},$$

由 p 的任意性我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\inf_{n\geqslant 1}\frac{x_n}{n}.$$

2. 注意到 $\{\ln x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足第一问, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x_n}{n}}=\inf_{n\geqslant 1}e^{\frac{\ln x_n}{n}}=\inf_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{x_n}.$$

3. 在(9.135)中取 $m=n$ 得

$$2a_n-1\leqslant a_{2n}\leqslant 2a_n+1.$$

再取 $m=2n$ 得

$$3a_n-2\leqslant a_{2n}+a_n-1\leqslant a_{3n}\leqslant a_{2n}+a_n+1\leqslant 3a_n+2.$$

依次下去得

$$ma_n-(m-1)\leqslant a_{mn}\leqslant ma_n+m-1, \forall m,n\in\mathbb{N}. \tag{9.138}$$

于是对任何 $p\in\mathbb{N}$, 设 $n=mp+r, 0\leqslant r\leqslant p-1, m\in\mathbb{N}_0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}&=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{mp+r}}{mp+r}\overset{(9.135)}{\geqslant}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{mp}+a_r-1}{mp+r}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{ma_p-(m-1)+a_r-1}{mp+r}=\frac{a_p}{p}-\frac{1}{p}\\
\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{mp+r}}{mp+r}\overset{(9.135)}{\leqslant}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{mp}+a_r+1}{mp+r}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{ma_p+(m-1)+a_r+1}{mp+r}=\frac{a_p}{p}+\frac{1}{p}
\end{aligned}.$$

现在

$$-\infty<\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}<+\infty,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 存在.

此外, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=q$, 则由(9.138)得

$$\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n}\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{ma_n-(m-1)}{mn}\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{a_{mn}}{mn}\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{ma_n+m-1}{mn}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}.$$

因此我们还有不等式(9.136).

4. 首先由 1 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\inf_{n\geqslant1}\frac{f(n)}{n}.$$

然后对 $x\in[1,+\infty)$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\leqslant x<n+1$.

一方面

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{f(n)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x-n)}{x}\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{n}+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x-n)}{x}=\inf_{n\geqslant1}\frac{f(n)}{n}.$$

另外一方面, 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\geqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{f(n+1)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(n+1-x)}{x}\geqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n+1)}{n+1}-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(n+1-x)}{x}=\inf_{n\geqslant1}\frac{f(n)}{n}.$$

由夹逼准则即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\inf_{n\geqslant1}\frac{f(n)}{n}.$$

例题 9.57 设 $f_0\in R[0,1]$ 满足 $f_0>0$. 若

$$f_n(x)=\sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt},n=1,2,\cdots,$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{x}{2}.$$

证明 设 $f_n(x)=a_nx^{b_n},a_0=c>0,b_0=0$, 则

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{\int_0^x f_n(t)\,dt}=\sqrt{\frac{a_n}{b_n+1}}x^{\frac{b_n+1}{2}}=a_{n+1}x^{b_{n+1}},$$

故

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{b_n+1}},b_{n+1}=\frac{b_n+1}{2}.\tag{9.139}$$

用结论8.4.1知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$. 此外有

$$2^{n+1}\ln a_{n+1}=2^n\ln a_n-2^n\ln(1+b_n),n=0,1,2,\cdots,$$

因此求和得

$$\ln a_{n+1}=\frac{\ln c}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{n}2^j\ln(1+b_j).$$

现在由 Stolz 定理9.1我们有

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{n}2^j\ln(1+b_j)\right)=-\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln(1+b_n)}{2^{n+1}-2^n}=-\ln2.$$

因此我们证明了此时有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{x}{2}.$$

对一般的 $f_0\in R[0,1]$, 不妨设 $f_0>0,\forall x\in(0,1]$ 且 f_0 连续, 否则用 f_1 代替 f_0. 则有不等式

$$f_0(x)\leqslant g_0(x)\triangleq\sup f_0(x),$$

显然定义

$$g_n(x)=\sqrt{\int_0^x g_{n-1}(t)\,dt},n=1,2,\cdots.$$

则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,f_n(x)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,g_n(x)=\frac{x}{2}.$$

另外一方面对任何 $\epsilon\in(0,1)$, 设

$$f_0(x)\geqslant m_\epsilon>0,\forall x\in[\epsilon,1],$$

于是假定

$$f_n(x)\geqslant a_n(x-\epsilon)^{b_n},\forall x\in[\epsilon,1],a_0=m_\epsilon>0,b_0=0.$$

则必有

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{\int_0^x f_n(t)\,dt}\geqslant\sqrt{\int_\epsilon^x f_n(t)\,dt}\geqslant\sqrt{\int_\epsilon^x a_n(t-\epsilon)^{b_n}\,dt}=\sqrt{\frac{a_n}{1+b_n}}(x-\epsilon)^{\frac{1+b_n}{2}},\forall x\in[\epsilon,1].$$

显然 a_n,b_n 也满足递推(9.139), 故仍有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}(x-\epsilon),\forall x\geqslant\epsilon.$$

现在

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,f_n(x)\geqslant\frac{1}{2}(x-\epsilon),\forall x\geqslant\epsilon,$$

由 ϵ 任意性可得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{x}{2}.$$

例题 9.58 设 $f\in C[a,b],f(x)>0,x\in[a,b]$, 证明

$$\lim_{p\to0^+}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}.$$

证明 首先 f 连续且恒正, 因此由于闭区间上连续函数必有最值, 我们知道存在 $M\geqslant m>0$, 使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 只需证明

$$\lim_{p\to0^+}\frac{\ln\int_a^b f^p(x)\,dx-\ln(b-a)}{p}=\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,dx,$$

这可看成导数定义, 利用复合函数求导公式, 我们只需要证明

$$\lim_{p\to0^+}\frac{\int_a^b f^p(x)\,dx-(b-a)}{p}=\int_a^b\ln f(x)\,dx,$$

注意到由拉格朗日中值定理, 我们知道对 $x\in[a,b]$, 存在 $\theta_p(x)$ 满足

- $0\leqslant|\theta_p(x)|\leqslant p|\ln f(x)|,\forall x\in[a,b]$;
- $\theta_p(x)=\ln\frac{e^{p\ln f(x)}-1}{p\ln f(x)}\in C[a,b]$.

$$\begin{aligned}\lim_{p\to0^+}\frac{\int_a^b f^p(x)\,dx-(b-a)}{p}&=\lim_{p\to0^+}\int_a^b\frac{e^{p\ln f(x)}-1}{p}dx\\&=\lim_{p\to0^+}\int_a^b\ln f(x)\cdot e^{\theta_p(x)}dx\\&=\int_a^b\lim_{p\to0^+}\ln f(x)\cdot e^{\theta_p(x)}dx\\&=\int_a^b\ln f(x)\,dx,\end{aligned}$$

其中倒数第二个等来自

$$|\ln f(x)|\, e^{\theta_p(x)} \leqslant |\ln f(x)| \cdot e^{|\ln f(x)|}, \forall x \in [a,b], p \in [0,1]$$

和控制收敛定理7.8, 最后一个等号来自 $\theta_p(x)$ 的第一个性质 (从而可以推出 $\lim\limits_{p\to 0^+} e^{\theta_p(x)} = 1$).

我们完成了证明.

例题 9.59 设正值函数 $f \in C[0,1]$, 计算

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n.$$

笔记 注意技巧: 对 $[0,1]$ 上黎曼可积函数 g, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)\, dx.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 g(x)\, dx = 0.$$

证明 不妨设 $\max\limits_{[0,1]} f = 1$, 否则 $\frac{f}{\max\limits_{[0,1]} f}$ 替换 f 即可.

注意到

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} \right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f^{\frac{1}{n}}\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1^{\frac{1}{n}} = 1,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f^{\frac{1}{n}}\left(\frac{k}{n}\right) = 1.$$

又

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left[\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]} = \lim_{n\to\infty} e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}} - n \right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}} - n \right]} \geqslant \lim_{n\to\infty} e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} \right) - n \right]} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

注意到不等式 $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}, \forall x \leqslant 0$, 于是我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}} - n \right]} \leqslant \lim_{n\to\infty} e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} + \frac{\ln^2 f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n^2} \right) - n \right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} + \frac{\ln^2 f\left(\frac{k}{n}\right)}{2n^2} \right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 f\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

于是由夹逼准则我们知道

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

例题 9.60 证明:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\ln\frac{1}{x} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n \ln n} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

证明 设

$$w(x) \triangleq \sup_{\substack{u,v\in(0,A]\\ |u-v|\leqslant x}} \left|\frac{\sin u}{u}-\frac{\sin v}{v}\right|, x>0.$$

对 $A>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n}-\int_0^A\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n}-\int_0^{x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}^A\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\left(\frac{\sin(nx)}{nx}-\frac{\sin y}{y}\right)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}^A\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}w(x)\,\mathrm{d}y+\int_{x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}^A 1\mathrm{d}y = x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor w(x)+A-x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor.
\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor w(x)+A-x\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor\right)=0,$$

由夹逼准则有

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n}=\int_0^A\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y.$$

于是

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n}=\int_\delta^A\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y,\forall A>\delta>0. \tag{9.140}$$

首先 Stolz 定理9.1可得

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{n=2}^N\frac{1}{\ln n}}{\frac{N}{\ln N}}=1.$$

于是存在 $C>1$ 使得

$$\sum_{n=2}^N\frac{1}{\ln n}\leqslant\frac{CN}{\ln N},\forall N\geqslant2.$$

固定 $\delta\in(0,1), A\in(1,+\infty)$. 首先由

$$|\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|, \forall n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}$$

得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\left|\ln\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=2}^{\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}\right|\right)\leqslant\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\left|x\ln\frac{1}{x}\right|\cdot\sum_{n=2}^{\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor}\frac{1}{\ln n}\right) \\
&\leqslant C\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\left|x\ln\frac{1}{x}\right|\frac{\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor}{\ln\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor}\right)=\delta C.
\end{aligned} \tag{9.141}$$

对 $x\in(0,1)$ 和自然数 $M\geqslant N$, 我们有

$$\left|\sum_{n=N}^{M}\sin(nx)\right|=\left|\frac{\sin\left(\frac{(M-N+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(M+N)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{\pi}{x}.$$

结合 Abel 变换8.2得

$$\left|\sum_{n=N}^{M}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}\right|\leqslant\frac{\pi}{x}\left[\sum_{n=N}^{M-1}\left(\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{M\ln M}\right]=\frac{\pi}{xN\ln N}.$$

于是我们有

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\left|\ln\frac{1}{x}\sum_{n=\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor+1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\frac{\pi\ln\frac{1}{x}}{x\left(\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor+1\right)\ln\left(\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor+1\right)}\right)=\frac{\pi}{A}.\tag{9.142}$$

我们还有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{x\to0^+}}\left|\ln\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}-\sum_{n=\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\sin(nx)}{n}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to0^+}}\sum_{n=\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{|\ln(nx)|}{n\ln n}\\&\leqslant\max\{|\ln A|,|\ln\delta|\}\cdot\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\sum_{n=\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}\right)\\&=\max\{|\ln A|,|\ln\delta|\}\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\int_{\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor}^{\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}\right)\\&=\max\{|\ln A|,|\ln\delta|\}\overline{\lim_{x\to0^+}}\left(\ln\frac{\ln\left\lfloor\frac{A}{x}\right\rfloor}{\ln\left\lfloor\frac{\delta}{x}\right\rfloor}\right)=0.\end{aligned}\tag{9.143}$$

于是由(9.140),(9.141),(9.142)和(9.143)并结合三角不等式我们有

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\left|\ln\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}-\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right|\leqslant\delta C+\frac{\pi}{A}+\left|\int_A^{\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right|+\left|\int_0^{\delta}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right|.$$

由 δ,A 任意性得

$$\lim_{x\to0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

例题 9.61 求

$$\left\{\frac{\sin\ln1+\sin\ln2+\cdots+\sin\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

的聚点集.

笔记 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]=0$, 经验性告诉我们三角函数复合这种做差分趋于 0 的数列是容易初等估计的. 但是 $\sin n^2,\sin(n\ln n)$ 这种就难以用常规数学分析方法来进行估计.

证明 **Step 1**

注意到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\ln k-\int_1^n\sin\ln x\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(\sin\ln k-\sin\ln x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}|\sin\ln k-\sin\ln x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(k-x)\cdot\frac{|\cos\ln\alpha|}{\alpha}\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(k-x)\cdot\frac{1}{k-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

以及

$$\frac{1}{n}\int_1^n \sin\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{\ln n}e^y\sin y\mathrm{d}y=\frac{1}{2n}+\frac{\sin\ln n-\cos\ln n}{2}.$$

由习题8.6知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}=0$, 因此 $\left\{\frac{\sin\ln 1+\sin\ln 2+\cdots+\sin\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点集就是

$$\frac{\sin\ln n-\cos\ln n}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\ln n-\frac{\pi}{4}\right)$$

的聚点集.

Step 2

注意到

$$-1\leqslant\sin\left(\ln n-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1,n\in\mathbb{N}.$$

由

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n+\ln\left(1-e^{-\frac{3}{4}\pi-2\pi n}\right)=\ln\left(e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n}-1\right)-\frac{\pi}{4}\leqslant\ln\left\lfloor e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n}\right\rfloor-\frac{\pi}{4}\leqslant\ln e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n;$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n+\ln\left(1-e^{\frac{1}{4}\pi-2\pi n}\right)=\ln\left(e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi n}-1\right)-\frac{\pi}{4}\leqslant\ln\left\lfloor e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi n}\right\rfloor-\frac{\pi}{4}\leqslant\ln e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi n}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left\lfloor e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n}\right\rfloor-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-2\pi n\right)=0,\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left\lfloor e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi n}\right\rfloor-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-2\pi n\right)=0,$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sin\left(\ln n-\frac{\pi}{4}\right)=1,\underline{\lim_{n\to\infty}}\sin\left(\ln n-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

这就证明了

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sin\ln 1+\sin\ln 2+\cdots+\sin\ln n}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2},\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sin\ln 1+\sin\ln 2+\cdots+\sin\ln n}{n}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\{[\sin\ln(n+1)-\cos\ln(n+1)]-[\sin\ln n-\cos\ln n]\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\ln\theta_n}{\theta_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\ln\xi_n}{\xi_n}=0.\end{aligned}$$

由稠密聚点引理9.4得 $\left\{\frac{\sin\ln 1+\sin\ln 2+\cdots+\sin\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点集是 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

例题 9.62 设 $f\in L^1[0,1]$ 且 $f'_+(0)$ 存在, 证明: 对任何 $N\in\mathbb{N}_0$, 我们有

$$\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x=f(0)+\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{n^{m+1}}\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{(\ln x)^m}{m!}\mathrm{d}x+o\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right),n\to\infty.\tag{9.144}$$

证明 考虑实数 $n>0$, 固定 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$M\triangleq\sup_{x\in(0,\delta]}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|<\infty.$$

然后我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\frac{|\ln x|^m}{n^m m!}\mathrm{d}x=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\frac{|\ln x|^m}{n^m m!}\mathrm{d}x\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\frac{|\ln x|^m}{n^m m!}\mathrm{d}x+\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\delta}^1\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\frac{|\ln x|^m}{n^m m!}\mathrm{d}x\\&\leqslant M\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{|\ln x|^m}{n^m m!}\mathrm{d}x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\ln\delta|^m}{n^m m!}\int_{\delta}^1\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\mathrm{d}x\\&=M\int_0^1 e^{\frac{|\ln x|}{n}}\mathrm{d}x+e^{\frac{|\ln\delta|}{n}}\int_{\delta}^1\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\mathrm{d}x<\infty,\end{aligned}$$

因此我们有级数换序[30]

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)}{x}x^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(0)}{x}x^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x}x^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\\ &= f(0)+\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x}e^{\frac{\ln x}{n}}\mathrm{d}x = f(0)+\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\ln x)^m}{n^m m!}\mathrm{d}x\\ &= f(0)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{xm!}(\ln x)^m\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

现在由 Taylor 公式 Peano 余项我们就证明了(9.144).

例题 9.63 设非负函数 $f_n\in C[-1,1], n=1,2,\cdots$ 满足

(1):

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{9.145}$$

(2): 对任何 $\delta\in(0,1)$, f_n 在 $[-1,-\delta]\bigcup[\delta,1]$ 上一致收敛到 0.

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(0), \forall g\in C[0,1]. \tag{9.146}$$

证明 对任何 $\delta\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-1}^1 f_n(x)[g(x)-g(0)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant 1}|f_n(x)||g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\leqslant\delta}|f_n(x)||g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \max_{x\in[-1,1]}|g(x)-g(0)|\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant 1}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \max_{|x|\leqslant\delta}|g(x)-g(0)|\cdot\int_{-1}^1|f_n(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

利用(9.145)和 f_n 在 $[-1,-\delta]\bigcup[\delta,1]$ 上一致收敛到 0 我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-1}^1 f_n(x)[g(x)-g(0)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{|x|\leqslant\delta}|g(x)-g(0)|.$$

由 g 在 $x=0$ 连续和 δ 任意性得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-1}^1 f_n(x)[g(x)-g(0)]\,\mathrm{d}x\right| = 0,$$

即由(9.145)得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)\,g(0)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

例题 9.64 对任意 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 证明:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n}\geqslant 4.$$

并指出 4 不可改进.

证明 考虑

$$a_n\triangleq 2^{n-1}, n=1,2,\cdots,$$

容易看到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n-1}} = 4.$$

若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n} < 4,$$

[30] **Levi 定理**.

我们知道存在自然数 $N \geqslant 2$ 和实数 $\alpha \in (0,4)$ 使得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n} \leqslant \alpha, \forall n \geqslant N.$$

记

$$\alpha_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} a_k t_n \triangleq \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}},$$

我们就有

$$t_{n+1}+\frac{\alpha}{t_n} \leqslant \alpha, \forall n \geqslant N.$$

设

$$a \triangleq \lim_{k\to\infty} t_{n_k+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n,$$

我们有

$$2\sqrt{\alpha} \leqslant a+\frac{\alpha}{a} \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(t_{n_k+1}+\frac{\alpha}{t_{n_k}}\right) \leqslant \alpha,$$

这就和 $\alpha < 4$ 矛盾!, 因此我们证明了:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n} \geqslant 4.$$

第 9 章 练习

1. (1.) 给定 $p,q \in \mathbb{N}$ 且 $p<q$ 满足

$$a_m \leqslant a_n, \forall pn \leqslant m \leqslant qn.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

2. (2.) 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^n} \tan^n x dx.$$

3. (3.) 设 $y_x = \frac{y_{x+1}^2}{x} + y_{x+1}, x = 1,2,\cdots$ 且 $y_x > 0, \forall x \in \mathbb{N}$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} y_x \ln x = 1.$$

4. (4.) 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_{[0,1]^n} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} dx_1\cdots dx_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}.$$

5. (5.) 设 $x_1 > 0$ 且

$$x_{n+1} = -1+\sqrt[n]{1+nx_n}, n = 1,2,\cdots,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$.

6. (6.) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. (7.) 设

$$a_{n+1} = \lambda a_n + \frac{1}{a_n}, a_1 > 0, \lambda \in (0,1),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8. (8.) 设 $D = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}, f : D \to \mathbb{R}$, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. 给定

- $(a_n) \subset (0,+\infty)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$,

- $a_{m+n} \leqslant f(a_n, a_m), \forall n, m \in \mathbb{N}$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. (9.) 计算
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n} dx.$$

10. (10.♡) 设 $f \in C^2[0,1]$, 计算
$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left[\int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right].$$

11. (11.∗) 设 $s > 0, n \in \mathbb{N}$, 考虑积分
$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^s \left(\int_0^1 (1-x^2)^n \cos(2\pi xy)\, dx \right)^2 dy.$$

(a). 证明当 $n > \frac{s-1}{2}$, I_n 收敛.

(b). 求 $n \to \infty$ 时 I_n 的等价量.

12. (12.) 计算
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\pi} \frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |\sin kx|}{x} dx.$$

13. (13.♡) 设 $b \in \mathbb{R}$ 且 $c, d < 1$, 计算
$$\lim_{a\to 1^+} (a-1)^{c+d-1} \int_1^a \frac{t^b}{(t-1)^c (a-t)^d} dt.$$

14. (14.) 计算
$$\lim_{n\to\infty} n \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}.$$

15. (15.) 设 $x_n > 0$ 且单调递增, 若满足
$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = x > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = a > 0.$$

则对
$$f \in D(0,1], f(x) > 0, f'(1) > 0, f(1) = 1, \frac{f'(x)}{f(x)} \text{单调递减},$$

证明
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{x_k}{x_n}\right) \right]^{y_n} = \frac{1}{1 - e^{-axf'(1)}}.$$

16. (16.) 计算
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

17. (17.) 若 f 有 Taylor 级数 $f(x) = x + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$ 且 $a_3 < 0$. 则对 $x > 0$ 证明
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} f^{\circ n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-2a_3x^2}},$$

这里 $f^{\circ n}(\cdot)$ 表示 f 的 n 次复合.

18. (18.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = L$ 存在, 证明对任何单调函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, 都有
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x_k = L \int_0^1 f(x)\, dx.$$

19. (19.) 设 $f \in C[0,1]$ 且 $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 在 $[0,1]$ 黎曼可积, g 在 $[0,1]$ 可积且在 $x = 1$ 连续, 证明
$$\int_0^1 g(x) f(x^n)\, dx = f(0) \int_0^1 g(x)\, dx + \frac{g(1)}{n} \int_0^1 \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty. \tag{9.147}$$

20. (20.) 设 $f,g\in C[0,+\infty),\int_0^{\infty}|g(x)|\,dx<\infty,\alpha>0$ 且 f 是有界函数. 证明
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f\left(\frac{x}{n^{\alpha}}\right)g(x)\,dx=f(0)\int_0^{\infty}g(x)\,dx.$$

21. (21.) 对 $x\neq 0$, 计算
$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^t},\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^t}.$$

22. (22.) 对 $\alpha\in(0,1)$, 证明
$$\lim_{n\to\infty}n^{1-\alpha}\int_0^1\frac{x^n}{|\ln x|^{\alpha}}dx=\Gamma(1-\alpha),\alpha\in(0,1).$$

23. (23.) 设 $f\in C[0,1],h\in C^1[0,1]$. 计算
$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left[h\left(\sqrt[n]{x}\right)-h(1)\right]f(x)\,dx.$$

24. (24.∗) 计算 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{2\alpha}-\int_1^{\infty}\frac{1}{\sinh(\pi\alpha x)\sqrt{x^2-1}}dx\right)$.

25. (25.) 给定递减数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=+\infty$. 若数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ 满足 $|x_n-x_m|\geqslant y_n,\forall m>n\geqslant 1$, 证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界.

26. (26.) 证明
$$\lim_{n\to\infty}n\left[2\ln 2-1-\frac{1}{n}\int_0^n\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{1+x}dx\right]=\frac{\pi^2}{12}.\tag{9.148}$$

27. (27.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^n\frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx.$$

28. (28.) 计算 $\lim\limits_{a\to 0^+}a\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\cos(ax)-\cos a}}$.

29. (29.∗) 当 $n\to\infty$, 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$ 的渐近展开.

30. (30.♡) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\int_0^x\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}$.

31. (31.) 证明
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n-1}=1.$$

32. (32.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-k)^{2n-1}}{k!(2n-k)!}.$$

33. (33.∗) 计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{k-1}(n-k)^{2n-k}}{(n-k)!k!}.$$

34. (34.) 设 $f\in C\left([0,1]^2\right)$, 计算
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{n!^2}\right)^2\iint_{[0,1]^2}(xy(1-x)(1-y))^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

35. (35.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{[0,1]^n}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

36. (36.) 设严格递增数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 并记 $N(x)\triangleq\sum\limits_{a_n\leqslant x}1$. 若
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_n}=+\infty,$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{\ln x}=+\infty$.

37. (37.) 设 $a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}, a_1\in[0,1)$, 求 a_n 的渐近估计.

38. (38.) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 是否一定存在单调递减的 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 使得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n}>0,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n}<+\infty.$$

39. (39.) 设 $f\in R[0,1]$ 且 f 在 $x=1$ 连续, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\right)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

40. (40.) 设 $x_n>0$, 证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geqslant e,$$

并证明 e 不可改进.

41. (41.) 设 $\alpha\in(0,1), f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}$, 证明存在 $A,B\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(f(x)-\frac{A}{x^{1-\alpha}}-B\right)=0.$$

42. (42.) 计算

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda(1-\cos\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

43. (43.) 设 $f\in C[0,1]$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kf\left(\frac{k}{n}\right)=0.\tag{9.149}$$

44. (44.) 设 $p>1, a\in\mathbb{R}$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

证明当 x_n 非负时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n^p}=0.$$

45. (45.) 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 满足 $\frac{\ln f(x)}{x}\in R[0,1]$. 若 $g\in R[0,1]$ 且在 $x=1$ 连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\int_0^1\sqrt[n]{f(x^n)}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1g(x)\,\mathrm{d}x\right)=g(1)\int_0^1\frac{\ln f(x)}{x}\mathrm{d}x.\tag{9.150}$$

46. (46.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}n\max_{x>0}\left|e^{-x}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\right|.$$

47. (47.) 设 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 且满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=c<0.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{\ln n}=-1.$$

48. (48.) 设 a_n 是正数列并满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n<\infty,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.\tag{9.151}$$

49. (49.) 设 $p\in\mathbb{R}[x]$ 是次数大于等于 1 的多项式, 证明:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot|\sin(\lambda p(x))|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\forall f\in R[a,b]. \tag{9.152}$$

50. (50.) 设

$$\epsilon(n)\triangleq\inf\left\{m\in\mathbb{N}:\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k}\geqslant 1,m\geqslant n\right\},n\in\mathbb{N}.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\epsilon(n)}{n}$.

51. (51.) 若

$$0\leqslant a_{n+m}\leqslant a_m+a_n+\frac{1}{m}+\frac{1}{n},$$

判断 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 是否存在?

52. (52.) 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}n^k\sim k!,k\to+\infty. \tag{9.153}$$

53. (53.$*$) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1^1}{1!}+\sqrt{\frac{2^2}{2!}+\cdots+\sqrt{\frac{n^n}{n!}}}}<\frac{9}{5}=1.8.$$

54. (54.) 设 $x_n>0,n=1,2,\cdots$, 证明:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1. \tag{9.154}$$

55. (55.) 证明:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\ln x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}=-1. \tag{9.155}$$

56. (56.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n x\mathrm{d}x}.$$

57. (57.) 设

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}-A\right)=B,$$

求 A,B.

58. (58.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{|\sin(ny)|}{y}\cdot e^{-ny^2}\mathrm{d}y.$$

59. (59.)

(a). 设 $f_1(t)=\frac{t+3}{2},f_2(t)=\frac{t+6}{3}$ 且 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\{1,2\}$. 若

$$F_1(t)=f_{n_1}(t),F_{k+1}(t)=F_k\left(f_{n_{k+1}}(t)\right),k=1,2,\cdots.$$

求 $\lim\limits_{k\to+\infty}F_k(x)$.

(b). 若 $f_1(t)=t-\arctan t,f_2(t)=2\arctan t-t$, 结论又当如何?

60. (60.) 设 $i,j,n\in\mathbb{N},x_0$ 是 $h=\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}$ 的正根. 求当 $h\to0^+$ 时

$$\int_0^{x_0}x^{2i}\left[h-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}\right)\right]^{\frac{2j+1}{2n+2}}\mathrm{d}x$$

的渐近估计.

61. (61.) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\ln n\right].$$

62. (62.) 设

$$S_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t, x\in(0,\pi), n\in\mathbb{N}.$$

证明:$S_n(x)$ 最大值点是 $\frac{\pi}{2n}$ 且

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1, \lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

63. (63.) 计算

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

64. (64.∗) 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^n}{x^2}\mathrm{d}x=1. \tag{9.156}$$

65. (65.) 对 $z\in\mathbb{C}$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z.$$

66. (66.) 设 $a\in\mathbb{R}, F_a(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^ae^{2n}x^{n^2}, x\in[0,1)$, 求实数 c 使得

$$\lim_{x\to1^-}F_a(x)e^{-\frac{1}{1-x}}=0,\forall a<c, \lim_{x\to1^-}F_a(x)e^{-\frac{1}{1-x}}=+\infty,\forall a>c. \tag{9.157}$$

67. (67.) 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\ln k-\frac{\sin\ln n-\cos\ln n}{2}-\frac{\sin\ln n}{2n}\right)\text{存在.} \tag{9.158}$$

68. (68.∗) 计算

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\int_2^{\infty}\frac{\sin(xt)}{\ln t}\mathrm{d}t\right).$$

69. (69.) 设 $f\in C([0,1]\times[0,1])$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right).$$

70. (70.) 正数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0.$$

证明 a_n 无界.

71. (71.∗) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\sqrt[n]{x}\sin(\pi x)}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x.$$

72. (72.) 设正数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+3}\leqslant\frac{x_{n+2}+3x_{n+1}+x_n}{5}, n=1,2,\cdots.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

73. (73.) 设 f 在 $x=0$ 去心邻域连续且满足

$$\lim_{x\to0}f(x)\sin\frac{1}{x}=0.$$

是否有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

74. (74.) 求 A, B 使得
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t}\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}x^2-\frac{4}{\pi^2}x-\frac{8}{\pi^3}\ln x+A\right)\right]=B.$$
75. (75.) 设数列 $a_n\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 定义数集
$$P=\{ka_i:k\in\mathbb{Z},i\in\mathbb{N}\}.$$
证明对任何 $b\in\mathbb{R}$, 存在 $\{b_n\}\subset P$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.
76. (76.) 设
$$f_n(x)=\frac{\int_0^x\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t}{\int_0^1\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t},g_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t,x\in[-1,1],n=1,2,\cdots..$$
证明:
(a). 对任何 $0<\epsilon<1$, 我们关于 $\epsilon\leqslant|x|\leqslant 1$ 一致的有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\mathrm{sgn}x.$$
(b). 关于 $|x|\leqslant 1$ 一致的有
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=|x|.$$
77. (77.) 设
$$x_0,x_1>0,x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\frac{x_{n-1}}{2},n=1,2,\cdots.$$
求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
78. (78.) 证明:
$$\int_3^x\frac{1}{\ln t-\sin t}\mathrm{d}t=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),x\to+\infty.$$
79. (79.)[31] 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是递增正数列且对任何正整数 m,n 都有 $a_m\geqslant ma_n$. 设
$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n}=A<+\infty,$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A$.
80. (80.) 设
$$x_1>0,x_{n+1}=x_n+\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},n=1,2,\cdots,$$
证明
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{3}.$$
81. (81.) 计算
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{x_1x_2\cdots x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$
82. (82.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足
$$f(x)=0,\forall x\notin(0,1).$$
定义
$$Q_n(x)\triangleq\frac{\left(1-x^2\right)^n}{\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x},n=1,2,\cdots.$$

[31] 注意到
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant n\Rightarrow a_n\geqslant a_1n!\Rightarrow\frac{a_n}{n}\geqslant a_1\cdot(n-1)!\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=+\infty,$$
即满足题目假设的数列不存在, 这是周民强上的一个错题, 但我们仍然把周民强想表达的证明思路写出来.

证明:

$$P_n(x) \triangleq \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t) \mathrm{d}t, n = 1, 2, \cdots$$

在 $x \in [0,1]$ 是多项式且

$$P_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [0,1].$$

83. (83.) 设 $n, v_n \in \mathbb{N}, 1 < v_n < n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} = \lambda > 0.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} C_n^{v_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2\lambda^2}.$$

84. (84.) 设

$$x_n = \int_0^1 \ln(1 + x + \cdots + x^n) \cdot \ln \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots.$$

(1): 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

(2): 计算: $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{\ln n}(2 - x_n)\right]$.

85. (85.) 计算

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \mathrm{d}x.$$

86. (86.) 设 $\alpha > 0, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$x_1 = 2024, y_1 = 20251109, x_{n+1} + x_{n+1}^{1+\alpha} = x_n, y_{n+1} + 2^{-\alpha} y_{n+1}^{1+\alpha} \leqslant y_n, n = 1, 2, \cdots.$$

证明:

(a). $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n^{\alpha}$ 存在;

(b). $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n y_n^{\alpha} \leqslant \frac{2^{\alpha}}{\alpha}$.

87. (87.) 设 $p + q + r = 1, p, q, r > 0$, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足

$$x_{n+3} \leqslant p x_{n+2} + q x_{n+1} + r x_n, n = 1, 2, \cdots.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

88. (88.) 设 $a_n > 0$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+2} + a_{n+4}} = 0.$$

证明:a_n 无界.

89. (89.) 计算

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\tan\tan\cdots\tan}_{n\text{次}} \frac{1}{n}.$$

90. (90.) 设

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}, a_1 > 0.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - n)$ 存在.

91. (91.) 设有界数列 $\{a_n\}$ 有界且满足

$$|a_{n+1} - a_n| \geqslant 1, n = 1, 2, \cdots.$$

是否有 $\{a_n\}$ 至多只有有限个聚点?

92. (92.) 计算

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \int_0^1 \frac{e^x}{1 + (nx)^2 + n^3 x^4} \mathrm{d}x \right).$$

93. (93.) 设 $A \subset \mathbb{N}$ 并记

$$S_n(a,b) \triangleq |\{k \in A : an \leqslant k \leqslant bn\}|, 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1.$$

若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(0,1)}{n} = p \in [0,1].$$

(a). 对 $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(a,b)}{n}$ 存在并计算值.

(b). 若 $f \in R[0,1]$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\in A, k\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) = p\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

94. (94.∗) 证明 $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2^j}$ 不存在.

95. (95.) 设

$$a_n = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2^x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots,$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{5}.$$

96. (96.) 计算

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right)}{\sqrt{x}}.$$

97. (97.) 设

$$f_0(x) = x, \lambda_n \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right), f_n(x) = \lambda_n e^{f_{n-1}(x)}, n = 1,2,\cdots.$$

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \lambda_n > \frac{1}{e}$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty, \forall x > 0.$$

98. (98.) 设正值函数 $f_0, f_1 \in C[0,1]$ 满足

$$\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x, f_{n+1}(x) = \frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)}, n = 1,2,\cdots.$$

证明:$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 单调且收敛.

99. (99.) 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\max\{\sin k, 0\}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\min\{\sin k, 0\}\right)}.$$

100. (100.) 给定 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. 记 $x_{n+1} = x_1$, 考虑

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}, k = 2,3,\cdots, i = 1,2,\cdots,n.$$

证明:

$$\lim_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, i = 1,2,\cdots,n.$$

101. (101.) 设 $f \in R[0,1]$ 且 f 在 $x = 0$ 连续, 证明

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

102. (102.) 设 $\lambda > 0$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \left[\lambda(a_{n+1} - a_n) + (1-\lambda)\frac{a_n}{n}\right] = \ell.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\ell.$$

103. (103.) 设实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\begin{cases}x_n^2+y_n^2+2y_n=1+\sin\frac{1}{n}\\ x_n+\left(1+\frac{1}{3n}\right)y_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\end{cases},n=1,2,\cdots.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

104. (104.) 设

$$a_0=a>0,a_1=\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}},a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n+\sqrt[3]{a_{n-1}}},n=1,2,\cdots,$$

证明 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛.

105. (105.) 设

$$x_0>y_0>0,x_{n+1}=\frac{1}{2\left(n+1\right)}\sum_{k=0}^{n}\left(x_k+y_k\right),y_{n+1}=\left(\prod_{k=0}^{n}x_ky_k\right)^{\frac{1}{2n+2}},n=0,1,2,\cdots,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(x_n-y_n\right)$ 收敛于一个正数.

106. (106.$*$) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right).$$

107. (107.) 设 $f\left(x,y\right)$ 在 y 固定时关于 $x\in[a,b]$ 连续且在 $y\to y_0^-$ 时递增的趋于连续函数 φ. 证明:

$$\lim_{y\to y_0^-}\int_a^b f\left(x,y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

108. (108.) 设

$$f\in D^1\left(\mathbb{R}\right),\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R},\lim_{n\to\infty}a_n=a,x_1\in\mathbb{R}.$$

考虑

$$x_{n+1}=f\left(x_n\right)+a_n,n=1,2,\cdots.$$

(a). 设 $\alpha\in(0,1)$ 满足 $|f'|\leqslant\alpha$, 证明:$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

(b). 若存在 $M>0$ 使得

$$|f'\left(x\right)|\leqslant\frac{|x|+M}{|x|+M+1},\forall x\in\mathbb{R},$$

证明:$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

109. (109.) 设

$$x_1\in\mathbb{R},x_{n+1}=f\left(x_n\right)+a_n,n=1,2,\cdots.$$

若

$$f\left(x_0\right)+a=x_0,\lim_{n\to\infty}a_n=a,\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\left|x-y\right|,\forall x,y\in\mathbb{R},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛.

110. (110.) 设 f 在 $(0,1)$ 有界递增, 证明:

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1\frac{f\left(x\right)\sin\left(xy\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f\left(0^+\right).$$

111. (111.) 设 $\mathbf{z}_n,\mathbf{a}_n\in\mathbb{R}^2$ 满足

$$\overline{\{\mathbf{z}_n\}_{n=1}^{\infty}}\text{是开集}\Omega\text{的紧集},\lim_{n\to\infty}n\mathbf{a}_n=\mathbf{0},\mathbf{z}_{n+1}=\mathbf{z}_n+\frac{1}{n}F\left(\mathbf{z}_n\right)+\mathbf{a}_n,n=1,2,\cdots,$$

这里 $F:\Omega\to\mathbb{R}^2$ 是是连续映射.

若存在 $\mathbf{z}_* \in \Omega$ 以及 $V \in C^2(\Omega)$ 使得

$$V(\mathbf{z}) \geqslant 0, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \text{且等号成立当且仅当} \mathbf{z} = \mathbf{z}_*$$

且存在 $c > 0$ 使得

$$\nabla V(\mathbf{z}) \cdot F(\mathbf{z}) \leqslant -cV(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \in \overline{\{\mathbf{z}_n\}_{n=1}^{\infty}}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{z}_*$.

112. (112.) 设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有正下界和上界的数列, $\alpha > 0$. 若存在趋于 0 的实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} (\alpha+1) q_n^{\alpha} - p_n \\ q_n (1-q_n) + \frac{q_n^{\alpha+1}}{p_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, n = 1, 2, \cdots,$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = (\alpha+1) \left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1} \right)^{\alpha}, \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$$

113. (113.) 设

$$D_0 \triangleq \{1, 2, 3\}, D_1 \triangleq \{5, 8\}, \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{0, 1\}.$$

记

$$D \triangleq \left\{ \sum_{k=1}^{n} 9^k c_k : c_k \in D_{a_k}, n \geqslant 1 \right\},$$

以及 d_m 是 D 中第 m 大的数字. 若

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \gamma,$$

计算

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln d_m}{\ln m}.$$

114. (114.) 若对实数 $n \geqslant 2$, 有公式

$$\sum_{p\leqslant n, p\text{是正素数}} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1),$$

求证:

$$\sum_{p\leqslant n, p\text{是正素数}} \frac{1}{p} = C + \ln\ln n + O\left(\frac{1}{\ln n} \right).$$

115. (115.) 对 $m \geqslant 2, f \in C[0,1]$, 定义

$$D_n \triangleq \det \left(\int_0^1 x^{n+i+j} f(x) \, \mathrm{d}x \right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}, n = 1, 2, \cdots.$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{m^2} D_n \right)$.

116. (116.) 设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f^{-1}(n)$ 是有限集. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{f(n)}$ 存在.

117. (117.) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant 1} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i+k} \right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

第 10 章 非数学类微分学计算 (包括二重极限.)

内容提要

- 单变量微分学计算 10.1
- 多变量微分学和极限计算 10.2
- 多变量微分学证明 10.3

10.1 单变量微分学计算

例题 10.1

1. 设 $f(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(x-k)$. 对整数 $0\leqslant j\leqslant n$, 求导数 $f'(j)$.
2. 设 $g(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(e^x-k)$, 求 $g'(\ln j),j=0,1,2,\cdots,n$.

证明

1. 直接走导数定义有

$$\lim_{x\to j}\frac{f(x)-f(j)}{x-j}=\lim_{x\to j}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x-k)}{x-j}=\prod_{k\neq j}(j-k)=(-1)^{n-j}\,j!\,(n-j)!.$$

2. 用链式法则, 我们有 $g'(x)=e^xf'(e^x)$. 于是

$$g'(\ln j)=e^{\ln j}f'\left(e^{\ln j}\right)=(-1)^{n-j}\,jj!\,(n-j)!.$$

例题 10.2 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 且成立

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0,$$

证明 $f'(0)=0$.

证明 一个熟知的渐近分析写法是:

$$f(2x)-f(x)=o(x),$$

因此

$$f\left(\frac{1}{2^{k-1}}x\right)-f\left(\frac{1}{2^k}x\right)=o\left(\frac{1}{2^k}x\right),k=1,2,\cdots,$$

从而

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{1}{2^{k-1}}x\right)-f\left(\frac{1}{2^k}x\right)\right]=o\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}x\right),$$

令 $n\to\infty$, 由 f 在 $x=0$ 连续, 我们知道

$$f(x)-f(0)=o\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}x\right)=o(x),$$

这恰好就是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

因此 $f'(0)=0$.

上述写法其实可以严谨化的书写, 一句话去说, 就是 $\left|\frac{1}{2^k}x\right|$ 关于 x 某个有界邻域内一致的趋于 0, 我们如下严格书写:

因为

$$f(2x)-f(x)=o(x),$$

所以, 对任何 $\epsilon>0$, 我们知道存在 $\delta>0$, 使得对任意 $0<|x|<\delta$, 我们都有

$$-\epsilon|x| \leqslant f(2x)-f(x) \leqslant \epsilon|x|,$$

于是对每个 $k\in\mathbb{N}, 0<|x|<\delta$, 自然有

$$0<\left|\frac{1}{2^k}x\right| \leqslant |x|<\delta,$$

因此

$$-\epsilon\frac{|x|}{2^k} \leqslant f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right) \leqslant \epsilon\frac{|x|}{2^k},$$

对 $k=1,2,\cdots,n$ 求和得

$$-\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{|x|}{2^k} \leqslant f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant \epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{|x|}{2^k},$$

令 $n\to\infty$, 由 f 在 $x=0$ 连续, 我们知道

$$-\epsilon|x| = -\epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|}{2^k} \leqslant f(x)-f(0) \leqslant \epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|}{2^k} = \epsilon|x|,$$

这给出了

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant \epsilon, \forall 0<|x|<\delta,$$

因此 $f'(0)=0$, 因此我们完成了严格证明.

例题 10.3 若 f 在 $x=0$ 连续, 证明: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}$ 存在是 $f'(0)$ 存在的充分不必要条件.

证明 **Step 1**[(♠)]

若 $f'(0)$ 存在, 取

$$f(x)\triangleq\begin{cases}0, & x=\sin\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\\ x^2, & \text{其他}\end{cases},$$

则 $f'(0)=0$. 但是因为[1] $\frac{1}{n}\neq\sin\frac{1}{m}, \forall n,m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = +\infty,$$

即没有必要性.

Step 2

若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x^3}=A$ 存在, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-6Ax-(f(\sin x)-6A\sin x)}{x^3}=0.$$

故不妨设 $A=0$.

现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,\pi)$, 当 $0\leqslant|x|\leqslant\delta$, 我们有

$$|f(x)-f(\sin x)| \leqslant \epsilon|x-\sin x|.$$

考虑

$$x_1=x, x_{n+1}=\sin x_n, n=1,2,\cdots.$$

则相似 Stolz 定理经典习题8.24的证明我们可以得 $|x_n|\sim\sqrt{\frac{3}{n}}, n\to\infty$. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)-f(x_{n+1})| = \sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)-f(\sin x_n)| \leqslant \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-\sin x_n| \sim \frac{\epsilon}{6}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^3<\infty,$$

[1] 严格来说, 还需要论证 $\sin\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$ 为无理数, 这个东西超出了课程的目标, 一个解答可以在找到.

我们有

$$|f(x)| = |f(x_1)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}[f(x_n) - f(x_{n+1})]\right| \leqslant \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|.$$

当 $0 < x \leqslant \delta$, x_n 递减, 于是

$$|f(x)| \leqslant \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) = \epsilon x.$$

当 $-\delta \leqslant x < 0$, x_n 递增, 于是

$$|f(x)| \leqslant \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = -\epsilon x.$$

这就证明了

$$|f(x)| \leqslant \epsilon |x|, \forall 0 \leqslant |x| \leqslant \delta,$$

即 $f'(0) = 0$, 因此充分性成立.

例题 10.4 对 $n \in \mathbb{N}$, 求如下结果

1. 设 $f(x) = \sin(ax), a \in \mathbb{R}$, 求 $f^{(n)}$.
2. 设 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f^{(n)}$.
3. 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求 $f^{(n)}$.
4. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}$.
5. 设 $f(x) = \arctan x, x > 0$, 求 $f^{(n)}$.

证明

1. 观察即得

$$f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

2. 注意

$$f(x) = e^x \Re e^{ix} = \Re e^{(1+i)x} \Rightarrow f^{(n)} = \Re\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right) \Rightarrow f^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \Re\left(e^{\left(\frac{\pi}{4}n+x\right)i}\right),$$

于是

$$f^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}n\right).$$

3. 注意

$$xy = \ln x \Rightarrow (xy)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

现在用乘积求导法则, 我们有

$$xy^{(n)} + C_n^1 y^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

于是

$$(-1)^n x^{n+1} y^{(n)} - n(-1)^{n-1} x^n y^{(n-1)} = -(n-1)!, n = 1, 2, \cdots.$$

凑裂项求和

$$\frac{(-1)^n x^{n+1} y^{(n)}}{n!} - \frac{(-1)^{n-1} x^n y^{(n-1)}}{(n-1)!} = -\frac{1}{n},$$

即得

$$f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln x\right).$$

4. 找规律得

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

5. 复数域上裂项

$$\begin{aligned}
f^{(n)} &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n-1)} - \left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n-1)}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{n} - \left(\frac{1}{x+i}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^n}\left[(x+i)^n - (x-i)^n\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^n}\left[\left(\sqrt{1+x^2}e^{i\arctan\frac{1}{x}}\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}e^{-i\arctan\frac{1}{x}}\right)^n\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\left[e^{ni\arctan\frac{1}{x}} - e^{-ni\arctan\frac{1}{x}}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\arctan\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

例题 10.5 设 $f(x)=x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, 计算 $f^{(n)}(0), n\in\mathbb{N}$.

笔记 此类问题都是通过背 Taylor 公式之后通过拼凑来得到 $f^{(n)}(0)$, 这是因为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy \sim x^2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{2}}^n y^{2n}dy = x^2\sum_{n=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{2}}^n\int_0^x y^{2n}dy \\
&= x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-\frac{1}{2}}^n}{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-\frac{1}{2}}^n}{2n+1}x^{2n+3} = x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{(2n+1)n!}x^{2n+3} \\
&= x^3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!(-1)^n}{(2n+1)n!2^n}x^{2n+3},
\end{aligned}$$

于是

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}6, & n=3\\ \frac{(2m-1)!!(2m+3)!(-1)^m}{m!2^m(2m+1)}, & n=2m+3,m\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{,其他}\end{cases}.$$

例题 10.6 生成级数或者建立递推法求解高阶导数值 对 $n\in\mathbb{N}_0$, 解决下列问题

1. 设 $f(x)=\arcsin^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.
2. 设 $f(x)=\arcsin x\cdot\arccos x$, 求 $f^{(n)}(0)$.
3. 设 $f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^m, m\in\mathbb{N}$, 求 $f^{(n)}(0)$.
4. 设 $f(x)=\arctan^2 x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

笔记 此类问一般是先建立函数满足的微分方程, 然后用乘积求导法则或者形式幂级数对比系数来得到导数的递推, 从而完成了证明.

证明

1. **Step 1** 乘积求导公式法:
   注意 $f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x$, 故
   $$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$
   于是得到微分方程
   $$-xy'+\left(1-x^2\right)y''=2, y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=2, y'''(0)=0.$$

现在两边用乘积求导法则求 n 阶导, 我们有

$$-\left[ny^{(n)}+xy^{(n+1)}\right]+\left[-2\frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}-2nxy^{(n+1)}+\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}\right]=0.$$

代入 $x=0$ 就有

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0),\forall n\geqslant 2. \tag{10.1}$$

显然等式(10.1)可以扩充到 $n=1$. 现在运用(10.1)累乘法可得

$$\frac{y^{(2n+2)}(0)}{y^{(2n)}(0)}=4n^2\Rightarrow\frac{y^{(2n+2)}(0)}{y^{(2)}(0)}=\prod_{i=1}^{n}\left(4i^2\right)\Rightarrow y^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}n!^2,n=0,1,2,\cdots.$$

由(10.1)知显然有

$$y^{(2n-1)}(0)=0,n=1,2,\cdots.$$

Step 2 生成幂级数法:

首先

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

于是

$$2=-xy'+\left(1-x^2\right)y''=-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n.$$

化简得

$$2=-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n,$$

即对比系数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n-n(n-1)a_n\right]x^n=2,$$

和利用 $y^{(n)}(0)=n!a_n$, 同样可得(10.1), 于是可以同样得到结果. 后面几个题我们不再分两个方法书写. 现在我们得到了一个最好记忆的额外结论, 它可以快速拼凑出其他问题的解答.

推论 10.1 (一个额外记忆的级数)

我们有

$$\arcsin^2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n},x\in(-1,1).$$

♡

2. 你当然可以直接构造满足的微分方程来类似求解, 但我们利用 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, 就有 $f(x)=\frac{\pi}{2}\arcsin x-\arcsin^2x$, 于是可以直接套推论10.1. 此外我们根据经验知三角函数和对应的双曲函数的幂级数只有交错不交错的区别, 因此由例题10.5我们可以直接写出

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)n!2^n}x^{2n+1}.$$

于是就有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)n!2^n}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n},$$

从而

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{\pi}{2}, & n=1\\ \frac{\pi}{2}\frac{(2m-1)!!(2m+1)!}{(2m+1)m!2^m}, & n=2m+1,m\in\mathbb{N}\\ -\frac{2^{2m-1}(m-1)!^2}{(2m)!}(2m)!, & n=2m,m\in\mathbb{N}\end{cases}=\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{\pi}{2}, & n=1\\ \frac{\pi}{2}\left((2m-1)!!\right)^2, & n=2m+1,m\in\mathbb{N}\\ -2^{2m-1}\left((m-1)!\right)^2, & n=2m,m\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

3. 注意到 f 满足微分方程[2] $\left(1+x^2\right)f''+xf'-m^2f=0$. 对 $n\geqslant 2$, 由乘积求导法则, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[\left(1+x^2\right)^{(k)}f^{(n-k+2)}\right]+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[(x)^{(k)}f^{(n-k+1)}\right]-m^2f^{(n)}=0.$$

代入 $x=0$ 就有

$$f^{(n+2)}(0)+n(n-1)f^{(n)}(0)+nf^{(n)}(0)-m^2f^{(n)}(0)=0,$$

即

$$f^{(n+2)}(0)=\left(m^2-n^2\right)f^{(n)}(0). \tag{10.2}$$

显然(10.2)可以扩充到 $n\in\mathbb{N}_0$ 且 $f(0)=1, f'(0)=m$. 于是对 $n\in\mathbb{N}_0$, 反复运用(10.2)迭代得

$$f^{(2n+2)}(0)=\left(m^2-4n^2\right)\left(m^2-4(n-1)^2\right)\cdots m^2.$$

对 $n\in\mathbb{N}$, 反复运用(10.2)迭代得

$$f^{(2n+1)}(0)=\left(m^2-(2n-1)^2\right)\left(m^2-(2n-3)^2\right)\cdots\left(m^2-1\right)m.$$

4. 我们虽然仍可以用生成级数或建立递推的方法, 但 Cauchy 乘积的方法同样的重要, 即对比系数由

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n\Rightarrow\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

知

$$\arctan^2 x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

对比系数得

$$a_0=0, a_{2m-1}=0, m\in\mathbb{N},$$

且

$$\begin{aligned}a_{2m}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m-k}}{2(m-k+1)-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{(-1)^{m-1}}{2m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2m-2k+1}+\frac{1}{2k-1}\right)\\&=\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1},\end{aligned}$$

从而

$$f^{(2m)}(0)=\frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}.$$

例题 10.7 设 f 在 a 处 $n+1$ 阶连续可导的, 证明:

$$\lim_{x\to a}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}. \tag{10.3}$$

[2]取 ln 可能更好算一点.

证明 不失一般性, 设 $f(a)=a=0$, 然后由乘积求导法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(-x)^k$$

$$\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{n!(-1)^n}{(n+1)x^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x)(-x)^k\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(x)(-x)^{k-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n!(-1)^n}{(n+1)x^n}\left[f'(x)+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(-x)^n-f'(x)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1},$$

这就给出了(10.3).

例题 10.8 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}),n\in\mathbb{N}$ 满足

$$f^{(j)}(0)=0,j=0,1,2,\cdots,n-1,f^{(n)}(0)\neq 0. \tag{10.4}$$

证明: $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x^n}, & x\neq 0\\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, & x=0\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微.

笔记 本题不能对 Taylor 公式的 peano 余项求导来说明 g 可微分性, 这是不严格的. 当 $n=0$, 可以视为没有 $f^{(j)}(0)=0,j=0,1,2,\cdots,n-1$ 这个条件.

证明 当 $n=0$, 则显然 $g=f$ 满足要求. 由例题10.7和条件(10.4)以及导数极限定理12.2, 我们知道 $\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 且

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(j)}|_{x=0}=0,0\leqslant j\leqslant n-2,\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(n-1)}|_{x=0}\neq 0.$$

现在命题对 $n=1$ 成立.

假设命题对 n 成立, 我们考虑 $n+1$. 对 $\frac{f(x)}{x}$, 此时

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(j)}|_{x=0}=0,0\leqslant j\leqslant n-1,\left[\frac{f(x)}{x}\right]^{(n)}|_{x=0}\neq 0.$$

对 $\frac{f(x)}{x}$ 注意到

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{\frac{f(x)}{x}}{x^n},x\neq 0.$$

运用归纳假设和 $n=1$ 的情况即得命题对 $n+1$ 成立, 因此由数学归纳法我们证明了 g 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微.

例题 10.9 通过 f 本身刻画高阶导数. 设 f 在 $x=0$ 是 n 阶可微的, 证明

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k f((n-2k)h)}{(2h)^n}=f^{(n)}(0). \tag{10.5}$$

证明 先证明如下恒等式

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k(n-2k)^m=0, & 0\leqslant m\leqslant n-1\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k(n-2k)^m=2^n n!, & m=n\end{cases}. \tag{10.6}$$

事实上,

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k(n-2k)^m=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\sum_{s=0}^{m}C_m^s n^{m-s}(-2k)^s$$

$$=\sum_{s=0}^{m}C_m^s n^{m-s}(-2)^s\sum_{k=0}^{n}k^s C_n^k(-1)^k=\begin{cases}0, & m<n\\ 2^n n!, & m=n\end{cases},$$

这里用到了

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k,nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k,x\left(nx(1+x)^{n-1}\right)'=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k x^k,\cdots,$$

从而因为 -1 是 $(1+x)^n$ 的 n 重根, 所以 $x=-1$ 代入总有

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k (-1)^k = 0, 0 \leqslant m \leqslant n-1.$$

此外还有[3]

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k (-1)^k = n! (-1)^n, m = n.$$

现在就证明了恒等式(10.6).

当 $n=1$, 极限(10.5)就是

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = f'(0).$$

当 $n>1$, 注意到 f 在 0 邻域是 $n-1$ 阶可导的, 于是可反复洛必达得

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k f((n-2k)h)}{(2h)^n} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^{n-1} f^{(n-1)}((n-2k)h)}{2^n n! h}$$
$$\overset{(10.6)}{=} \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^{n-1} \left[f^{(n-1)}((n-2k)h) - f^{(n-1)}(0)\right]}{2^n n! h}.$$

注意 f 在 $x=0$ 只是单点 n 阶可导, 于是不可继续洛必达. 使用导数定义得

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^{n-1} \left[f^{(n-1)}((n-2k)h) - f^{(n-1)}(0)\right]}{2^n n! h} = f^{(n)}(0) \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k (n-2k)^n}{2^n n!} \overset{(10.6)}{=} f^{(n)}(0),$$

这就完成了证明.

例题 10.10 设 f 是 $n \in \mathbb{N}$ 阶可微的, 证明

$$\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

证明 当 $n=0$ 时, 有 $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$. 设命题对 $\leqslant n$ 时成立. 当 $n+1$ 时, 我们有

$$\left[x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n+1)} = \left[nx^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)} = \left[nx^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)} - \left[x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}$$
$$\overset{\text{归纳假设}}{=} \frac{(-1)^n n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left[x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n-1)} \overset{\text{归纳假设}}{=} \frac{(-1)^n n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \frac{(-1)^n n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-1)^n n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right),$$

于是由数学归纳法, 我们完成了证明.

定理 10.1 (复合函数高阶导公式)

设 f, g 都是 m 阶可微函数, 则有

$$\frac{d^m g(f(x))}{dx^m} = \sum \frac{m!}{b_1! b_2! \cdots b_m!} g^{(b_1+b_2+\cdots+b_m)}(f(x)) \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right)^{b_m},$$

这里求和对集合 $\{(b_1, b_2, \cdots, b_m) \in \mathbb{N}_0^m : b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m\}$ 进行. ♡

笔记 给定有限的具体的 m, 相信读者自己就会验证定理10.1. 一般的抽象的 m 不会考也没必要去证明, 直接使用即可.

例题 10.11

1. 设 $k, n \in \mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{x\to 1} (x^k - 1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^k - 1}\right).$$

[3]如果感受不到就考虑特殊例子来找感觉.

2. 给定 $n\in\mathbb{N}$, 对 $f(x)=(1+\sqrt{x})^{2n+2}$ 计算 $f^{(n)}(1)$.
3. 给定 $m,n\in\mathbb{N}$, 计算 $\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n|_{x=1}$.
4. 给定 $n\in\mathbb{N}$, 设 $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^n\arctan^2\frac{x}{3}$, 计算 $f^{(n)}(-3)$.
5. 给定 $n\in\mathbb{N}$, 设 $f(x)=x^n(x-1)^n\cos\frac{\pi}{4}x^2$, 计算 $f^{(n)}(1)$.

证明

1. 想法是简单的, 即利用乘积求导法则和因式分解

$$x^k-1=(x-1)\left(1+x+\cdots+x^{k-1}\right)$$

就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(x^k-1\right)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^k-1}\right)&=\lim_{x\to1}\left(x^k-1\right)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{1+x+\cdots+x^{k-1}}\right]\\&=\lim_{x\to1}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\left(x^k-1\right)^{n+1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-j)}\left(\frac{1}{1+x+\cdots+x^{k-1}}\right)^{(j)}\\&=\lim_{x\to1}\left(x^k-1\right)^{n+1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\left(\frac{1}{1+x+\cdots+x^{k-1}}\right)\\&=\lim_{x\to1}(x-1)^{n+1}\frac{(-1)^n\,n!}{(x-1)^{n+1}}\left(1+x+\cdots+x^{k-1}\right)^n\\&=(-1)^n\,n!k^n.\end{aligned}$$

2. 注意到

$$(1+\sqrt{x})^{2n+2}+(1-\sqrt{x})^{2n+2}=\sum_{k=0}^{2n+2}C_{2n+2}^kx^{\frac{k}{2}}+\sum_{k=0}^{2n+2}C_{2n+2}^k(-1)^kx^{\frac{k}{2}}=2\sum_{k=0}^{n+1}C_{2n+2}^{2k}x^k.$$

又

$$(1-\sqrt{x})^{2n+2}=\frac{(1-x)^{2n+2}}{(1+\sqrt{x})^{2n+2}},$$

即 $\frac{d^n(1-\sqrt{x})^{2n+2}}{dx^n}|_{x=1}=0$. 故

$$f^{(n)}(1)=\left(2\sum_{k=0}^{n+1}C_{2n+2}^{2k}x^k\right)^{(n)}|_{x=1}=2\left[n!C_{2n+2}^{2n}+(n+1)!\right]=4(n+1)(n+1)!.$$

3. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n&=\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^n\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)^n\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left((1-x)^n\right)^{(n-k)}\left(\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n\right)^{(k)},\end{aligned}$$

把 $x=1$ 代入就有

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n|_{x=1}=n!(-1)^n\left((1+1+\cdots+1)^n\right)=m^nn!(-1)^n.$$

4. 注意到 $f(x)=(x+3)^n(x-1)^n\arctan^2\frac{x}{3}$, 于是使用乘积求导法则就有

$$f^{(n)}(-3)=n!(-3-1)^n\arctan^2\frac{-3}{3}=(-1)^nn!\pi^24^{n-2}.$$

5. 完全类似, $f^{(n)}(1)=\frac{n!}{\sqrt{2}}$.

例题 10.12 设 $f_n(x)=x^n\ln x,n=1,2,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

证明 注意到 $\left(x^{n+1}\ln x\right)'=(n+1)x^n\ln x+x^n$, 于是

$$\left(x^{n+1}\ln x\right)^{(n+1)}=(n+1)\left(x^n\ln x\right)^{(n)}+n!,n=0,1,2,\cdots.$$

现在

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(x^{n+1}\ln x\right)^{(n+1)}=\frac{1}{n!}\left(x^n\ln x\right)^{(n)}+\frac{1}{n+1},n=0,1,2,\cdots.$$

求和得

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(x^{n+1}\ln x\right)^{(n+1)}=\ln x+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1},n=0,1,2,\cdots.$$

故由8.6知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}^{(n+1)}\left(\frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{1}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right]=\gamma.$$

例题 10.13 设 f,g 是 x_0 的某个邻域内的无穷阶连续可微函数, 且在该邻域内 $f(x)=0$ 的充要条件是 $x=x_0$. 证明

$$\lim_{x\to x_0}f^{n+1}(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=g(x_0)\left[-f'(x_0)\right]^n n!,\forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{10.7}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}f^{n+1}(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}f^{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(n-k)}(x)\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{(k)}\\
&=g(x_0)\lim_{x\to x_0}f^{n+1}(x)\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{(n)}\\
&\overset{\text{复合函数高阶导数公式10.1}}{=}g(x_0)\lim_{x\to x_0}f^{n+1}(x)\sum\frac{(-1)^{b_1+\cdots+b_n}(b_1+\cdots+b_n)!n!}{b_1!b_2!\cdots b_n!f^{b_1+b_2+\cdots+b_n+1}(x)}\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{b_n}\\
&=g(x_0)\lim_{x\to x_0}f^{n+1}(x)\frac{(-1)^n n!^2}{n!f^{n+1}(x)}\left[f'(x)\right]^n=g(x_0)n!\left[-f'(x_0)\right]^n,
\end{aligned}$$

这里求和是对 $\{(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{N}_0^n:b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n\}$ 进行. 于是

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant b_1+2b_2+\cdots+nb_n=n,$$

且等号成立条件当且仅当 $b_2=b_3=\cdots=b_n=0$.

定理 10.2 (多个函数积的高阶导公式)

$$(h_1h_2\cdots h_k)^{(n)}=n!\sum_{|\alpha|=n}\frac{h_1^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!}\frac{h_2^{(\alpha_2)}}{\alpha_2!}\cdots\frac{h_k^{(\alpha_k)}}{\alpha_k!},$$

这里求和对 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n,\alpha_j\in\mathbb{N}_0,j=1,2,\cdots,k$ 进行. ♡

笔记 本定理可以直接使用.

例题 10.14 设 f 在 0 的邻域内有二阶连续可微偏导数, $f(0),f'(0),f''(0)\neq 0$. 证明: 存在唯一的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(4h)-f(0)=o\left(h^2\right),h\to 0.$$

证明 由 Taylor 公式, 对 $k\in\mathbb{R}$, 我们有

$$f(kh)=f(0)+f'(0)kh+\frac{f''(0)}{2}k^2h^2+o\left(h^2\right),h\to 0.$$

于是

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(4h)-f(0)=\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i-1\right)f(0)+\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i 2^{i-1}h\right)\cdot f'(0)+\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{4^{i-1}\lambda_i h^2}{2}\right)f''(0)+o\left(h^2\right),h\to 0.$$

于是要使题目等式成立, 当且仅当

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=1,\sum_{i=1}^{3}\lambda_i 2^{i-1}=0,\sum_{i=1}^{3}4^{i-1}\lambda_i=0,$$

即线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-2\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

10.2 多变量微分学和极限计算

10.2.1 二重极限

我们的极限采用聚点定义, 即只需要沿着有定义的地方趋近即可.

例题 10.15 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明 f 沿着每条射线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha, & t>0,\alpha\in[0,2\pi)\\ y=t\sin\alpha, & t>0,\alpha\in[0,2\pi)\end{cases}$ 趋于 $(0,0)$ 时都趋于 0. 但是 f 在 $(0,0)$ 不连续.

笔记 本结果表明, 使用极坐标求二重极限不一定正确, 我们得到的只是沿着每个方向的极限.

证明 一方面,

$$\lim_{t\to0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to0^+}\frac{t^3\cos\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0.$$

另外一方面

$$\lim_{x\to0^+}f\left(x,kx^2\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

故 f 在 $(0,0)$ 不连续.

那么什么时候可以直接极坐标呢? 实际上只需要极限关于方向 $\theta\in[0,2\pi)$ 一致, 因为你直接考察定义 $\epsilon-\delta$ 语言即可. 实际做题中可以体现为

$$\lim_{t\to0^+}\sup_{\alpha\in[0,2\pi)}|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-A|=0.$$

更直白的, 你需要得到形如

$$|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-A|\leqslant g(t)$$

的不等式且 $\lim\limits_{t\to0^+}g(t)=0$.

例题 10.16 计算

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x+y}.$$

证明 考虑

$$|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)|=t^2\left|\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|=t^2\left|\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha\right|\leqslant 2t^2,$$

于是

$$0\leqslant\lim_{t\to0^+}|f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)|\leqslant 2\lim_{t\to0^+}t^2=0,$$

故我们得到了

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x+y}=0.$$

例题 10.17 设 f 在 $(0,0)$ 连续且满足

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=a>0.$$

求 a 的范围使得 f 在 $(0,0)$ 一定取到极值. 再求 a 的范围使得 f 在 $(0,0)$ 一定取不到极值.

笔记 注意到 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 但是

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

即猜测 $\frac{1}{2}$ 是 a 的分界点.

证明 由条件容易得到

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0,$$

以及

$$f(x,y)=(a+g(x,y))\left(x^2+y^2\right)+xy,\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0.$$

当 $a>\frac{1}{2}$, 当 (x,y) 足够靠近 0 使得 $g(x,y)>\frac{1}{2}-a$, 此时我们有

$$f(x,y)=(a+g(x,y))\left(x^2+y^2\right)+xy>\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+xy=\frac{1}{2}(x+y)^2\geqslant 0.$$

故 $a>\frac{1}{2}$ 取得极值.

当 $0<a<\frac{1}{2}$, 当 (x,y) 足够靠近 0 使得 $-a<g(x,y)<\frac{1-2a}{4}$, 则此时当 $x>0,y>0$ 有 $f(x,y)>0$. 但是

$$f(x,y)=(a+g(x,y))\left(x^2+y^2\right)+xy<\frac{1+2a}{4}\left(x^2+y^2\right)+xy.$$

又 $\frac{1+2a}{4}\left(x^2+y^2\right)+xy$ 在 $y=-x$ 上有

$$\frac{1+2a}{4}2x^2-x^2=\frac{2a-1}{2}x^2<0,$$

故 $(0,0)$ 不是极值.

当 $a=\frac{1}{2}$ 问题无法判断, 这是因为考虑 $f(x,y)=xy+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+x^2\left(x^2+y^2\right)$, 则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2+x^2\left(x^2+y^2\right)>0,$$

即 $(0,0)$ 是极值. 但是考虑 $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+xy-x\left(x^2+y^2\right)$, 就有

$$f(x,-x)=x^2-x^2-2x^3=-2x^3<0,x>0;$$

$$f(x,x)=x^2+x^2-2x^3=2x^2-2x^3>0,0<x<1,$$

即 $(0,0)$ 不是极值.

例题 10.18 设 $\alpha,\beta>0$. 若

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|^\alpha+|y|^\beta}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 不连续但是偏导数存在. 求 α,β 范围.

证明 设

$$|x|^{\frac{\alpha}{2}}=r\cos\theta,|y|^{\frac{\beta}{2}}=r\sin\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

于是

$$\left|\frac{xy}{|x|^\alpha+|y|^\beta}\right|=r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-2}\cos^{\frac{2}{\alpha}}\theta\sin^{\frac{2}{\beta}}\theta.$$

于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0\Leftrightarrow\lim_{r\to0+}r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-2}\sup_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\cos^{\frac{2}{\alpha}}\theta\sin^{\frac{2}{\beta}}\theta\right|=0\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>1.$$

显然对任何 $\alpha,\beta>0$ 都有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

因此我们证明了所求 α,β 范围为 $0<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\leqslant1$.

10.2.2 多变量微分学计算

一个不严谨的无脑套公式的题型.

结论 即对二阶连续可微函数 u,v 有 u 是 v 的函数的充分必要条件是

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0. \tag{10.8}$$

例题 10.19 设 $xf'_x+yf'_y=0$, 证明 f 是 $\frac{y}{x}$ 的函数.

证明 注意到

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{x}{x^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{x^2}\left(xf'_x+yf'_y\right)=0,\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}=\frac{1}{x},$$

我们由结论10.2.2知 f 是 $\frac{y}{x}$ 的函数.

定理 10.3 (用矩阵判定极值)

设 f 是某个区域 $V\subset\mathbb{R}^n$ 的二阶连续可微函数, 我们定义其 Hess 矩阵为

$$Hf=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

则对 $\mathbf{x}_0\in V$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)=0,i=1,2,\cdots,n$ 有

1. $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是正定的, 则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 严格极小值点;
2. $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是负定的, 则 $\mathbf{x}_0$ 是 f 严格极大值点;
3. $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是不定的[a], 则 $\mathbf{x}_0$ 不是 f 极值点;
4. 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 极小值点, 则 $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是半正定的;
5. 若 $\mathbf{x}_0$ 是 f 极大值点, 则 $Hf(\mathbf{x}_0)$ 是半负定的.

[a]即不是半正定, 也不是半负定.

♡

我们称 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为齐 $n,n\in\mathbb{N}$ 次函数, 如果 f 满足

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),\forall x,y\in\mathbb{R},t>0. \tag{10.9}$$

例题 10.20 齐次函数基本性质 若 $f\in D^2(\mathbb{R}^2)$, 则 f 是齐 n 次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf. \tag{10.10}$$

证明 若 f 是齐 n 次函数, 则由(10.9)两边对 t 求导得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y).$$

于是

$$tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^nf(x,y)=nf(tx,ty),$$

即得(10.10).

反过来若(10.10)成立, 固定 $x,y\in\mathbb{R}$ 并考虑 $g(t)=f(tx,ty)$. 则有

$$tg'(t)=tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nf(tx,ty)=ng(t).$$

故解微分方程得 $g(t)=Ct^n$, 从而

$$g(1)=f(x,y)\Rightarrow f(tx,ty)=t^nf(x,y),$$

这就证明了(10.9).

例题 10.21 设 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 且 $u(0,y)=y^2,u(x,1)=\cos x$, 求 u.

证明 对 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 两边关于 y 积分得 $\frac{\partial u}{\partial x}+u=C(x)$. 由 $u(x,1)=\cos x$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,1)=-\sin x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+u=C(x)=\cos x-\sin x.$$

又

$$\frac{\partial\left(ue^x\right)}{\partial x}=e^x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)=e^x(\cos x-\sin x)\Rightarrow ue^x=e^x\cos x+C_2(y),$$

我们有

$$u(x,y)=\cos x+C_2(y)e^{-x}.$$

现在

$$y^2=u(0,y)=1+C_2(y)\Rightarrow C_2(y)=y^2-1,$$

故

$$u(x,y)=\cos x+\left(y^2-1\right)e^{-x}.$$

例题 10.22 设 $f(x,y,z)=|x+y+z|$, 设 $x_0+y_0+z_0=0$, 讨论 f 在 (x_0,y_0,z_0) 处的方向导数.

证明 考虑方向 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}\\=&\lim_{t\to0^+}\frac{|t\cos\alpha+t\cos\beta+t\cos\gamma|}{t}=|\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma|.\end{aligned}$$

于是 f 在 (x_0,y_0,z_0) 处沿着 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为 $|\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma|$.

10.3 多变量微分学证明

例题 10.23 设 l_1,l_2 夹角为 $\varphi\in(0,\pi)$ 且 f 连续可微, 证明

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\leqslant\frac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2\right].\tag{10.11}$$

证明 由可微时方向导数计算公式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l_1}&=\cos a\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin a\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\\frac{\partial f}{\partial l_2}&=\cos(a+\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin(a+\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned}$$

则

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial l_1}\\\frac{\partial f}{\partial l_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos a&\sin a\\\cos(a+\varphi)&\sin(a+\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a&\sin a\\\cos(a+\varphi)&\sin(a+\varphi)\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\cos a&\sin a\\\cos(a+\varphi)&\sin(a+\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos^2a+\cos^2(a+\varphi)&\sin(a+\varphi)\cos(a+\varphi)+\sin a\cos a\\\sin(a+\varphi)\cos(a+\varphi)+\sin a\cos a&\sin^2a+\sin^2(a+\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

利用 $\begin{pmatrix}\cos^2a+\cos^2(a+\varphi)&\sin(a+\varphi)\cos(a+\varphi)+\sin a\cos a\\\sin(a+\varphi)\cos(a+\varphi)+\sin a\cos a&\sin^2a+\sin^2(a+\varphi)\end{pmatrix}$ 的特征值为 $1\pm\cos\varphi$ 和命题21.15, 我们知道

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\leqslant\frac{1}{1-|\cos\varphi|}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2\right]\leqslant\frac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial l_1}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial l_2}\right|^2\right],$$

即得(10.11).

例题 10.24 设 D 为单位圆盘, 考虑 $f\in C^1(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right)$ 且 $|f|\leqslant 1$, 证明: 存在 D 中的一个点 (x_0,y_0) 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|^2\leqslant 16. \tag{10.12}$$

笔记 摄动想法, 此外很多同学疑惑构造函数咋来的, 实际上这是完全没有必要的! 因为大家几乎都是记的. 本题有一些更高端的技术可以加强到最佳系数.

证明 考虑 $g(x,y)=f(x,y)+2\left(x^2+y^2\right)$, 则 $g|_{\partial D}\geqslant 1, g(0,0)\leqslant 1$. 故 g 最小值在 D 内取到, 从而存在 D 中的一个 g 的最小值点 (x_0,y_0) 使得 $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=0, \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-4x_0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-4y_0.$$

这就得到了(10.12).

注利用更为现代的技术, 我们可以将(10.12)的 16 修改为 1.

引理 10.1 $(*,\spadesuit)$

设

$$r>0, D=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n):\sum_{i=1}^n x_i^2<r^2\right\}, f\in C^1\left(\overline{D}\right),$$

证明: 存在点 $\mathbf{p}\in D$ 使得

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{D}} f(\mathbf{x})-\min_{\mathbf{x}\in\overline{D}} f(\mathbf{x})=|\nabla f(\mathbf{p})|\cdot 2r. \tag{10.13}$$

♡

证明 我们断言更强的结论

$$\min_{\mathbf{x}\in\overline{D}}|\nabla f(\mathbf{x})|\leqslant\frac{\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{D}} f(\mathbf{x})-\min\limits_{\mathbf{x}\in\overline{D}} f(\mathbf{x})}{2r}\leqslant\max_{\mathbf{x}\in\overline{D}}|\nabla f(\mathbf{x})|. \tag{10.14}$$

不妨设 $|\nabla f(\mathbf{x})|\neq 0, \forall\mathbf{x}\in\overline{D}$, 否则已经有(10.14)成立. 考虑符号 $\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$, 由解的 Peano 存在定理13.17的向量值版本知常微分方程组[4]

$$\begin{cases}\gamma(0)=(0,0,\cdots,0)\\ \gamma'(t)=\frac{1}{|\nabla f|}\nabla f(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\end{cases}$$

在 $(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times D$ 有解. 由 $|\gamma'(t)|\leqslant 1$ 和解的延拓定理13.18的向量值版本知解的最大存在区间的端点为 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty, \gamma(a),\gamma(b)\in\partial D$ 且 γ 的长度[5]$b-a\geqslant 2r$.

一方面我们有

$$\begin{aligned}f(\gamma(b))-f(\gamma(a))&=\sum_{i=1}^n\int_\gamma\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\\ &=\sum_{i=1}^n\int_a^b|\nabla f|\,x_i'(t)\,\mathrm{d}x_i(t)=\int_a^b|\nabla f|\cdot|\gamma'(t)|^2\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant\min_{\mathbf{x}\in\overline{D}}|\nabla f(\mathbf{x})|\cdot\int_a^b 1\mathrm{d}t\geqslant\min_{\mathbf{x}\in\overline{D}}|\nabla f(\mathbf{x})|\cdot 2r,\end{aligned}$$

[4]初等形式

$$\begin{cases}\gamma(0)=(0,0,\cdots,0)\\ x_i'(t)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))\right|^2}},\quad i=1,2,\cdots,n\cdot\end{cases}$$

[5]长度为

$$\int_\gamma 1\mathrm{d}s=\int_a^b|\gamma'(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_a^b 1\mathrm{d}t=b-a.$$

然后圆周上的点沿着一条曲线到原点, 走过的距离当然大于等于半径. 现在 $\gamma(a)$ 走到 0 再走到 $\gamma(b)$.

这就给出了(10.14)的左边不等式.

另外一方面, 设 $\eta:[0,1]\to\overline{D}$ 是连接 f 最大值点和最小值点的直线, 则显然其长度小于等于 $2r$, 并且有

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{D}}f(\mathbf{x})-\min_{\mathbf{x}\in\overline{D}}f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cos\alpha_i\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{\eta}\sqrt{|\nabla f|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\cos(\alpha_i)|^2}\mathrm{d}s=\int_{\eta}|\nabla f|\,\mathrm{d}s\leqslant 2r\cdot\max_{\mathbf{x}\in\overline{D}}|\nabla f(\mathbf{x})|,$$

这里第一个不等号来自 Cauchy 不等式. 因此我们证明了(10.14)右边.

由(10.14)和介值定理就证明了引理10.1. 回到原题, 设 $\mathbf{p}$ 如引理10.1所述, 则

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})\right|^2=\left(\frac{\max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{D}}f(\mathbf{x})-\min\limits_{\mathbf{x}\in\overline{D}}f(\mathbf{x})}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1-(-1)}{2}\right)^2=1.$$

例题 10.25 设 $\lim\limits_{r=\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=a>0$, 证明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 取得最小值.

注本题关键是条件极限关于角度 θ 的一致性.

笔记 积累想法设 $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 则

$$r\frac{\partial g}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial\theta}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

证明 注意到 $\lim\limits_{r\to+\infty}rg'_r=a>0$, 于是存在 $r_0>0$ 使得 $g'_r>0,\forall r\geqslant r_0$. 则此时

$$g(r,\theta)\geqslant g(r_0,\theta),\forall r\geqslant r_0,\theta\in[0,2\pi).$$

故 $\min\limits_{r\in[0,r_0],\theta\in[0,2\pi]}g(r,\theta)$ 为 g 最小值.

例题 10.26 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数且 $f(0,1)=f(1,0)$, 证明存在单位圆周上两个不同的点使得 $y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$.

证明 考虑 $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$, 注意到

$$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(2\pi).$$

由罗尔中值定理知单位圆周上有两个不同的点使得 $y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$.

例题 10.27

1. 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2),f(0,0)=0$ 且 $|\nabla f|\leqslant 1$, 证明 $|f(1,2)|\leqslant\sqrt{5}$.
2. 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2),f(0,0)=0$ 且

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 2|x-y|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 2|x-y|.\tag{10.15}$$

证明:$|f(5,4)|\leqslant 1$.

证明

1. 注意到

$$f(1,2)-f(0,0)=\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right),$$

这里积分路径待定. 于是

$$|f(1,2)|=\left|\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\int_{(0,0)}^{(1,2)}|\nabla f|\,\mathrm{d}s\leqslant\int_{(0,0)}^{(1,2)}1\mathrm{d}s.$$

为了得到这个方法最佳的估计, 我们取积分路径为连接 $(0,0),(1,2)$ 的线段, 这恰好给出了 $|f(1,2)|\leqslant\sqrt{5}$.

2. 注和上一问完全类似, 取积分路径为连接 $(0,0),(5,4)$ 的线段, 我们有

$$\begin{aligned}|f(5,4)| &= \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right| \leqslant \int_{(0,0)}^{(5,4)}|\nabla f|\,\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{8}\int_{(0,0)}^{(5,4)}|x-y|\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\sqrt{8}}{5}\int_0^5 x\sqrt{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{82},\end{aligned}$$

没能成功的原因就是两类曲线积分转换时的损失.

回到本题证明: 先沿着 $y=x, 0\leqslant x\leqslant 4$ 积分, 此时由不等式(10.15)知积分 $\int_{(0,0)}^{(4,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$ 为 0. 于是

$$\begin{aligned}|f(5,4)| &= \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right| = \left|\int_{(4,4)}^{(5,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right| \\ &= \left|\int_4^5\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\int_4^5|x-4|\,\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

来看一类构造性问题, 它本身源于微分几何的庞加莱引理, 但确实考研竞赛的高频考点.

例题 10.28 设 B 是 $\mathbb{R}^2$ 的单位闭圆盘且 $f\in C^3(B)$ 满足 $f(0,0)=0$. 证明存在 $g_1,g_2\in C(B)$ 使得

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y),\forall(x,y)\in B.$$

证明 定义

$$g_1(x,y)\triangleq\int_0^1 f_x'(tx,ty)\,\mathrm{d}t, g_2(x,y)\triangleq\int_0^1 f_y'(tx,ty)\,\mathrm{d}t,(x,y)\in B.$$

显然 $g_1,g_2\in C^2(B)$. 对 $(x,y)\in B$, 由牛顿莱布尼兹公式和链式法则可得

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(x,y)-f(0,0) &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(tx,ty))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1\left[xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)\right]\mathrm{d}t \\ &= xg_1(x,y)+yg_2(x,y),\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 10.29 设 $V\subset\mathbb{R}^2$ 是一个开集, 若 V 上的函数 f 关于每个分量连续且关于其中一个单调, 则 f 在 V 上连续.

笔记 证明的想法就是同构单调性来用端点控制, 从而带来一致性.

证明 不妨设 $(0,0)\in V$, 只需证 f 在 $(0,0)$ 连续[6]. 不妨假定 f 关于 x 递增, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x,0)-f(0,0)|\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall x\in[-\delta,\delta]. \tag{10.16}$$

特别的, 就有

$$|f(\delta,0)-f(0,0)|\leqslant\frac{\epsilon}{2},|f(-\delta,0)-f(0,0)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}. \tag{10.17}$$

取 $\eta>0$ 使得对任何 $y\in(-\eta,\eta)$ 都有

$$|f(\delta,y)-f(\delta,0)|\leqslant\frac{\epsilon}{2},|f(-\delta,y)-f(-\delta,0)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}. \tag{10.18}$$

于是对 $(x,y)\in(-\delta,\delta)\times(-\eta,\eta)$, 由于 f 关于 x 递增, 用(10.18)和(10.17), 我们有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &\leqslant \max\{|f(\delta,y)-f(0,0)|,|f(-\delta,y)-f(0,0)|\} \\ &\leqslant \max\{|f(\delta,y)-f(\delta,0)|+|f(\delta,0)-f(0,0)|,|f(-\delta,y)-f(-\delta,0)|+|f(-\delta,0)-f(0,0)|\} \\ &\leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

例题 10.30 设 $V\subset\mathbb{R}^2$ 是一个开集, 若 V 上的函数 f 关于每个分量偏导数存在且其中一个偏导数有下界, 证明 f 连续.

[6]否则做一个平移就行了.

证明 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x} \geqslant c$, 于是 $f-cx$ 关于 x 递增, 因此由例题10.29知 $f-cx$ 连续. 现在我们就知道 f 连续.

例题 10.31 若 $f_x'(x_0,y_0)$ 存在, $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域连续, 证明:f 在 (x_0,y_0) 可微.

注本题即课本定理的推广, 原本需要两个偏导数, 现在只需要一个偏导数连续即可.

证明 不妨设 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 并用 $f(x,y)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y-f(0,0)$ 代替 f, 我们可不妨设

$$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=f(0,0)=0.$$

于是有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{f(x,0)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yf_y'(x,\theta)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{f(x,0)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\&=0+0=0,\end{aligned}$$

这里倒数第二个等号关于 y 用的单变量用的拉格朗日中值定理, 最后一个等号注意到

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1,\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$$

和无穷小乘有界为 0. 这就证明了 f 在 $(0,0)$ 可微.

例题 10.32♠

1. 若 $f_x'(x,y),f_y'(x,y),f_{xy}''(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且 $f_{xy}''(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 则 $f_{yx}''(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在且有

$$f_{yx}''(x_0,y_0)=f_{xy}''(x_0,y_0). \tag{10.19}$$

♠ 若 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 证明(10.19)成立.

注本题即课本定理的推广, 原本需要两个二阶偏导数连续混合偏导数才相等, 现在只需要一个二阶偏导数连续或者一个偏导数可微即可.

证明

1. 不失一般性, 假设 $(x_0,y_0)=(0,0)$, 我们有[7]

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f_y'(x,0)-f_y'(0,0)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\lim\limits_{\zeta\to0}\frac{f(x,\zeta)-f(x,0)}{\zeta}-\lim\limits_{\zeta\to0}\frac{f(0,\zeta)-f(0,0)}{\zeta}}{x}\\&=\lim_{x\to0}\lim_{\zeta\to0}\frac{f(x,\zeta)-f(x,0)-f(0,\zeta)+f(0,0)}{x\zeta}\\&=\lim_{x\to0}\lim_{\zeta\to0}\frac{(f_x'(\theta,\zeta)-f_x'(\theta,0))x}{x\zeta}=\lim_{x\to0}\lim_{\zeta\to0}\frac{f_{xy}''(\theta,\eta)\zeta}{\zeta}\\&=\lim_{x\to0}\lim_{\zeta\to0}f_{xy}''(\theta,\eta)=f_{xy}''(0,0),\end{aligned}$$

   这就证明了 $f_{yx}''(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在且有(10.19)成立.

2. 不失一般性, 假设 $(x_0,y_0)=(0,0)$, 为了更清晰呈现证明, 定义

$$Df(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(s,t)\mapsto f_x'(x,y)s+f_y'(x,y)t,$$

   结合 $(\mathbb{R}^2)^*\cong\mathbb{R}^2$, 我们可以写为

$$Df(x,y)=\left(f_x'(x,y),f_y'(x,y)\right).$$

   我们首先证明

$$T:\mathbb{R}^2\to(\mathbb{R}^2)^*,(x,y)\mapsto Df(x,y)$$

[7]注意内层极限和二重极限存在, 所以二重极限 = 累次极限.

在 $(0,0)$ 是可微的. 事实上取

$$A:\mathbb{R}^2\to\left(\mathbb{R}^2\right)^*,(x,y)\mapsto\left(f''_{xx}(0,0)x+f''_{xy}(0,0)y,f''_{yx}(0,0)x+f''_{yy}(0,0)y\right),$$

利用偏导数可微性和三角不等式可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{||T(x,y)-T(0,0)-A(x,y)||_{(\mathbb{R}^2)^*}}{||(x,y)||_{\mathbb{R}^2}}=0,$$

即 f 在原点二阶可微.

现在我们等同的看

$$\begin{aligned}A(x,y)(s,t)&=\left(f''_{xx}(0,0)x+f''_{xy}(0,0)y\right)s+\left(f''_{yx}(0,0)x+f''_{yy}(0,0)y\right)t\\&=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{xx}(0,0)&f''_{xy}(0,0)\\f''_{yx}(0,0)&f''_{yy}(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

为了说明 $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$, 这等价于 A 是对称的.

接下来我们直接证明一般的情况. 即

定理 10.4 (二次可微函数混合偏导数相等)

设 X,Y 是 Banach 空间, $A\subset X$ 是一个开集, $f:A\to Y$ 在 $\mathbf{x}_0$ 是二阶可微的, 则 $f''(\mathbf{x}_0)$ 是对称的, 即

$$f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x},\mathbf{y})=f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y},\mathbf{x}),\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in X. \tag{10.20}$$

♡

证明 设 $r>0$ 使得

$$\{\mathbf{x}\in X:||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||<r\}\subset A,$$

然后对

$$\mathbf{x},\mathbf{y}\in X,||\mathbf{x}||<\frac{r}{2},||\mathbf{y}||<\frac{r}{2},$$

构造

$$g(\xi)\triangleq f(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}),\xi\in[0,1].$$

链式法则计算得

$$\begin{aligned}g'(\xi)&=\left[f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x})\right]\mathbf{x}\\&=\left[f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f'(\mathbf{x}_0)\right]\mathbf{x}-\left[f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)\right]\mathbf{x}.\end{aligned}$$

由 f 在 $\mathbf{x}_0$ 二阶可微, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $r'\in(0,r]$ 使得对任何 $||\mathbf{x}||\leqslant\frac{1}{2}r',||\mathbf{y}||\leqslant\frac{1}{2}r'$ 都有

$$\|f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f'(\mathbf{x}_0)-f''(\mathbf{x}_0)\cdot(\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})\|\leqslant\varepsilon(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|).$$

特别的有

$$\|f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)-f''(\mathbf{x}_0)\cdot(\xi\mathbf{x})\|\leqslant\varepsilon\|\mathbf{x}\|.$$

利用上面两个不等式得

$$\begin{aligned}&||g'(\xi)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}||=||[f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x})-f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y}]\mathbf{x}||\\&\leqslant||f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x})-f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y}||\cdot||\mathbf{x}||\\&=||f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-f'(\mathbf{x}_0)-f''(\mathbf{x}_0)(\xi\mathbf{x}+\mathbf{y})-[f'(\mathbf{x}_0+\xi\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)-f''(\mathbf{x}_0)(\xi\mathbf{x})]||\cdot||\mathbf{x}||\\&\leqslant[\epsilon||\mathbf{x}||+\epsilon||\mathbf{y}||+\epsilon||\mathbf{x}||]\cdot||\mathbf{x}||\leqslant2\epsilon(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)\cdot||\mathbf{x}||.\end{aligned}$$

我们对 $g(\xi)-\xi\cdot g'(0)$ 用拟微分中值定理13.23得

$$||g(1)-g(0)-g'(0)||\leqslant\sup_{0\leqslant\xi\leqslant1}||g'(\xi)-g'(0)||. \tag{10.21}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
&||g(1)-g(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| = ||g(1)-g(0)-g'(0)+g'(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| \\
&\leqslant ||g(1)-g(0)-g'(0)|| + ||g'(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| \\
&\leqslant \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} ||g'(\xi)-g'(0)|| + ||g'(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| \\
&= \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} ||g'(\xi)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| + \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} ||g'(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| + ||g'(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| \\
&\leqslant 6\epsilon(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)\cdot||\mathbf{x}|| \leqslant 6\epsilon(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2.
\end{aligned}$$

交换 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 得

$$||g(1)-g(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{x})\mathbf{y}|| \leqslant 6\epsilon(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2.$$

注意到

$$g(1)-g(0) = f(\mathbf{x}_0+\mathbf{x}+\mathbf{y})-f(\mathbf{x}_0+\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0+\mathbf{y})+f(\mathbf{x}_0)$$

交换 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 表达式不变, 我们有

$$\begin{aligned}
&||(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{x})\mathbf{y}|| \\
&\leqslant ||g(1)-g(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}|| + ||g(1)-g(0)-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{x})\mathbf{y}|| \\
&\leqslant 6\epsilon||\mathbf{x}||(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)+6\epsilon||\mathbf{y}||(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||) = 6\epsilon(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2.
\end{aligned}$$

利用 $\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y},\lambda\in\mathbb{R}$ 代替 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 得

$$||(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{y})\mathbf{x}-(f''(\mathbf{x}_0)\mathbf{x})\mathbf{y}|| \leqslant 6\epsilon(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2, \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in X.$$

由 ϵ 任意性得(10.20).

例题 10.33♠ 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\}$, 给定

$$f(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap C^1(D), |f(x,y)|\leqslant 1,$$

证明 : 存在一个点 $(x_0,y_0)\in D$, 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|^2\leqslant 8.$$

注注意我们实际上使用的方向导数都平行或垂直坐标轴, 因此 f 只需要在 D 偏导数存在即可.

证明 注意到

$$g(x,y) = f(x,y)-2|x|-2|y|\in C(\overline{D}),$$

在 ∂D 上, $g(x,y)=f(x,y)-2\leqslant -1$, 又 $g(0,0)=f(0,0)\geqslant -1$, 从而必有一个点 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $g(x,y)$ 在此点达到在 $\overline{D}$ 上的最大值.

断言 (x_0,y_0) 为所求, 不妨设 $x_0\geqslant 0, y_0\geqslant 0$.

- 当 $x_0>0, y_0>0$, 此时

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-2=0 \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-2=0
\end{aligned},$$

这给出了

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|^2=8.$$

- 当 $x_0>0,y_0=0$, 对任意 $\alpha\in[0,2\pi)$, 因为 $g(x_0,0)$ 是最大值, 所以

$$\begin{aligned}0\geqslant&\lim_{t\to0^+}\frac{g(x_0+t\cos\alpha,t\sin\alpha)-g(x_0,0)}{t}\\=&\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\sin\alpha-\lim_{t\to0^+}\frac{2(|x_0+t\cos\alpha|+|t\sin\alpha|-x_0)}{t}\\=&\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\sin\alpha-\lim_{t\to0^+}\frac{2t\cos\alpha+2|t||\sin\alpha|}{t}\\=&\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\sin\alpha-2(\cos\alpha+|\sin\alpha|),\end{aligned}\tag{10.22}$$

  其中第一个等号需要 f 在 D 上可微.

  在(10.22)中取 $\alpha=0,\alpha=\pi$, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\leqslant2,-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\leqslant-2,$$

  在(10.22)中取 $\alpha=\frac{\pi}{2},\alpha=\frac{3\pi}{2}$, 得

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\leqslant2,-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\leqslant2,$$

  因此

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|^2\leqslant8.$$

- 当 $x_0=0,y_0>0$, 类似上一点.
- 当 $x_0=0,y_0=0$, 类似(10.22), 我们对任意 $\alpha\in[0,2\pi)$, 有

$$0\geqslant\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\sin\alpha-2(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|).\tag{10.23}$$

  在(10.23)中取 $\alpha=0,\alpha=\pi$, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\leqslant2,-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\leqslant2.$$

  在(10.23)中取 $\alpha=\frac{\pi}{2},\alpha=\frac{3\pi}{2}$, 得

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\leqslant2,-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\leqslant2,$$

  因此

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|^2\leqslant8.$$

我们完成了证明.

我们来介绍一个经典的利用连通性处理问题的技巧.

例题 10.34♠ 设开集 $V\subset\mathbb{R}^n$, 若

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=0,\forall x\in V,i\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

确定全体 $f(x)$.

证明 设 $V=\bigcup_{j=1}^{\infty}V_j,V_j,j=1,2,\cdots$ 是开的连通分支, 我们证明存在 $c_j\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x)=c_j,x\in V_j$.

首先假设 V_j 是凸集, 现在因为 f 所有偏导数是 0, 因此 f 所有偏导数连续, 因此 f 可微, 那么对 $a,b\in V_j$, 考虑 $g(\lambda)=f(a+\lambda(b-a))\in C^1[0,1]$, 我们有 $g'(\lambda)=0$, 因此 $g(a)=g(b)$, 由 a,b 任意性即得.

现在对一般的连通开集 V_j, 取定 V_j 中的点 a, 令 $C=\{x\in V_j:f(x)=f(a)\}$, 显然 C 是相对 V_j 的闭集, 现在取 $b\in V_j$, 取 b 为心的小开球 B, 使得 $B\subset V_j$, B 当然是凸的, 因此由刚才的结果, 我们有 $f(x)=f(b),\forall x\in B$, 因此 C 是相对 V_j 开的, 现在 C 非空, 因此由 V_j 连通, 我们有 $C=V_j$, 这就证明了存在 $c_j\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x)=c_j,x\in V_j$.

显然上面构造的函数全体就是全体满足题目条件的函数.

先来看一个竞赛真题:

例题 10.35 设 $B\subset\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$ 是单位开球, $u,v\in C^2\left(\bar{B}\right)$, 满足

$$\begin{cases}-\Delta u-\left(1-u^2-v^2\right)u=0, & x\in B\\ -\Delta v-\left(1-u^2-v^2\right)v=0, & x\in B\\ u=v=0, & x\in\partial B\end{cases}. \tag{10.24}$$

证明 $w\triangleq u^2+v^2\leqslant 1$.

笔记 分析极值点性态.

证明 直接求导有

$$\begin{aligned}&w_{x_i}=2uu_{x_i}+2vv_{x_i}, i=1,2,\cdots,n;\\ &w_{x_ix_j}=2u_{x_j}u_{x_i}+2uu_{x_ix_j}+2v_{x_j}v_{x_i}+2vv_{x_ix_j}, i,j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

设 $\mathbf{x}_0\in\overline{B}$ 是 w 的最大值点, 因为(10.24)的边界条件, 不妨设 $\mathbf{x}_0\in B$. 于是我们有

$$w_{x_i}\left(\mathbf{x}_0\right)=0, i=1,2,\cdots,n.$$

计算得

$$\begin{aligned}\Delta w&=\sum_{i=1}^n\left(2u_{x_i}u_{x_i}+2uu_{x_ix_i}+2v_{x_i}v_{x_i}+2vv_{x_ix_i}\right)\\ &=2\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^2+2\sum_{i=1}^n\left|v_{x_i}\right|^2+2u\Delta u+2v\Delta v\\ &\overset{(10.24)}{=}2\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^2+2\sum_{i=1}^n\left|v_{x_i}\right|^2-2\left(1-w\right)u^2-2\left(1-w\right)v^2\\ &=2\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^2+2\sum_{i=1}^n\left|v_{x_i}\right|^2-2w\left(1-w\right),\end{aligned}$$

于是利用 $\mathbf{x}_0$ 是极大值点和黑塞矩阵对角线和小于等于 0, 即定理10.3, 我们有

$$2\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\left(\mathbf{x}_0\right)\right|^2+2\sum_{i=1}^n\left|v_{x_i}\left(\mathbf{x}_0\right)\right|^2-2w\left(\mathbf{x}_0\right)\left(1-w\left(\mathbf{x}_0\right)\right)\leqslant 0\Rightarrow -2w\left(\mathbf{x}_0\right)\left(1-w\left(\mathbf{x}_0\right)\right)\leqslant 0.$$

利用 $w\left(\mathbf{x}_0\right)\geqslant 0$ 即得

$$w\left(\mathbf{x}\right)\leqslant w\left(\mathbf{x}_0\right)\leqslant 1, \forall\mathbf{x}\in\bar{B}.$$

例题 10.36 设 $B_r, r>0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 半径为 r, 中心在坐标原点的开球且 $u\in C^1\left(B_1\right)\bigcap C\left(\overline{B_1}\right)$. 若 $u\left(0\right)=-L<0, u|_{\partial B}=0$, 证明:$B_L\subset\left(\nabla u\right)\left(B_1\right)$.

证明 对 $\sum\limits_{i=1}^n c_i^2<L^2$, 考虑

$$v\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=u\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)-\sum_{i=1}^n c_ix_i.$$

我们注意到

$$v\left(0,0,\cdots,0\right)=-L, v|_{\partial B_1}=-\sum_{i=1}^n c_ix_i\geqslant -\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2}>-L,$$

从而 v 在某个 $\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\in B_1$ 取得在 $\overline{B_1}$ 的最小值. 因此

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)=0, i=1,2,\cdots,n\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)=c_i, i=1,2,\cdots,n,$$

这就完成了证明.

接下来研究二阶椭圆方程的极值原理:

定义 10.1 (♠)

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开集, 函数 $a^{ij}, b^i, c : U \to \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \cdots, n$ 满足

1.

$$\text{存在某个} i = 1, 2, \cdots, n \text{使得} b^i \text{是有界函数;} \tag{10.25}$$

2. 成立一致椭圆条件, 即存在 $\theta > 0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(\mathbf{x}) t_i t_j \geqslant \theta \sum_{i=1}^{n} t_i^2, \forall \mathbf{x} \in U, (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{10.26}$$

对 $u \in C^2(U) \bigcap C(\bar{U})$, 我们定义

$$Lu(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} b^i(\mathbf{x}) u_{x_i}(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in U.$$

♣

定理 10.5 (二阶椭圆方程的极值原理 ♠)

沿用定义10.1的符号. 我们有如下结论

1. 当 $c(\mathbf{x}) = 0$

$$Lu(\mathbf{x}) \leqslant 0, \forall \mathbf{x} \in U, \tag{10.27}$$

则 u 的最大值点一定可以在边界上取到, 即

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

此外当

$$Lu(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in U, \tag{10.28}$$

我们不需要条件(10.25), 并且更强的, 最大值不能在内部取到.

2. 当 $c(\mathbf{x}) = 0$,

$$Lu(\mathbf{x}) \geqslant 0, \forall \mathbf{x} \in U, \tag{10.29}$$

则 u 的最小值点一定可以在边界上取到, 即

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

此外当

$$Lu(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U, \tag{10.30}$$

我们不需要条件(10.25), 并且更强的, 最小值不能在内部取到.

3. 当 $c(\mathbf{x}) \geqslant 0$ 且(10.27)成立, 那么

$$\max_{\bar{U}} u \leqslant \max_{\partial U} \max\{u, 0\}. \tag{10.31}$$

这可以解释为 u 在 $\bar{U}$ 取正的最大值, 则 u 在 ∂U 也取到 $\bar{U}$ 最大值.

4. 当 $c(\mathbf{x}) \geqslant 0$ 且(10.29)成立, 那么

$$\min_{\bar{U}} u \geqslant \min_{\partial U} \min\{u, 0\}. \tag{10.32}$$

这可以解释为 u 在 $\bar{U}$ 取负的最小值, 则 u 在 ∂U 也取到 $\bar{U}$ 最小值.

5. 当 $c(\mathbf{x}) = 0$ 且

$$Lu(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in U,$$

则 $|u|$ 的最大值一定在边界取到.

♡

笔记 证明的想法即仔细比较极值点. 对于临界情况做一个摄动即可. 如何摄动是一个难点, 但摄动的方法不唯一.

证明

1. 当(10.28)发生, 取

$$u(\mathbf{x}_0)=\max_{\bar{U}}u,\mathbf{x}_0\in U,$$

则

$$Hu(\mathbf{x}_0)\text{半负定且}u_{x_i}(\mathbf{x}_0)=0,i=1,2,\cdots,n.$$

我们记 $A(\mathbf{x}_0)\triangleq(a_{ij}(\mathbf{x}_0))$, 然后利用半正定矩阵的 Hadamard 积也半正定23.19, 我们有

$$Lu(\mathbf{x}_0)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a^{ij}(\mathbf{x}_0)u_{x_ix_j}(\mathbf{x}_0)=1_n^T\left(-Hu(\mathbf{x}_0)\circ A(\mathbf{x}_0)\right)1_n\geqslant 0,$$

这和条件(10.28)矛盾! 这就证明了当(10.28)发生必有 u 的最大值点一定不能在内部取到.
接下来我们考虑(10.27)发生, 这于是我们要面临的核心难点. 由条件(10.25), 不妨设 b^1 有界. 对任何 $\epsilon,\lambda>0$, 考虑

$$u^{\epsilon}(\mathbf{x})\triangleq u(\mathbf{x})+\epsilon e^{\lambda x_1}\geqslant u(\mathbf{x}),$$

则我们有

$$Lu^{\epsilon}(\mathbf{x})=Lu(\mathbf{x})+\epsilon Le^{\lambda x_1}\leqslant\epsilon Le^{\lambda x_1}=\epsilon e^{\lambda x_1}\left(-\lambda^2a^{11}(\mathbf{x})+\lambda b^1(\mathbf{x})\right).$$

由一致椭圆条件(10.26), 我们取 $t_1=1,t_i=0,i=2,3,\cdots,n$, 就有 $a^{11}(\mathbf{x})\geqslant\theta$. 于是取充分大的 $\lambda>0$, 使得

$$Lu^{\epsilon}(\mathbf{x})\leqslant\epsilon e^{\lambda x_1}\left(-\lambda^2\theta+\lambda\sup_{U}b^1\right)<0. \tag{10.33}$$

现在利用刚才得到的结果我们知道

$$\max_{\bar{U}}u\leqslant\max_{\bar{U}}u^{\epsilon}=\max_{\partial U}u^{\epsilon}\leqslant\max_{\partial U}u+\epsilon\max_{\partial U}e^{\lambda x_1}.$$

让 $\epsilon\to0^+$, 我们有

$$\max_{\partial U}u\leqslant\max_{\bar{U}}u\leqslant\max_{\partial U}u\Rightarrow\max_{\bar{U}}u=\max_{\partial U}u,$$

这就完成了证明.
2. 考虑 $-u$ 并利用第一问即证.
3. 如果 u 在 $\bar{U}$ 取非负的最大值, 那么等式(10.31)什么也没蕴含. 如果 u 在 $\bar{U}$ 取正的最大值, 考虑非空有界开集 $V\triangleq\{\mathbf{x}\in U:u(\mathbf{x})>0\}$ 以及

$$Ku(\mathbf{x})\triangleq Lu(\mathbf{x})-c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\leqslant-c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\leqslant0,\mathbf{x}\in V.$$

运用第一问的结果, 我们有

$$\max_{\bar{U}}u=\max_{\bar{V}}u=\max_{\partial V}u.$$

又 V 的边界由 u 的某些零点和 ∂U 的部分组成, 因此我们有

$$\max_{\partial V}u=\max_{\partial U}u\Rightarrow\max_{\partial U}u=\max_{U}u,$$

这就证明了(10.31)成立.
4. 考虑 $-u$ 并利用第三问即证.
5. 由三四问显然.

例题 10.37♠ 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\right\}$, 以及有界正值函数 $f\in C^2(D)$ 满足在 D 上有

$$\Delta\ln f\geqslant f^2,$$

证明

$$f(x,y)\leqslant\frac{2}{1-x^2-y^2},\forall(x,y)\in D.$$

证明 考虑 $F=\ln f\in C^2(D),h(x,y)\triangleq\ln\frac{2}{1-x^2-y^2}$, 则我们有

$$\Delta(h-F)\leqslant\Delta h-e^{2F}=e^{2h}-e^{2F}.$$

注意 $\lim\limits_{(x,y)\to\partial D}(h-F)=+\infty$, 因此存在 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $h-F$ 在 D 达到最小值, 如果这个最小值为负, 那么 $\Delta(h-F)(x_0,y_0)<0$, 但是因最小值是极小值, 我们有

$$\frac{\partial^2(h-F)}{\partial x^2}(x_0,y_0)\geqslant 0,\frac{\partial^2(h-F)}{\partial y^2}(x_0,y_0)\geqslant 0,$$

这就是一个矛盾!

因此 $h-F$ 有非负的最小值, 这给出了

$$f(x,y)\leqslant\frac{2}{1-x^2-y^2},\forall(x,y)\in D.$$

例题 10.38 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 可微满足 $f(\mathbf{0})=0$ 且存在 $M>0$ 使得

$$\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2\leqslant M^2|f(\mathbf{x})|^2,\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,$$

证明: $f\equiv 0$.

证明 对任何 $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n,||\mathbf{a}||=1$, 我们考虑

$$f_{\mathbf{a}}(t)\triangleq f(t\mathbf{a}),t\in\mathbb{R}.$$

于是

$$|f_{\mathbf{a}}'(t)|=\left|\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{a})\right|\leqslant\sqrt{||\mathbf{a}||^2\cdot\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{a})\right|^2}\leqslant M|f(t\mathbf{a})|=M|f_{\mathbf{a}}(t)|,\forall t\in\mathbb{R}.$$

由双绝对值技巧12.33我们知道 $f_{\mathbf{a}}(t)=0,\forall t\in\mathbb{R}$. 由 $\mathbf{a}$ 任意性我们知道 $f\equiv 0$.

例题 10.39 设 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey,x,y\in[0,1]^2$. 若 $f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in\partial D$, 证明: $f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$.

证明 代入 $x=0,y=0$ 容易给出 $d\geqslant 0,e\geqslant 0$. 若 f 最小值点在 D 边界达到, 则已经证毕! 设 $(x_0,y_0)\in D^\circ$ 使得其是 f 最小值点, 则

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=2ax_0+2by_0+d=0,\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=2bx_0+2cy_0+e=0.$$

解出 d,e 代入 $f(x_0,y_0)$ 得

$$f(x_0,y_0)=ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2+dx_0+ey_0=-ax_0^2-cy_0^2-2bx_0y_0=dx_0+ey_0-f(x_0,y_0),$$

即 $f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(dx_0+ey_0)\geqslant 0$. 我们完成了证明.

例题 10.40♠ 设 $f:(a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 满足

1. 对任何 $x\in(a,b)$ 都有 $f(x,\cdot)\in C[c,d]$,
2. 取定 $x_0\in(a,b)$, 对任何 $y\in[c,d]$, 都有

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=g(y).$$

证明: 如下两个论断等价:

1. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=g(y_0),\forall y_0\in[c,d];$$

2. $$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=g(y),\text{关于}y\in[c,d]\text{一致收敛}.$$

再证明当两个论断都成立时, g 在 $[c,d]$ 一致连续.

证明 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=g(y_0),\forall y_0\in[c,d].$$

对任何 $y_0 \in [c,d], \epsilon > 0$, 我们取 $\delta_{y_0} > 0$ 使得当

$$0 < |x - x_0| < \delta_{y_0}, 0 < |y - y_0| < \delta_{y_0}, x \in (a,b), y \in [c,d]$$

有

$$|f(x,y) - g(y_0)| \leqslant \epsilon.$$

记

$$U_{\delta_{y_0}}(y_0) \triangleq \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \delta_{y_0}\}.$$

对这些 $y \in U_{\delta_{y_0}}(y_0)$, 我们有

$$|g(y) - g(y_0)| = \lim_{x \to x_0} |f(x,y) - g(y_0)| \leqslant \epsilon,$$

即 g 在 y_0 连续. 现在由 y_0 任意性和 Cantor 定理得 g 在 $[c,d]$ 一致连续.

注意到

$$[c,d] \subset \bigcup_{y_0 \in [c,d]} U_{\delta_{y_0}}(y_0),$$

由有限覆盖定理得存在 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in [c,d]$ 使得

$$[c,d] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_{y_i}}(y_i).$$

设 $\delta \triangleq \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_{y_i} > 0$.

对

$$x \in U_\delta(x_0) \bigcap (a,b), y \in [c,d],$$

我们有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使得 $y \in U_{\delta_{y_i}}(y_i)$. 于是

$$|f(x,y) - g(y)| \leqslant |f(x,y) - g(y_i)| + |g(y_i) - g(y)| \leqslant 2\epsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = g(y), \text{关于} y \in [c,d] \text{一致收敛}.$$

反过来, 若

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = g(y), \text{关于} y \in [c,d] \text{一致收敛}.$$

因为 $f(x,\cdot)$ 连续和一致收敛性, 我们有 $g \in C[c,d]$. 对任何 $y_0 \in [c,d], \epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$ 使得

$$|f(x,y) - g(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in U_\eta(x_0) \bigcap (a,b), y \in [c,d];$$

$$|g(y) - g(y_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \forall y \in U_\eta(y_0) \bigcap [c,d].$$

于是当

$$x \in U_\eta(x_0) \bigcap (a,b), y \in U_\eta(y_0) \bigcap [c,d],$$

有

$$|f(x,y) - g(y_0)| \leqslant |f(x,y) - g(y)| + |g(y) - g(y_0)| \leqslant \epsilon,$$

即

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = g(y_0).$$

我们完成了证明.

第 10 章 练习

1. (1.) (答案) 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ 满足
$$c_1^k+c_2^k+\cdots+c_n^k>0,k=1,2,\cdots.$$
令 $f(x)=\frac{1}{(1-c_1x)(1-c_2x)\cdots(1-c_nx)}$, 证明 $f^{(k)}(0)>0,\forall k=1,2,\cdots$.
2. (2.) 设 $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}$, 计算 $f^{(13)}(0)$.
3. (3.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$. 令 $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. 求 $g'(x)$ 并研究其连续性.
4. (4.) 设 $f(x)=\int_0^x\cos^n\frac{1}{t}dt\,(n\in\mathbb{N})$ 求 $f'(0)$.
5. (5.) 设 $f(x)=e^{\int_0^x\frac{e^t-1}{t}dt},x\in\mathbb{R}$, 证明
$$f^{(n)}(0)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}C_n^jf^{(j)}(0),\forall n\in\mathbb{N}.$$
6. (6.) 设 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}$, 证明 $f^{(j)}(0)>0,\forall j\in\mathbb{N}$ 且 j 为奇数.
7. (7.) 设 $f(x)=\frac{x}{x^2-2x+4}$, 计算 $f^{(2024)}(0)$.
8. (8.) 设 $f(x)=\tan x\cdot\tan(2x)\cdots\tan(2022x)$, 求 $f^{(2024)}(0)$.
9. (9.) 证明:
$$\sqrt{\sin x\cdot\sinh x}<x<\frac{1}{2}(\sin x+\sinh x),x\in(0,\pi).\tag{10.34}$$
10. (10.) 设 $f\in C(\mathbb{R}),F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta,h>0$, 证明:
$$F''(x)=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}.\tag{10.35}$$
11. (11.) 设
$$e^x+e^{-x}\leqslant2e^{ax^2},\forall x\in\mathbb{R},\tag{10.36}$$
求 a 的取值范围.
12. (12.) 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 满足
$$f'_x(x,y)+f'_y(x,y)=0,f'_y(0,y)=\frac{1}{e^y(1+e^y)},f(0,0)=\ln2-1.$$
求 f.
13. (13.) 设 f 在 x_0 可微且
$$\alpha_n<x_0<\beta_n,n\in\mathbb{N},\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=x_0,$$
证明:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).\tag{10.37}$$
14. (14.) 设可微函数 u 满足 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2x\cos(x+y)$. 令 $g(x,y)=u(x+y,x-y),g(x,0)=0$, 求 $u(1,0)$.
15. (15.) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 证明: 雅可比矩阵 $Df(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处对称的充要条件是 f 为梯度场, 即存在 $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f=\nabla\varphi$.
16. (16.♠) 记 $S_\delta=\{(t,\varphi)\in\mathbb{R}^2:|t|\leqslant\delta,\varphi\in[0,2\pi)\}$, 证明: 存在 $\delta>0$, 使得
$$f:S_\delta\to\mathbb{R}^3:(t,\varphi)\mapsto\left(\left(1+t\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi,\left(1+t\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi,t\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
是单射.
17. (17.) 设 $f\in C^\infty(-1,1)$ 且 $f(0)=1,|f'(0)|\leqslant2$. 令 $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$. 若
$$\left|g^{(n)}(0)\right|\leqslant2n!,\forall n\in\mathbb{N}.$$
证明
$$\left|f^{(n)}(0)\right|\leqslant(n+1)!,\forall n\in\mathbb{N}.\tag{10.38}$$
18. (18.♠) 设
$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\},f\in C^\infty(\mathbb{R}^2),f|_{\partial\Omega}=0.$$

若

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f^3,$$

证明 $f|_{\Omega}=0$.

19. (19.$*$) 设 $B\subset\mathbb{R}^n$ 为单位开球且存在不恒为 0 的非负函数 $u\in C^2(B)$ 使得 $u(\mathbf{0})=0$. 证明: 对任何 $\alpha>0$, 存在 $\xi\in B$ 使得

$$\triangle u(\xi)>\alpha u(\xi).$$

20. (20.♠) 设 $k_1,k_2,\cdots,k_n,m\in\mathbb{N},\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, 计算

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-\alpha_1)^{-k_1}(x-\alpha_2)^{-k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{-k_n}\right].$$

21. (21.) 设非负函数 $f\in C^3(\mathbb{R})$ 满足

$$f(0)=f'(0)=0,f''(0)>0.$$

证明:

$$g(x)\triangleq\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)', & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 的邻域有界. 若条件改为 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 则结论是否还成立?

22. (22.) 设 $T_i\in C^2(\mathbb{R}^n),i=1,2,\cdots,n$, 考虑

$$M_{ij}(\mathbf{x})\triangleq\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix},i,j=1,2,\cdots,n,$$

这里$\widehat{\ }$表示删去. 证明:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})=0,i=1,2,\cdots,n.$$

23. (23.) 设 $T_i\in C^2(\mathbb{R}^n),f_i,g_i\in C^1(\mathbb{R}^n),i=1,2,\cdots,n$ 满足

$$f_j(T\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}g_i(T\mathbf{x})\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix},j=1,2,\cdots,n,$$

这里$\widehat{\ }$表示删去,

$$T\mathbf{x}\triangleq(T_1\mathbf{x},T_2\mathbf{x},\cdots,T_n\mathbf{x}).$$

证明:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(T\mathbf{x})\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix}.\quad(10.39)$$

24. (24.) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸区域且 $f : D \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的. 若 f 的雅可比矩阵在 D 处处正定, 证明 f 是单射.
25. (25.♠, ∗) 设 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射且存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\mathbf{u}^T J\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{u} \geqslant \alpha |\mathbf{u}|^2, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

证明:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \geqslant \alpha |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

且 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是微分同胚.

26. (26.) 设 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \delta_0 > 0$, f 在 $\mathbf{x}_0$ 的 δ_0 邻域 $U(\mathbf{x}_0, \delta)$ 上二阶连续可微且 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$, 同时对任意单位向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 都有 $(\alpha \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$. 证明:
   (a). 存在 $\delta \in (0, \delta_0)$ 使得

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\};$$

   (b). $\mathbf{x}_0$ 是 f 极小值点.
27. (27.) 设 D 是平面上的单位开圆盘且 $f \in C^2(D)$. 若 $(x_0, y_0) \in D$ 是 f 极小值点, 证明:

$$f_{xx}(x_0, y_0) + 2f_{xy}(x_0, y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \geqslant 0.$$

28. (28.♠) 设 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F^1 & F^2 & \cdots & F^n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在原点可微且

$$\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F^i(\mathbf{0})}{\partial x_j}\right)^2 < 1.$$

证明: 存在 $\delta > 0$ 当 $|\mathbf{x}| \leqslant \delta$ 时有 $|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \leqslant \delta$.
29. (29.) 设 $T_i \in C^2(\mathbb{R}^n), f_i, g_i, h \in C^1(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, \cdots, n$ 满足

$$f_j(T\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(T\mathbf{x}) \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n,$$

这里 $\widehat{\ }$ 表示删去,

$$T\mathbf{x} \triangleq (T_1\mathbf{x}, T_2\mathbf{x}, \cdots, T_n\mathbf{x}).$$

证明:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{i-1}\frac{\partial h}{\partial y_k}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_k}{\partial x_i}f_i(T\mathbf{x})\right] \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial h}{\partial y_j}(T\mathbf{x})\,g_j(T\mathbf{x}) \end{aligned}. \tag{10.40}$$

30. (30.) 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 $C^r (r \in \mathbb{N})$ 映射. 证明: 若 $\det(Jf(\mathbf{x}_0)) \neq 0$, 则存在 $\mathbf{x}_0$ 邻域 U 和 $w > 0$ 使得

$$||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')|| \geqslant w||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in U.$$

31. (31.) 设 $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 都是 $[0,1] \times [0,1]$ 上的连续函数且

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant 1, \forall (x,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

证明:

(a). 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$, 存在 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$|\xi-x|\leqslant\frac{1}{2}|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}},|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\leqslant 4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

(b). 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$, 成立

$$|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\leqslant 5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

32. (32.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 满足其 Hess 矩阵 Hf 处处正定, 证明 f 至多只有唯一极小值点.

33. (33.♠) 设 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足 u 关于 x 周期 2π 以及

$$u_t(x,t)=u^2(x,t)u_{xx}(x,t)+u^3(x,t),\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,u(x,0)>0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$u(x,t)>0,\forall x\in\mathbb{R},t>0.$$

34. (34.♠) 设 φ 在 0 可导且 $\varphi(0)=0$. 再设 f 在 $(0,0)$ 邻域二阶连续可微且

$$\nabla f(x,\varphi(x))=0,Hf(0,0)\text{是半正定非0矩阵},$$

这里 H 表示 Hess 矩阵. 证明:f 在 $(0,0)$ 取极小值.

35. (35.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{x^2+y^2=R^2}|f(x,y)|=0,f(0,0)=0;$$

$$x^2f''_{xx}+y^2f''_{yy}+e^xf'_x+y^3f'_y=(x^4+y^2)f.$$

证明:$f\equiv 0$.

36. (36.) 设

$$\partial\Omega_r\triangleq\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=r^2\right\},r>0$$

若 $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$f|_{\partial\Omega_1}=0,\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty}f(x,y)=1,$$

证明: 存在 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $(\Delta f)(x_0,y_0)\geqslant 0$.

注 本题原本是 2008 年中科大数学分析真题, 但是原本题目叙述有错误, 反例和原本题目叙述见.

37. (37.) 记

$$B(\mathbf{0},r)\triangleq\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:||\mathbf{x}||<r\right\},r>0.$$

设 $\Omega=\mathbb{R}^d\setminus\overline{B(0,1)},u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ 满足

$$\Delta u(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\Omega,u(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},1).$$

证明:

(a). 若 $d=2$ 且

$$\lim_{||\mathbf{x}||\to\infty}\frac{u(\mathbf{x})}{\ln||\mathbf{x}||}=0,$$

则

$$u(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\Omega.$$

若 $d\geqslant 3$, 结论是否还成立?

(b). 若 $d\geqslant 3$ 且

$$\lim_{||\mathbf{x}||\to\infty}u(\mathbf{x})=0,$$

则

$$u(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\Omega.$$

38. (38.) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是调和函数且满足

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}\frac{f(x,y)}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

证明:f 为常值函数.

39. (39.) 设 $F\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, 证明存在连续单射 $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 使得 $F\circ G$ 是 $\mathbb{R}$ 上常值函数.

第 11 章 非数学类微分中值定理

内容提要

- 插值定理和 K 值法类 11.1
- 函数构造类 11.2
- 多中值点的问题 11.3
- 性态分析类 11.4
- 中值极限性质 11.5

中值定理是非数学框架下重要的一类问题, 此类问题在过于复杂的情形其实是没有意义的, 我们实际做题中应该更偏向于做" 自然的" 和具有美感的中值定理问题.

中值定理大体上分为插值法和构造函数法两类, 而插值法和 k 值法是等同的. 构造函数法分为单中值和多中值, 此类问题就是乱出题的重灾区. 此外我们要注意性态分析方法在中值定理中的运用, 他能破解刻意构造的无意义的中值定理问题.

11.1 插值定理和 K 值法类

11.1.1 前言

插值定理, 指的是数值分析里的拉格朗日插值定理或者 Hermite 插值定理, 有着丰富的性质和理论. 清疏数学于第九届清疏大学生数学竞赛课程第一次将其总结成系统的解决中值定理问题的思想方法 (除去积分余项外, 注意结论本身是古老的). 其可以完美覆盖拉格朗日中值定理,Taylor 中值定理, 罗尔中值定理, 柯西中值定理和经典的常数 K 值法. 有着: **如果采用这种观点无法解决这个中值问题, 那么这个问题一定是错的的美誉**.

本部分内容可以参考清疏竞赛考研公益课程-中值定理之插值方法 (合集篇).

注和数值分析的理解不一样, 其也不如我们的引入简洁自然, 读者可不必查阅数值分析相关教材.

11.1.2 插值定理和常数 K 值法介绍

我们先从最简单的情况看起.

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可微. 我们想寻求一个多项式 $p\in\mathbb{R}[x]$, 使得 p 能在 a 去拟和 f, 即 $p(a)=f(a)$. 因此只需要匹配一个初值条件, 所以 0 次多项式就足够了, 从而我们取的 p 是 $p(x)=f(a)$. 我们还需要一个 $f(x)-p(x)$ 的误差估计, 一般来说, 这个误差有两种余项估计.

1. 拉格朗日余项: 即存在 $\theta\in(a,x)$, 使得

$$f(x)-p(x)=\frac{f'(\theta)}{1!}(x-a). \tag{11.1}$$

2. 积分型余项: 若 $f'\in L[a,b]$ 或者 $R[a,b]$, 则

$$f(x)-p(x)=\int_a^x f'(y)\,dy. \tag{11.2}$$

熟知的, (11.1)就是我们的拉格朗日中值定理, (11.2)就是我们的牛顿莱布尼兹公式.

设 f 在 $[a,b]$ 上 $k\in\mathbb{N}_0$ 阶可微, 且在 (a,b) 上 $k+1$ 阶可微. 我们想寻求一个多项式 $p\in\mathbb{R}[x]$, 使得 p 能在 a 去拟和 f, 但这次我们想拟和得更深刻一点, 即 $p^{(j)}(a)=f^{(j)}(a), j=0,1,2,\cdots,k$. 因此需要匹配 $k+1$ 个初值条件, 所以 k 次多项式就足够了. 我们取的 p 是 $p(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{p^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$. 相似(11.1)和(11.2), 我们有两种误差估计

1. 拉格朗日余项: 即存在 $\theta\in(a,x)$, 使得

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}. \tag{11.3}$$

2. 积分型余项: 若 $f^{(k+1)} \in L[a,b]$ 或者 $R[a,b]$, 则

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt. \tag{11.4}$$

熟知的, (11.3)就是我们的 Taylor 中值定理, (11.4)就是我们的 Taylor 公式积分型余项.

注误差只是一种理解名词, 上面的结果是恒等式.

注我们上面只是举例了 p 的存在性. 唯一性等相关话题我们暂时没有谈及, 稍后讲完一般理论之后再谈及.

实际上这并未穷竭完所有可能的拟和方法, 上述仅仅是拟和单点的公式. 插值方法的思想就在于将上述结果扩充到完整的情况.

实际上, 最一般的情况是拟合闭区间 $[a,b]$ 中的 m 个点 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant b$, 每个点要求拟合 $s_j\in\mathbb{N}_0, j=1,2,\cdots,m$ 阶导的情况, 即

$$p^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_j),i=0,1,\cdots,s_j,j=1,2,\cdots,m. \tag{11.5}$$

笔记 注意条件(11.5)一共有 $\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)$ 个条件, 所以应该需要 $\deg p=\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1$. 一般来说余项需要再提升一阶导, 即光滑性需求是 $f\in C^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1}[a,b]$ 且 $f\in D^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)}(a,b)$. 如果 f 缺乏足够的光滑性条件将构成问题分类的主要思想之一.

命题 11.1 (Hermite 插值多项式的存在性和唯一性)

给定 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant b$ 和非负整数 $s_j,j=0,1,2,\cdots,m$. 设 $f\in D^{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}s_j}[a,b]$.
则存在唯一的次数不超过 $\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1$ 的多项式 $p\in\mathbb{R}[x]$, 使得条件(11.5)成立.

♠

注注意, 如果你要想拟合 $f^{(j)}(c)$, 就必须连着 $f^{(i)}(c),i=0,1,\cdots,j$ 一起拟合.

笔记 我们略去命题11.1的证明, 以后可以直接使用, 数学专业的同学可以视为一个高等代数题去解决, 证明[1].

笔记 特别的, 当 $s_j=0,j=1,2,\cdots,m$, 即不拟和导数点时, Hermite 插值多项式叫做拉格朗日插值多项式.

笔记 显然可以满足条件(11.5)的多项式如果不限制次数, 那么这样的多项式将不唯一, Hermite 多项式指的是次数最低的那个满足条件(11.5)的多项式. 因此读者可以通过无脑设方程组来求解 Hermite 多项式. 考试中我们基本只关心 $m=1,2,0\leqslant s_j\leqslant 1$ 的情况, 即只拟和一两个点和其直到 1 阶导数即可. 如果遇到更高阶的情况我们可以使用软件进行计算. 实际运用中有时候甚至无需计算出 Hermite 多项式, 而只需设而不求.

定理 11.1 (Hermite 插值定理)

给定 $a<x_1<x_2<\cdots<x_m<b$ 和非负整数 $s_j,j=0,1,2,\cdots,m$. 设 $f\in C^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)-1}[a,b]$ 且 $f\in D^{\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)}(a,b)$ 的满足条件(11.5)的 Hermite 插值多项式为 p, 则对每个 $x\in[a,b]$, 都存在 $\theta\in(\min\{x,x_1\},\max\{x,x_m\})$, 使得

$$f(x)=p(x)+\frac{f^{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)\right)}(\theta)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+1)\right)!}(x-x_1)^{s_1+1}(x-x_2)^{s_2+1}\cdots(x-x_m)^{s_m+1}.$$

♡

笔记 我们不打算在这里给最一般的 Hermite 插值定理一个证明, 因为不容易理解且看不清楚本质. 而且我们要让其在考场上可以呈现出来. 因此我们针对具体例子展示如何在考场上证明插值定理并借助插值定理解题. 当然读者只需要大概了解定理11.1的结构而无需记忆. 后面在具体例子中我们可以很直接的借助理解写出结构.

笔记 $\theta\in(\min\{x,x_1\},\max\{x,x_m\})$ 其实比较自然, 因为从后续定理证明可以看到, 不过就是反复使用罗尔中值

[1]打开速度可能较慢, 耐心等待.

定理, 中值点肯定会出现在初始点连成区间的内部.

笔记 不拟合导数情况就是经典的拉格朗日插值定理. 最经典的就是插 $f(a), f(b)$, 即设 $f \in C[a,b] \bigcap D^2(a,b)$, 则对每一个 $x \in (a,b)$, 都有 $\theta \in (a,b)$ 使得

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-a)(x-b).$$

命题 11.2 (插值多项式计算方法)

1. 在条件(11.5)中, 若 $s_j = 0, j = 1, 2, \cdots, m$, 则插值多项式为

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_m)} f(x_1) + \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\cdots(x_m-x_{m-1})} f(x_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m, i\neq j}(x-x_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m, i\neq j}(x_j-x_i)} f(x_j). \end{aligned}$$

2. 设 $\Lambda \subset \{1, 2, \cdots, m\}$. 若在条件(11.5)中, $s_j = 1, j \in \Lambda, s_j = 0, j \notin \Lambda$. 则插值多项式 p 可以如下确定. 设 $g = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m, i\neq j}(x-x_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m, i\neq j}(x_j-x_i)} f(x_j)$ 是拉格朗日插值部分, 待定 $|\Lambda|-1$ 次多项式 r, 令

$$p(x) = g(x) + r(x) \prod_{j=1}^{m} (x-x_j), \tag{11.6}$$

在(11.6)中两边求导, 并由方程 $p'(x_\lambda) = f'(x_\lambda), \lambda \in \Lambda$ 唯一确定多项式 r, 则得 p.

笔记 计算插值多项式 p 未必一定要运用命题11.2中的计算方法, 你能用任意方式猜出 p 都是可以的, 甚至可以待定系数暴力解方程得到 p 也是可以的.

11.1.3 插值定理和常数 K 值法

先来看一个经典的直接的例子.

例题 11.1 设 $f \in D^3[0,1]$ 满足 $f(0) = -1, f'(0) = 0, f(1) = 0$, 证明对任何 $x \in [0,1]$, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta). \tag{11.7}$$

笔记 这部分内容是思路分析, 无需呈现在证明中.

插的点是 $f(0), f'(0), f(1)$. 拉格朗日插值部分是

$$\frac{x-1}{0-1} f(0) + \frac{x-0}{1-0} f(1).$$

因此根据命题11.2, 只有 0 需要拟和到 1 阶导数, 因此 r 待定 0 次多项式, 所以 Hermite 插值多项式应该形如

$$p(x) = \frac{x-1}{0-1} f(0) + \frac{x-0}{1-0} f(1) + cx(x-1) = (x-1) + cx(x-1).$$

又

$$p'(0) = 1 - c = f'(0) = 0 \Rightarrow c = 1,$$

从而 $p(x) = x^2 - 1$.

根据 Hermite 插值定理11.1, 我们知道存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x) = p(x) + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta),$$

这恰好是(11.7).

笔记 插值是需要记忆的. 此类问题转化到考场上就是无脑常数 K 值法, 本题因为要证的表达式已经给出, 所以还无需你知道插值, 直接套入常数 K 值法即可. 但对某些问题可能就要你自己提前知道表达式了. 所以上述分析余项的过程应该反复训练到肌肉反应.

证明 我们来看如何在考场上呈现证明, 我们仅以本例为例, 后续不再书写插值工具的证明.

我们断言, 对每个固定的 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得(11.7)成立. 当 $x=0,1$, (11.7)显然对任何 $\theta\in(0,1)$ 都成立, 下设 $x\in(0,1)$.

事实上, 记常数 $K=K(x)$ 满足

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{6}K,$$

即

$$K=\frac{f(x)+1-x^2}{\frac{x^2(x-1)}{6}},$$

然后考虑函数

$$F(y)=f(y)-\left(-1+y^2\right)-\frac{y^2(y-1)}{6}K, y\in[0,1].$$

于是直接计算表明

$$F(0)=F(1)=F(x)=F'(0)=0. \tag{11.8}$$

由罗尔中值定理, 我们知道存在 $\theta_1\in(0,x),\theta_2\in(x,1)$, 使得 $F'(\theta_1)=F'(\theta_2)=0$. 结合(11.8), 继续罗尔中值定理我们知道存在 $\theta_3\in(0,\theta_1),\theta_4\in(\theta_1,\theta_2)$, 使得 $F''(\theta_3)=F''(\theta_4)=0$. 再来一次罗尔中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(\theta_3,\theta_4)$, 使得 $F'''(\theta)=0$. 因此

$$F'''(\theta)=f'''(\theta)-K=0,$$

这就证明了(11.7).

笔记 例题11.1的常数 K 值法证明是固定操作, 最后一定就变成了 $f'''(\theta)=K$ 这种要证的结构. 往届竞赛班学员都会把 x 错误的看成自变量, 这里一定要清楚 x 是个给定的已知数字, K 选取确实依赖 x.

例题 11.2 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^2(a,b)$, 则对每一个 $x\in(a,b)$, 都有 $\theta\in(a,b)$ 使得

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{f''(\theta)}{2}(x-a)(x-b). \tag{11.9}$$

注 这是应试用的最多的例子, 需要牢记.

证明 记常数 K 满足

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{K}{2}(x-a)(x-b).$$

构造

$$g(y)\triangleq f(y)-\frac{y-b}{a-b}f(a)-\frac{y-a}{b-a}f(b)-\frac{K}{2}(y-a)(y-b),$$

然后 $g(a)=g(b)=0$, 故由罗尔中值定理得 $\theta_1\in(a,x),\theta_2\in(x,b)$ 使得

$$g'(\theta_1)=g'(\theta_2)=0.$$

继续由罗尔中值定理得 $\theta\in(\theta_1,\theta_2)\subset(a,b)$ 使得

$$g''(\theta)=0\Rightarrow f''(\theta)=K,$$

这就证明了(11.9).

例题 11.3 设 $f\in D^3[-1,1]$ 且 $f(-1)=0,f'(0)=0,f(1)=1$, 证明存在 $\theta\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\theta)=3$.

笔记 这部分内容是思路分析, 无需呈现在证明中.

本题拟和 $f(-1),f(1),f(0),f'(0)$, 4 个条件暗含插值多项式 3 次, 余项应该到 4 阶导, 条件只有 3 阶导, 因此本题是一种新的模型. 即 $f'''(\theta)=p'''(\theta)$ 这种模型.

证明 设

$$p(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}f(-1)+\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}f(0)+\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}f(1)+cx(x+1)(x-1).$$

代入导数条件得 $c=\frac{1}{2}$.

注意到 $F(x)=f(x)-p(x)$ 满足

$$F(0)=F(1)=F(-1)=F'(0)=0. \tag{11.10}$$

于是类似例题11.1, 对 F 反复使用罗尔中值定理知存在 $\theta\in(-1,1)$, 使得 $F'''(\theta)=0$, 直接计算表明

$$F'''(\theta)=f'''(\theta)-p'''(\theta)=f'''(\theta)-\frac{1}{2}\cdot 3!=0, \tag{11.11}$$

即 $f'''(\theta)=3$. 我们完成了例题(11.3)的证明.

笔记 实际上不必求导计算(11.10), 因为从 p 的定义自然知道(11.10)成立. 也不必真的求导计算(11.11), 因为 p 求三阶导, 只有 x^3 的系数可以留存下来. 从而 $p'''=\frac{1}{2}\cdot 3!$.

例题 11.4 设 $f\in C[0,2]\bigcap D(0,2)$ 满足

$$f(0)=f(2)=0,|f'(x)|\leqslant M,\forall x\in(0,2).$$

证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right|\leqslant M.$$

笔记 我们给出的方法和经典的方法一致, 但要注意观点上的区别. 我们是高屋建瓴的站在观点上解决问题. 同样的观点, 我们可以解决其他人采用本题方法无法解决的问题.

笔记 插 $f(0),f(2)$, 插值多项式 1 次, 余项 2 阶, 导数不够, 属于靠近哪边对哪边插模型.

证明 当 $x\in[0,1]$, 由插值定理11.1, 我们有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(\theta(x))}{1!}(x-0)=f'(\theta(x))\,x,$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f'(\theta(x))|\cdot x\leqslant Mx. \tag{11.12}$$

当 $x\in[1,2]$, 由插值定理11.1, 我们有

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(\zeta(x))}{1!}(x-2)=f'(\zeta(x))\,(x-2),$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f'(\zeta(x))|\cdot|x-2|\leqslant M(2-x). \tag{11.13}$$

结合(11.12)和(11.13), 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right|&\leqslant\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|+\left|\int_1^2 f(x)\,dx\right|\\&\leqslant\int_0^1|f(x)|\,dx+\int_1^2|f(x)|\,dx\\&\leqslant\int_0^1(Mx)\,dx+\int_1^2(M(2-x))\,dx\\&=M.\end{aligned}$$

这就完成了例题11.4的证明.

笔记 你发现了吗, 虽然上面的证明仅仅只是拉格朗日中值定理, 但是我们的观点却和以前不一样了, 是插值的观点, 这同样表明拉格朗日中值定理本质上只是插值方法的特例.

练习 11.1 设 $f\in D^2[0,1],f(0)=f(1)=0,|f''(x)|\leqslant M$, 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{M}{12}. \tag{11.14}$$

证明 拟和 $f(0),f(1)$, 2 个条件, 插值多项式 1 次, 余项到了 2 阶导, 完美符合条件, 使用拉格朗日插值11.1, 显然插值多项式 $p=0$, 于是存在 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$f(x)=\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1),\forall x\in[0,1]. \tag{11.15}$$

积分并取绝对值就有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1\frac{f''(\theta(x))}{2}x(x-1)\,dx\right|\leqslant\int_0^1\frac{|f''(\theta(x))|}{2}|x(x-1)|\,dx\leqslant\frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{M}{12}.$$

这就证明了(11.14).

笔记 有同学会问, 为什么 $f''(\theta(x))$ 可以放到积分号内, 他不连续咋办? 实际上恒等式(11.15)左边可以放在积分号内, 自然右边整体也可以放在积分号内. 所以读者以后无需担心在插值定理等式两边积分的细节问题.

笔记 运用条件我们还可以得到函数的不等式

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}x(1-x), \forall x \in [0,1].$$

例题 11.5 设 $f \in C^3[0,2]$ 满足

$$f(0) = f'(0) = 0, \int_0^2 f(x)\,dx = 8\int_0^1 f(x)\,dx.$$

证明: 存在 $\theta \in (0,2)$, 使得 $f'''(\theta) = 0$.

证明 考虑 $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy \in C^4[0,2]$, 初值条件即

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = 0, F(2) = 8F(1).$$

这里插点 $F(1), F(2), F(0), F'(0), F''(0)$, 合计 5 个条件, 插值多项式 4 次, 余项 5 阶, 条件不够, 属于模型 $F'''' = p''''$. 为确定 p, 注意到 0 是 p 的三重零点, 考虑 $p(x) = x^3(ax+b)$, 则

$$F(2) = 8F(1) \Rightarrow p(2) = 8p(1) \Rightarrow a = 0,$$

即 $p(x) = F(1)x^3$. 由插值定理11.1, 存在 $\theta \in (0,2)$, 使得

$$f'''(\theta) = F''''(\theta) = p''''(\theta) = 0.$$

这就完成了证明.

练习 11.2 设 $f \in D^1[a,b] \bigcap D^3(a,b)$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)] - \frac{f'''(\xi)}{12}(b-a)^3. \tag{11.16}$$

注要仔细揣摩微分条件给予是否足够, 需要一眼看穿整个罗尔的证明过程.

证明 插 $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$, 则插值多项式 3 次, 余项 4 阶, 但是条件只到 3 阶. 因此属于 $f''' = p'''$ 模型.

根据插值多项式计算11.2, 我们知道

$$p(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + (kx+t)(x-a)(x-b).$$

由于结果只涉及 p''', 因此只需要关心 p 的最高次系数 k 的值.

现在

$$p'(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (ka+t)(a-b) = f'(a)$$
$$p'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + (kb+t)(b-a) = f'(b),$$

于是

$$k = \frac{f'(b)+f'(a)}{(b-a)^2} - \frac{2}{(b-a)^3}[f(b)-f(a)].$$

相似例题11.3的反复罗尔中值定理我们知道存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'''(\xi) = p'''(\xi) = 6k$, 整理一下就得到(11.16). 我们完成了证明.

例题 11.6 设 $f \in C^2[0,1]$, 满足

$$f(0) = f(1) = 0, \min_{x\in[0,1]} f(x) = -1. \tag{11.17}$$

证明 $\max_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8$.

笔记 极值点有导数为 0 条件, 也是一个很好展开的点.

证明 设 $c \in (0,1)$ 使得 $f(c) = -1$, 插 $f(c), f'(c)$, 余项二阶导. 还有两个条件, 靠近谁插谁.

若 $c \in (0, \frac{1}{2}]$, 注意

$$0 = f(0) = f(c) + \frac{f''(\theta)}{2}c^2 = -1 + \frac{f''(\theta)}{2}c^2 \Rightarrow f''(\theta) = \frac{2}{c^2} \geqslant 8.$$

若 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, 注意

$$0=f(1)=f(c)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-c)^2=-1+\frac{f''(\eta)}{2}(1-c)^2\Rightarrow f''(\eta)=\frac{2}{(1-c)^2}\geqslant 8.$$

这就证明了 $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geqslant 8$.

例题 11.7 设 $f\in D^2[-a,a],a>0$ 满足

$$f(-a)=-1,f(a)=1,f'(-a)=f'(a)=0,|f''(x)|\leqslant 1.$$

证明 $a>\sqrt{2}$.

笔记 微分条件不足以插四个点, 靠近谁插谁模型. 但是没有其他约束条件, 要找一个公共点能同时出现在两边插, 只能是带入 $x=0$.

证明 考虑微分学方法

由 Taylor 中值定理, 我们知道存在 $\theta_1\in(-a,0),\theta_2\in(0,a)$, 使得

$$f(0)=-1+\frac{f''(\theta_1)}{2}(0+a)^2,f(0)=1+\frac{f''(\theta_2)}{2}(0-a)^2.$$

两式相减得

$$0=2+\frac{f''(\theta_2)}{2}a^2-\frac{f''(\theta_1)}{2}a^2.$$

利用条件 $|f''(x)|\leqslant 1$, 我们知道

$$a^2\geqslant -\frac{f''(\theta_2)}{2}a^2+\frac{f''(\theta_1)}{2}a^2=2,$$

这就证明了 $a\geqslant\sqrt{2}$. 等号不容易丢掉.

考虑积分学方法, 尝试

先来看若 $f\in C^2[-a,a]$, 则由 Taylor 公式积分余项(11.4), 我们有

$$f(0)=-1-\int_{-a}^{0}tf''(t)\,dt=1+\int_{0}^{a}tf''(t)\,dt. \tag{11.18}$$

则两式做差有

$$-2=\int_{-a}^{a}tf''(t)\,dt.$$

现在利用条件 $|f''(x)|\leqslant 1$, 我们知道

$$2=\left|\int_{-a}^{a}tf''(t)\,dt\right|\leqslant\int_{-a}^{a}|t|\cdot|f''(t)|\,dt\leqslant\int_{-a}^{a}|t|\,dt=a^2,$$

即 $a\geqslant\sqrt{2}$. 若等号成立则 $|f''(t)|=1,\forall t\in[-a,a]$. 由介值性我们知道 $f''(t)$ 为常数, 从而 f 为二次函数. 对四个初值条件, 读者可以自行解方程验证满足此条件的二次函数不存在. 这就证明了 $a>\sqrt{2}$.

笔记 遗憾的是 f'' 未必会可以做积分. 但幸运的是, 我们可以分部积分, 使得式(11.18)不出现二阶导数. 将式(11.18)分部积分得

$$f(0)=-1+\int_{-a}^{0}f'(t)\,dt=1-\int_{0}^{a}f'(t)\,dt.$$

两式做差得到

$$2=\int_{-a}^{0}f'(t)\,dt+\int_{0}^{a}f'(t)\,dt=\int_{-a}^{a}f'(t)\,dt.$$

而最后一个等式成立的原因却是显然的, 但是没有上面的分析会导致不知道为什么要如此做.

考虑积分学方法, 真正正确的证明

注意到

$$\begin{aligned}2&=\int_{-a}^{a}f'(t)\,dt\\&=\int_{0}^{a}[f'(t)-f'(a)]\,dt+\int_{-a}^{0}[f'(t)-f'(-a)]\,dt\\&\leqslant-\int_{0}^{a}(t-a)\,dt+\int_{-a}^{0}(t+a)\,dt\\&=a^2\end{aligned}$$

这里不等号来自拉格朗日中值定理

$$f'(t)-f'(a)=f''(\theta_1)(t-a)\leqslant-(t-a),f'(t)-f'(-a)=f''(\theta_2)(t+a)\leqslant t+a.$$

于是 $a\geqslant\sqrt{2}$. 若等号成立, 则

$$f'(t)-f'(a)=-(t-a),\forall t\in[0,a],f'(t)-f'(-a)=t+a,\forall t\in[-a,0].$$

两边求导得

$$f''(t)=-1,\forall t\in[0,a],f''(t)=1,\forall t\in[-a,0].$$

这就是一个矛盾, 因此我们证明了 $a>\sqrt{2}$.

例题 11.8 设 $f\in D[a,b]$ 且

$$|f'(x)|\leqslant M,\int_a^b f(x)\,dx=0.$$

考虑 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, 证明

$$|F(x)|\leqslant\frac{M(b-a)^2}{8}.$$

若还有 $f(a)=f(b)=0$, 证明

$$|F(x)|\leqslant\frac{M(b-a)^2}{16}.$$

笔记 因为题目的微分阶数不够, 因此是靠近谁插谁的模型.

证明 先来看第一问, 因为

$$F(b)=F(a)=0,|F''(x)|=|f'(x)|\leqslant M.$$

即 F 有两个初值条件, 插左右端点, 合计两个条件, 拟合多项式一次, 余项应该是二次的, 因此微分条件足够, 运用拉格朗日插值11.1, 对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $\theta\in[a,b]$, 使得

$$F(x)=\frac{F''(\theta)}{2}(x-a)(x-b).$$

$$|F(x)|=\left|\frac{F''(\theta)}{2}(x-a)(x-b)\right|\leqslant\frac{M}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=\frac{M(b-a)^2}{8}.$$

再来看第二问, 此时 $F(a)=F(b)=F'(a)=F'(b)=0$, 需要拟和初值条件太多 (4 个初值条件, 插 3 次多项式, 余项要到 4 阶导数). 因此属于靠近谁插谁模型. 设 $x_0\in[a,b]$ 是 $|F|$ 最大值点, 不妨设 $x_0\in(a,b)$, 否则不等式平凡.

不妨设 $x_0\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right]$, 则我们对 $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, 运用插值定理11.1, 我们知道存在 $\theta,\eta\in[a,\frac{a+b}{2}]$, 使得

$$F(x)=\frac{F''(\theta)}{2}(x-a)^2,F(x)=F(x_0)+\frac{F''(\eta)}{2}(x-x_0)^2,$$

即

$$F(x_0)=\frac{F''(\theta)}{2}(x-a)^2-\frac{F''(\eta)}{2}(x-x_0)^2.$$

因此

$$|F(x_0)| \leqslant \frac{M}{2}\left[(x-a)^2+(x-x_0)^2\right].$$

特别的取 $x=\frac{a+x_0}{2}$ 使上式右端达到最小, 我们有

$$|F(x_0)| \leqslant \frac{M}{4}(x_0-a)^2 \leqslant \frac{M}{4}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2 = \frac{M}{16}(b-a)^2.$$

这就完成了例题11.8的证明.

✍ **练习 11.3** 设 $f\in C^3[-1,1]$ 满足 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得

$$f'''(\xi)=\xi+3.$$

笔记 插 $f(-1), f(1), f'(0), f(0)$, 四个条件, 插值多项式 3 次, 余项 4 阶导. 条件光滑性不足, 于是 $f'''=p'''$ 模型, p''' 应该是常数, 要证等式右边却含有 ξ, 因此对 $f-\frac{1}{24}x^4$ 来插值.

证明 证明见乾隆觉得无法插的微分中值证明题.

✍ **练习 11.4** 设 $f\in C^2[a,b]$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi). \tag{11.19}$$

证明 插 $f\left(\frac{a+b}{2}\right), f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 运用 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\theta(x))}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边积分就有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b \frac{f''(\theta(x))}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx\\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f''(\xi)\int_a^b \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx\\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,\end{aligned}$$

这里用到了积分中值定理和

$$f''(\theta(x))=2\frac{f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}\in C[a,b].$$

因此我们证明了(11.19).

✍ **练习 11.5** 设 $f\in D^2[a,b]$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi). \tag{11.20}$$

证明 插 $f(a), f(b)$, 由拉格朗日插值定理11.1, 我们知道

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{f''(\theta(x))}{2}(x-a)(x-b).$$

注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} 2\frac{f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(x-b)} &= \frac{2}{a-b}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}}{1}=\frac{2\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)\right]}{b-a}\\ \lim_{x\to b^-} 2\frac{f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(x-b)} &= \frac{2}{b-a}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}}{1}=\frac{2\left[f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]}{b-a}\end{aligned}. \tag{11.21}$$

笔记 实际上, 式(11.21)的极限是必然存在的, 以后可以无需担心式(11.21)中极限不存在.

于是

$$f''(\theta(x))=2\frac{f(x)-\frac{x-b}{a-b}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)}{(x-a)(x-b)}\in C[a,b].$$

两边积分得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]dx + \int_a^b \frac{f''(\theta(x))}{2}(x-a)(x-b)\,dx\\ &= \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{1}{2}(x-a)(x-b)\,dx\\ &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\end{aligned}$$

这里用到了积分中值定理. 我们就证明了(11.20).

11.1.4 插值积分余项 ♠

最后我们来介绍插值定理的积分余项. 这部分想法起源于 2021 年在第九届清疏大学生数学竞赛课程中笔者结合已知技巧总结的一套方法. 考试直接考察的概率几乎为 0, 但偶尔能起到奇妙的作用. 实际上一个例子是 Taylor 公式的积分余项(11.4), 我们这里将总结一般 Hermite 插值余项的构造方法.

首先是无需动脑版, 从实际考试的角度, 无需关心如下结果是怎么想到的, 只需记忆下述恒等式即可.

定理 11.2 (拉格朗日插值积分余项)

设 f 是 $[a,b]$ 上的二阶可微函数且 f'' 在 $[a,b]$ 可积, 则成立

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)\,k(x,y)\,dy, \tag{11.22}$$

这里

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b), & b\geqslant y\geqslant x\geqslant a\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b\geqslant x\geqslant y\geqslant a\end{cases}.$$

特别的, 若还有 $f(a)=f(b)=0$, 则有

$$f(x)=\int_a^b f''(y)\,k(x,y)\,dy. \tag{11.23}$$

♡

笔记 $k(x,y)$ 也叫 Green 函数.

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-\frac{b-x}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b),x\in[a,b],$$

则有 $g''(x)=f''(x),g(a)=g(b)=0$. 因此只需对 g 证明式(11.23).

事实上,

$$\begin{aligned}\int_a^b g''(y)\,k(x,y)\,dy &= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x g''(y)(a-y)\,dy+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b g''(y)(y-b)\,dy\\ &= \frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)g'(x)+\int_a^x g'(y)\,dy\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)(x-b)-\int_x^b g'(y)\,dy\right]\\ &= \frac{b-x}{b-a}\left[(a-x)g'(x)+g(x)\right]+\frac{x-a}{b-a}\left[-g'(x)(x-b)+g(x)\right]\\ &= g(x).\end{aligned}$$

这就证明了式(11.23)成立.

虽然实际考试中一般考虑定理11.2就够了. 但是我们还是想知道核函数 k 是如何构造的, 以及想知道对于更广泛的 Hermite 插值的积分余项如何导出.

设 p 是插值多项式, 为了探索积分余项

$$f(x)=p(x)+\int_a^b f^{(n)}(y)\,k(x,y)\,dy,$$

我们自然考虑 $g=f-p$, 从而对有各种零边界条件的 g 去证明

$$g(x)=\int_a^b g^{(n)}(y)\,k(x,y)\,dy.$$

以定理11.2为例, 求 k 使得对 $g(a)=g(b)=0$ 的 g 有

$$g(x)=\int_a^b g''(y)\,k(x,y)\,dy.$$

想法即分部积分转移导数, 即

$$\int_a^b g''(y)\,k(x,y)\,dy=\int_a^b g(y)\,\frac{d^2}{dy^2}k(x,y)\,dy=g(x). \tag{11.24}$$

换言之, 我们需要 $\frac{d^2}{dy^2}k(x,y)=\delta_x$, 这里 δ_x 是一种广义函数, 他有着筛值的效果 $\int_a^b \delta_x(y)\,g(y)\,dy=g(x)$. 显然这是不严格的说法, 在泛函分析中其可以严格定义. 但我们这里要展示高数角度给 δ_x 一个严格刻画. 注意到

$$H_x(y)=\begin{cases}0, & a\leqslant y\leqslant x\\ 1, & x\leqslant y\leqslant b\end{cases},\int_a^b H_x(y)\,g'(y)\,dy=\int_x^b g'(y)\,dy=-g(x).$$

形式上

$$\int_a^b H_x(y)\,g'(y)\,dy=-\int_a^b H_x'(y)\,g(y)\,dy=-g(x).$$

即 δ_x 的原函数可以看成是一个正常的函数 H_x, 那么对 δ_x 求两次原函数就相当于求 H_x 的原函数. 注意到求原函数可以相差一个常数, 因此 δ_x 的原函数可以形如

$$\begin{cases}c, & a\leqslant y\leqslant x\\ 1+c, & x\leqslant y\leqslant b\end{cases},c\in\mathbb{R}.$$

再求一次原函数得

$$\begin{cases}cy+d_1, & a\leqslant y\leqslant x\\ (1+c)\,y+d_2, & x\leqslant y\leqslant b\end{cases},c,d_1,d_2\in\mathbb{R}.$$

为了使得分部积分转移导数(11.24)过得去, 第一次分部积分还需要对 k 有零边界条件, 即由

$$\int_a^b g''(y)\,k(x,y)\,dy=k(x,b)\,g'(b)-k(x,a)\,g'(a)-\int_a^b g'(y)\,\frac{d}{dy}k(x,y)\,dy$$

知需要 $k(x,a)=k(x,b)=0$. 第二次分部积分的零边界条件可以由 g 提供, 因此无需对 k 题要求.

现在要使 k 是连续函数, 需要 $cx+d_1=(1+c)\,x+d_2$, 三个条件可确定三个未知数, 因此即得

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b), & b\geqslant y\geqslant x\geqslant a\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y), & b\geqslant x\geqslant y\geqslant a\end{cases}.$$

作为一个应用, 我们有

例题 11.9 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)=0$, 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant 4. \tag{11.25}$$

笔记 ♠ 我们指出(11.25)中的 4 是最佳的. 从下述证明可以看到放缩核心是

$$|k(x,y)|\leqslant k(x,x)\leqslant k\left(\frac12,\frac12\right)=\frac14.$$

因此我们期望 f'' 其中在 $x=\frac12$ 附近且值为 1. 于是考虑

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{n^3}{8}\left(x-\frac12\right)^4-\frac{3n}{4}\left(x-\frac12\right)^2+\frac{4n-3}{8n}, & x\in\left[\frac12-\frac1n,\frac12+\frac1n\right]\\ x, & x\in\left[0,\frac12-\frac1n\right)\\ -(x-1), & x\in\left(\frac12+\frac1n,1\right]\end{cases},n\geqslant 2.$$

由于

$$f_n''(x)\leqslant 0, x\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right], f_n(x)\geqslant 0, x\in[0,1],$$

我们有

$$\int_0^1\left|\frac{f_n''(x)}{f_n(x)}\right|dx=-\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\frac{f_n''(x)}{f_n(x)}dx\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=}-\frac{1}{f_n(\xi_n)}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}f_n''(x)\,dx\left(\left|\xi_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{2}{f_n(\xi_n)}=\frac{2}{\frac{n^3}{8}\left(\xi_n-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{3n}{4}\left(\xi_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4n-3}{8n}}\to 4, n\to\infty.$$

证明 事实上, 由定理11.2, 我们知道

$$f(x)=\int_0^1 f''(y)\,k(x,y)\,dy.$$

于是利用

$$|k(x,y)|\leqslant|k(x,x)|=x(1-x),$$

就有

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|k(x,y)|\cdot|f''(y)|\,dy\leqslant x(1-x)\int_0^1|f''(y)|\,dy\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|f''(y)|\,dy,$$

从而

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{\frac{1}{4}\int_0^1|f''(y)|\,dy}\right|dx=4.$$

这就完成了证明.

11.2 函数构造类

11.2.1 一阶构造类

此类构造最核心的方法就是解微分方程. 我们用具体例子来说明.

例题 11.10 证明如下问题

1. 设 $f\in C[0,2]\bigcap D(0,2)$ 满足
$$f(0)=f(2)=0,\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5.$$
则存在 $\xi\in(0,2)$ 使得
$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$
2. 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1), f(0)=0$, 证明: 存在 $u\in(0,1)$, 使得
$$f'(u)=\frac{uf(u)}{1-u}.$$
3. 设 $f\in C[-1,2]\bigcap D(-1,2)$ 且有 $f(-1)=f(2)=-\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明对任何实数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 都存在 $\xi\in(-1,2)$, 使得
$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

笔记 我们在草稿纸上构造函数, 构造过程无需展示给别人或者卷面. 构造的本质是猜测, 所以无需严格的逻辑.

1. **Step 1** 考虑微分方程 $y'=\frac{2x-y}{x}$, 解得 $y=\frac{c}{x}+x$.
Step 2 分离常数 c 得 $c=x(y-x)$, 常数变易得构造函数 $c(x)=x(f(x)-x)$.
2. **Step 1** 考虑微分方程 $y'=\frac{xy}{1-x}$, 解得 $y=\frac{ce^{-x}}{x-1}$.
Step 2 分离常数 c 得 $c=e^x(x-1)y$, 常数变易得构造函数 $c(x)=e^x(x-1)f(x)$.

3. **Step 1** 考虑微分方程 $y'=\lambda\left[y-\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}$, 解得 $y=ce^{\lambda x}+\frac{x}{2}$.
   Step 2 分离常数 c 得 $c=\frac{y-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$, 常数变易得构造函数 $c(x)=\frac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$.

证明

1. 由条件我们知道 $f(1)=2, f'(1)=5$. 构造函数 $c(x)=x(f(x)-x)$, 我们求导得
$$c'(x)=f(x)-2x+xf'(x). \tag{11.26}$$
注意到
$$c(0)=0, c(1)=1, c(2)=-4.$$
于是由拉格朗日中值定理得 $\alpha\in(0,1), \beta\in(1,2)$, 使得
$$c'(\alpha)=\frac{c(1)-c(0)}{1-0}=1, c'(\beta)=\frac{c(1)-c(2)}{1-2}=-5.$$
由导数介值定理11.5知存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $c'(\xi)=0$. 由(11.26)知
$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}.$$
这就完成了证明.
2. 构造 $c(x)=e^x(x-1)f(x)$, 则 $c(0)=c(1)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $u\in(0,1)$, 使得 $c'(u)=0$, 这恰好是
$$f'(u)=\frac{uf(u)}{1-u}.$$
3. 构造 $c(x)=\frac{f(x)-\frac{x}{2}}{e^{\lambda x}}$. 注意到
$$c(-1)=0, c(2)=-\frac{3}{2e^{2\lambda}}, c\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4e^{\frac{\lambda}{2}}}.$$
由零点定理知存在 $\theta\in(\frac{1}{2},2)$, 使得 $c(\theta)=0$. 由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(-1,2)$, 使 $c'(\xi)=0$, 即
$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{\xi}{2}\right]+\frac{1}{2}.$$

作为最重要, 最基本的题型, 我们来做一组训练.

练习 11.6

1. 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 满足 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$f'(\xi)+3\xi^2f(\xi)=0. \tag{11.27}$$
2. 设 $f\in C[0,\pi]\bigcap D(0,\pi)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得
$$f'(\xi)+f(\xi)\cot\xi=0. \tag{11.28}$$
3. 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 满足 $f(1)=0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0. \tag{11.29}$$

证明

1. 考虑
$$g(x)\triangleq f(x)e^{x^3},$$
则由 $g(a)=g(b)=0$ 和罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$ 成立(11.27).
2. 设
$$g(x)\triangleq f(x)\sin x,$$
我们有 $g(0)=g(\pi)=0$. 由罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$ 成立(11.28).
3. 设
$$g(x)\triangleq x^3f(x),$$
我们有 $g(0)=g(1)=0$. 由罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$ 成立(11.29).

例题 11.11 设 $f\in D[0,1]$ 且 $f(0)>0,f(1)>0,\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

笔记 此类构造虽然仍然是一阶构造, 但是他要把部分 f 视为已知函数来构造, 对于本题, 即 $3f^2$ 视为已知的函数. 考虑 $y'+3f^2y=0$. 解得 $y=ce^{-\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 分离变量得构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$.

证明 构造函数 $c(x)=f(x)e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}$, 注意到

$$c'(x)=e^{\int_0^x 3f^2(t)dt}\left[f'(x)+3f^3(x)\right].$$

以及由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(\theta)=\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

注意到若 f 只有一个零点, 则因为 $f(0)>0,f(1)>0$, 我们知道 $f(x)>0,\forall x\in[0,\theta)\bigcup(\theta,1]$, 从而 $\int_0^1 f(x)\,dx>0$, 这就是一个矛盾!

于是存在 $\theta_1\neq\theta_2$, 使得 $f(\theta_1)=f(\theta_2)=0$. 现在就有 $c(\theta_1)=c(\theta_2)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $c'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$$

接下来我们不再给出类似上面例题的构造函数细节, 默认大家都熟练掌握.

下例来自知乎用户天才琪露诺.

例题 11.12 设 $f\in C^1[0,1]$, 证明存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$f'(\xi)=\int_0^1(12x-6)f(x)\,dx.$$

证明 分部积分需要零边界条件, 其想法是

$$\int_0^1(12x-6)f(x)\,dx=\int_0^1\left(6x^2-6x+c\right)'f(x)\,dx=\left(6x^2-6x+c\right)f(x)|_0^1-\int_0^1 f'(x)\left(6x^2-6x+c\right)dx.$$

于是为了没有边界项 $\left(6x^2-6x+c\right)f(x)|_0^1$, 我们需要 $c=0$, 从而就有

$$\int_0^1(12x-6)f(x)\,dx=-\int_0^1 f'(x)\left(6x^2-6x\right)dx=-f'(\xi)\int_0^1\left(6x^2-6x\right)dx=f'(\xi),$$

这里倒数第二个等号来自积分中值定理11.3.

例题 11.13 设 $f\in C[0,+\infty)\bigcap D^1(0,+\infty)$.

1. 若

$$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2},\forall x\in[0,+\infty),\tag{11.30}$$

证明: 存在 $\xi>0$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.\tag{11.31}$$

2. 若

$$0\leqslant f(x)\leqslant xe^{-x},\forall x\in[0,+\infty),\tag{11.32}$$

证明: 存在 $\xi>0$ 使得

$$f'(\xi)=e^{-\xi}(1-\xi).\tag{11.33}$$

证明

1. 由(11.30)和夹逼准则得 $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 设

$$g(x)\triangleq f(x)-\frac{x}{1+x^2}.$$

注意到

$$g(0)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

我们由广义罗尔中值定理11.6得 $\xi>0$ 使得 $g'(\xi)=0$, 即(11.31)成立.

2. 构造 $g(x)\triangleq f(x)-xe^{-x}$, 接下来的步骤完全和 1 一致.

11.2.2 二阶构造类

本质上就是一阶构造类的例:

例题 11.14

1. 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得 $f(0)=f(1)$, 证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$$f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 设 $f\in D^2[0,1], f(0)=0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}, f(1)=\frac{\pi}{4}$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得
$$f''(\xi)\left(1+\xi^2\right)+2f'(\xi)\xi=0. \tag{11.34}$$
3. 设 $f\in D^2\left[0,\frac{\pi}{4}\right], f(0)=0, f'(0)=1, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, 证明存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, 使得
$$f''(\xi)=2f(\xi)f'(\xi). \tag{11.35}$$

笔记 视为关于 f' 的一阶方程直接采用例11.10的构造.

证明

1. 构造 $c(x)=(1-x)^2f'(x)$, 由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 则 $c(1)=c(\xi)=0$, 继续由罗尔中值定理得 $\eta\in(0,1)$ 使得 $c'(\eta)=0$, 即
$$f''(\eta)=\frac{2f'(\eta)}{1-\eta}.$$
2. 构造 $c(x)=f'(x)\left(1+x^2\right)$, 则 $c'(x)=2xf'(x)+\left(1+x^2\right)f''(x)$. 题目条件给了很强的 arctan 的暗示, 因此构造
$$g(x)=f(x)-\arctan x, g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=g(1)=g(0)=0,$$
两次罗尔即得 c 的两个相等的点. 故继续罗尔得 $\xi\in(0,1)$, 使得(11.34)成立. 证毕!
3. 构造
$$g(x)=\arctan f(x)-x,$$
则
$$g(0)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, g'(0)=0,$$
罗尔可得 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, 使得 $g'(\alpha)=0$, 即 $f'(\alpha)=1+f^2(\alpha)$. 于是设 $h(x)=f'(x)-f^2(x)-1$, 则 $h(0)=h(\alpha)=0$, 由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得(11.35).

一类意义不大的二阶微分方程蕴含的中值定理问题.

例题 11.15 设 $f\in D^2(\mathbb{R}), f(0)f(\pi)<0$, 证明存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得
$$f''(\xi)-2f'(\xi)\cot\xi+f(\xi)\left(1+2\cot^2\xi\right)=0. \tag{11.36}$$

笔记 此类问题, 即解 $y''-2y'\cot x+y\left(1+2\cot^2x\right)=0$ 微分方程来构造. 但是一般的变系数二阶微分方程没有固定解法, 必须先猜一解才能求解, 故我们借助软件输入y"-2*y'*cot(x)+y*(1+2*cot(x)2)=0, 解得微分方程为 $y(x)=c_1\sin x+c_2x\sin x$. 于是可以通过
$$\frac{y(x)}{\sin x}=c_1+c_2x\Rightarrow\left(\frac{y(x)}{\sin x}\right)''=0$$
来得到构造函数.

证明 让 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}, x\in(0,\pi)$, 则

$$g''(x)=\frac{f''(x)-2\cot x f'(x)+f(x)\left(1+2\cot^2 x\right)}{\sin x}, x\in(0,\pi).$$

若 $f''(x)-2\cot x f'(x)+f(x)\left(1+2\cot^2 x\right)$ 在 $(0,\pi)$ 没有零点, 那么 g 在 $(0,\pi)$ 必须是凸函数或者凹函数. 而 $f(0)f(\pi)<0$ 知 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$, $\lim\limits_{x\to\pi^-}g(x)$ 为符号不同的 ∞, 这不可能[2]. 这就证明了存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得(11.36)成立.

例题 11.16

1. 设 $f\in D^2\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], f(0)=0$, 证明存在 $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得
$$f''(\xi)=f(\xi)\left(1+2\tan^2\xi\right). \tag{11.37}$$
2. 设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 二阶可导, $f(0)=0$, 证明存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得
$$f''(\zeta)=3f'(\zeta)\tan\zeta+2f(\zeta). \tag{11.38}$$
3. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微且 f 至少有三个零点, 证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得
$$f''(\xi)+2\xi^2 f'(\xi)+\left(\xi^4+2\xi\right)f(\xi)=0. \tag{11.39}$$

证明

1. 笔记 同样的, 输入代码y''=y*(1+2*tan(x)2)得[3]
$$y=\frac{c_1}{\cos x}+c_2\left(\frac{x}{2\cos x}+\frac{\sin x}{2}\right).$$
于是
$$(y\cos x)'=\frac{c_2}{2}(1+\cos 2x)\Rightarrow\left[\frac{(y\cos x)'}{1+\cos 2x}\right]'=0.$$
设 $g(x)=f(x)\cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 于是
$$g'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x.$$
再考虑 $h(x)=\frac{g'(x)}{1+\cos 2x}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 于是
$$h'(x)=\frac{f''(x)-\left(1+2\tan^2 x\right)f(x)}{2\cos x}.$$
现在 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=0$ 和两次罗尔知 g' 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 有两个零点, 因此 $h(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 有两个零点. 继续由罗尔中值定理知 $h'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 有一个零点 ξ, 这就证明了存在 $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 使得(11.37)成立.
2. 同样的求解微分方程 $y''=3y'\tan x+2y$, 我们得到通解 $y=c_1\frac{1}{\cos^2 x}+c_2\frac{\sin(x)}{\cos^2 x}$, 因此有
$$(y\cos^2 x)'=c_2\cos x,\left(\frac{\left(y\cos^2 x\right)'}{\cos x}\right)'=0.$$
这样只需要构造函数
$$g(x)=f(x)\cos^2 x, h(x)=\left(\frac{g'(x)}{\cos x}\right)'=\cos x\cdot\left(f''(x)-2f(x)-3\tan x\cdot f'(x)\right),$$
反复运用罗尔定理即得, 存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 成立(11.38).
3. 同样的输入微分方程得解 $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{x^3}{3}}$, 于是注意到
$$\left[f(x)e^{\frac{x^3}{3}}\right]''=e^{\frac{x^2}{3}}\left[f''(x)+2x^2f'(x)+\left(x^4+2x\right)f(x)\right].$$
反复罗尔即得存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得(11.39)成立.

例题 11.17 设 $f\in C[-2,2]\bigcap D^2(-2,2)$ 且
$$|f(x)|<1,\forall x\in[-2,2], f^2(0)+\left(f'(0)\right)^2=4,$$

[2]凸或者凹函数如果两侧为 ∞ 应该符号相同, 可以作图观察得到.

[3]软件可能没有化简, 你需要自己配合一下手算.

证明存在 $\theta\in(-2,2)$ 使得

$$f(\theta)+f''(\theta)=0. \tag{11.40}$$

笔记 证明的想法即极值点导数为 0. 想办法利用题目条件来给出一些点的函数值估计. 注意到微分方程 $y''+y=0$ 的一种解法即 $y''y'=-yy'$, 从而得到构造函数.

证明 构造

$$g(x)=f^2(x)+(f'(x))^2, g'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)].$$

注意到由拉格朗日中值定理, 我们有

$$\frac{f(2)-f(0)}{2}=f'(\theta_1), \frac{f(-2)-f(0)}{-2}=f'(\theta_2), \theta_1\in(0,2), \theta_2\in(-2,0).$$

于是由题目条件知

$$|f'(\theta_i)|<1, i=1,2\Rightarrow g(\theta_1)<2, g(\theta_2)<2.$$

但 $g(0)=4>2$, 所以 g 在 $[\theta_2,\theta_1]$ 的最大值在内部取到, 设为 $\theta\in(\theta_2,\theta_1)$. 此时若 $f'(\theta)=0$, 则 $g(\theta)<1$, 这和最大值不少于 4 矛盾! 因此我们由 $g'(\theta)=0$ 得到了(11.40).

例题 11.18 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足

$$|f(x)|\leqslant m<|f'(0)|, \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明: 存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

证明 设 $g(x)\triangleq f^2(x)+(f'(x))^2$, 我们有

$$g'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)].$$

待定 $\alpha>0$, 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=f'(\theta_1), \frac{f(-\alpha)-f(0)}{-\alpha-0}=f'(\theta_2), \theta_1\in(0,\alpha), \theta_2\in(-\alpha,0).$$

由条件不等式得

$$|f'(\theta_1)|=\left|\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}\right|\leqslant\frac{2m}{\alpha}, |f'(\theta_2)|=\left|\frac{f(-\alpha)-f(0)}{-\alpha-0}\right|\leqslant\frac{2m}{\alpha},$$

即

$$|g(\theta_1)|\leqslant m^2+\frac{4m^2}{\alpha^2}, |g(\theta_2)|\leqslant m^2+\frac{4m^2}{\alpha^2}.$$

取 $\alpha>0$ 充分大使得 $m^2+\frac{4m^2}{\alpha^2}<|f'(0)|^2$, 我们有

$$|g(0)|\geqslant|f'(0)|^2>\max\{|g(\theta_1)|, |g(\theta_2)|\}.$$

即在 (θ_2,θ_1) 中 g 取得在 $[\theta_2,\theta_1]$ 中的最大值.

设 $\xi\in(\theta_2,\theta_1), g'(\xi)=0$ 且 ξ 是 g 在 $[\theta_2,\theta_1]$ 中最大值点. 若 $f'(\xi)=0$, 则

$$g(\xi)=|f(\xi)|^2\leqslant m^2\Rightarrow m^2<|f'(0)|^2\leqslant g(0)\leqslant g(\xi)\leqslant m^2,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

例题 11.19 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内可导. 若对任何 $x\in(a,b)$, 都有 $g'(x)\neq0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}. \tag{11.41}$$

笔记 虽然我们有大量的构造方法, 但是如果能直接观察, 那必然是最直接的.

证明 构造 $h(x)=[f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(x)]$, 于是 $h(a)=h(b)=0$. 现在由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $h'(\xi)=0$. 即

$$f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]-g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]=0,$$

这恰好是(11.41).

例题 11.20 设 $f,g\in D^2[a,b]$, $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}. \tag{11.42}$$

证明 考虑 $h(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$, 我们有

$$h(a)=h(b)=0, h'(x)=f''(x)g(x)-g''(x)f(x).$$

因为 $g''(x)\neq 0$, 所以 g 必然是上凸或者下凸函数. 又 $g(a)=g(b)=0$, 故做凸性分析[4]得 $g(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$. 于是有罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$, 使得(11.42)成立. 证毕!

例题 11.21 设 $f\in D^2[0,1]$, $f(0)=2, f'(0)=-2, f(1)=1$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0. \tag{11.43}$$

笔记 注意两种不同的解微分方程的方式都将派上用场.

证明 注意到

$$c(x)=f'(x)e^{\int_0^x f(y)dy}, c'(x)=\left[f''(x)+f(x)f'(x)\right]e^{\int_0^x f(y)dy}.$$

于是只要 f' 有两个不同的零点, 则由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$, 使得(11.43)成立.

下面假设 f' 不超过 1 个零点.

构造[5]

$$g(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x), \varphi(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{f(x)}, 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则

$$\varphi(0)=\varphi(1)=-\frac{1}{2}, \varphi'(x)=\frac{g(x)}{f^2(x)}.$$

若 f 在 $(0,1)$ 没有零点, 则对 φ 用罗尔中值定理得 g 在 $(0,1)$ 有零点. 结合 $g(0)=0$, 我们知道存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 这恰好就是(11.43).

若 f 在 $(0,1)$ 有唯一零点 c, 则必然也是最小值点, 故 $f(c)=f'(c)=0$, 从而 $g(c)=g(0)=0$. 故存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 这恰好就是(11.43).

若 f 在 $(0,1)$ 有多于一个零点 c,d, 则只能有两个零点 c,d[6], 于是只需考虑[7] $f(x)<0, x\in(c,d)$, 因此

$$\lim_{x\to d^-}\varphi(x)=\lim_{x\to c^+}\varphi(x)=+\infty.$$

故 φ 在 (c,d) 有最小值点 p, 它也是 $\varphi'(p)=0$, 即 $g(p)=g(0)=0$, 故我们知道存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 这恰好就是(11.43).

11.3 多中值点问题

例题 11.22 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在互不相同的 $\lambda,\mu\in(0,1)$ 使得 $f'(\lambda)(1+f'(\mu))=2$.

证明 待定 $c\in(0,1)$, 运用拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\lambda\in(0,c), \mu\in(c,1)$, 使得

$$f'(\lambda)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}, f'(\mu)=\frac{f(c)-f(1)}{c-1}=\frac{f(c)-1}{c-1}.$$

需要

$$2=f'(\lambda)(1+f'(\mu))=\frac{f(c)}{c}\left[1+\frac{f(c)-1}{c-1}\right],$$

[4]考虑 g 的单调性.

[5]解微分方程 $\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x)=0$ 得到 φ 的构造动机.

[6]如果有三个零点则罗尔可知 f' 有两个零点而矛盾.

[7]$f>0$ 相当于 c 是 f 极值点, 和前一情况一致.

只需取 $c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=2-2c$. 注意到

$$g(x)=f(x)+2x-2, g(0)=-2, g(1)=1.$$

因此存在 $c\in(0,1)$ 使得 $g(c)=0$, 即 $f(c)=2-2c$.

笔记 有些同学可能会自然的想到取 $f(c)=c$, 但题目条件不足以保证这个事实, 所以只能换一下匹配对象来确定取 $f(c)=2-2c$.

例题 11.23 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 正实数满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明存在互不相同的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=1.$$

证明 证明的想法非常简单, 即插入 $n-1$ 个点 $0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1$ 之后用拉中得

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}, x_i\in(y_{i-1},y_i), i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(y_i-y_{i-1})}{f(y_i)-f(y_{i-1})}.$$

自然期望

$$f(y_i)-f(y_{i-1})=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n. \tag{11.44}$$

此时就有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})=1.$$

而为了得到(11.44), 我们只需反复用介值定理即可得到

$$f(y_i)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i, i=1,2,\cdots,n.$$

北京大学高等数学期末考试题

例题 11.24 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 使得 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得存在两两不同的 $x_1,x_2,\cdots,x_N\in(0,1)$ 满足

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j f'(x_j)}-1\right|<\epsilon. \tag{11.45}$$

证明 注意到 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=1$, 于是对题目的 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j}-1\right|<\epsilon. \tag{11.46}$$

在例11.23中取

$$\lambda_i=\frac{\frac{1}{2^i}}{\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j}}, i=1,2,\cdots,N.$$

我们可以找到两两不同的 $x_1,x_2,\cdots,x_N\in(0,1)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=1,$$

即

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^i f'(x_i)}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j}.$$

由(11.46)知(11.45)成立. 这就完成了证明.

例题 11.25 设 $f\in C[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx\neq 0$, 证明存在互不相同的 $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in[0,1]$ 使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{1+\theta_1^2}\int_0^{\theta_1}f(x)\,dx+f(\theta_1)\arctan\theta_1\right]\theta_3=\left[\frac{1}{1+\theta_2^2}\int_0^{\theta_2}f(x)\,dx+f(\theta_2)\arctan\theta_2\right](1-\theta_3).$$

证明 显然, 结构过于明显的构造

$$g(x)=\arctan x\int_0^x f(y)\,dy.$$

需要的就是

$$\frac{g(1)}{2}=g'(\theta_1)\theta_3=g'(\theta_2)(1-\theta_3). \tag{11.47}$$

由介值定理, 选取 $g(\theta_3)=\frac{g(1)}{2}$. 然后由拉格朗日中值定理, 存在 $\theta_1<\theta_3<\theta_2$, 使得

$$g'(\theta_2)=\frac{g(1)-g(\theta_3)}{1-\theta_3}=\frac{g(1)}{2(1-\theta_3)},\frac{g(\theta_3)-g(0)}{\theta_3-0}=\frac{g(\theta_3)}{\theta_3}=\frac{g(1)}{2\theta_3}=g'(\theta_1).$$

于是(11.47)成立.

例题 11.26 设 f,g 在 $[0,1]$ 可微且 $\int_0^1 f(x)\,dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx$, 证明存在 $\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$, 使得

$$f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]. \tag{11.48}$$

笔记 我们首先视 f 为未知函数, g 为已知函数, 我们解微分方程 $y'=g'[d-y]$ 得 $y=ce^{-g(x)}+d$, 即得构造函数

$$c(x)=[f(x)-f(\eta)]e^{g(x)}$$

.

证明 由积分条件, 我们知道 $\int_0^{\frac{2}{3}}f(x)\,dx=2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx$. 由第一积分中值定理11.3知存在 $\theta\in\left(0,\frac{2}{3}\right),\eta\in\left(\frac{2}{3},1\right)$, 使得

$$\frac{2}{3}f(\theta)=\int_0^{\frac{2}{3}}f(x)\,dx=2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx=\frac{2}{3}f(\eta).$$

于是构造 $c(x)=[f(x)-f(\eta)]e^{g(x)}$, 我们有

$$c'(x)=[f'(x)+g'(x)(f(x)-f(\eta))]e^{g(x)}.$$

由罗尔中值定理和 $c(\eta)=c(\theta)=0$, 我们知道存在 $\xi\in(\eta,\theta)$, 使得 $c'(\xi)=0$, 即(11.48)成立.

来看一种很无趣的需要自己猜的类型. 此类问题的核心是两个中值参数相互制约, 此时需要你自己复原中值参数.

例题 11.27 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 且 $f(0)=0$ 且 $f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1]$, 证明对任何 $\alpha>0$, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

笔记 实际出题中, 会故意隐去 $1-\xi$, 即证明存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使得

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}.$$

证明 不妨设 $f>0,\forall x\in(0,1]$, 对 $\alpha>0$, 令 $F(x)=f^\alpha(x)f(1-x)$, 于是

$$F(0)=F(1)=0.$$

由罗尔中值定理, 我们知道存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=af^{a-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^a(\xi)f'(1-\xi)=0,$$

于是

$$\alpha\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

我们完成了证明.

例题 11.28 设 f 在 $[a,b]$ 可微, 证明存在 $x_1,x_2,x_3\in(a,b)$, 使得

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=\left(b^2+a^2+ab\right)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}. \tag{11.49}$$

证明 注意到由柯西中值定理, 存在 $x_i,i=1,2,3$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2},\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2},\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1),$$

于是注意到

$$b^3-a^3=(b-a)\left(a^2+b^2+ab\right),$$

我们容易验证式(11.49).

例题 11.29 设 f 在 $[a,b]$ 可微且 $f(a)=f(b)=1$, 证明存在 $\theta,\eta\in(a,b)$ 使得

$$e^{\theta-\eta}\left[f(\theta)+f'(\theta)\right]=1. \tag{11.50}$$

笔记 由 $f+f'$ 联想构造 e^xf.

证明 设 $g(x)=e^xf(x)$, 则由拉格朗日中值定理知存在 $\theta,\eta\in(a,b)$, 使得

$$e^{\eta}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(\theta)=e^{\theta}\left[f(\theta)+f'(\theta)\right].$$

这就完成了证明.

例题 11.30 设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可微, 证明对任何 $n\in\mathbb{N}$, 存在 n 个互不相同的点 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\in(a,b)$, 使得

$$f'(\zeta_1)f'(\zeta_2)\cdots f'(\zeta_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n.$$

证明 反复运用 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n&=\frac{[f(b)-f(a)]^n-[f(a)-f(a)]^n}{(b-a)^n-(a-a)^n}\\&=\frac{f'(\zeta_1)[f(\zeta_1)-f(a)]^{n-1}}{(\zeta_1-a)^{n-1}},\zeta_1\in(a,b)\\&=\frac{f'(\zeta_1)f'(\zeta_2)[f(\zeta_2)-f(a)]^{n-2}}{(\zeta_2-a)^{n-2}},\zeta_2\in(a,\zeta_1)\\&\vdots\\&=f'(\zeta_1)f'(\zeta_2)\cdots f'(\zeta_n).\end{aligned}$$

例题 11.31 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b),0<a<b<\frac{\pi}{2}$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}. \tag{11.51}$$

证明 注意到等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f(b)-f(a)}{\cos a-\cos b}\cdot\tan\frac{a+b}{2}.$$

于是由 Cauchy 中值定理得

$$\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}=\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f(b)-f(a)}{\cos a-\cos b}\cdot\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}\tan\frac{a+b}{2},$$

这就证明了存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得(11.51)成立.

11.4 性态分析类

定理 11.3 (积分中值定理)

1. $f(x)\in R[a,b]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\zeta f(x)\,dx.$$
2. $f(x)\in R[a,b]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(b)\int_\zeta^b f(x)\,dx.$$
3. $f(x)\in R[a,b]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\zeta f(x)\,dx+g(b)\int_\zeta^b f(x)\,dx.$$
4. $f(x)\in R[a,b]$ 且不变号, $g(x)\in R[a,b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\eta\int_a^b f(x)\,dx.$$
5. $f(x)\in R[a,b]$ 且不变号, $g(x)\in C[a,b]$, 则存在 $\zeta\in(a,b)$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(\zeta)\int_a^b f(x)\,dx.$$
6. 若 (1),(2),(3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a,b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta\in(a,b)$.

♡

笔记 可以无脑直接使用而无需阅读证明. 如无必要, 第二积分中值定理尽可能使用闭区间版本.

证明 ♠,* 证明可见积分中值定理.

定理 11.4 (Hadamard 不等式)

设 f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 则
$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).\tag{11.52}$$

♡

笔记 一句话积累证明: 一边是区间再现, 一边是换元到区间 $[0,1]$.

证明 **Step 1** 事实上
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 f(a(1-t)+bt)\,dt\leqslant\int_0^1[(1-t)f(a)+tf(b)]\,dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Step 2 事实上
$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)\,dx\\&=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b[f(a+b-x)+f(x)]\,dx\\&\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

我们就证明了不等式(11.52).

来看一个考研数学真题:

例题 11.32 若 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数且 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)\,dx=1$, 证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$.

证明 若不然, 对任何 $x\in(0,1)$ 都有 $f''(x)\geqslant-2$, 于是 $f(x)+x^2$ 是 $[0,1]$ 的下凸函数. 于是由 Hadamard 不等

式11.4我们知道

$$\frac{4}{3}=\int_0^1\left[f(x)+x^2\right]dx\leqslant\frac{f(0)+0^2+f(1)+1^2}{2}=\frac{2}{2}=1,$$

矛盾! 现在存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)<-2$.

笔记 有同学可能不知道如何通过 $f''(x)+2\geqslant 0,\forall x\in(0,1)$ 来推 $f+x^2$ 在 $[0,1]$ 下凸. 实际上, 因为 $g=f+x^2\in C[0,1]$ 和 g 在 $(0,1)$ 下凸我们就有

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y),\forall x,y\in(0,1),\lambda\in[0,1].$$

上式中令 x 趋于 0 或者 1 也成立, 因此 g 在 $[0,1]$ 下凸.

定理 11.5 (达布中值定理)

设 $f\in D[a,b]$, 对任何介于 $f'(a),f'(b)$ 之间的 η, 存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\eta$ ♡

笔记 也称导数介值定理.

证明 和连续函数介值定理一样, 我们只需证明导数满足零点定理. 即不妨设 $f'(a)<0<f'(b)$, 去找 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=0$.

事实上由极限保号性和

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0,\ \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$$

我们知道存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x)<f(a),\forall x\in(a,a+\delta],f(x)<f(b),\forall x\in[b-\delta,b).$$

因此 f 最小值在内部取到, 此时由费马引理知最小值的的导数为 0, 从而证毕!

定理 11.6 (加强的罗尔中值定理)

(a): 设 $f\in D(a,b)$ 且在 $[a,b]$ 上 f 有介值性, 则若 $f(a)=f(b)$, 必然存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=0$.

(b): 设 $f\in C[a,+\infty)\bigcap D^1(a,+\infty)$ 满足 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 则存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$. ♡

笔记 一旦罗尔成立, 所有中值定理和插值定理都会有类似的结果, 可以具体情况具体分析.

证明 对于 (a): 不妨设 f 不恒为常数, 则可取 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)$, 不妨设 $f(x_0)>f(a)$, 则由 f 的介值性, 我们知道存在 $x_1\in(a,x_0),x_2\in(x_0,b)$, 使得

$$f(x_1)=\frac{f(a)+f(x_0)}{2},f(x_2)=\frac{f(b)+f(x_0)}{2}.$$

因为 $f(a)=f(b)$, 我们知道 $f(x_1)=f(x_2)$, 由罗尔中值定理可知道存在 $\theta\in(a,b)$, 使得 $f'(\theta)=0$. 这就完成了 (a) 的证明.

对于 (b): 若对任何 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(x)\neq 0$, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 严格单调, 不妨设为递增. 现在

$$f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),\forall x\geqslant a+1,$$

于是

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant f(a+1)>f(a),$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\theta\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\theta)=0$.

例题 11.33 设 f 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可微且不是线性函数, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\tag{11.53}$$

证明 考虑

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

则 $g(a)=g(b)=0$ 且 g 不是常值函数. 因 $g'\leqslant 0$ 恒成立会导致 g 在 $[a,b]$ 递减, 所以这不可能! 现在存在 $\xi\in(a,b)$

使得 $g'(\xi)>0$, 即(11.53)成立.

例题 11.34 导数内插

1. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微且
$$|f(x)|\leqslant M_0,|f''(x)|\leqslant M_2,\forall x\geqslant 0. \tag{11.54}$$
证明
$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{M_0M_2},\forall x>0. \tag{11.55}$$
2. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 二阶可微且不等式(11.54)对 $x\in\mathbb{R}$ 都成立, 则可以改进估计(11.55)为
$$|f'(x)|\leqslant \sqrt{2M_0M_2},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{11.56}$$
3. 设 $m\geqslant 2$, 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上 m 阶可导, 且记
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|=M_k,\forall k\in\mathbb{N}_0,x\in\mathbb{R}.$$
证明
$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{m}}M_m^{\frac{k}{m}},k=1,2,\cdots,m-1. \tag{11.57}$$

笔记 涉及任意点相关性质时, 我们可以用 Taylor 公式的另外一种写法:
$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}h^n.$$

证明

1. 不妨设 $M_0,M_2>0$, 因为其余情况是平凡的. 待定 $h>0$, 然后由 Taylor 中值定理, 我们有
$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\theta)}{2}h^2,\theta\in[x,x+h]. \tag{11.58}$$
于是由(11.58)得
$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}h.$$
于是运用条件(11.54)得
$$|f'(x)|\leqslant\frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h}+\frac{|f''(\theta)|}{2}h\leqslant\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h.$$
为了使上式得到的估计尽可能小, 因此我们需要求上式右边的最小值, 即
$$\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h\geqslant 2\sqrt{\frac{2M_0}{h}\cdot\frac{M_2}{2}h}=2\sqrt{M_0M_2},$$
当且仅当 $h=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}>0$ 时等号成立. 于是我们得到不等式(11.55)成立.
2. 不妨设 $M_0,M_2>0$, 因为其余情况是平凡的. 因为定义域的扩大, 于是我们可以进一步加强不等式(11.55)为不等式(11.56). 使用的标准技巧, 即式(11.58)的对偶式[8]:
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2,\theta\in[x-h,x]. \tag{11.59}$$
将式(11.58)减去(11.59)得
$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+[f''(\theta)-f''(\xi)]\frac{h^2}{2}.$$
现在
$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-[f''(\theta)-f''(\xi)]\frac{h}{4}.$$
于是利用不等式(11.54)得
$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{2h}+\frac{2M_2h}{4}=\frac{M_0}{h}+\frac{M_2h}{2}.$$

[8]这里仍然待定的 $h>0$.

同样的为了上式右边尽可能小, 我们取最小值得

$$\frac{M_0}{h}+\frac{M_2h}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{h}\cdot\frac{M_2h}{2}}=\sqrt{2M_0M_2},$$

当且仅当 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}>0$ 时等号成立. 这就证明了不等式(11.56).

3. 当 $m=2$, 由本题第二问知不等式(11.57)成立. 现在假定对 $m\geqslant 2$ 有不等式(11.57)成立. 考虑 $k=1$ 即得

$$M_1\leqslant 2^{\frac{m-1}{2}}M_0^{1-\frac{1}{m}}M_m^{\frac{1}{m}}. \tag{11.60}$$

把 f' 看成 f 用不等式(11.57)得

$$M_{k+1}\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_1^{1-\frac{k}{m}}M_{m+1}^{\frac{k}{m}},k=1,2,\cdots,m-1. \tag{11.61}$$

在(11.61)代入 $k=m-1$ 得

$$M_m\leqslant 2^{\frac{m-1}{2}}M_1^{\frac{1}{m}}M_{m+1}^{1-\frac{1}{m}}.$$

继续运用不等式(11.60)得

$$M_m\leqslant 2^{\frac{m-1}{2}}\left(2^{\frac{m-1}{2}}M_0^{1-\frac{1}{m}}M_m^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m}}M_{m+1}^{1-\frac{1}{m}}\Rightarrow M_m\leqslant 2^{\frac{m}{2}}M_0^{\frac{1}{m+1}}M_{m+1}^{\frac{m}{m+1}}.$$

由上式和归纳假设(11.57), 对 $k=1,2,\cdots,m$, 我们有

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{m}}M_m^{\frac{k}{m}}\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{m}}\left(2^{\frac{m}{2}}M_0^{\frac{1}{m+1}}M_{m+1}^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{k}{m}}=2^{\frac{k(m+1-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{m+1}}M_{m+1}^{\frac{k}{m+1}},$$

这就证明了对任何 $m\geqslant 2$, 都有不等式(11.57)成立, 我们完成了证明.

引理 11.1

设 $f\in C^m[0,+\infty)$ 且

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty,\int_0^\infty \left|f^{(m)}(x)\right|^2\mathrm{d}x<\infty,$$

则

$$\int_0^\infty \left|f^{(j)}(x)\right|^2\mathrm{d}x<\infty,\forall j=1,2,\cdots,m-1. \tag{11.62}$$

♡

证明 对 $x,k\geqslant 0$, 由 Taylor 公式积分余项得

$$f(x+k)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{k^j}{j!}f^{(j)}(x)+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^k(k-t)^{m-1}f^{(m)}(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

现在

$$\begin{pmatrix}1&\frac{0^1}{1!}&\cdots&\frac{0^{m-1}}{(m-1)!}\\ \frac{1^0}{0!}&\frac{1^1}{1!}&\cdots&\frac{1^{m-1}}{(m-1)!}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{(m-1)^0}{0!}&\frac{(m-1)^1}{1!}&\cdots&\frac{(m-1)^{m-1}}{(m-1)!}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x)\\ f'(x)\\ \vdots\\ f^{(m-1)}(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f(x)-\frac{\int_0^0(1-t)^{m-1}f^{(m)}(x+t)\mathrm{d}t}{(m-1)!}\\ f(x+1)-\frac{\int_0^1(1-t)^{m-1}f^{(m)}(x+t)\mathrm{d}t}{(m-1)!}\\ \vdots\\ f^{(m-1)}(x)-\frac{\int_0^{m-1}(m-1-t)^{m-1}f^{(m)}(x+t)\mathrm{d}t}{(m-1)!}\end{pmatrix}$$

注意

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{0^1}{1!} & \cdots & \frac{0^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{1^0}{0!} & \frac{1^1}{1!} & \cdots & \frac{1^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(m-1)^0}{0!} & \frac{(m-1)^1}{1!} & \cdots & \frac{(m-1)^{m-1}}{(m-1)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0^1 & \cdots & 0^{m-1} \\ 1^0 & 1^1 & \cdots & 1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1)^0 & (m-1)^1 & \cdots & (m-1)^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} \end{pmatrix}$$

是可逆的, 所以我们可以解出

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

注意到对 $k=1,2,\cdots,m-1$ 有

$$\int_0^\infty |f(x+k)|^2 \mathrm{d}x = \int_k^\infty |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty,$$

以及

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left| \frac{\int_0^k (k-t)^{m-1} f^{(m)}(x+t)\,\mathrm{d}t}{(m-1)!} \right|^2 \mathrm{d}x \\ \leqslant & \frac{k^{2m-2}}{[(m-1)!]^2} \int_0^\infty \left| \int_0^k f^{(m)}(x+t)\,\mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x \\ \leqslant & \frac{k^{2m-1}}{[(m-1)!]^2} \int_0^\infty \left(\int_0^k \left| f^{(m)}(x+t) \right|^2 \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ = & \frac{k^{2m-1}}{[(m-1)!]^2} \int_0^k \left(\int_t^\infty \left| f^{(m)}(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ \leqslant & \frac{k^{2m}}{[(m-1)!]^2} \int_0^\infty \left| f^{(m)}(x) \right|^2 \mathrm{d}x < \infty, \end{aligned}$$

显然就有(11.62)成立.

例题 11.35 例题11.34的一二问的系数不可改进.

证明 不妨只考虑 $M_0, M_2 > 0$, 其余情况是平凡的.

1. 取

$$f(x) \triangleq \begin{cases} M_0 \left(1 - 2\sqrt{\frac{M_2}{M_0}} x + \frac{M_2}{2M_0} x^2\right); & 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}; \\ -M_0 \cos\left(\sqrt{\frac{M_2}{M_0}} x - 2\right) & x > 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \end{cases},$$

则

$$f \in C^2[0,+\infty) \text{ 且 } \sup_{x\geqslant 0} |f(x)| = M_0, \sup_{x\geqslant 0} |f'(x)| = 2\sqrt{M_0 M_2}, \sup_{x\geqslant 0} |f''(x)| = M_2,$$

因此例题11.34第一问上界不可改进.

* 设 $\delta\in\left(0,\sqrt{2}\right)$, 考虑

$$f_\delta\left(x\right)\triangleq\begin{cases}\frac{\delta^2}{10}+\left(\sqrt{2}-\frac{3\delta}{8}\right)x-\frac{x^3}{4\delta}+\frac{x^5}{40\delta^3}, & x\in[0,\delta]\\ -\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x, & x\in\left[\delta,2\sqrt{2}-\delta\right]\\ 4+\frac{\delta^2}{10}-\sqrt{2}x-\frac{3\sqrt{2}\delta}{4}+\frac{3\delta x}{8}+\frac{\left(x-2\sqrt{2}\right)^3}{4\delta}-\frac{\left(x-2\sqrt{2}\right)^5}{40\delta^3}, & x\in[2\sqrt{2}-\delta,2\sqrt{2}+\delta]\\ \frac{1}{2}x^2-3\sqrt{2}x+8+\frac{\delta^2}{5}, & x\in[2\sqrt{2}+\delta,4\sqrt{2}-\delta]\\ -8+\frac{\delta^2}{10}+\sqrt{2}x+\frac{3\sqrt{2}\delta}{2}-\frac{3\delta x}{8}-\frac{\left(x-4\sqrt{2}\right)^3}{4\delta}+\frac{\left(x-4\sqrt{2}\right)^5}{40\delta^3}, & x\in[4\sqrt{2}-\delta,4\sqrt{2}]\end{cases}$$

并作周期 $4\sqrt{2}$ 延拓. 再考虑

$$\widetilde{f}_\delta\left(x\right)\triangleq M_0f_\delta\left(\sqrt{\frac{M_2}{M_0}}x\right),$$

我们得

$$\widetilde{f}_\delta\in C^2\left(\mathbb{R}\right),\sup\left|\widetilde{f}_\delta\right|=M_0,\sup\left|\widetilde{f}_\delta{}'\right|=\left(\sqrt{2}-\frac{3\delta}{8}\right)\sqrt{M_0M_2},\sup\left|\widetilde{f}_\delta{}''\right|=M_2.$$

因此让 $\delta\to0^+$ 即得 $\sqrt{2M_0M_2}$ 是最佳的.

例题 11.36 设 $f\in D^3\left(\mathbb{R}\right)$ 使得 $f\left(x\right),f'''\left(x\right)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 证明 $f'\left(x\right),f''\left(x\right)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

证明 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}f\left(x+1\right)&=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+\frac{1}{2}f''\left(x\right)+\frac{1}{6}f'''\left(\theta_1\right);\\ f\left(x+2\right)&=f\left(x\right)+2f'\left(x\right)+2f''\left(x\right)+\frac{4}{3}f'''\left(\theta_2\right).\end{aligned}\tag{11.63}$$

设

$$\left|f\left(x\right)\right|,\left|f'''\left(x\right)\right|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R},$$

我们由(11.63)解出 f'' 有

$$\left|f''\left(x\right)\right|=\left|f\left(x+2\right)-2f\left(x+1\right)+f\left(x\right)-\frac{4}{3}f'''\left(\theta_2\right)+\frac{1}{3}f'''\left(\theta_1\right)\right|\leqslant\frac{17}{3}M.$$

由(11.63)解出 f' 有

$$\left|f'\left(x\right)\right|=\frac{1}{2}\left|f\left(x+2\right)-4f\left(x+1\right)+3f\left(x\right)+\frac{2}{3}f'''\left(\theta_1\right)-\frac{4}{3}f'''\left(\theta_2\right)\right|\leqslant5M.$$

于是我们证明了 $f'\left(x\right),f''\left(x\right)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

来看一个变式训练.

✍ **练习 11.7** 设 $f\in C^2\left[a,b\right],\left|f\left(x\right)\right|\leqslant A,\left|f''\left(x\right)\right|\leqslant B$, 且存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $\left|f'\left(x_0\right)\right|\leqslant D$, 证明

$$\left|f'\left(x\right)\right|\leqslant2\sqrt{AB}+D,\forall x\in\left[a,b\right].$$

证明 首先对 $x,x+h\in[a,b]$, 我们知道由 Taylor 中值定理, 知道存在 $\theta_{x,h}\in[a,b]$, 使得

$$f\left(x+h\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)h+\frac{f''\left(\theta_{x,h}\right)}{2}h^2,$$

这给出了

$$f'\left(x\right)=\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}-\frac{f''\left(\theta_{x,h}\right)}{2}h.$$

因此

$$\left|f'\left(x\right)\right|\leqslant\frac{2A}{\left|h\right|}+\frac{B}{2}\left|h\right|,\tag{11.64}$$

对于 $b-x\geqslant2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 或$x-a\geqslant2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 那么可分别在(11.64)令 $h=2\sqrt{\frac{A}{B}}$ 或者 $h=-2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 此时就有 $\left|f'\left(x\right)\right|\leqslant2\sqrt{AB}$.

若 $b-2\sqrt{\frac{A}{B}}<x<a+2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 容易知道 $\left|x-x_0\right|\leqslant\max\left\{x-a,b-x\right\}<2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 则由拉格朗日中值定理, 存

在 $\zeta_x \in [a,b]$, 使得

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(\zeta_x)(x - x_0),$$

于是就有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leqslant |f'(x_0)| + |f''(\zeta_x)| \cdot |x - x_0| \\ &\leqslant D + B \cdot |x - x_0| \\ &\leqslant 2\sqrt{AB} + D. \end{aligned}$$

我们完成了证明.

例题 11.37 导数极限内插 设 $n \geqslant 2$ 且 $f \in D^n[0,+\infty)$, 若

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0,$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

证明 **Method 1** 由 Taylor 中值定理, 注意到

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(\theta)\frac{h^n}{n!}.$$

于是

$$f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \cdots + f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = f(x+h) - f(x) - f^{(n)}(\theta)\frac{h^n}{n!}.$$

现在取 $n-1$ 个不同的 $h > 0$, 例如 $h = 1,2,\cdots,n-1$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & \cdots & 1^{n-1} \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(x) \\ \frac{f''(x)}{2} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) - f^{(n)}(\theta_1)\frac{1^n}{n!} \\ f(x+2) - f(x) - f^{(n)}(\theta_2)\frac{2^n}{n!} \\ \vdots \\ f(x+n-1) - f(x) - f^{(n)}(\theta_{n-1})\frac{(n-1)^n}{n!} \end{pmatrix},$$

注意到系数矩阵行列由 Vandemonde 行列式可以算出非 0, 故

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ \frac{f''(x)}{2} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1^2 & \cdots & 1^{n-1} \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) - f^{(n)}(\theta_1)\frac{1^n}{n!} \\ f(x+2) - f(x) - f^{(n)}(\theta_2)\frac{2^n}{n!} \\ \vdots \\ f(x+n-1) - f(x) - f^{(n)}(\theta_{n-1})\frac{(n-1)^n}{n!} \end{pmatrix},$$

有题目条件即得

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

Method 2(♠) 由导数内插11.34, 我们知道可对 $[c,+\infty)$ 类似的对每个 $k = 1,2,\cdots,n-1$ 建立不等式(11.57), 并且存在与 c 无关的常数 C, 使得

$$\sup_{x\geqslant c}\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant C\left(\sup_{x\geqslant c}|f(x)|\right)^{1-\frac{k}{n}} \cdot \left(\sup_{x\geqslant c}\left|f^{(n)}(x)\right|\right)^{\frac{k}{n}}.$$

于是

$$0 \leqslant \lim_{c\to+\infty}\sup_{x\geqslant c}\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \lim_{c\to+\infty} C\left(\sup_{x\geqslant c}|f(x)|\right)^{1-\frac{k}{n}} \cdot \left(\sup_{x\geqslant c}\left|f^{(n)}(x)\right|\right)^{\frac{k}{n}} = 0.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

例题 11.38 设 $k\in\mathbb{N}, f\in D^k(0,+\infty)$ 且对某个 $\alpha\in\mathbb{R}$ 成立

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f^{(k)}(x)=0.$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f^{(i)}(x)=0, i=0,1,2,\cdots,k.$$

证明 由 Taylor 中值定理, 对 $x,h>0$, 存在 $\theta\in(x,x+h)$ 使得

$$x^\alpha f(x+h)=x^\alpha f(x)+x^\alpha f'(x)h+\cdots+x^\alpha f^{(k)}(\theta)\frac{h^k}{k!}.$$

于是

$$x^\alpha f'(x)h+x^\alpha f''(x)\frac{h^2}{2}+\cdots+x^\alpha f^{(k-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}=x^\alpha f(x+h)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta)\frac{h^k}{k!}.$$

现在取 $n-1$ 个不同的 $h>0$, 例如 $h=1,2,\cdots,k-1$, 则

$$\begin{pmatrix}1&1^2&\cdots&1^{k-1}\\2&2^2&\cdots&2^{k-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k-1&(k-1)^2&\cdots&(k-1)^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^\alpha f'(x)\\x^\alpha\frac{f''(x)}{2}\\\vdots\\x^\alpha\frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^\alpha f(x+1)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta_1)\frac{1^k}{k!}\\x^\alpha f(x+2)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta_2)\frac{2^k}{k!}\\\vdots\\x^\alpha f(x+k-1)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta_{k-1})\frac{(k-1)^k}{k!}\end{pmatrix},$$

注意到系数矩阵行列由 Vandemonde 行列式可以算出非 0, 故

$$\begin{pmatrix}x^\alpha f'(x)\\x^\alpha\frac{f''(x)}{2}\\\vdots\\x^\alpha\frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1^2&\cdots&1^{k-1}\\2&2^2&\cdots&2^{k-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k-1&(k-1)^2&\cdots&(k-1)^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x^\alpha f(x+1)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta_1)\frac{1^k}{k!}\\x^\alpha f(x+2)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta_2)\frac{2^k}{k!}\\\vdots\\x^\alpha f(x+k-1)-x^\alpha f(x)-x^\alpha f^{(k)}(\theta_{k-1})\frac{(k-1)^k}{k!}\end{pmatrix}.$$

又由

$$x<\theta_i<x+i, i=1,2,\cdots,k-1$$

夹逼可得

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f(\theta_i)=\lim_{x\to+\infty}\theta_i^\alpha f(\theta_i)=0, i=1,2,\cdots,k-1,$$

即得

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f^{(i)}(x)=0, i=0,1,2,\cdots,k.$$

例题 11.39

1. 设 $f\in C[0,\pi]\bigcap D(0,\pi)$ 满足

$$\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0. \tag{11.65}$$

证明存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

2. 设 $f\in C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 满足

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0. \tag{11.66}$$

证明: f 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 至少有三个互不相同的零点.

笔记 此类给出积分等式的问题, 往往就是寻求给定积分等式的线性组合来实现目标. 即本题我们要寻求合适的 $a,b\in\mathbb{R}$, 考虑积分

$$\int_0^\pi f(x)(a\cos x+b\sin x)dx=0.$$

一句话证明本题 1 问, 就是寻求合适的 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $a\cos x+b\sin x$ 和 f 的符号一致. 第 2 问可以待定系数解方程来得到线性组合.

证明

1. 我们只需断言 f 在 $[0,\pi]$ 至少有两个不相同的零点, 之后由罗尔定理就给出了存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

   由 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$, 积分中值定理告诉我们 f 必然在 $(0,\pi)$ 有一个零点 x_0. 若 f 在 $[0,\pi]$ 只有一个零点, 则 f 在 $[0,x_0),(x_0,\pi]$ 不同号 (否则 f 不变号, 则由 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$ 知 $f=0$, 矛盾!). 不妨设

   $$f(x)<0,\forall x\in[0,x_0),f(x)>0,\forall x\in(x_0,\pi].$$

   于是可取

   $$a\sin x+b\cos x=\sin(x-x_0).$$

   此时就有

   $$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx=0.$$

   结合

   $$f(x)\sin(x-x_0)>0,\forall x\in[0,\pi]\setminus\{x_0\},$$

   即 $f(x)=0,\forall x\in[0,\pi]$, 矛盾! 这就完成例题11.39的证明.

2. 不妨设 f 不恒为 0, 由积分中值定理11.3和(11.66)知 f 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 至少有一个零点且变号.

   若 f 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 只变号一次, 设在 x_1 变号, 则 f 在 x_1 两侧符号相反. 由(11.66)得

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin(x-x_1)\,\mathrm{d}x=0.$$

   但是 $f(x)\sin(x-x_1)$ 不变号, 这就推出 f 恒为 0 而矛盾!

   若 f 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 只变号两次, 设变号处为 $x_1<x_2$, 考虑

   $$g(x)\triangleq\sin x-\frac{\sin x_2-\sin x_1}{\cos x_2-\cos x_1}\cos x+\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_2-\cos x_1},x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

   注意到

   $$g'(x)=\cos x+\frac{\sin x_2-\sin x_1}{\cos x_2-\cos x_1}\sin x=\frac{\sin x_2-\sin x_1}{\cos x_2-\cos x_1}\cos x\left(\tan x-\frac{\cos x_1-\cos x_2}{\sin x_2-\sin x_1}\right),$$

   我们知 g' 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 有且只有一个零点. 注意 $g(x_1)=g(x_2)=0$, 我们由罗尔中值定理知道 g' 在 (x_1,x_2) 有零点, 因此 g 当且仅当在 x_1,x_2 变号. 现在由(11.66)得

   $$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

   但是 fg 不变号, 故 $f=0$, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 f 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 至少有三个互不相同的零点.

类似还有数学类竞赛真题.

例题 11.40 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可微, 且对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $g'(x)\neq0$, 又

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=0. \tag{11.67}$$

证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 由 $\int_a^b f(x)dx=0$ 和积分中值定理11.3知 f 在 (a,b) 至少有一个零点. 若 f 在 (a,b) 只有一个零点 c, 则 f 变号. 由(11.67)知

$$\int_a^b[g(x)-g(c)]f(x)dx=0.$$

注意导数介值性给出 g 严格单调, 故上式被积函数一定不变号. 这给出了 $f\equiv0$ 而矛盾! 故 f 至少两个不同的零点.

进一步, 由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 这就完成了证明.

例题 11.41 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 满足 $f(0)=f(1)=0$, 对任何 $\eta\in[0,1]$, 证明存在不相同的 $x_1,x_2\in(0,1)$ 使得

$$\eta f'(x_1)+(1-\eta)f'(x_2)=0.$$

证明 **Method 1**

笔记 证明的想法即待定 $c,d\in(0,1)$ 使得

$$\eta\frac{f(c)}{c}+(1-\eta)\frac{f(d)}{d-1}=0.$$

然后用拉格朗日中值定理得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)}{c},f'(x_2)=\frac{f(d)}{d-1}.$$

然后得

$$\eta f'(x_1)+(1-\eta)f'(x_2)=0.$$

为此可以借助函数性态分析的手法.

当 $\eta=0,1$, 则由罗尔中值定理容易得到. 若 f 在 $(0,1)$ 有零点 x_0, 则取 $c=d=x_0$ 即可.

问题的难点和重点是假设 f 在 $(0,1)$ 没有零点且 $\eta\in(0,1)$. 考虑

$$g(x,y)=\eta(y-1)f(x)+(1-\eta)xf(y)\in C\left([0,1]^2\right),$$

则我们有

$$g(x,0)g(1,y)=-\eta(1-\eta)f(x)f(y)<0.$$

即 g 在正方形 $[0,1]^2$ 的两个相邻边界上不同号, 因此 g 在 $(0,1)^2$ 上同号的话由连续函数保号性会矛盾! 所以 g 在 $(0,1)^2$ 必然变号, 从而必有零点 (c,d), 从而

$$\eta\frac{f(c)}{c}+(1-\eta)\frac{f(d)}{d-1}=0.$$

然后用拉格朗日中值定理得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)}{c},f'(x_2)=\frac{f(d)}{d-1}.$$

然后得

$$\eta f'(x_1)+(1-\eta)f'(x_2)=0.$$

如果 $x_1=x_2$, 则

$$\eta f'(x_1)+(1-\eta)f'(x_2)=f'(x_1)=0\Rightarrow f(c)=0,$$

这和假设 f 在 $(0,1)$ 没有零点矛盾! 这就证明了 $x_1\neq x_2$.

Method 2 当 $\eta\in(0,1)$, 注意到 $g(\eta,\eta)=0$, 于是我们直接找到了 c,d.

例题 11.42 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明 :

- 存在唯一的 $\xi\in(0,1)$, 使得
$$\int_0^{\xi}e^{f(t)}dt=\int_{\xi}^1e^{-f(t)}dt.$$
- 对任何大于 1 的正整数 n, 存在唯一的 $\xi_n\in(0,1)$, 使得
$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n}e^{f(t)}dt=\int_{\xi_n}^1e^{-f(t)}dt,$$
并求极限
$$\lim_{n\to\infty}\xi_n.$$

证明 对于第一点, 令

$$F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt-\int_x^1 e^{-f(t)}dt,$$

有

$$F(0)=-\int_0^1 e^{-f(t)}dt<0, F(1)=\int_0^1 e^{f(t)}dt>0, F'(x)=e^{f(x)}+e^{-f(x)}>0,$$

这就说明了存在唯一的 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^\xi e^{f(t)}dt=\int_\xi^1 e^{-f(t)}dt.$$

对于第二点, 令

$$F_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^x e^{f(t)}dt-\int_x^1 e^{-f(t)}dt,$$

有

$$F_n\left(\frac{1}{n}\right)=-\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{-f(t)}dt<0, F_n(1)=\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{f(t)}dt>0, F_n'(x)=e^{f(x)}+e^{-f(x)}>0,$$

因此存在唯一的 $\xi_n\in(0,1)$, 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\xi_n} e^{f(t)}dt=\int_{\xi_n}^1 e^{-f(t)}dt,$$

考虑任一 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{n_k}=\alpha\in[0,1]$, 由连续性知

$$\int_0^\alpha e^{f(t)}dt=\lim_{k\to\infty}\int_{\frac{1}{n_k}}^{\xi_{n_k}} e^{f(t)}dt=\lim_{k\to\infty}\int_{\xi_{n_k}}^1 e^{-f(t)}dt=\int_\alpha^1 e^{-f(t)}dt,$$

结合第一点的结论, 我们有 $\alpha=\xi$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi.$$

我们完成了证明.

来看一个丘赛题

例题 11.43 设 $f_i(x)\in C[0,1], f_i(x)>0, i=1,2,\cdots,n$, 证明 : 存在 $\zeta\in[0,1]$, 使得

$$\prod_{i=1}^n f_i(\zeta)\leqslant\prod_{i=1}^n\int_0^1 f_i(x)\,dx.$$

证明 利用均值不等式, 我们有

$$\int_0^1\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n\frac{f_i(x)}{\int_0^1 f_i(x)\,dx}}dx\leqslant\int_0^1\frac{\sum\limits_{i=1}^n\frac{f_i(x)}{\int_0^1 f_i(x)dx}}{n}dx=1,$$

再由积分中值定理, 存在 $\zeta\in[0,1]$, 有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n\frac{f_i(\zeta)}{\int_0^1 f_i(x)\,dx}}=\int_0^1\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n\frac{f_i(x)}{\int_0^1 f_i(x)\,dx}}dx,$$

从而

$$\prod_{i=1}^n f_i(\zeta)\leqslant\prod_{i=1}^n\int_0^1 f_i(x)\,dx.$$

我们完成了证明.

例题 11.44 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b)$ 满足

$$f(b)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx.$$

证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 若不存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f'(x)=0$. 则 f 在 $[a,b]$ 严格单调. 注意到若 f 严格递增, 则

$$f(b)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,dx<\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

矛盾! 若 f 严格递减, 则

$$f(b)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,dx>\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

矛盾! 故明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

例题 11.45 设 $f(x),g(x),h(x)\in C[0,1],\int_c^d f(x)\,dx=0,0\leqslant c<d\leqslant 1$. 如果存在 $x_0\in(0,1)\setminus(c,d)$, 使得 $g(x_0)\neq h(x_0)$, 证明 : 存在互不相同的 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得

$$g(\zeta)f(\eta)=h(\eta)f(\zeta).\tag{11.68}$$

证明 假设要证的不成立, 构造

$$F(x,y)=g(x)f(y)-h(y)f(x)\in C\left([0,1]^2\right).$$

于是有

$$\int_c^d\int_c^d F(x,y)\,dxdy=0.$$

于是 $F(x,y)$ 在区域 $\left\{(x,y)\in(0,1)^2:y>x\right\}$, 和区域 $\left\{(x,y)\in(0,1)^2:y<x\right\}$ 都不变号, 这暗示 $F(x,x)=0,\forall x\in[0,1]$, 因此

$$[g(x)-h(x)]f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

因此 $f(x_0)=0$, 结合积分中值定理11.3,$f(x)$ 在 (c,d) 还有零点. 把这两个零点分别看作 η,ζ 有(11.68)成立, 从而是一个矛盾! 我们完成了证明.

例题 11.46 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1),c\in(0,1)$, 证明存在 $\eta\in(0,1),\xi\in[0,1]$, 使得

$$2\eta f(1)+\left(c^2-1\right)f'(\eta)=f(\xi).\tag{11.69}$$

证明 考虑 $g(x)=x^2f(1)+\left(c^2-1\right)f(x)$, 我们发现

$$g(1)=c^2f(1),g(0)=\left(c^2-1\right)f(0).$$

于是由拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\eta\in(0,1)$, 使得

$$g(1)-g(0)=g'(\eta)=c^2f(1)+\left(1-c^2\right)f(0).\tag{11.70}$$

一方面

$$\begin{aligned}c^2f(1)+\left(1-c^2\right)f(0)&\leqslant c^2\max_{[0,1]}f+\left(1-c^2\right)\max_{[0,1]}f=\max_{[0,1]}f\\c^2f(1)+\left(1-c^2\right)f(0)&\geqslant c^2\min_{[0,1]}f+\left(1-c^2\right)\min_{[0,1]}f=\min_{[0,1]}f\end{aligned}.$$

于是由介值定理知存在 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$c^2f(1)+\left(1-c^2\right)f(0)=f(\xi).$$

结合(11.70), 这就证明了(11.69).

来看第九届非数学类决赛真题.

例题 11.47 $f\in C(0,1)$ 且存在互不相同的 $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$ 满足

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=b.\tag{11.71}$$

证明对任何 $\lambda\in(a,b)$, 存在互不相同的 $x_5,x_6\in(0,1)$, 使得 $\lambda=\frac{f(x_6)-f(x_5)}{x_6-x_5}$.

证明 考虑 $g(x)=f(x)-\lambda x$, 问题等价于 g 在 $(0,1)$ 不是单射. 又由命题12.2知只需证明 g 非严格单调.

事实上, 不妨设 $x_2>x_1,x_4>x_3$, 则由

$$[g(x_2)-g(x_1)][g(x_4)-g(x_3)]=(a-\lambda)(b-\lambda)(x_2-x_1)(x_4-x_3)<0$$

知 g 非严格单调. 因此 g 在 $(0,1)$ 不是单射.

下面问题可以视为拉格朗日中值定理的逆定理, 他也是四川大学的数学分析考研真题.

例题 11.48 设 $f\in D^2(a,b),\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)\neq 0$. 证明: 存在 $a<x_1<x_2<b$ 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi). \tag{11.72}$$

证明 考虑 $g(x)\triangleq f(x)-f'(\xi)x$, 问题等价于 g 在 (a,b) 不是单射. 又由命题12.2知只需证明 g 非严格单调.

注意到

$$g'(\xi)=0,g''(\xi)=f''(\xi)\neq 0,$$

我们知道 ξ 是 g 严格极值点, 于是 g 非严格单调, 从而存在 $a<x_1<x_2<b$ 使得(11.72)成立, 这就完成了证明.

作为一个应用, 来看数学类当年一个真题.

例题 11.49 设 $f(x)=\ln\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$, 证明对 $\xi\in(-\infty,0)$, 存在 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

证明 设 $g(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$, 然后

$$\begin{aligned}f''(x)&=\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g''(x)g(x)-[g'(x)]^2}{g^2(x)}\\&=\frac{1}{g^2(x)}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n}\right)^2\right]\\&\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant}0,\end{aligned}$$

这里等号成立当且仅当 $\frac{e^{\frac{nx}{2}}}{n}=ce^{\frac{nx}{2}},n=1,2,\cdots$, 这不可能, 于是 $f''(x)>0$. 现在由例题11.48得存在 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

例题 11.50 设 $a>0$ 为常数, f 在 $[-2a,2a]$ 上二阶可微且

$$f(0)=a,f(a)=b,f'(0)=-1,|f''(x)|\leqslant\frac{1}{4a},\forall x\in[-2a,2a].$$

证明 $|f(a+b)|\leqslant\frac{17}{512}a$.

证明 首先我们由 Hermite 插值定理11.1, 我们知道存在 $\theta\in(0,a)$, 使得

$$f''(\theta)=\left[\frac{b}{a^2}x^2-x+a\right]''|_{x=\theta}=\frac{2b}{a^2},$$

于是我们有

$$\left|\frac{2b}{a^2}\right|\leqslant\frac{1}{4a}\Rightarrow|b|\leqslant\frac{a}{8}. \tag{11.73}$$

由拉格朗日插值定理11.1, 我们知道对每个 $x\in[-2a,2a]$, 都存在 $\xi\in(-2a,2a)$, 使得

$$f(x)=a-x+\frac{b}{a}x+\frac{f''(\xi)}{2}x(x-a).$$

上式带入 $x=a+b$ 得

$$f(a+b)=\frac{b^2}{a}+\frac{f''(\xi)}{2}(a+b)b,$$

因此由(11.73)得

$$|f(a+b)|\leqslant\left(\frac{a}{8}\right)^2\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4a}\cdot\left(a+\frac{a}{8}\right)\cdot\frac{a}{8}=\frac{17}{512}a.$$

例题 11.51 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且存在 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 使得 $a<c$ 和

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0,\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(cx+d\right)\right]=0. \tag{11.74}$$

证明: 对任何 $\lambda\in(a,c)$, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f'(\xi)=\lambda$.

证明 如果对任何 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $f'(x)\neq\lambda$, 那么由导函数有介值性[9]不妨设 $f'\left(x\right)>\lambda,\forall x\in\mathbb{R}$.

注意到由(11.74)知

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=a,\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=c.$$

由上下极限的洛必达法则13.11, 我们知道

$$\underline{\lim_{x\to-\infty}}\frac{f'\left(x\right)}{1}\leqslant\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x},\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f'\left(x\right)}{1}\geqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x},$$

于是这和 $f'\left(x\right)>\lambda$ 矛盾! 我们完成了证明.

例题 11.52 设 f 在 $[a,b]$ 可微且在 (a,b) 内导数有零点, 证明:

1. 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得
$$f'\left(\theta\right)=\frac{f\left(\theta\right)-f\left(a\right)}{b-a}. \tag{11.75}$$
2. 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$f'\left(\xi\right)=\left[f\left(\xi\right)-f\left(a\right)\right]\left(b-a\right). \tag{11.76}$$
3. 设 $f\in D^1\left[a,b\right]$ 且满足 $f'\left(a\right)=f'\left(b\right)$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(\xi\right)-f\left(a\right)}{\xi-a}.$$

证明 设 $f'(c)=0$,

1. 构造函数 $g\left(x\right)=\frac{f(x)-f(a)}{e^{\frac{x}{b-a}}}$, 则
$$g'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{x}{b-a}}}.$$
现在
$$g'\left(c\right)=\frac{-\frac{f(c)-f(a)}{b-a}}{e^{\frac{c}{b-a}}},g\left(a\right)=0.$$
若 $g'(c)=0$, 就取 $\theta=c$. 若 $g'(c)>0$, 则 $f(c)<f(a)$, 于是 $g(c)<0$, 从而在 c 的左邻域内有
$$g\left(x\right)<g\left(c\right)<0.$$
也就是在 $[a,c]$ 内部 g 取得最小值. 自然存在 $\theta\in(a,b)$ 使得 $g'\left(\theta\right)=0$. 于是就有(11.75)成立. 当 $g'\left(c\right)<0$ 是类似的. 我们完成了证明.
2. 构造函数 $h\left(x\right)\triangleq\left[f\left(x\right)-f\left(a\right)\right]e^{-(b-a)x}$, 则
$$h'\left(x\right)=\left\{f'\left(x\right)-\left(b-a\right)\left[f\left(x\right)-f\left(a\right)\right]\right\}e^{-(b-a)x}.$$
若 $t\in(a,b]$ 使得 $f\left(t\right)=f\left(a\right)$, 则由 $h\left(a\right)=h\left(t\right)=0$ 和罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$, 使得 $h'\left(\xi\right)=0$, 即(11.76)成立.
若对 $x\in(a,b]$ 时 $f\left(x\right)>f\left(a\right)$, 则
$$h(a)=0,h\left(c\right)=\left[f\left(c\right)-f\left(a\right)\right]e^{-c(b-a)}>0,h'\left(c\right)=-\left(b-a\right)\left[f\left(c\right)-f\left(a\right)\right]e^{-c(b-a)}<0.$$
于是类似第 1 问得 h 在 (a,c) 取得极大值, 即得 $\xi\in(a,c)$, 使得 $h'\left(\xi\right)=0$, 这也就是(11.76)成立.
类似的可以讨论 $f\left(x\right)<f\left(a\right),\forall x\in(a,b]$ 的情况, 我们完成了证明.

[9]即达布中值定理11.5.

3. 设

$$H(x) \triangleq \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x \in (a,b] \\ f'(a), & x = a \end{cases}.$$

然后

$$H'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2}, x \in (a,b].$$

若满足的条件的 ξ 不存在, 则不妨设

$$H'(x) > 0, x \in (a,b),$$

从而 H 严格递增且

$$f'(x) > \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \forall x \in (a,b].$$

现在我们有

$$f'(x) > H(x) > H(a) = f'(a), \forall x \in (a,b),$$

于是

$$f'(x) > H\left(\frac{a+b}{2}\right), x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right).$$

由导数介值性得

$$f'(b) \geqslant H\left(\frac{a+b}{2}\right) > f'(a),$$

这就是一个矛盾!

例题 11.53Taylor 公式的 Cauchy 余项 设 $f \in C^n[a,b] \bigcap D^{n+1}(a,b), p \geqslant 1, x_0, x \in [a,b]$, 证明存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}. \tag{11.77}$$

笔记 不容易直接看出插值模型的需要插值的点, 因此可以直接采用 K 值法. 记 $\eta = x_0 + \theta(x-x_0)$, 即 $\theta = \frac{\eta - x_0}{x-x_0}$. 则要证明的(11.77)变成

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!p}(x-\eta)^{n+1-p}(x-x_0)^p. \tag{11.78}$$

证明 不妨设 $x \neq x_0$, 记常数 K 满足

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{K}{n!p}(x-x_0)^p. \tag{11.79}$$

构造

$$g(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{K}{n!p}(x-y)^p.$$

通过(11.79), 显然有 $g(x_0) = g(x) = 0$, 由罗尔中值定理, 存在介于 x, x_0 之间的 η, 使得 $g'(\eta) = 0$. 又

$$\begin{aligned} g'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}\right] + \frac{K}{n!}(x-y)^{p-1} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n + \frac{K}{n!}(x-y)^{p-1}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{K}{n!}(x-\eta)^{p-1} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n \Rightarrow K = f^{(n+1)}(\eta)(x-\eta)^{n+1-p}.$$

记 $\theta=\frac{\eta-x_0}{x-x_0}$ 就得到了(11.77)成立.

例题 11.54

1. 设 $f\in C[0,1]$ 使得 $f(0)=f(1)$, 证明: 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in[0,1]$ 使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.
2. 设 $f\in C[a,b]$ 满足 $f(a)=f(b)$, 证明: 存在 $a\leqslant c<d\leqslant b, d-c=\frac{b-a}{2}$ 使得 $f(d)=f(c)$.
3. 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 是周期 1 的, 证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$.

证明

1. 考虑 $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x), x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, 则
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]=\frac{f(1)-f(0)}{n}=0.$$
由平均值定理12.3知存在 $x_n\in[0,1]$ 使得 $g(x_n)=0$, 即 $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.
2. 考虑
$$g(x)\triangleq f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x),$$
我们有
$$g(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a), g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
即 $g(a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 0$. 因此由介值定理得 $c\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 使得 $g(c)=0$. 于是考虑 $d\triangleq c+\frac{b-a}{2}$, 我们有 $f(d)=f(c)$.
3. 考虑
$$F(x)\triangleq f(x+\pi)-f(x).$$
我们设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 分别是 f 的最小值点和最大值点, 则有
$$F(x_1)=f(x_1+\pi)-f(x_1)\geqslant 0, F(x_2)=f(x_2+\pi)-f(x_2)\leqslant 0.$$
因此存在 $\xi\in[x_1,x_2]$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$.

例题 11.55 设 $f\in C[0,1], g\in C^1[0,1]$ 满足
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0, g(0)=0$$
且 g 严格递增. 证明: 存在 $c\in(0,1)$ 使得
$$\int_0^c f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明 若 f 恒为 0, 则任意 $c\in(0,1)$ 都有
$$\int_0^c f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$
下设 f 不恒为 0, 则 $F(x)\triangleq\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 也不恒为 0. 假如不存在 $c\in(0,1)$ 使得
$$\int_0^c f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0,$$
不妨设
$$\int_0^y f(x)g(x)\,\mathrm{d}x>0, \forall y\in(0,1).$$
设
$$F(x_1)=m\triangleq\min_{x\in[0,1]}F(x), x_1,x_2\in[0,1].$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^{x_1} f(y) g(y) \mathrm{d}y &= F(x_1) g(x_1) - \int_0^{x_1} F(y) g'(y) \mathrm{d}y \\ &\leqslant m g(x_1) - m \int_0^{x_1} g'(y) \mathrm{d}y = 0. \end{aligned} \tag{11.80}$$

于是 $x_1 = 0$ 或者 $x_1 = 1$. 若为后者, 则

$$[F(y) - m] g'(y) = 0, \forall y \in [0,1].$$

由定理12.1得 $g'(y) > 0$ 的 y 在 $[0,1]$ 稠密, 于是在这些点 $F(y) = m$. 现在由 F 连续性得 F 是常值函数 m, 所以 f 恒为 0 而矛盾!. 因此只能有 $x_1 = 0$, 于是由 $F(1) = 0$ 得 F 也以 $x = 1$ 为最小值点, 这就是一个矛盾!, 因此我们证明了存在 $c \in (0,1)$ 使得

$$\int_0^c f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0.$$

一般的, 我们可以证明更强的结果, 这里用到一种原创的迭代技术.

练习 11.8 迭代法标准模型

1. 设 f 在 $[0,1]$ 黎曼可积且满足 $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. 若 g 是 $[0,1]$ 上的非负递增函数, 证明: 存在 $x \in (0,1]$, 使得
$$\int_0^x g(y) f(y)\,dy = 0.$$
2. ♠ 设 f 在 $[0,1]$ 黎曼可积且满足 $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. 若 g 是 $[0,1]$ 上的非负递减函数, 证明: 存在 $x \in [0,1)$, 使得
$$\int_x^1 g(y) f(y)\,dy = 0.$$
3. ♠ 设 f 在 $[0,1]$ 广义可积或者勒贝格可积且满足 $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. 若 g 是 $[0,1)$ 上的非负递增函数且
$$g(y) f(y) \text{在}[0,1]\text{广义可积或者勒贝格可积}, \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x g(y) f(y)\,\mathrm{d}y}{g(x)} = 0. \tag{11.81}$$
证明: 存在 $x \in (0,1]$, 使得
$$\int_0^x g(y) f(y)\,dy = 0.$$

笔记 迭代法基本模型.

证明

1. 当 g 非负递增. 若对任何 $x \in (0,1]$, 都有 $\int_0^x g(y) f(y)\,dy \neq 0$, 则不妨设
$$\int_0^x g(y) f(y)\,dy > 0, \forall x \in (0,1].$$
若 $g(x_0) = 0, x_0 > 0$, 则由 g 非负递增知 $g(x) = 0, \forall x \in [0, x_0]$, 故
$$\int_0^{x_0} g(y) f(y)\,dy = 0,$$
矛盾! 故 $g(x) > 0, \forall x \in (0,1]$.
现在由第二积分中值定理, 存在 $\theta_1 \in (0,1)$, 使得
$$\int_0^1 g(x) f(x)\,dx = g(1) \int_{\theta_1}^1 f(x)\,dx > 0.$$
进一步运用第二积分中值定理, 存在 $\theta_2 \in (0, \theta_1)$, 使得
$$\int_0^{\theta_1} g(x) f(x)\,dx = g(\theta_1) \int_{\theta_2}^{\theta_1} f(x)\,dx > 0.$$
同样的一直进行下去, 我们可取 $0 < \theta_{n+1} < \theta_n < 1, n = 1, 2, \cdots$, 使得
$$\int_0^{\theta_n} f(x) g(x)\,dx = g(\theta_n) \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n} f(x)\,dx > 0.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=a$, 则

$$\int_0^a f(x)\,g(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\theta_n} f(x)\,g(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} g(\theta_n)\int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n} f(x)\,dx=0,$$

故 $a=0$. 现在

$$\int_{\theta_{n+1}}^{\theta_n} f(x)\,dx>0, n=1,2,\cdots,$$

从而记 $\theta_0=1$, 则

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} f(x)\,dx>0,$$

这就是一个矛盾! 从而我们证明了存在 $x\in(0,1]$, 使得

$$\int_0^x g(y)\,f(y)\,dy=0.$$

2. 因此当 g 非负递减, 考虑 $g(1-x), f(1-x)$ 并用 g 非负递增的结果即可. 即存在 $x_0\in[0,1)$, 使得

$$\int_0^{1-x_0} g(1-y)\,f(1-y)\,\mathrm{d}y=0.$$

现在换元得

$$\int_{x_0}^1 g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

3. 现在[10]

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{\eta\to1^-}\int_0^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to1^-}\int_0^{\eta}\frac{1}{g(x)}\mathrm{d}\left[\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right]\\&\overset{\text{分部积分并利用(11.81)}}{=}\lim_{\eta\to1^-}\left(\frac{\int_0^{\eta} g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y}{g(\eta)}+(R-S)\int_0^{\eta}\left(\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{g(x)}\right)\right)\\&=\left(\frac{\int_0^1 g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y}{g(1)}+(R-S)\int_0^1\left(\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{g(x)}\right)\right).\end{aligned}$$

若 $\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\neq0,\forall x\in(0,1]$, 则不妨设

$$\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y>0,\forall x\in(0,1].$$

注意到此时如果 g 在 $(0,1]$ 为常数 $c\geqslant0$, 则 $\int_0^1 g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y=0$ 而矛盾! 故必有[11]

$$(R-S)\int_0^1\left(\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{g(x)}\right)>0.$$

这就和 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 而矛盾! 故存在 $x\in(0,1]$, 使得

$$\int_0^x g(y)\,f(y)\,dy=0.$$

例题 11.56

1. 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^2(a,b)$ 满足 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

[10]取极限是为了体现可能是反常积分.

[11]如果 $g\in C^1[0,1)$, 那么

$$(R-S)\int_0^1\left(\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{g(x)}\right)=\int_0^1\frac{g'(x)}{g^2(x)}\left(\int_0^x g(y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x>0.$$

2. 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^2(a,b)$ 满足 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ 且 f 不为常数. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$
3. 设 $f\in D^2(a,b)\bigcap C^1[a,b]$ 满足 $f'(a)=f'(b)=0$ 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$
若 $f(a)\neq f(b)$ 再说明上述不等号可以严格成立.

证明

1. Taylor 中值定理得
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2;$$
$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2,$$
这里 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$. 记 $\xi\in\{\xi_1,\xi_2\}$ 使得
$$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}.$$
于是我们有
$$|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|,$$
即
$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$
2. 若
$$|f''(x)|\leqslant M\triangleq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|,\forall x\in(a,b).$$
因为 f 不为常数, 所以 $M>0$. 由拉格朗日中值定理得
$$|f'(x)|=\left|f'(x)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant M\left|x-\frac{a+b}{2}\right|,\forall x\in(a,b).$$
我们有
$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&=\left|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x\\&=\frac{M}{4}(b-a)^2=|f(b)-f(a)|.\end{aligned}$$
现在
$$f'\in C(a,b),\left|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x\Rightarrow f'\text{不变号}.$$
于是
$$f'(x)=M\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\text{或}f'(x)=-M\left|x-\frac{a+b}{2}\right|.$$
这就和 $f'\in D^1(a,b)$ 矛盾! 因此我们证明了存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$
3. 由 Taylor 中值定理, 我们知道存在 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 使得
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2,f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2.$$
于是
$$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2-\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2\right|\leqslant\frac{|f''(\xi)|}{4}(b-a)^2,$$

这里

$$|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}, \xi \in \{\xi_1, \xi_2\}.$$

若 $f(a) \neq f(b)$, 我们设

$$|f''(x)| \leqslant M \triangleq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|, \forall x \in (a,b).$$

因为 f 不为常数, 所以 $M > 0$.

我们有

$$\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &= \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(x) - f'(a)]\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{a+b}{2}}^b [f'(x) - f'(b)]\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x) - f'(a)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x) - f'(b)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}} |x-a|\,\mathrm{d}x + M\int_{\frac{a+b}{2}}^b |x-b|\,\mathrm{d}x = \frac{M}{4}(b-a)^2 \\
&= |f(b) - f(a)|.
\end{aligned}$$

为了让第一个不等号成立, 我们需要

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|\,\mathrm{d}x, \left|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

即 f' 在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 都不变号. 为了让第二个不等号成立, 我们需要

$$\begin{cases} |f'(x)| = M(x-a), & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ |f'(x)| = M(b-x), & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}.$$

现在为了 $f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 存在, 必须有

$$f'(x) = \begin{cases} M(x-a), & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ M(x-b), & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} -M(x-a), & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ -M(x-b), & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

之一成立, 此时就是一个矛盾!, 因此我们证明了不等号严格成立.

例题 11.57 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 证明: 存在 $\xi, \theta \in [0,1]$ 使得 $|f(\xi)| = 4, |f(\theta)| > 4$.

笔记 考虑题目条件的线性组合, 待定 $a \in \mathbb{R}$ 考虑

$$1 = \left|\int_0^1 (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |x-a| \cdot |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 |x-a|\,\mathrm{d}x.$$

为了使放缩最精确, 我们希望右边积分 $\int_0^1 |x-a|\,\mathrm{d}x$ 达到最小, 容易知道是[12] $a = \frac{1}{2}$.

证明 注意到

$$1 = \left|\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

我们有

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \geqslant 4.$$

由积分中值定理11.3我们知道 f 必有零点, 因此由介值定理知存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 $|f(\xi)| = 4$.

若 θ 不存在, 则 $|f(x)| \leqslant 4, \forall x \in [0,1]$. 因为

$$4\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = 1 = \int_0^1 f(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(x)| \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x,$$

[12] 你可以直接分段算积分, 也可以用非数学积分不等式习题2..

然后我们有

$$0 \leqslant \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right| \cdot (|f(x)|-4)\,\mathrm{d}x \leqslant 0 \Rightarrow |f(x)| = 4, \forall x \in [0,1],$$

这和 f 有零点矛盾! 因此我们证明了存在 $\theta \in [0,1]$ 使得 $|f(\theta)| > 4$, 这就完成了证明.

例题 11.58 设 $f \in C^{n-1}[a,b] \bigcap D^n(a,b)$ 满足 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, k = 1,2,\cdots,n-1$. 证明: 存在 $c \in (a,b)$ 使得

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \geqslant \frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|. \tag{11.82}$$

证明 对 $x \in (a,b)$, 由 Taylor 中值定理得

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta_1)}{n!}(x-a)^n, \theta_1 \in (a,x);$$
$$f(x) = f(b) + \frac{f^{(n)}(\theta_2)}{n!}(x-b)^n, \theta_2 \in (x,b),$$

因此

$$\left|\frac{f^{(n)}(\theta_2)}{n!}(x-b)^n - \frac{f^{(n)}(\theta_1)}{n!}(x-a)^n\right| = |f(b)-f(a)|.$$

由绝对值不等式得

$$\max\left\{\left|f^{(n)}(\theta_2)\right|, \left|f^{(n)}(\theta_1)\right|\right\}(|x-a|^n + |b-x|^n) \geqslant n!\,|f(b)-f(a)|.$$

为了使得上式左边达到最小, 取 $x = \frac{a+b}{2}$ 并记

$$\left|f^{(n)}(c)\right| = \max\left\{\left|f^{(n)}(\theta_2)\right|, \left|f^{(n)}(\theta_1)\right|\right\}, c \in (a,b),$$

代入计算我们有(11.82)成立.

例题 11.59 设 $f \in C^n[a,b] \bigcap D^{n+1}(a,b)$ 且

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

证明

1. 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$.
2. 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$.
3. $*, \heartsuit$, 设 $c_0, c_1, \cdots, c_n, c_{n+1} \in \mathbb{R}$ 使得多项式 $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_k x^k$ 在 $\mathbb{R}$ 上至少有一个实根, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n+1} c_k f^{(k)}(\xi) = 0.$$

若 p 没有实根, 那又如何?

笔记 第一问即考虑微分方程 $y + y' + \cdots + y^{(n)} = y' + y'' + \cdots + y^{(n+1)}$ 得到构造函数. 第二问即考虑微分方程 $y - y' + \cdots + (-1)^n y^{(n)} = -y' + y'' + \cdots + (-1)^{n+1} y^{(n+1)}$ 得到构造函数.

证明

1. 构造

$$g(x) = \left[f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\right]e^{-x},$$

则

$$g'(x) = \left[f(x) - f^{(n+1)}(x)\right]e^{-x}.$$

注意到由题目条件我们有 $g(a) = g(b) = 0$, 于是由罗尔中值定理我们知道 $\xi \in (a,b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$.

2. 构造

$$g(x) = \left[f(x) - f'(x) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)\right]e^{x},$$

则

$$g'(x)=\left[f(x)-(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)\right]e^{x}.$$

注意到由题目条件我们有 $g(a)=g(b)=0$, 于是由罗尔中值定理我们知道 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$.

3. 注意到存在实系数多项式 h 使得 $p(x)=(x-x_0)h(x)$, 于是我们考虑

$$g(x)=\left[h\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right]e^{-x_0x},g'(x)=\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right]e^{-x_0x}.$$

注意到 $g(a)=g(b)=0$, 由罗尔中值定理可得 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 即

$$\sum_{k=0}^{n+1}c_kf^{(k)}(\xi)=0.$$

若 p 没有实根, 不妨设其所有复根为

$$a_j\pm ib_j,a_j,b_j\in\mathbb{R},b_j\neq0,j=1,2,\cdots,m.$$

于是若存在某个 $j=1,2,\cdots,m$ 使得 $[a,b]$ 不含有 $\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b_j},\forall k\in\mathbb{Z}$, 那么仍然存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n+1}c_kf^{(k)}(\xi)=0.$$

因为此时我们只需考虑

$$p(x)=\left(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2\right)h(x),p\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=h\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}-2a_j\frac{d}{dx}+a_j^2+b_j^2\right)f(x).$$

注意到

$$\left[\left(\frac{h\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)}{e^{a_jx}\cos(b_jx)}\right)'\cos^2(b_jx)\right]'=\frac{\cos(b_jx)\left[p\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right]}{e^{a_jx}},$$

以及

$$\left(\frac{h\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)}{e^{a_jx}\cos(b_jx)}\right)'|_{x=a}=\left(\frac{h\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)}{e^{a_jx}\cos(b_jx)}\right)'|_{x=b}=0.$$

故用罗尔中值定理我们知道有 ξ 使得

$$\sum_{k=0}^{n+1}c_kf^{(k)}(\xi)=0.$$

例题 11.60 设 $[a,b]$ 上的连续函数 f 在 $[a,b]$ 上变号且给定 $\{c_i\}_{i=1}^n\subset[0,+\infty),n\geqslant3$. 证明存在严格递增等差数列 $\{t_i\}_{i=1}^n\subset(a,b)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}c_if(t_i)=0.$$

证明 不妨设 $\{c_i\}_{i=1}^n$ 不全为 0, 因为 f 变号, 所以设 f 在 $[c_1,d_1]\subset(a,b)$ 上为正, $[c_2,d_2]\subset(a,b)$ 上为负. 考虑

$$x_k=c_1+\frac{(k-1)(d_1-c_1)}{n-1},y_k=c_2+\frac{(k-1)(d_2-c_2)}{n-1},k=1,2,\cdots,n,$$

则考虑

$$g(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}c_kf(\lambda x_k+(1-\lambda)y_k),\lambda\in[0,1].$$

注意到

$$g\in C[0,1],g(1)=\sum_{k=1}^{n}c_kf(x_k)>0,g(0)=\sum_{k=1}^{n}c_kf(y_k)<0.$$

由连续函数零点定理我们知道存在 $\lambda_0 \in (0,1)$ 使得

$$g(\lambda_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(\lambda_0 x_k + (1-\lambda_0) y_k) = 0.$$

注意到对每一个 $k = 2, 3, \cdots, n$, 都有

$$\begin{aligned} &\lambda_0 x_k + (1-\lambda_0) y_k - (\lambda_0 x_{k-1} + (1-\lambda_0) y_{k-1}) = \lambda_0 (x_k - x_{k-1}) + (1-\lambda_0)(y_k - y_{k-1}) \\ &= \lambda_0 \frac{b_1 - c_1}{n-1} + (1-\lambda_0) \frac{b_2 - c_2}{n-1} > 0, \end{aligned}$$

于是 $t_k = \lambda_0 x_k + (1-\lambda_0) y_k, k = 1, 2, \cdots, n$ 为所求.

11.5 中值极限性质

此类问题有一个固定操作, 即对中值点再套一次中值定理, 使得中值参数可以暴露出来. 从而解出参数求极限得到证明.

例题 11.61 设 f 在 $x = a$ 的邻域 $n+p$ 阶可导且 $p \geqslant 1$, 于是有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{11.83}$$

如果对于 $j = 1, 2, \cdots, p-1$ 都有 $f^{(n+j)}(a) = 0, f^{(n+p)}(a) \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{c-a}{x-a}$.

笔记 当 $p = 1, n = 1$ 都对应经典习题.

证明 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+p)}(\theta)}{p!}(c-a)^p. \tag{11.84}$$

由(11.84)知

$$\lim_{x\to a} f^{(n+p)}(\theta) = \lim_{x\to a} p! \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{(c-a)^p} = f^{(n+p)}(a).$$

代入(11.84)到式(11.83), 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \left(\frac{c-a}{x-a}\right)^p &= \lim_{x\to a} \left[n!p! \frac{f(x) - \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}{(x-a)^{n+p} f^{(n+p)}(\theta)} \right] \\ &= \frac{1}{f^{(n+p)}(a)} \lim_{x\to a} \left[n!p! \frac{\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p} + o\left((x-a)^{n+p}\right)}{(x-a)^{n+p}} \right] \\ &= \frac{n!p!}{(n+p)!}, \end{aligned}$$

于是所求极限为 $\lim\limits_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} = \sqrt[p]{\frac{n!p!}{(n+p)!}}$.

例题 11.62 设 $f \in C^2[0,1], f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$, 证明对任何 $x \in (0,1)$, 存在 $\xi(x) \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(\xi(x))\, x, \tag{11.85}$$

且

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

如果把条件改为 $f \in C^1[0,1], f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$, 结论是否还成立?

证明 由积分中值定理11.3, 存在 $\xi(x) \in (0,1)$, 使得(11.85)成立. 为了把参数暴露出来, 我们还需要再次使用中值定理. 即

$$f(\xi(x)) = f(0) + f'(0)\xi(x) + \frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x) = f(0) + \frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x), \theta(x) \in (0, \xi(x)).$$

由(11.85), 我们有

$$x\left[f(0)+\frac{f''(\theta(x))}{2}\xi^2(x)\right]=\int_0^x f(t)\,dt\Rightarrow\frac{f''(\theta(x))}{2}\frac{\xi^2(x)}{x^2}=\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^3}-\frac{f(0)}{x^2},$$

即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f''(\theta(x))}{2}\frac{\xi^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^3}-\frac{f(0)}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,dt-f(0)\,x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{3x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{6x}=\frac{f''(0)}{6},$$

又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f''(\theta(x))}{2}=\frac{f''(0)}{2},\xi(x)>0,$$

故我们有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

把条件改为 $f\in C^1[0,1]$, $f'(0)=0, f''(0)\neq0$, 此时我们有

$$\frac{f''(0)}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\xi^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(\xi(x))-f(0)}{\xi^2(x)}\cdot\frac{\xi^2(x)}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi(x))-f(0)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(0)\,x}{x^3}$$
$$\overset{\text{两次洛必达}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{6x}=\frac{f''(0)}{6},$$

即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

例题 11.63 设 $f\in C[a,b]$, 由积分中值定理得

$$\int_a^x f(t)\,dt=(x-a)f(\xi),a\leqslant\xi\leqslant x<b.$$

若 $f'_+(a)$ 存在且非 0, 求 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$.

证明 注意到

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\int_a^x f(y)\,dy-f(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f'_+(a).$$

又

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\int_a^x f(y)\,dy-f(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(\xi)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}\lim_{x\to a^+}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'_+(a)\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a},$$

这就证明了

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

例题 11.64 设 $n\in\mathbb{N}$, 对 $x\in(0,1)$, 证明存在 $\theta_n\in(0,1)$ 满足

$$\frac{1}{1-x}=\frac{(1-\theta_n)^n(n+1)}{(1-x\theta_n)^{n+2}}.\tag{11.86}$$

并求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta_n$.

证明 由 Taylor 公式的 Cauchy 余项11.53, 我们知对 $x\in(0,1)$, 存在 $\theta_n\in(0,1)$ 满足

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{(n+1)(1-\theta_n)^n}{(1-\theta_nx)^{n+2}}x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+\frac{(n+1)(1-\theta_n)^n}{(1-\theta_nx)^{n+2}}x^{n+1},$$

移项化简得(11.86).

现在在(11.86)中让 $x\to 0^+$, 我们有

$$1=\left(1-\lim_{x\to 0^+}\theta_n\right)^n(n+1)\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\theta_n=1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}},n\in\mathbb{N}.$$

例题 11.65 当 $x\neq 0$, 由 Cauchy 中值定理, 存在 ξ 介于 0 到 x 之间满足 $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sin\xi}{2\xi}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}$.

笔记 当然可以继续使用对中值展开的方法, 但有时候如果你观察力足够, 我们可以直接手动加强.

证明 注意到

$$\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^4}=\frac{\sin\xi-\xi}{\xi x^2}.$$

于是

$$-\frac{1}{12}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\xi-\xi}{\xi x^2}\overset{\text{等价替换}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{6x^2}.$$

注意到 $\frac{\xi}{x}>0$, 于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例题 11.66 设 $f\in C^3[0,x],x>0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,x)$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]-\frac{x^3}{12}f''(\xi).\tag{11.87}$$

若还有 $f'''(0)\neq 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi}{x}$.

证明 我们当然可以直接用拉格朗日插值定理11.1来快速得到(11.87). 但我们更想再展示一次 K 值法的运用.

设 $K\in\mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]-\frac{x^3}{12}K,$$

则考虑

$$g(y)\triangleq\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{y}{2}[f(0)+f(y)]+\frac{y^3}{12}K.$$

于是

$$g'(y)=f(y)-\frac{1}{2}[f(0)+f(y)]-\frac{yf'(y)}{2}+\frac{y^2}{4}K=\frac{f(y)-f(0)}{2}-\frac{yf'(y)}{2}+\frac{y^2}{4}K,$$

以及 $g''(y)=-\frac{yf''(y)}{2}+\frac{y}{2}K$.

由 $g(x)=g(0)=0$ 和罗尔中值定理得 $\xi_1\in(0,x)$ 使得 $g'(\xi_1)=0$. 注意到 $g'(0)=0$. 再次由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,x)$ 使得

$$g''(\xi)=-\frac{\xi f''(\xi)}{2}+\frac{\xi}{2}K=0,$$

即 $K=f''(\xi)$, 这就得到了(11.87).

由(11.87)得

$$f''(\xi)=-12\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}.$$

由拉格朗日中值定理得

$$f''(\xi)=f''(0)+f'''(\eta)\xi,\eta\in(0,\xi).$$

于是

$$f'''(\eta)\frac{\xi}{x}=\frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}-f''(0)}{x}.$$

现在就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f'''(\eta)\frac{\xi}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-12\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{x}{2}[f(0)+f(x)]}{x^3}-f''(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-12\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+6x[f(0)+f(x)]-f''(0)x^3}{x^4}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-12f(x)+6[f(x)+f(0)]+6xf'(x)-3f''(0)x^2}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{6xf''(x)-6f''(0)x}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'''(0).\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to 0^+} f'''(\eta)=f'''(0),$$

我们有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$.

第 11 章 练习

1. (1.) 设 $f\in C^2[-1,1]$ 满足 $f(0)=0$, 证明存在 $\xi\in[-1,1],\zeta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\xi)=6f(\zeta)$.
2. (2.) 设 f 在 $[0,1]$ 有连续的导数且 $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{2},\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{3}{2}$, 则存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=3$.
3. (3.) 设 f 在 (a,b) 可微, 则对 $a<x_i<y_i<b,i=1,2,\cdots,n$, 证明存在 $c\in(a,b)$, 使得
$$\sum_{i=1}^n f(x_i)-\sum_{i=1}^n f(y_i)=f'(c)\sum_{k=1}^n(x_i-y_i).$$
4. (4.) 设 f 在 $[a,b]$ 上可微且 $f'(a)=f'(b)$, 证明存在 $c\in(a,b)$ 使得
$$f(c)-f(a)=(c-a)f'(c).$$
5. (5.) 设 $f\in C^2[-1,1]$, 证明存在 $\xi\in[-1,1]$, 使得
$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi).$$
6. (6.) 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,dx$, 证明存在 $u\in(0,1)$, 使得 $f'(u)=-\frac{f(u)}{u}$.
7. (7.) 设 $f\in D^3[-1,1]$, 证明存在 $u\in(-1,1)$, 使得
$$f'''(u)=3[f(1)-f(-1)]-6f'(0).$$
8. (8.) 设 $f\in C^1[a,b]$ 满足 $f(a)=f(b)=0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $(b-a)f'(\xi)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
9. (9.) 设 f 在 $[0,1]$ 上非负连续且 $f(1)=0$, 证明存在 $c\in(0,1)$ 使得 $\int_0^c f(x)\,dx=f(c)$.
10. (10.) 设 $f\in D^2[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx=1,f(0)=0,|f''(x)|\geqslant\frac{3}{2}$, 证明
$$\max_{x\in(0,1)}\left|\int_0^x f(y)\,dy-x^2\right|\geqslant\frac{1}{27}.\tag{11.88}$$
11. (11.) 设 f 在 $[0,1]$ 有二阶导数且
$$f'(0)=f'(1),|f''(x)|\leqslant 1,\forall x\in[0,1],$$
证明
$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{24}.$$
12. (12.) 设 f 在 $[0,1]$ 有一阶导数且
$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|,$$

证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{12}.$$

13. (13.∗) 设 $f\in C^4[0,1]$ 且存在 $r>1$ 使得

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\left(r^2-1\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=r^3\int_{\frac{r-1}{2r}}^{\frac{r+1}{2r}} f(x)\,dx. \tag{11.89}$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(\xi)=0$.

14. (14.) 设 $f\in C[0,1]\bigcap D^2(0,1)$ 满足

$$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=-2$.

15. (15.♠) 设 $f\in D^2\left(\left[-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}},2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}\right]\right)$ 且满足

$$|f(x)|\leqslant 1, a=f^2(0)+[f'(0)]^2>1. \tag{11.90}$$

证明[13]: 存在 $\xi\in\left(-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}},2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

16. (16.∗) 给定 $n\in\mathbb{N}$, 设 $f\in C[0,1]\bigcap D^n(0,1)$ 且 f 在 $[0,1]$ 上有 $n+1$ 个互不相同的零点.
证明: 存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得

$$f^{(n)}(\zeta)=-f(\zeta).$$

17. (17.) 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 且 $f(a)\neq f(b)$, 证明存在 c,ξ,η 满足

$$2f(c)=f(a)+f(b),[f(b)-f(a)]f(\xi)=2f'(\eta)\left[(b-a)f(\xi)-\int_a^c f(x)\,dx\right], \tag{11.91}$$

这里 $a\leqslant\xi\leqslant c<\eta<b$.

18. (18.) 设 $C,D>0$, 二阶连续可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$|x^3f(x)|\leqslant C,|xf''(x)|\leqslant D. \tag{11.92}$$

证明对任何 $\epsilon>0$, 存在 $x_0\geqslant 0$, 使得对任何 $|x|>x_0$, 都有

$$|x^2f'(x)|<\sqrt{2CD}+\epsilon. \tag{11.93}$$

19. (19.) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可微且在 $[0,1]$ 连续, 并满足 $f(0)=0,f(1)=1$, 证明 : 必然存在互不相同的两个点 $\zeta,\eta\in(0,1)$, 使得

$$|f'(\zeta)|^2+|f'(\eta)|^2=2.$$

20. (20.) 设

$$f\in C[0,1]\bigcap D(0,1),f(0)=0,f(1)=2,$$

证明存在互不相同的点

$$\xi_i\in(0,1),i=1,2,3,$$

使得

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}\geqslant 2.$$

21. (21.) 设 f 在 $[0,4]$ 连续, 在 $(0,4)$ 可微, 并且满足 $|f(x)|<1,\forall x\in(0,4)$, 证明存在 $\xi\in(0,4)$, 使得

$$|f'(\xi)|^2+|f(\xi)|^2<1.$$

22. (22.) 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 且

$$a>0,f(a)=0,f(b)=2,f'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b),$$

[13] 实际上更强的, 当 $M\in\left(0,2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, 存在 $f\in D^2[-M,M]$ 满足(11.90), 但是 $f''+f>0$.

证明存在 $\zeta,\eta\in(a,b)$, 使得 $\zeta\neq\eta$ 以及

$$\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=2b-a-\frac{1}{f'(\eta)}.$$

23. (23.) 设 $f\in C^2[0,1]$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=\int_0^1\left(360x^2-360x+60\right)f(x)\,dx.$$

24. (24.) 设 $f\in C^1[0,1]$, $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ 且 $0\leqslant\alpha<2$, 证明存在 $c\in(0,1)$, 使得

$$c^2f(c)=\int_0^c\left(x^2+\alpha x\right)f(x)\,dx.$$

25. (25.) 设 $f\in C[0,2]\bigcap D(0,2)$ 且 $f(1)=0$, 证明存在 $c\in(0,2)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{\xi\cos\xi-\sin\xi}{\frac{2\xi^2}{\pi}-\xi\sin\xi}f(\xi).$$

26. (26.) 设 $f\in C^1[a,b]$, 满足

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\lambda\left(b^2-a^2\right)+\mu(b-a),\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{1}{3}\lambda\left(b^3-a^3\right)+\frac{1}{2}\mu\left(b^2-a^2\right).\tag{11.94}$$

证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\lambda$.

27. (27.$*$, ♠) 设 $f\in C^3[a,b]$, 证明:

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{4}(b-a)|f(b)-f(a)|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{192}(b-a)^4.\tag{11.95}$$

28. (28.$*$, ♠) 设 $f\in C^4[a,b]$ 且 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)|f(b)-f(a)|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|}{2880}(b-a)^5.\tag{11.96}$$

29. (29.$*$, ♠) 设 $f\in C^3[a,b]$ 且 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明:

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{192}(b-a)^4.\tag{11.97}$$

30. (30.$*$, ♠) 设 f 在 $[a,b]$ 有五阶导数, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{6}\left(f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\xi).$$

31. (31.$*$, ♠) 设 $f\in C^2[0,1]$, $|f''(x)|\leqslant1$ 满足

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 xf(x)\,dx=0.\tag{11.98}$$

证明

$$\left|\int_0^1 x^2f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{360}.$$

32. (32.) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 有连续二阶导数, 证明对任何 $a>0$, 存在 $c\in(2a,4a)$, 使得

$$f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c).$$

33. (33.) 设 $f\in C[0,2]\bigcap D(0,2)$ 且满足

$$\int_0^2 f(x)\,dx=f(0)+f(2).$$

证明必然存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

34. (34.) 设常数 $\beta\geqslant1$, 证明

$$\frac{x^\beta}{\sqrt{3}}\geqslant\frac{1}{x+\sqrt{3}-1}+\frac{1+\sqrt{3}\beta}{3}\ln x,\forall x>0.$$

35. (35.) 设 $f\in D^4(a,b),\lambda\in(a,b)$. 若 $f^{(3)}(\lambda)=0,f^{(4)}(\lambda)\neq 0$, 证明存在不相同的 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得
$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\lambda). \tag{11.99}$$
36. (36.) 设 $f\in D[0,1]$ 且 $f(0)=0,f(1)=\frac{1}{4}$, 证明存在 $\xi,\eta\in(0,1)$ 使得
$$f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi. \tag{11.100}$$
37. (37.) 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1),f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$, 证明存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得
$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2. \tag{11.101}$$
38. (38.) 设 $f\in D^3[a,b]$ 满足 $f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$, 证明对每一个 $\eta\in\left[\frac{1}{24},\frac{1}{6}\right)$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$f(b)-f(a)=\eta f'''(\xi)(b-a)^3. \tag{11.102}$$
39. (39.) 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1),f(0)=f(1)=0$. 若 $a\in(0,1),f(a)>0$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)>2f(a)$.
40. (40.) 设 $f\in D^3[1,3]$ 且满足
$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x+1)\,dx,f'(2)=0.$$
证明存在 $\xi\in(1,3)$ 使得 $f'''(\xi)=0$.
41. (41.) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且满足
$$f(0)=2f'(0),f'(1)+f(1)=0,2f'(x)+xf(x)\neq 0,\forall x\in[0,1].$$
证明 : 存在一点 $\zeta\in(0,1)$, 使得
$$\left(\zeta^2+1\right)f(\zeta)+4\zeta f'(\zeta)+4f''(\zeta)=0.$$
42. (42.) 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b)$ 且
$$ab>0,f(a)=f(b)=1.$$
证明, 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得
$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=e^{\eta-\xi}\eta^2 f(\xi)\left[f'(\eta)+f(\eta)\right]. \tag{11.103}$$
43. (43.) 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得
$$f(0)f(1)>0,2024f(0)+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$
证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$$\left(\eta^2-2\eta+1\right)f''(\eta)+\left(\eta^2-2\eta\right)f'(\eta)-f(\eta)=0.$$
44. (44.) 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得
$$f(0)f(1)>0,2f(0)+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$
证明存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$$\eta f''(\eta)+(2+\eta)f'(\eta)+2f(\eta)=0.$$
45. (45.♠) 设 $f\in C[0,\pi]$ 且对 $1\leqslant k\leqslant n$ 都有
$$\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x=0.$$
证明 : f 在 $(0,\pi)$ 内至少有 $2n$ 个零点.
46. (46.♠) 设 f 是周期 2π 的连续函数且不恒为 0. 若
$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x=0,k=0,1,2,\cdots,n,$$

证明 f 在任何长度大于 2π 的区间上至少改变符号 $2n+2$ 次.

47. (47.) 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$\frac{1}{a-\xi}<f'(\xi)<\frac{1}{b-\xi}.$$

48. (48.) 设 $f\in C[0,2]\bigcap D(0,2)$ 且 $f'(1)=0$, 证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得
$$f'(\xi)=2024(f(\xi)-f(0)).$$

49. (49.) 设 $f\in C^3[0,1]$ 且 $f(0)=f'(0)=0, f'''(x)\leqslant 1$. 证明

(a).
$$f(x)-f(1)x^2\geqslant\frac{x^2(x-1)}{6};\forall x\in[0,1]. \tag{11.104}$$

(b). 若 $f(1)=\frac{1}{6}$, 则对任何 $x\in(0,1)$, 存在 $\xi\in(0,x)$, 使得
$$f''(\xi)\leqslant\frac{2f'(x)}{x}-\frac{x}{3}. \tag{11.105}$$

50. (50.♠) 设 $f\in C^3(I)$ 且 $a,b,c\in I$ 互不相同, 证明: 存在 $\xi\in I$ 使得
$$\begin{aligned}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{81}f'''(\xi)=&\frac{(c-a)(b-a)}{(a-2b+c)(a+b-2c)}\left[f\left(\frac{a+2b}{3}\right)-f\left(\frac{a+2c}{3}\right)\right]\\&+\frac{(b-c)(a-b)}{(a+b-2c)(2a-b-c)}\left[f\left(\frac{b+2c}{3}\right)-f\left(\frac{b+2a}{3}\right)\right]\\&+\frac{(c-b)(a-c)}{(a-2b+c)(2a-b-c)}\left[f\left(\frac{c+2a}{3}\right)-f\left(\frac{c+2b}{3}\right)\right].\end{aligned} \tag{11.106}$$

51. (51.) 设 $f\in C^3(I)$ 且 $a,b,c\in I$, 证明: 存在 $\xi\in I$ 使得
$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f\left(\frac{b+2c}{3}\right)+f\left(\frac{c+2a}{3}\right)-f\left(\frac{2a+b}{3}\right)-f\left(\frac{2b+c}{3}\right)-f\left(\frac{2c+a}{3}\right)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)f'''(\xi)}{27}.$$

52. (52.) 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f'(x)>0, a\leqslant f(x)\leqslant b$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$f(f(b))-f(f(a))=[f'(\xi)]^2(b-a).$$

53. (53.) 设 $f\in C[0,a]\bigcap D(0,a)$ 且 $f(0)=1, f(a)=0$, 证明: 存在 $0<x_1<x_2<a$ 使得 $f'(x_1)f'(x_2)=\frac{1}{a^2}$.

54. (54.) 设 $f\in C[0,1], \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, 证明对任何 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<1$ 使得
$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)-\xi_i^2\right]=0. \tag{11.107}$$

55. (55.) 设 $f\in C[a,b]$ 且在 (a,b) 取得 f 在 $[a,b]$ 的最大值和最小值. 证明: 存在 $\eta\in(a,b)$ 使得
$$\int_a^{\eta}f(x)\,\mathrm{d}x=(\eta-a)f(\eta).$$

56. (56. 设 $f(x)\in D^2[0,1]$ 满足 $f(0)=2, f'(0)=0, f'(1)=e-e^{-1}$, 证明存在 $\theta\in(0,1)$, 使得 $f''(\theta)=f(\theta)$.

57. (57.) 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. 证明: 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得
$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)}{4^{k-1}(2k-1)!}x^{2k-1}+\frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{4^n(2n+1)!}x^{2n+1}. \tag{11.108}$$

58. (58.) 设 $f\in C[a,b]$ 满足
$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0, k=0,1,2,\cdots,n. \tag{11.109}$$
证明: f 在 (a,b) 上至少有 $n+1$ 个不同的零点.

59. (59.) 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1(1-x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$\int_0^{\xi}xf(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi).$$

60. (60.) 设 $\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=1, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)=0$, 证明: 存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)=-\frac{6}{7}$.

61. (61.) 设 $n\in\mathbb{N},f\in C[0,1],\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 且有
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,\mathrm{d}x=0. \tag{11.110}$$
证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$|f(\xi)|\geqslant 2^n(n+1). \tag{11.111}$$

62. (62.) 设 $f\in C[-2,2]\bigcap D^2(-2,2)$ 满足 $|f(x)|\leqslant 1,f'(0)=1+a,a>0$, 证明:
(a). 存在 $\xi\in(0,2)$ 使得
$$\frac{f(\xi)-f(-\xi)}{2\xi}>\frac{2}{2-\xi}. \tag{11.112}$$
(b). 存在 $\eta\in(-2,2)$ 使得 $f''(\eta)=0$.

63. (63.) 设 $f\in D^2[-1,1],f(1)=f(-1)$, 证明
(a).
$$\max_{x\in[-1,1]}|f'(x)|\leqslant\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|. \tag{11.113}$$
(b). 若 $f(1)=f(-1)=0$, 则有
$$\int_{-1}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|. \tag{11.114}$$

64. (64.) 设 $f\in D^2[0,a]$ 且 $|f''(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,a]$. 若 f 在 $(0,a)$ 取得最大值, 证明:
$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma. \tag{11.115}$$

65. (65.) 设 f 在 $[0,1]$ 二阶可导且 $f(0)=1,f(1)=1+e,f'(0)=1$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=1. \tag{11.116}$$

66. (66.) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一有界闭区域且 $f\in C(D)$, 证明存在无穷多对 $(\zeta,\eta)\in D$, 使得
$$f(\zeta,\eta)=\frac{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

67. (67.) 设 f 在 $[a,b]$ 二阶可微且
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\max_{x\in[a,b]}|f(x)|^2. \tag{11.117}$$
证明: 若 $b-a>4$, 则有 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

68. (68.) 设 $k\geqslant 2$, 若 f 有 k 个零点 $x_1<x_2<\cdots<x_k$ 且对 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $n_i\in\mathbb{N}$ 使得
$$f(x_i)=f'(x_i)=\cdots=f^{(n_i-1)}(x_i)=0.$$
记 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k-1$, 若 $f\in D^n((x_1,x_k))$ 且 f 在 x_1 处 n_1-1 阶右可导, 在 x_k 处 n_k-1 阶左可导, 证明: 存在 $\xi\in(x_1,x_k)$ 使得
$$f^{(n)}(\xi)+a_{n-1}f^{(n-1)}(\xi)+\cdots+a_1f'(\xi)+a_0f(\xi)=0, \tag{11.118}$$
这里
$$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[x]$$
是只有实根的多项式.

69. (69.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足
$$f'(0)=f'(1)=0,f(0)+f(1)=0,$$
证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$f''(\xi)=24\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11.119}$$

70. (70.) 设 $f\in C^{n-1}\left[x_0,x_0+n\Delta x\right]\bigcap D^n\left(x_0,x_0+n\Delta x\right)$, 证明: 存在 $\xi_n\in\left(x_0,x_0+n\Delta x\right)$ 使得
$$\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i C_n^i f\left[x_0+\left(n-i\right)\Delta x\right]=f^{(n)}\left(\xi_n\right)\left(\Delta x\right)^n. \tag{11.120}$$
71. (71.) 设 $f\in C\left[a,b\right]$ 满足 f 在 $\left(a,b\right)$ 处处存在左右导数. 证明存在 $\xi\in\left(a,b\right)p,q\geqslant 0,p+q=1$ 使得
$$f\left(b\right)-f\left(a\right)=\left(pf'_+\left(\xi\right)+qf'_-\left(\xi\right)\right)\left(b-a\right). \tag{11.121}$$
72. (72.) 设 $f,g\in C\left[a,b\right]$ 满足 f,g 在 $\left(a,b\right)$ 处处存在左右导数. 证明存在 $\xi\in\left(a,b\right)p,q\geqslant 0,p+q=1$ 使得
$$\left(pf'_+\left(\xi\right)+qf'_-\left(\xi\right)\right)\cdot\left(g\left(b\right)-g\left(a\right)\right)=\left(pg'_+\left(\xi\right)+qg'_-\left(\xi\right)\right)\cdot\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right). \tag{11.122}$$
73. (73.) 设 $f\in C\left[a,b\right]\bigcap D^2\left(a,b\right)$ 满足
$$f\left(a\right)=f\left(b\right)=0,f'\left(a\right)f'\left(b\right)>0. \tag{11.123}$$
证明: 存在 $\xi\in\left(a,b\right)$ 使得 $f''\left(\xi\right)=f\left(\xi\right)$.
74. (74.) 设 $f\in D^2\left[0,1\right]$ 使得
$$f\left(0\right)=0,\int_0^{\frac{1}{3}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=0,f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(1\right)=0.$$
证明: 存在 $\xi\in\left(0,1\right)$ 使得
$$f''\left(\xi\right)+\left[f\left(\xi\right)f'\left(\xi\right)\right]^2=0.$$
75. (75.) 设 $f\in D\left(a,b\right)$ 满足 $f'\left(x\right)\geqslant 0$. 证明: 对 $a<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<b$, 存在 $\xi\in\left(a,b\right)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=\sqrt[n]{f'\left(\xi_1\right)f'\left(\xi_2\right)\cdots f'\left(\xi_n\right)}. \tag{11.124}$$
76. (76.) 设 f 在 $\left[0,1\right]$ 二阶可导且满足 $f\left(0\right)=0,f\left(1\right)=1$. 证明: 存在 $\xi\in\left(0,1\right)$ 使得
$$\xi f''\left(\xi\right)+\left(1+\xi\right)f'\left(\xi\right)=1+\xi. \tag{11.125}$$
77. (77.) 设 $f\in C\left[0,1\right]$ 且 f 在 $\left(0,1\right)$ 处处存在右导数 f'_+. 若 $f\left(0\right)=f\left(1\right)$, 证明存在 $\xi\in\left(0,1\right)$ 使得 $f'_+\left(\xi\right)\leqslant 0$.
78. (78.) 设 $f\in D^2\left[-1,1\right]$ 是奇函数, 证明: 存在 $\xi\in\left(-1,1\right)$ 使得
$$f''\left(\xi\right)-f'\left(\xi\right)+f\left(1\right)=0.$$
79. (79.) 设 $f\in C\left[0,2\right]\bigcap D\left(0,2\right)$ 满足
$$\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$
证明: 存在 $\xi\in\left(0,2\right)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=-\frac{f\left(\xi\right)}{\xi}.$$
80. (80.) 设 $f\in C\left[a,b\right]\bigcap D^1\left(a,b\right)$. 证明: 存在 $\xi\in\left(a,b\right)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(\xi\right)-f\left(a\right)}{b-\xi}.$$
81. (81.) 设 $f\in D^2\left[0,1\right]$ 满足 $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=f''\left(0\right)=f\left(1\right)=0$, 证明: 存在 $\xi\in\left(0,1\right)$ 使得
$$\xi^2f''\left(\xi\right)-2f\left(\xi\right)=0.$$
82. (82.♠) 设 $n\in\mathbb{N}_0,f\in C^{n+1}\left(\left[0,1\right]\right)$ 满足
$$f\left(0\right)=f'\left(0\right)=\cdots=f^{(n)}\left(0\right)=f'\left(1\right)=\cdots=f^{(n)}\left(1\right)=0,f\left(1\right)=1.$$
证明:
$$\max_{x\in\left[0,1\right]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|\geqslant 4^n n!.$$
83. (83.) 设 $f\in C\left[0,1\right]\bigcap D\left(0,1\right)$ 满足
$$f\left(0\right)=0,f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(0,1\right).$$

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x = f'(\xi)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

84. (84.) 设 $f \in D^1(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f'(\xi)=\xi.$$

85. (85.) 设 $f,g\in C[a,b]\bigcap D^2(a,b)$ 满足

$$f(a)=g(b),f(b)=g(a),\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f''(\xi)=g''(\eta).$$

86. (86.) 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in[0,1)$ 使得

$$\int_0^\xi f(y)\,\mathrm{d}y=f(\xi).$$

87. (87.) 设 $f\in D^2[-1,2]$ 满足

$$f(-1)=2-\frac{1}{e},f(0)=1,f(2)=2e^2-1.$$

证明: 存在 $\xi\in(-1,2)$ 使得

$$f''(\xi)-f(\xi)=2e^{\xi}+\xi-1.$$

88. (88.) 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=0$. 证明存在 $x_1\in(0,2),x_2,x_3\in[0,2]$ 使得

$$f(x_1)=f'(x_2)=\frac{2}{3}f''(x_3). \tag{11.126}$$

89. (89.) 设 $e<a<b$, 证明存在唯一的点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} a & e^{-a} & \ln a \\ b & e^{-b} & \ln b \\ 1 & -e^{-\xi} & \frac{1}{\xi} \end{vmatrix}=0.$$

90. (90.) 设 f 在 $[a,b]$ 可导且

$$|f'(x)|<k(k>0),f(a)=f(b).$$

证明:

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{k}{2}(b-a),\forall x_1,x_2\in[a,b].$$

91. (91.) 设 $f,g\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b)$ 满足 $g'(x)\neq0,\forall x\in(a,b)$. 证明: 对 $[x_k,y_k]\subset[a,b],k=1,2,\cdots,n$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[f(y_k)-f(x_k)]}{\sum\limits_{k=1}^{n}[g(y_k)-g(x_k)]}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

92. (92.) 设 $f\in C[-1,1]\bigcap D^2(-1,1)$, 证明: 存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得

$$|2f'(\eta)+\eta f''(\eta)|=|f(1)-f(-1)|.$$

93. (93.) 设 f 在 $[0,1]$ 可微满足

$$f(0)=0,f(1)=1-e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\left(1+\xi^2\right)f'(\xi)+f(\xi)=1.$$

94. (94.) 设
$$f\in C\left[a,b\right],\int_a^b f\left(x\right)e^{(k-1)x}\mathrm{d}x=0,k=1,2,\cdots,n+1,$$
证明:f 在 (a,b) 至少有 $n+1$ 个不同零点.

95. (95.) 设 $f\in D^2\left[0,\pi\right]$ 满足
$$\left|f\left(x\right)\right|\leqslant\min\left\{1-\cos x,\sin x\right\}.$$
证明: 存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $f''\left(\xi\right)=f\left(\xi\right)$.

96. (96.) 设 $f\in D^2\left(\mathbb{R}\right)$ 满足对某个 $M>0$ 成立
$$0<f\left(x\right)<M,\forall x\in\mathbb{R}.$$
证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得
$$f\left(\xi\right)f''\left(\xi\right)+2\left[f'\left(\xi\right)\right]^2=0.$$

97. (97.) 设 $f\in C\left[0,1\right]\bigcap D\left(0,1\right)$ 满足 $f\left(1\right)-f\left(0\right)=1$. 证明: 对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$, 存在 $\xi_k\in(0,1)$ 使得
$$f'\left(\xi_k\right)=\frac{n!}{k!\left(n-1-k\right)!}\xi_k^k\left(1-\xi_k\right)^{n-1-k}.$$

98. (98.) 设 $f\in D^2\left[0,1\right]$ 满足 $f'\left(0\right)=0,f'\left(1\right)+2f\left(1\right)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$f''\left(\xi\right)+4\xi f'\left(\xi\right)+\left(2+4\xi^2\right)f\left(\xi\right)=0.$$

99. (99.) 设 $f\in C\left[0,1\right]\bigcap D\left(0,1\right)$ 满足
$$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0,M\triangleq\max_{x\in[0,1]}f\left(x\right)>0.$$
证明对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ 使得
$$\frac{1}{f'\left(\xi_1\right)}-\frac{1}{f'\left(\xi_2\right)}=\frac{n}{M}.$$

100. (100.) 设 $f\in C\left[a,b\right]\bigcap D^1\left(a,b\right),c\in(a,b)$, 证明存在 $\xi\in(a,c),\eta\in(\xi,b)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(c\right)-f\left(a\right)}{c-a},f'\left(\eta\right)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}.$$

101. (101.) 设 $f\in D^2\left[0,1\right]$ 满足
$$f\left(0\right)=2,f'\left(0\right)=0,f\left(1\right)=e+e^{-1}.$$
证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''\left(\xi\right)=f\left(\xi\right)$.

102. (102.) 设 $b>0,f\in C\left[a,b\right]\bigcap D\left(a,b\right)$ 满足 $f\left(a\right)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=\frac{\xi f\left(\xi\right)}{b-\xi}.$$

103. (103.) 设 $f\in C\left[0,1\right]\bigcap D\left(0,1\right)$ 满足 $f\left(0\right)=0,f\left(1\right)=\frac{1}{4}$. 证明: 存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)+f'\left(\eta\right)=\xi^3+\eta^3.$$

104. (104.) 设 $f\in C\left[0,1\right]\bigcap D^2\left(0,1\right)$ 且 $f''\left(x\right)\neq0$. 若
$$\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=0,f\left(0\right)=f\left(1\right)>0,$$
证明:

(1): $f''\left(x\right)>0,\forall x\in(0,1)$;

(2): $f\left(x\right)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 上恰有两根;

(3): 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$f'\left(\xi\right)=\int_\xi^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

105. (105.) 设可微函数 f 严格递增且满足 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 设

$$a = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, F(x) = a\left(1-x^2\right) + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

证明:$a > 0$ 且存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $F''(\xi) = 0$.

106. (106.) 设 $f \in D^2[-1,1]$ 满足

$$f(0) = f'(0) = 0, f(-1) = -1, f(1) = 1.$$

证明: 存在 $\xi, \eta \in (-1,1)$ 使得

$$|f''(\xi)| < 2, |f''(\eta)| > 2.$$

107. (107.) 设

$$a < a' < b < b', f \in C[a,b'] \bigcap D(a,b'),$$

证明存在

$$\xi_1 \in (a,b), \xi_2 \in (a',b'), \xi_1 < \xi_2$$

使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(\xi_2) = \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}.$$

108. (108.) 设 $f \in D^2[0,1]$ 满足 $f'(0) = f'(1) = 0$. 证明至少存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$f''(\xi) + 2f(\xi)\left[f'(\xi)\right]^2 = 0.$$

109. (109.) 设广义积分 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明存在 $\xi \in (1,+\infty)$ 使得

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

110. (110.) 设广义积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 这里 a, b 都可能是奇点. 如果 f 在 (a,b) 上单调有界, 证明存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f\left(a^+\right)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x + f\left(b^-\right)\int_{\xi}^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

111. (111.) 设 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 满足

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\left(1-\xi^2\right)f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0.$$

112. (112.) 设 $f \in C^1[0,1] \bigcap D^2(0,1)$ 满足 $f(0) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 0$. 证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

113. (113.) 考虑

$$S \triangleq \left\{f \in D^2[0,1] : f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\right\},$$

以及

$$U \triangleq \{a \in \mathbb{R} : \text{对任何} f \in S, \text{存在} \eta \in (0,1) \text{使得} f''(\eta) < a\}.$$

计算 U.

114. (114.) 设 $f \in C^2[0,2]$ 满足

$$f(0) = f(1) = f(2) = f'(0) = f'(2) = 0.$$

求最佳的[14]不依赖 f 的 $C>0$ 使得

$$\max_{x\in[0,2]}|f'(x)|\leqslant C\max_{x\in[0,2]}|f''(x)|.$$

115. (115.) 设 $f\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$ 满足 $f(0)=f(1)=0$. 证明存在 $\epsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 满足当 $\lambda>0$, 存在 $\xi\in(\epsilon,1-\epsilon)$ 使得

$$\xi^{\lambda}f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

116. (116.) 设 $f\in C[0,3]\bigcap D^2(0,3)$ 满足

$$f(0)=f(1)=1,f(2)=f(3)=3.$$

证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得

$$f'(\xi)+f''(\xi)-[f'(\xi)]^2-2f(\xi)f''(\xi)=0.$$

117. (117.) 设 $n,s\in\mathbb{N},p$ 为 n 次实系数多项式, 其每个非实根 λ 满足 $|\Im(\lambda)|<\frac{\pi}{b-a}$.
若 $f\in C[a,b]\bigcap C^n(a,b)$ 满足在 $[a,b]$ 上 $n+s$ 个不同零点. 证明:$p(D)f$ 在 (a,b) 至少有 s 个不同零点. 这里 D 表示求导算子.

118. (118.) 设 $f\in C[a,b]$ 满足

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty,\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=-\infty.$$

证明: 对任何 $u\in\mathbb{R}$, 存在 $\alpha,\beta\in[a,b]$ 使得

$$u=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

119. (119.♠) 设 $g\in C^n[0,1],n\in\mathbb{N}_0$, 则存在 $\xi\in(0,1)$ 成立

$$\left|g^{(n)}(\xi)\right|\leqslant 4^n n!\int_0^1|g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

[14] 应试角度可以只证明不等式.

第 12 章 非数学类函数性态分析

内容提要

- 基本常用想法 12.1
- 函数方程 12.2
- 非数学类函数性态分析解题方法 12.3
- 杂例 12.4

12.1 基本常用想法

我们来看一个经典的小技巧, 他把取 max, min, mid 转化成初等的表达式.

命题 12.1 (多个函数取最值或者中间值)

设 f,g,h 是定义域上的连续函数, 则

(a): $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ 是定义域上的连续函数.

(b): $\mathrm{mid}\{f,g,h\}$ 是定义域上的连续函数.

注这里 $\mathrm{mid}\{f,g,h\}$ 表示取中间值函数, 显然命题12.1可以推广到多个函数的情况.

证明 只需要注意到

$$\max\{f,g\}=\frac{f+g+|f-g|}{2}; \tag{12.1}$$

$$\min\{f,g\}=\frac{f+g-|f-g|}{2}; \tag{12.2}$$

$$\mathrm{mid}\{f,g,h\}=f+g+h-\max\{f,g,h\}-\min\{f,g,h\}. \tag{12.3}$$

结论 [导数有正增长率则函数爆炸] 设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=c>0$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

笔记 类似的还有趋于 $-\infty$ 或者非极限形式的结果, 读者应该准确理解含义并使得各种情况都能复现, 我们引用本结论时未必就是本结论本身, 而是其蕴含的思想.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=c>0$, 所以存在 $X>a$, 使得 $f'(x)>\frac{c}{2},\forall x\geqslant X$. 于是由拉格朗日中值定理得到

$$f(x)=f(X)+f'(\theta)(x-X)\geqslant f(X)+\frac{c}{2}(x-X),\forall x\geqslant X.$$

让 $x\to+\infty$ 就得到

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

结论 [函数不爆破则各阶导数必然有趋于 0 的子列] 设 $k\in\mathbb{N},a\in\mathbb{R}$ 且 $f\in D^k[a,+\infty)$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|\neq+\infty$, 那么存在趋于正无穷的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f^{(k)}(x_n)=0. \tag{12.4}$$

证明 注意到若不存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得(12.4)成立那么将存在 $X>0$ 使得 $f^{(k)}$ 在 $(X,+\infty)$ 要么恒正, 要么恒负[1]. 如果找不到子列使得(12.4)成立, 那么不妨设存在 $X'>0$ 使得

$$f^{(k)}(x)\geqslant m>0,\forall x\geqslant X'. \tag{12.5}$$

[1]否则, 可以找到一串趋于 $+\infty$ 的 $f^{(k)}$ 的零点而矛盾.

仍然用 X 来表示 X', 则由 Taylor 中值定理, 我们知道对每个 $x>X$, 运用(12.5), 都有

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(X)}{j!}(x-X)^j+\frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(x-X)^k\geqslant\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(X)}{j!}(x-X)^j+\frac{m}{k!}(x-X)^k,$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了必有子列使得(12.4)成立.

定理 12.1 (严格单调和导数的关系)

1. 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 且 f 递增, 则 f 在 $[a,b]$ 严格递增的充要条件是对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 都有 $c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(c)>0$.
2. 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 且 f 递减, 则 f 在 $[a,b]$ 严格递减的充要条件是对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 都有 $c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(c)<0$.

♡

证明 若 f 在 $[a,b]$ 严格递增, 则对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$, 拉中直接找 $c\in(x_1,x_2)$ 得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0.$$

反之对任何 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 都有 $c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(c)>0$.

若有 $[s,t]\subset[a,b]$, 现在有 $c\in(s,t)$ 使得 $f'(c)>0$, 则存在充分小的 $h>0$ 使得

$$f(s)\leqslant f(c-h)<f(c)<f(c+h)\leqslant f(t),$$

这就证明了 f 严格递增. 严格递减是类似的, 我们完成了证明.

定理 12.2 (导数极限定理)

设 $f\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b]$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=c$ 存在, 证明 f 在 a 右可导且 $f'_+(a)=c$.

♡

笔记 本结果当然也可对应写出左可导的版本以及可导的版本, 最完整的版本可以参考13.21.

笔记 本结果告诉我们可在 f 连续的时候用 f' 的左右极限存在性来推 f 可导性.

证明 运用拉格朗日中值定理, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}f'(\theta(x))=c,$$

这里

$$\theta(x)\in(a,x),\ \lim_{x\to a^+}\theta(x)=a.$$

这就完成了定理12.2的证明.

例题 12.1 经典光滑函数 考虑

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & |x|>0\\ 0, & |x|=0\end{cases},$$

则 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

证明 我们归纳证明, 首先 $f\in C^0(\mathbb{R})=C(\mathbb{R})$, 假定 $f\in C^k(\mathbb{R}),k\in\mathbb{N}_0$. 注意到存在多项式 $p_{k+1}\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$f^{(k+1)}(x)=p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\forall x\neq0.$$

于是

$$\lim_{x\to0}f^{(k+1)}(x)=\lim_{x\to0}p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}p_{k+1}(x)e^{-x^2}=0,$$

运用导数极限定理12.2, 我们知道 $f^{(k+1)}(0)=0$. 由数学归纳法我们知道 $f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}$, 这就完成了例题12.1证明.

来看一个同济大学的考研真题:

例题 12.2 构造一个 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 使得

$$f|_{(-\infty,1)}=0,f|_{(2,+\infty)}=1.$$

我们直接证明更强的

例题 12.3 对 $\tau\in\mathbb{R}$, 证明存在 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$f|_{(-\infty,\tau)}=0,f|_{(\tau+1,+\infty)}=1.$$

笔记 构造的想法可以视为一个背诵问题.

证明 考虑

$$f(x)\triangleq\begin{cases}0, & x\in(-\infty,\tau]\\ \left(1-e^{\frac{1}{x-\tau-1}}\right)e^{-e^{\frac{1}{x-\tau-1}}}, & x\in(\tau,\tau+1)\\ 1, & x\in[\tau+1,+\infty)\end{cases}$$

为所求.

例题 12.4 是否存在 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 使得 $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ 且

$$f'(x)=f(f(x)),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 事实上因为 $f'(x)=f(f(x))>0$, 我们知道 f 严格递增, 从而 $f'(x)=f(f(x))$ 严格递增, 故 f 是一个下凸函数.

因为 f 有下界和函数版本的单调有界必收敛定理7.3. 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$. 则

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=f(A)>0,$$

从而由拉格朗日中值定理和 f' 递增性, 我们知道

$$f(x)=f(0)+f'(\theta(x))x\leqslant f(0)+f'(x)x,\theta(x)\in(x,0),\forall x\in(-\infty,0).$$

换言之 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, 矛盾!, 这就证明了 f 不存在.

笔记 最后一步即导数有正增长率, 因此当 $x\to-\infty$ 时函数必然爆破到负无穷, 通过拉中得到其被线性函数所控制来严格证明.

例题 12.5 是否存在 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 使得 f 在 $\mathbb{R}$ 严格递增且

$$f'(x)=f(f(x)),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 注意到

$$f''(x)=f'(x)f'(f(x))\geqslant0.$$

故 f 是递增下凸函数, 故

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty.$$

于是存在 $X>0$, 使得对任何 $x\geqslant X$, 都有 $f''(x)\geqslant8$. 于是由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x)=f(X)+f'(X)(x-X)+\frac{f''(\theta)}{2}(x-X)^2\geqslant4(x-X)^2\geqslant x^2,\forall x\geqslant2X.$$

又取 $Y>X$, 使得 $f(x)\geqslant2X,\forall x\geqslant Y$, 则

$$f'(x)=f(f(x))\geqslant f^2(x),\forall x\geqslant Y.$$

现在

$$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(2x)}=\int_x^{2x}\frac{f'(y)}{f^2(y)}dy\geqslant x.$$

上式两边让 $x\to+\infty$ 知 $0\geqslant+\infty$, 矛盾!

定理 12.3 (连续函数中间值定理)

设 $p_1,p_2,\cdots,p_n\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}p_j=1$. 则对有介值性函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 和 $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b$, 必然存在 $\theta\in[x_1,x_n]$, 使得

$$f(\theta)=\sum_{j=1}^{n}p_jf(x_j). \tag{12.6}$$

♡

笔记 中间值可以同过介值定理取到是非常符合直观的. 特别的当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$, 就是所谓的平均值定理

$$f(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_j).$$

证明 设

$$M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}f(x_i),m=\min_{1\leqslant i\leqslant n}f(x_i).$$

于是

$$m=m\sum_{j=1}^{n}p_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}p_jf(x_j)\leqslant M\sum_{j=1}^{n}p_j=M.$$

因此由 f 的介值性知: 必然存在 $\theta\in[x_1,x_n]$, 使得(12.6)成立.

命题 12.2 (连续单射等价严格单调)

设 f 是区间 I 上的连续函数, 证明 f 在 I 上严格单调的充要条件是 f 是单射.

♠

证明 如若不然, 不妨考虑[2] $f(x_3)<f(x_1)<f(x_2),x_1<x_2<x_3$, 于是由连续函数介值定理知存在 $\theta\in[x_2,x_3]$ 使得 $f(\theta)=f(x_1)$, 这就和 f 在 I 上单射矛盾! 故 f 严格单调.

例题 12.6 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f 满足方程

$$f(f(x))=e^{-x}.$$

笔记 注意积累二次复合的常用处理手法, 即运用命题12.2.

证明 设 $f(x)=f(y)$, 则

$$e^{-x}=f(f(x))=f(f(y))=e^{-y}.$$

由 e^{-x} 的严格单调性我们知 $x=y$, 于是 f 是单射. 由命题12.2知 f 严格单调. 又递增和递增复合递增, 递减和递减复合也递增, 我们知道 $f(f(x))=e^{-x}$ 递增, 这和 e^{-x} 严格递减矛盾! 故这样的 f 不存在.

例题 12.7 求 $k\in\mathbb{R}$ 的范围, 使得存在 $f\in C(\mathbb{R})$ 使得 $f(f(x))=kx^9$.

证明 和例12.6一致, $k\geqslant 0$, 于是我们可待定 $f(x)=cx^3$, 需要 $c^4x^9=kx^9$ 知可取 $c=\sqrt[4]{k}$.

命题 12.3 ($[a,b]$ 到 $[a,b]$ 的连续函数必有不动点)

设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是连续函数, 证明 f 在 $[a,b]$ 上有不动点.

♠

笔记 注意 $[a,b]\to[a,b]$ 表示 f 是从 $[a,b]\to[a,b]$ 的映射, 右端的 $[a,b]$ 是像集而不是值域, f 可能取不到整个 $[a,b]$.

[2]其余情况类似考虑, 视频说的更细.

证明 考虑 $g(x)=f(x)-x\in C[a,b]$, 注意到 $g(a)\geqslant 0, g(b)\leqslant 0$, 由连续函数的零点定理知道 f 在 $[a,b]$ 上有不动点.

我们有如下高维推广, 其难度过大, 仅做兴趣了解, 可以跳过.

定理 12.4 (♠, *Poincare-Miranda 定理)

设 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in C\left([a,b]^n\right)$ 以及

$$\sup_{x_i=a} f_i\leqslant a_i\leqslant \inf_{x_i=b_i} f_i, i=1,2,\cdots,n,$$

证明: 存在 $\mathbf{x}^0\in[a,b]^n$, 使得

$$f_i\left(\mathbf{x}^0\right)=a_i, i=1,2,\cdots,n. \tag{12.7}$$

♡

笔记 这个结果可以视为 Brouwer 不动点定理的定向版本.

证明 这个证明是依赖代数拓扑的, 我们将其转化为wiki 叙述的形式.

我们用 $f_i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\mathbf{x}\right)-a_i$ 代替 $f_i(\mathbf{x}), i=1,2,\cdots,n$ 可以不妨设 $a=-1,b=1$ 和 $a_i=0$, 这就是网页中叙述的情况.

命题 12.4 (没有极值点则严格单调)

设 $f\in C[a,b]$ 且 f 在 (a,b) 没有极值点, 证明 f 在 $[a,b]$ 严格单调.

♠

证明 因为闭区间上连续函数必然取得最值, 且在 (a,b) 的最值点必然是极值点, 因此由假设我们不妨设 f 在 $[a,b]$ 端点取得最值. 不失一般性假设

$$f(a)=\min_{x\in[a,b]} f(x), f(b)=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

若在 $[a,b]$ 上 f 不严格递增, 则存在 $x_2>x_1$, 使得 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$. 若 $x_1>a$, 在 $[a,x_2]$ 上我们注意到 $f(x_1)\geqslant\max\{f(a),f(x_2)\}$, 于是 f 在 (a,x_2) 达到极大值, 这和 f 在 (a,b) 没有极值点矛盾!

若 $x_1=a,x_2<b$, 则注意到 $f(x_2)\leqslant\min\{f(a),f(b)\}$, 同样的 f 在 (a,b) 取得极小值而矛盾.

若 $x_1=a,x_2=b$, 则 f 恒为常数而矛盾! 这就完成了证明.

命题 12.5 (函数值相同的点导数值相同 ♠)

设 $f\in D(a,b)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2), x_1,x_2\in(a,b)$, 必有 $f'(x_1)=f'(x_2)$, 证明 f 在 (a,b) 是单调函数.

♠

证明 若 f 不在 (a,b) 是单调, 则不妨设 $a<c<d<b$, 使得 $f'(c)<0<f'(d)$.

由 $f'(d)=\lim\limits_{x\to d^-}\frac{f(x)-f(d)}{x-d}>0$ 知在 d 的左邻域内, $f(x)<f(d)$. 由 $f'(c)=\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$ 知 f 在 c 的右邻域内有 $f(x)<f(c)$, 故可以设 f 在 $[c,d]$ 最小值点为 $\xi\in(c,d)$.

当 $f(c)\geqslant f(d)$, 令

$$\sigma=\max\{x\in[c,\xi]:f(x)=f(d)\}.$$

注意到 $\sigma<\xi$. 显然 $f'(\sigma)\leqslant 0$, 因为如果 $f'(\sigma)>0$ 会导致在 σ 右邻域内有大于 $f(d)$ 的点, 由介值定理可以找到 $\xi>\sigma'>\sigma$, 使得 $f(\sigma')=f(d)$ 而和 σ 是上确界而矛盾! 而函数值相同的点导数值也相同, 因此 $f'(\sigma)=f'(d)>0$, 这就是一个矛盾!

当 $f(c)\leqslant f(d)$ 时类似可得矛盾! 我们完成了证明.

命题 12.6 (一个经典初等不等式)

设 $a,b\geqslant 0$, 证明:

$$\begin{cases} a^p+b^p\leqslant(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}\left(a^p+b^p\right), & p\geqslant 1, p\leqslant 0; \\ a^p+b^p\geqslant(a+b)^p\geqslant 2^{p-1}\left(a^p+b^p\right), & 0<p<1. \end{cases}. \tag{12.8}$$

♠

笔记 不等式左右是齐次对称的, 我们可以设[3]$t=\frac{a}{b}\in[0,1]$, 于是(12.8)变成

$$\begin{cases} t^p+1\leqslant(t+1)^p\leqslant 2^{p-1}\left(t^p+1\right), & p\geqslant 1, p\leqslant 0; \\ t^p+1\geqslant(t+1)^p\geqslant 2^{p-1}\left(t^p+1\right), & 0<p<1. \end{cases}.$$

证明 考虑 $f(t)\triangleq\frac{(t+1)^p}{1+t^p}, t\in[0,1)$, 我们有

$$f'(t)=p(t+1)^{p-1}\frac{1-t^{p-1}}{\left(1+t^p\right)^2}\begin{cases}\geqslant 0, & p\geqslant 1, p\leqslant 0\\ <0, & 0<p<1\end{cases}.$$

于是

$$\begin{cases} 2^{p-1}=f(1)\geqslant f(t)\geqslant f(0)=1, & p\geqslant 1, p\leqslant 0; \\ 2^{p-1}=f(1)\leqslant f(t)\leqslant f(0)=1, & 0<p<1, \end{cases}$$

这就证明了(12.8).

命题 12.7 (无重根多项式逼近)

设 f 是 n 次根全为实数的多项式, 对 $\epsilon>0$, 证明:$f_\epsilon=\left(1-\epsilon\frac{d}{dx}\right)^n f$ 的根全为实数且无重根.

证明 设

$$f=a(x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_s)^{m_s}, a\neq 0, \sum_{j=0}^{s}m_j=n,$$

这里 x_i 严格递增并记 $x_{s+1}=+\infty$. 注意到

$$\left(1-\epsilon\frac{d}{dx}\right)f=f-\epsilon f'=-\epsilon e^{\frac{1}{\epsilon}x}\left[e^{-\frac{1}{\epsilon}x}f\right]'.$$

由

$$\left(e^{-\frac{1}{\epsilon}x}f\right)|_{x_i}=0, i=0,1,2,\cdots,s+1$$

和罗尔中值定理以及广义罗尔中值定理11.6得 $f-\epsilon f'$ 在 $(x_{i-1},x_i), i=1,2,\cdots,s+1$ 有实根. 又 x_i 是 $f-\epsilon f'$ 的 m_i-1 重根, 于是我们得到了 $f-\epsilon f'$ 的

$$s+1+\sum_{i=0}^{s}(m_i-1)=n$$

个根. 因 $f-\epsilon f'$ 次数为 n, 所以罗尔得到的根都为单根.

现在每一次作用 $\left(1-\epsilon\frac{d}{dx}\right)$ 都会使得多项式的重根最大重数少 1 但仍有 n 个实根, 因此 $f_\epsilon=\left(1-\epsilon\frac{d}{dx}\right)^n f$ 的根全为实数且无重根.

例题 12.8Karamata 不等式 设两组递减实数列

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n, y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$$

满足

$$\sum_{i=1}^{k}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{k}y_i, k=1,2,\cdots,n-1, \sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

则

1. 对 $[\min\{y_n,x_n\},\max\{x_1,y_1\}]$ 上的下凸函数 f 有

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}f(y_i).$$

当 f 严格下凸的时候, 等号成立的充要条件是

$$x_i=y_i, i=1,2,\cdots,n.$$

[3](12.8)两边同时除以 b^p.

2. 对 $[\min\{y_n,x_n\},\max\{x_1,y_1\}]$ 上的上凸函数 f 有
$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(y_i).$$
当 f 严格下凸的时候, 等号成立的充要条件是
$$x_i=y_i,i=1,2,\cdots,n.$$

注

1. 对于第一个命题, 从证明过程中可以看到, 若 f 是递增下凸函数, 则 $c_n\geqslant 0$, 从而条件
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$
可以改为
$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}y_i,$$
此时所叙述的不等式仍然成立. 若 f 是递增严格下凸函数, 则 f 严格递增, 因此所叙述等号成立条件也成立.
2. 对于第二个命题, 从证明过程中可以看到, 若 f 是递减上凸函数, 则 $c_n\leqslant 0$, 从而条件
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$
可以改为
$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}y_i,$$
此时所叙述的不等式仍然成立. 若 f 是递减严格上凸函数, 则 f 严格递减, 因此所叙述等号成立条件也成立.

证明

1. 我们可以移除 $x_i=y_i$ 的项使得不影响要证的. 不妨设
$$x_i\neq y_i,i=1,2,\cdots,n.$$
记
$$c_i\triangleq\frac{f(x_i)-f(y_i)}{x_i-y_i},i=1,2,\cdots,n.$$
由 f 下凸我们有 c_i 单调递减. 考虑
$$A_i\triangleq\sum_{k=1}^{i}x_k,B_i\triangleq\sum_{k=1}^{i}y_k,i=1,2,\cdots,n.$$
我们有
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(y_i)]&=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-y_i)\\&\overset{\text{Abel 变换8.2}}{=}\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i)+c_n(A_n-B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i)\geqslant 0.\end{aligned}$$
当 f 严格下凸且 $x_i=y_i$ 不全成立, 则必然有某个最大的 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $A_i>B_i$, 此时注意到 $c_i\neq c_{i+1}$, 否则
$$x_i=x_{i+1},y_i=y_{i+1}\Rightarrow A_{i+1}>B_{i+1}.$$
因此我们有
$$\sum_{i=1}^{n-1}(c_i-c_{i+1})(A_i-B_i)>0,$$

这就证明了当 f 严格下凸的时候, 等号成立的充要条件是

$$x_i = y_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

2. 同上.

12.2 函数方程

12.2.1 柯西方程

定义 12.1

我们称 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足的方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{12.9}$$

为 Cauchy 方程.

♣

笔记 显然 $f(x) = cx, c \in \mathbb{R}$ 为 Cauchy 方程的解, 一个自然的问题是, 满足柯西方程(12.9)的函数 f 是否一定是 cx?

命题 12.8 (cauchy 方程基本性质)

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是柯西方程(12.9)的解, 则

$$f(rx) = rf(x), \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{12.10}$$

♠

笔记 证明的想法非常重要, 应该熟记于心.

证明 **Step 1** 注意到 $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, 然后

$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x).$$

依次下去可得

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12.11}$$

Step 2 现在对每个 $r = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}, p \neq 0$, 我们注意到

$$rf(x) = f(rx) \Leftrightarrow pf(x) = qf\left(\frac{p}{q}x\right).$$

现在反复运用式(12.11), 我们知道

$$qf\left(\frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x).$$

现在就证明了式(12.10).

为了把式(12.10)中的 $r \in \mathbb{Q}$ 加强为 $r \in \mathbb{R}$, 我们需要对 f 加一些逼近性条件.

定理 12.5

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足(12.9)且 f 连续, 证明

$$f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

♡

证明 对每个无理数 r, 存在有理数列 $r_n, n = 1, 2, \cdots$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$. 运用命题(12.8)我们知道

$$f(rx) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = rf(x).$$

结论 [函数方程基本模型逼近方法] 命题12.8和定理12.5展示的逐步逼近的方法是解决函数方程的重要方法之一, 熟记于心.

现在我们来建立完整的 Cauchy 方程的结果.

定理 12.6 (Cauchy 方程基本定理)

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是柯西方程(12.9)的解, 则满足下述条件之一

1. f 在某点连续.
2. f 在某个区间有上界或者下界.
3. f 在某个区间上单调.
4. f 在一个正测集上有界.
5. f 可测.
6. $\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不稠密.

我们就有 $f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}$.

♡

笔记 非数学类只需要掌握前三条.

证明

1. 如果 f 在 x_0 连续, 则对任何 $x'\in\mathbb{R}$, 有
$$\lim_{x\to x'}f(x)=\lim_{x\to x'}f(x-x'+x_0)+\lim_{x\to x'}f(x'-x_0)=f(x_0)+f(x'-x_0)=f(x').$$
于是我们证明了 f 在 x' 连续. 于是由定理12.5我们知道 $f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}$.
2. 不妨设 f 在包含原点的对称区间[4]I 上有上界[5]. 下证 f 在原点连续. 注意到由命题12.8我们知道
$$f(x)=\frac{f(rx)}{r},\forall r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},x\in\mathbb{R}. \tag{12.12}$$
现在对任何 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 取[6]$r_n\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ 使得
$$\lim_{n\to\infty}r_n=+\infty,\lim_{n\to\infty}r_nx_n=0. \tag{12.13}$$
注意到在(12.12)中令 $r=-1$ 知 f 是奇函数, 从而 f 在 I 上有下界. 现在由于有界和无穷小之积也为无穷小, 我们由(12.12)和(12.13)得
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(r_nx_n)}{r_n}=0.$$
由海涅准则即得 f 在 $x=0$ 连续. 故由第一点知 $f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}$.
3. 在区间单调自然在子区间上有界, 用第二点即得 $f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}$.
4. 其依托于经典结论

   结论 设勒贝格可测集 A,B 的勒贝格测度都非 0, 则 $A+B$ 包含一个区间.

   上述结论可以在任何一本实变函数习题集中找到, 例如徐森林. 运用此结论假设 f 在 E 上有界, E 的勒贝格测度非 0. 则 $E+E$ 包含一个区间 I, 于是对 $z\in I$, 存在 $x,y\in E$ 使得 $z=x+y$, 然后
$$|f(z)|\leqslant|f(x)|+|f(y)|\leqslant2\sup_E|f|.$$
由第二点即得 $f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}$.
5. 由 Lusin 定理, 存在有正测度的紧集 K 和 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 g 使得 $f(x)=g(x),\forall x\in K$, 故 f 在 K 上有界. 现在我们就可以运用上一条知 $f(x)=f(1)x,\forall x\in\mathbb{R}$.

[4]即 $(-a,a),a>0$.

[5]否则做个平移即可.

[6]实际上可对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 可取 $r_n\in\mathbb{Q}$ 使得
$$\begin{cases}\left|r_n-\frac{1}{\sqrt{|x_n|}}\right|<1, & x_n\neq0\\ r_n=0, & x_n=0\end{cases}.$$

6. 若存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)\neq f(1)x_0$, 显然 $x_0\neq 0,1$. 于是

$$\begin{aligned}&(1,f(1)),(x_0,f(x_0))\text{ 线性无关}\\ \Rightarrow\ &\mathbb{R}^2=\{c_1(1,f(1))+c_2(x_0,f(x_0)):c_1,c_2\in\mathbb{R}\}\\ \Rightarrow\ &\mathbb{R}^2=\overline{\{c_1(1,f(1))+c_2(x_0,f(x_0)):c_1,c_2\in\mathbb{Q}\}}\\ \Rightarrow\ &\mathbb{R}^2=\overline{\{(c_1+c_2x_0,f(c_1+c_2x_0)):c_1,c_2\in\mathbb{Q}\}}\\ \Rightarrow\ &\mathbb{R}^2=\overline{\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}},\end{aligned}$$

这就证明了 $\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 稠密. 这是一个矛盾!

例题 12.9Cauchy 方程的非线性解 ♠ 构造 Cauchy 方程12.9的非 $f(x)=cx$ 的解.

证明 把 $\mathbb{R}$ 视为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, 设 S 是这个线性空间的一组基, 则定义

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\sum_{i=1}^{N}c_i\eta_i\to\sum_{i=1}^{N}c_ig(\eta_i)\eta_i,\forall\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N\in S,N\in\mathbb{N},$$

这里 $g:S\to\mathbb{R}$ 是任一通常的函数. 显然 f 是这个线性空间上的线性变换但不是直线.

12.2.2 函数方程综合训练

先来看迭代法的思想: 即想办法凑出裂项可和的形式.

例题 12.10 求函数方程 $2f(2x)=f(x)+x$ 的所有 $\mathbb{R}$ 上在 $x=0$ 的连续解.

证明 注意到

$$\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)+\frac{x}{2^{2n+2}},n=0,1,2,\cdots.$$

于是

$$f(x)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{2^{2n+2}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}x=\frac{x}{3},$$

因此结合 $f(0)=0$ 知 $f(x)=\frac{x}{3}$.

例题 12.11 计算函数方程 $f(\log_2 x)=f(\log_3 x)+\log_5 x$ 所有 $\mathbb{R}$ 上的连续解.

笔记 注意到

$$f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)+\frac{\ln x}{\ln 5},x>0.$$

为了凑裂项的形式, 我们待定

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 3}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5},n\in\mathbb{N}.$$

注意到我们有两种选择

$$\frac{\ln a_n}{\ln 2}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 3},\frac{\ln a_n}{\ln 3}=\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}.$$

前者公比 $\frac{\ln 3}{\ln 2}>1$, 后者公比 $\frac{\ln 2}{\ln 3}<1$, 为了求和方便我们选取后者.

证明 取

$$a_1=x,\ln a_n=\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1}\ln x,n\in\mathbb{N}.$$

现在

$$f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)+\frac{\ln a_n}{\ln 5},n=1,2,\cdots,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)-f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_n}{\ln 5}=\frac{\ln x}{\ln 5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)^{n-1}=\frac{\ln x}{\ln 5}\frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}.$$

结合

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{\ln a_n}{\ln 2}\right)-f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)\right]=f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)-\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{\ln a_{n+1}}{\ln 2}\right)=f\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)-f(0),$$

我们知道

$$f(x)=f(0)+\frac{x\ln 2}{\ln 5}\frac{\ln 3}{\ln\frac{3}{2}}.$$

例题 12.12 计算 $f(x+y)-f(x-y)=f(x)f(y)$ 所有在 $x=0$ 连续的 $\mathbb{R}$ 上的解 f.

证明 取 $y=x$, 于是 $f(2x)-f(0)=f^2(x)$, 令 $x=0$ 知 $f(0)=0$. 现在考虑 $f(2x)=f^2(x)\geqslant 0$, 即 f 是非负函数. 注意到对每个 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)=f^{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cdots=f^{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right). \tag{12.14}$$

于是在(12.14)中令 $n\to\infty$ 并结合 f 在 $x=0$ 连续性我们有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f^{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right)=0.$$

再来看拼凑 Cauchy 方程型:

例题 12.13 **$\mathbb{R}$ 上的既凸又凹的连续函数是直线** $\mathbb{R}$ 上的既凸又凹的连续函数是直线.

笔记 容易由证明知道任何开区间 (a,b) 上的既凸又凹的连续函数也是直线.

证明 注意到

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y).$$

考虑 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则运用 $f(x+y)+f(0)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 知 g 满足 Cauchy 方程12.9, 于是我们知道

$$f(x)=f(0)+[f(1)-f(0)]x.$$

例题 12.14 求方程 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 的全部连续解.

证明 首先

$$f(0)=xf(0),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=0,f(x)=xf(1)+f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(1)=0.$$

现在

$$f(-x)=xf(-1)-f(x),f(x)=-xf(-1)-f(-x)\Rightarrow 2xf(-1)=0\Rightarrow f(-1)=0.$$

于是

$$f(-x)=xf(-1)-f(x)=-f(x),$$

即 f 是奇函数.

对 $x,y>0$, 取 $x=e^s,y=e^t,s,t\in(-\infty,+\infty)$, 我们有

$$\frac{f(e^{s+t})}{e^{s+t}}=\frac{f(e^s)}{e^s}+\frac{f(e^t)}{e^t},$$

即 $\frac{f(e^x)}{e^x}$ 满足 Cauchy 方程12.9. 因此

$$\frac{f(e^x)}{e^x}=\frac{f(e)}{e}x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

现在可得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{f(e)}{e}x\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\\ \frac{f(e)}{e}x\ln(-x), & x<0\end{cases}.$$

例题 12.15 求函数方程 $f(x)f(y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 的 $\mathbb{R}$ 上的非 0 连续解.

证明 取 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)\neq 0$, 则注意到

$$f(x)f(x_0)=f\left(\sqrt{x^2+x_0^2}\right)=f(-x)f(x_0)$$

我们知道 $f(x)=f(-x)$ 是偶函数.

采用方法12.2.1, 我们容易归纳得

$$f\left(\sqrt{n}x\right)=[f(x)]^n,\forall n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}.$$

注意到对所有 $p\in\mathbb{N}_0,q\in\mathbb{N}$, 我们有

$$f\left(\sqrt{\frac{p}{q}}x\right)=[f(x)]^{\frac{p}{q}}\Leftrightarrow f^q\left(\sqrt{\frac{p}{q}}x\right)=[f(x)]^p\Leftrightarrow f\left(\sqrt{p}x\right)=[f(x)]^p,$$

结合偶函数即得对所有 $r\in\mathbb{Q}$ 有

$$f\left(\sqrt{r}x\right)=[f(x)]^r. \tag{12.15}$$

由函数的连续性得式(12.15)对 $r\in\mathbb{R}$ 都成立, 于是

$$f(r)=[f(1)]^{r^2},f(1)\neq 0.$$

例题 12.16 设 f 在 $x=0$ 连续并满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 计算

$$3f(x)-4f(4x)+f(16x)=3x,\forall x\in\mathbb{R},$$

求 f.

笔记 证明的想法是拆分成两个基本的函数方程迭代.

证明 将函数方程变形为

$$[f(x)-f(4x)]-\frac{1}{3}[f(4x)-f(16x)]=x.$$

设 $g(x)=f(x)-f(4x)$, 则 $g(x)-\frac{1}{3}g(4x)=x$, 于是

$$3^ng\left(\frac{x}{4^n}\right)-3^{n-1}g\left(\frac{x}{4^{n-1}}\right)=\frac{3^nx}{4^n},n=1,2,\cdots.$$

求和得

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{g\left(\frac{x}{4^n}\right)}{\frac{1}{4^n}}-g(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{3^jx}{4^j}.$$

令 $n\to\infty$ 就有

$$-g(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{3^jx}{4^j}=\frac{\frac{3}{4}x}{1-\frac{3}{4}}=3x.$$

于是

$$f(x)-f(4x)=-3x\Rightarrow f\left(\frac{x}{4^n}\right)-f\left(\frac{x}{4^{n-1}}\right)=-\frac{3x}{4^n},n=1,2,\cdots.$$

现在

$$f\left(\frac{x}{4^n}\right)-f(x)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{3x}{4^j}.$$

令 $n\to\infty$ 就有

$$f(0)-f(x)=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{3x}{4^j}=-3\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}x=-x.$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在和 f 在 $x=0$ 连续知 $f(0)=0$. 故 $f(x)\equiv x$.

来看清华求真一个期末考试题:

例题 12.17 是否存在连续函数 $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 使得

$$\frac{3}{4}\int_0^x |f(t)|^2\,dt=\frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2,\forall x>0.$$

如果存在, 求出 f 的所有表达式, 如果不存在, 说明理由.

证明 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, 注意到

$$\frac{F^2(x)}{x}=\frac{3}{4}\int_0^x |F'(t)|^2\,dt.$$

两边求导得微分方程

$$\frac{2xF(x)F'(x)-F^2(x)}{x^2}=\frac{3}{4}[F'(x)]^2.$$

视上式为 $F'(x)$ 的二次函数, 则得

$$-\frac{3}{4}x^2\left[F'(x)-\frac{2F(x)}{x}\right]\left[F'(x)-\frac{2F(x)}{3x}\right]=0,$$

即

$$F'(x)=\frac{2F(x)}{x},F''(x)=\frac{2F(x)}{3x},$$

解得

$$F(x)=cx^2或cx^{\frac{2}{3}},c>0,$$

即

$$f(x)=cx或cx^{-\frac{1}{3}},c>0,$$

但后者在 $x=0$ 无定义, 前者在 $x=0$ 时为 0, 故解不存在.

例题 12.18 设

$$f(a)=f(b)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b),\forall a,b\in\mathbb{R},$$

求 f.

证明 显然 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 等式两边对 a 求导得

$$f'(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b).$$

两边对 b 求导得

$$0=\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{4}f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b)=\frac{1}{4}f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b),$$

即 $f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)=0,\forall a\neq b$, 故 $f'''(x)\equiv 0$. 因此 f 是二次函数.

例题 12.19 设 $n\in\mathbb{N},f\in C^{n+2}(\mathbb{R})$ 使得存在 $\theta\in\mathbb{R}$ 满足对任何 $x,h\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n.$$

证明: f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.

证明 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f^{(n)}(x+\theta h)=f^{(n)}(x)+f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{2}\theta^2h^2,$$

因此

$$\begin{aligned}f(x+h)&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{2}\theta^2h^2}{n!}h^n.\end{aligned}$$

继续由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x+h)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j+\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}h^{n+2},$$

因此

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}h^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}h^{n+2}=\frac{f^{(n+1)}(x)\theta h+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{2}\theta^2h^2}{n!}h^n.$$

化简得

$$\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{\theta}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{\theta^2f^{(n+2)}(\xi)}{2n!}-\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\right]h.$$

当 $\theta\neq\frac{1}{n+1}$, 让 $h\to0$ 得 $\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{\theta}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)=0$, 即 $f^{(n+1)}(x)=0$. 当 $\theta=\frac{1}{n+1}$, 成立 $\frac{\theta^2f^{(n+2)}(\xi)}{2n!}-\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}=0$, 让 $h\to0$, 有 $\xi,\eta\to x$, 此时 $f^{(n+2)}(x)=0$, 故 f 是一个不超过 $n+1$ 次的多项式.

例题 12.20 若 f 满足 $f'(0)$ 存在且

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

求 f.

证明 首先

$$f(0)=\frac{f(0)+f(0)}{1-f^2(0)}\Rightarrow f(0)=0,$$

于是

$$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{f(y)}{y}+f^2(x)\frac{f(y)}{y}}{1-f(x)f(y)}=f'(0)+f^2(x)f'(0).$$

现在解微分方程得

$$f(x)=\tan\left[f'(0)x\right].$$

例题 12.21 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

证明:$f\equiv0$ 或者 $f(x)=\cos(ax),f(x)=\cosh(ax),a\in\mathbb{R}$.

证明 首先

$$2f(0)=2f^2(0)\Rightarrow f(0)=0,1.$$

若 $f(0)=0$, 我们有

$$2f(x)=f(x)f(0)=0\Rightarrow f\equiv0.$$

若 $f(0)=1$, 我们有

$$f(y)+f(-y)=2f(y)\Rightarrow f(y)=f(-y).$$

对任何 $t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}2\int_{-t}^{t}f(x)f(y)\,\mathrm{d}y&=\int_{-t}^{t}f(x+y)\,\mathrm{d}y+\int_{-t}^{t}f(x-y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_{x-t}^{x+t}f(y)\,\mathrm{d}y+\int_{x-t}^{x+t}f(y)\,\mathrm{d}y\\&=2\int_{x-t}^{x+t}f(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为 $f(0)=1>0$, 所以存在 $t>0$ 使得 $\int_{-t}^{t} f(y)\,\mathrm{d}y>0$. 现在我们有

$$f(x)=\frac{\int_{x-t}^{x+t} f(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{-t}^{t} f(y)\,\mathrm{d}y}\in C^1(\mathbb{R}).$$

进一步得 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 于是我们有 f' 是奇函数从而 $f'(0)=0$. 我们还有

$$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y),$$

即得微分方程

$$2f''(x)=2f(x)f''(0),f(0)=1,f'(0)=0.$$

解得

$$f(x)=\begin{cases}\cosh\left(\sqrt{f''(0)}x\right), & f''(0)>0\\ 1, & f''(0)=0\\ \cos\left(\sqrt{-f''(0)}x\right), & f''(0)<0\end{cases}.$$

现在我们完成了证明.

12.3 非数学类函数性态分析解题方法

例题 12.22Gronwall 不等式 设 $\alpha,\beta,\mu\in C[a,b]$ 且 β 非负, 若还有

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\mu(s)\,ds,\forall t\in[a,b]. \tag{12.16}$$

证明

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds,\forall t\in[a,b].$$

若还有 α 递增, 我们有

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds},\forall t\in[a,b].$$

笔记 解微分方程即得构造函数. 参考中值点的一阶构造类11.10. 考虑 $F(t)=\int_a^t\beta(s)\mu(s)\,ds$, 则

$$F'(t)=\beta(t)\mu(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)F(t).$$

于是考虑微分方程

$$y'=\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)y\Rightarrow y=ce^{\int_a^t\beta(s)ds}+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds.$$

故得到构造函数

$$c(t)=\frac{F(t)-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds}{e^{\int_a^t\beta(s)ds}}=F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)du}ds,t\in[a,b].$$

证明

构造

$$c(t)=F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}-\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)du}ds,t\in[a,b],$$

这里 $F(t)=\int_a^t\beta(s)\mu(s)\,ds$. 由不等式(12.16)知

$$F'(t)\leqslant\alpha(t)\beta(t)+F(t)\beta(t),\forall t\in[a,b]. \tag{12.17}$$

于是由(12.17)知

$$c'(t)=[F'(t)-\alpha(t)\beta(t)-\beta(t)F(t)]e^{\int_t^a\beta(s)ds}\leqslant0,$$

因此

$$c(t)\leqslant c(a)=0,$$

这就得到了

$$F(t)e^{-\int_a^t\beta(s)ds}\leqslant\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^a\beta(u)du}ds.$$

再用一次不等式(12.16), 即得

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+F(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds,\forall t\in[a,b].$$

特别的, 当 α 递增, 我们有不等式

$$\mu(t)\leqslant\alpha(t)+\alpha(t)\int_a^t\beta(s)e^{\int_s^t\beta(u)du}ds=\alpha(t)e^{\int_a^t\beta(s)ds},\forall t\in[a,b].$$

例题 12.23 设 $f\in C[0,+\infty)$ 满足

$$f^2(x)\leqslant1+2\int_0^x f(t)dt,\forall x\geqslant0. \tag{12.18}$$

证明 $f(x)\leqslant1+x,\forall x\geqslant0.$

笔记 考虑微分方程 $y'=\sqrt{1+2y}$, 解得 $\sqrt{1+2y}=x+c$, 于是得构造函数 $c(x)=\sqrt{1+2F(x)}-x$. 此外还要注意分母是否为 0 等问题.

证明 若 $f(x)>0$, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则由(12.18)知

$$(F'(x))^2\leqslant1+2F(x).$$

因此构造

$$g(x)=\sqrt{1+2F(x)}-x,$$

则

$$g'(x)=\frac{F'(x)-\sqrt{1+2F(x)}}{\sqrt{1+2F(x)}}\leqslant0,$$

于是

$$\sqrt{1+2F(x)}-x=g(x)\leqslant g(0)=\sqrt{1+2F(0)}=1,\forall x\geqslant0.$$

故继续用(12.18), 我们知道

$$f^2(x)\leqslant1+2F(x)\leqslant(x+1)^2\Rightarrow f(x)\leqslant1+x.$$

♠ 如果 f 不一定恒正怎么办呢? 注意到 $1+2F(0)=1>0$, 于是上述构造的 g 有意义且在 0 的右邻域内递减, 从而在右邻域内有 $\sqrt{1+2F(x)}\leqslant x+1$. 记 $x_0=\sup\left\{x\geqslant0:\sqrt{1+2F(y)}\leqslant1+y,\forall y\in[0,x]\right\}$.

若 $x_0<+\infty$, 则 $\sqrt{1+2F(x_0)}=x_0+1$ 且 $g(x)$ 在 x_0 右邻域同样递减. 于是在 x_0 右邻域内同样有

$$g(x)\leqslant g(x_0)=\sqrt{1+2F(x_0)}-x_0=1,$$

于是 $\sqrt{1+2F(x)}\leqslant x+1$ 仍然在 x_0 右邻域成立, 这和 x_0 是 sup 矛盾! 故我们证明了 $x_0=+\infty$, 这就完成了证明.

例题 12.24 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微且

$$f(0),f'(0)\geqslant0,f''(x)\geqslant f(x),\forall x\geqslant0. \tag{12.19}$$

证明

$$f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x,\forall x\geqslant0. \tag{12.20}$$

笔记 通过 $f''-f'=f-f'$ 视为一阶构造类来构造函数. 注意双曲三角函数和三角函数有着类似的不等式关系.

证明 令 $g(x)=f'(x)-f(x)$, 由(12.19)知

$$g'(x)\geqslant-g(x)\Rightarrow[g(x)e^x]'\geqslant0\Rightarrow g(x)e^x\geqslant g(0)\Rightarrow f'(x)-f(x)\geqslant e^{-x}g(0).$$

继视为一阶构造类可得

$$c(x)=\frac{f(x)+\frac12e^{-x}g(0)}{e^x},c'(x)=\frac{f'(x)-f(x)-e^{-x}g(0)}{e^x}\geqslant0.$$

于是

$$\frac{f(x)+\frac{1}{2}e^{-x}g(0)}{e^x}\geqslant f(0)+\frac{1}{2}g(0)=\frac{f'(0)+f(0)}{2}.$$

继续利用(12.19)即得

$$f(x)\geqslant\frac{e^x+e^{-x}}{2}f(0)+\frac{e^x-e^{-x}}{2}f'(0)\geqslant f(0)+f'(0)x,$$

这里

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1,\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\geqslant x$$

可以求导证明.

本题是数学类竞赛的压轴题.

例题 12.25 设非负的函数 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足

$$f'(x)\geqslant 6+f(x)-f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.21}$$

证明 $f(x)\geqslant 3,\forall x\in\mathbb{R}$.

笔记 视部分 f 是已知的, 我们解微分方程 $y'=(2+f(x))(3-y)$ 得到构造函数

$$h(x)=[f(x)-3]e^{\int_{x_0}^x[f(y)+2]dy},x\in\mathbb{R}.$$

证明 **Method 1** 构造

$$g(x)\triangleq\frac{f(x)-3}{f(x)+2}e^{5x}.$$

我们有

$$g'(x)=\frac{5\left[f'(x)-\left(6+f(x)-f^2(x)\right)\right]}{(f(x)+2)^2}e^{5x}\geqslant 0.$$

于是

$$g(x)\geqslant\lim_{x\to-\infty}g(x)=0\Rightarrow f(x)\geqslant 3,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Method 2[真题答案] 对任何 $x_0\in\mathbb{R}$, 构造

$$h(x)=[f(x)-3]e^{\int_{x_0}^x[f(y)+2]dy},x\in\mathbb{R}.$$

注意到由(12.21)知

$$h'(x)=\left[f'(x)+f^2(x)-f(x)-6\right]e^{\int_{x_0}^x[f(y)+2]dy}\geqslant 0,$$

即

$$h(x)=[f(x)-3]e^{\int_{x_0}^x[f(y)+2]dy}\geqslant f(x_0)-3,\forall x\geqslant x_0. \tag{12.22}$$

若对某个对 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)<3,\forall x\leqslant x_0$, 则由(12.21)得

$$f'(x)\geqslant(3-f(x))(f(x)+2)>0,\forall x\leqslant x_0.$$

故 f 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增且有下界, 故 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在. 又由(12.21)知

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)\geqslant\lim_{x\to-\infty}(3-f(x))(f(x)+2)\geqslant\lim_{x\to-\infty}2(3-f(x_0))>0.$$

结合结论12.1, 我们知道这不可能! 于是对任何 $x\in\mathbb{R}$, 都存在 $x_0\leqslant x$ 使得 $f(x_0)\geqslant 3$. 于是由(12.22)知 $f(x)\geqslant 3$. 我们完成了证明.

例题 12.26 设 $a>1$ 且 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 证明存在趋于正无穷的 $x_n,n\in\mathbb{N}$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\forall n\in\mathbb{N}.$$

证明 反证, 若不然, 存在 $x_0>0$, 使得对任何 $x\geqslant x_0$, 都有 $f'(x)\geqslant f(ax)$. 于是 f 在 $[x_0,+\infty)$ 递增. 从而由拉格

朗日中值定理, 我们有

$$f(ax)-f(x)=f'(\theta(x))(ax-x)\geqslant f(a\theta(x))(ax-x)\geqslant f(ax)x(a-1),$$

这里 $\theta(x)\in(x,ax)$ 并用到了 f 递增.

于是

$$f(ax)-f(x)\geqslant 2f(ax)\Rightarrow -f(x)\geqslant f(ax),\forall x\geqslant\max\left\{\frac{2}{a-1},x_0\right\},$$

这就是一个矛盾!. 因此我们知道存在趋于正无穷的 $x_n,n\in\mathbb{N}$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\forall n\in\mathbb{N}.$$

来看一个 putnam 真题.

例题 12.27 设 $f\in C^1[0,+\infty)\bigcap D^2(0,+\infty)$ 且满足

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0,f(0)=1,f'(0)=0. \tag{12.23}$$

证明

$$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x},\forall x\geqslant 0. \tag{12.24}$$

笔记 显然如果把式(12.23)得不等号改为等号, 则微分方程的解为 $3e^{2x}-2e^{3x}$. 现在对于不等号, 自然应该期望有不等式(12.24)成立. 我们一阶一阶的视为一阶微分不等式来证明即可. 注意到 2,3 是微分方程的特征值根来改写命题. 本结果可以视为微分方程比较定理.

证明 把不等式(12.23)改写为

$$f''(x)-2f'(x)\geqslant 3(f'(x)-2f(x)).$$

则考虑

$$g_1(x)=f'(x)-2f(x),g_2(x)=\frac{g_1(x)}{e^{3x}},$$

于是有

$$g_2'(x)\geqslant 0\Rightarrow g_2(x)\geqslant g_1(0)=-2\Rightarrow f'(x)-2f(x)\geqslant -2e^{3x}.$$

进一步考虑

$$g_3(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}+2e^x,g_3'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)+2e^{3x}}{e^{2x}}\geqslant 0,$$

于是

$$g_3(x)\geqslant g_3(0)=3\Rightarrow f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}.$$

我们完成了证明.

例题 12.28 设 $g\in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$1<g(t)<2,x''(t)=g(t)x(t),x(t)>0,t\in\mathbb{R}.$$

若 $x(t)$ 单调, 证明存在 $c_1,c_2>0$, 使得

$$c_1x(t)<|x'(t)|<c_2x(t).$$

笔记 考虑构造函数

$$x''x'=2xx'\Rightarrow c=\frac{1}{2}(x')^2-x^2$$
$$x''x'=xx'\Rightarrow c=\frac{1}{2}(x')^2-\frac{1}{2}x^2.$$

证明 用 $x(-t)$ 代替 $x(t)$, 从而可以不妨设 $x(t)$ 递增. 因为 $x(t)$ 单调有下界, 设 $\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)=A>0$, 则 $x''(t)=g(t)x(t)$ 有正下界, 因此由结论12.1我们知道这不可能. 故 $\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)=0$. 由条件等式知 $x''(t)>0$, 故 $x'(t)$ 单

调. 继续由结论12.1, 我们知道 $\lim\limits_{t\to-\infty}x'(t)=0$.

记

$$g_1(t)=\frac{1}{2}(x'(t))^2-\frac{1}{2}x^2(t),g_2(t)=\frac{1}{2}(x'(t))^2-x^2(t),$$

于是

$$g_2'(t)=x'(t)x''(t)-2x(t)x'(t)<0.$$

现在

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2-x^2(t)<\lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}(x'(t))^2-x^2(t)\right]=0,\forall t\in\mathbb{R},$$

即

$$|x'(t)|<\sqrt{2}x(t).$$

类似对 g_1 操作可得

$$|x'(t)|>x(t),$$

这就完成了证明.

例题 12.29 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 且 f,f',f'' 都是正值函数. 若存在 $a,b>0$ 使得

$$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x),\forall x\in\mathbb{R}.\tag{12.25}$$

求 $f'(x)\leqslant cf(x)$ 恒成立的最小的 c.

证明 设二次函数 $t^2=a+bt$ 的两个根分别为 $x_1=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2},x_2=\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}$. 则将条件(12.25)改写为

$$f''(x)-x_1f'(x)\leqslant x_2(f'(x)-x_1f(x)),\forall x\in\mathbb{R}.$$

于是考虑

$$g(x)=f'(x)-x_1f(x),C(x)=\frac{g(x)}{e^{x_2x}}.$$

注意到 $C'(x)=\frac{g'(x)-x_2g(x)}{e^{x_2x}}\leqslant0$. 又 f'',f' 是正值函数, 所以 f,f' 都是递增有下界函数. 所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ 存在. 由结论12.1我们知道 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$. 由 $x_1>0,x_2<0$, 我们知道

$$C(x)\leqslant\lim_{y\to-\infty}C(y)=\lim_{y\to-\infty}\frac{f'(y)-x_1f(y)}{e^{x_2y}}\leqslant\lim_{y\to-\infty}\frac{f'(y)}{e^{x_2y}}=0,\forall x\in\mathbb{R},$$

从而

$$f'(x)\leqslant x_1f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

取 $f(x)=e^{x_1x}$ 即为取等条件. 这样最小的 $c=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

例题 12.30 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导且满足等式

$$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x),g(x)\geqslant0.\tag{12.26}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

笔记 $f+f''$ 的出现暗示我们构造 $|f(x)|^2+|f'(x)|^2$, 这已是频繁出现的事实.

证明 构造 $h(x)=|f(x)|^2+|f'(x)|^2$, 则由(12.26)知

$$h'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]=-2xg(x)[f'(x)]^2.$$

于是 h 在 $(-\infty,0]$ 递增,$[0,+\infty)$ 递减.

现在我们有

$$h(x)\leqslant h(0)\Rightarrow|f(x)|^2\leqslant h(0),$$

即 f 有界.

例题 12.31 北京大学数学分析考研题 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(1)\leqslant0$ 以及

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0.\tag{12.27}$$

证明

(1)：存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$.

(2)：存在 $\eta\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\eta)=0$.

证明 如果对任何 $x\in(1,+\infty)$, 都有 $f'(x)\leqslant 1$, 那么 $[f(x)-x]'\leqslant 0$ 知 $f(x)-x$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减. 从而

$$-1\geqslant f(1)-1\geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 (1).

若对任何 $x\in\mathbb{R}$, 我们有 $f''(x)\neq 0$.

当 $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是下凸函数. 由 (1) 和下凸函数切线总是在函数下方, 我们知道

$$f(x)\geqslant f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\forall x>\xi.$$

于是

$$0=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]\geqslant \lim_{x\to+\infty}[f(\xi)-f'(\xi)\xi+(f'(\xi)-1)x]=+\infty,$$

这就是一个矛盾!

当 $f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上是上凸函数. 由 (1) 和上凸函数切线总是在函数上方, 我们有

$$f(x)\leqslant f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\forall x<\xi.$$

于是

$$0=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]\leqslant \lim_{x\to-\infty}[f(\xi)-f'(\xi)\xi+(f'(\xi)+1)x]=-\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 (2). 这就完成了例题12.31的证明.

笔记 读者时刻牢记, 看到凹凸性, 应该兴奋, 往往就是凹凸性的几何性质有关, 即切割线放缩等.

例题 12.32♠, $\alpha>1$ 设 $\alpha\geqslant 1$, 非负函数 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$f(x)\leqslant\int_0^x f^\alpha(y)\,dy,\forall x\geqslant 0. \tag{12.28}$$

证明 $f=0$.

笔记 标准的构造思路. 即记 $F(x)=\int_0^x f^\alpha(y)\,dy$, 考虑微分方程 $F'=F^\alpha$, 解得

$$\begin{cases}\frac{F^{1-\alpha}}{1-\alpha}=x+c, & \alpha>1\\ F=ce^x, & \alpha=1\end{cases}.$$

解出 c 即得构造函数

$$\begin{cases}c(x)=\frac{F^{1-\alpha}(x)}{1-\alpha}-x, & \alpha>1\\ c(x)=F(x)e^{-x}, & \alpha=1\end{cases}.$$

证明 记 $F(x)=\int_0^x f^\alpha(y)\,dy$, 若 f 不恒为[7]0, 考虑

$$x_0=\inf\{x\geqslant 0,F(x)>0\}.$$

函数的连续性告诉我们 $F(x_0)=0$, 因此考虑构造函数

$$\begin{cases}c(x)=\frac{F^{1-\alpha}(x)}{1-\alpha}-x, & \alpha>1\\ c(x)=F(x)e^{-x}, & \alpha=1\end{cases}.$$

一个直接的计算和利用(12.28)表明 $c'(x)\leqslant 0$, 因此 $c(x)$ 单调递减, 故当 $x>x_0$, 我们有

$$c(x)\leqslant\lim_{x\to x_0^+}c(x)=\begin{cases}-\infty & \alpha>1\\ 0, & \alpha=1\end{cases},$$

这是一个矛盾!, 故我们证明了 $f=0$.

来看一个双绝对值技巧的例子.

[7]保证了集合非空, 所以可以用确届原理.

例题 12.33 对某个 $D>0$:

1. 设 $f\in D(\mathbb{R}),f(0)=0$, 使得
$$|f'(x)|\leqslant D|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.29}$$
证明 $f\equiv 0$.
2. 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}),f^{(j)}(0)=0,\forall j\in\mathbb{N}_0$, 使得
$$|xf'(x)|\leqslant D|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.30}$$
证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

笔记 双绝对值技巧除了正常解微分方程构造函数外, 还需要对构造函数平方进行处理. 对于第一题, 解微分方程 $y'=Dy,y'=-Dy$ 得构造函数
$$C_1(x)=\frac{y(x)}{e^{Dx}},C_2(x)=y(x)e^{Dx}.$$
但我们还要手动平方一下. 第二题是类似的.

证明

1. 构造 $C_1(x)=\frac{f^2(x)}{e^{2Dx}},C_2(x)=f^2(x)e^{2Dx}$, 我们有
$$C_1'(x)=\frac{2f(x)f'(x)-2Df^2(x)}{e^{2Dx}},C_2'(x)=\left[2f(x)f'(x)+2Df^2(x)\right]e^{2Dx}.$$
由条件(12.29), 我们知道
$$\pm f'(x)f(x)\leqslant|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$
于是 C_1 递减, C_2 递增, 故
$$\frac{f^2(x)}{e^{2Dx}}\leqslant\frac{f^2(0)}{e^{2D0}}=0,\forall x\geqslant 0,f^2(x)e^{2Dx}\leqslant f^2(0)e^{2D0}=0,\forall x\leqslant 0,$$
于是就得到了 $f\equiv 0$.
2. 构造 $C(x)=\frac{f^2(x)}{x^{2D}},x>0$, 则
$$C'(x)=\frac{2f(x)f'(x)x-2Df^2(x)}{x^{2D+1}}.$$
由(12.30), 我们有
$$xf'(x)f(x)\leqslant x|f'(x)||f(x)|\leqslant D|f(x)|^2,$$
即 C 递减. 由 Taylor 公式的 Peano 余项, 我们有 $f(x)=o(x^m),\forall m\in\mathbb{N}$, 于是 $C(x)\leqslant\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f^2(x)}{x^{2D}}=0$, 故 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

例题 12.34 设 $f\in D^2[0,+\infty)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 以及
$$|f''(x)|\leqslant|f(x)f'(x)|,\forall x\geqslant 0.$$
证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

证明 事实上
$$f'(x)f''(x)\leqslant|f'(x)f''(x)|\leqslant|f(x)|\cdot[f'(x)]^2,\forall x\geqslant 0.$$
设 $g(x)=\frac{[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(y)|dy}}$, 则
$$g'(x)=\frac{2f'(x)f''(x)-2|f(x)|[f'(x)]^2}{e^{2\int_0^x|f(y)|dy}}\leqslant 0.$$
故 $0\leqslant g(x)\leqslant g(0)=0$, 所以 $f'(x)=0,\forall x\geqslant 0$, 这就证明了 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

例题 12.35 设 $f\in D^2[0,+\infty)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 以及
$$|f''(x)|^2\leqslant|f(x)f'(x)|,\forall x\geqslant 0.$$
证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

证明 考虑

$$g(x)=e^{-3x}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right],x\geqslant 0.$$

利用 $1+t^2\geqslant\sqrt{t},\forall t\geqslant 0$, 我们有

$$1+\frac{|f|^2}{|f'|^2}\geqslant\sqrt{\frac{|f|}{|f'|}}\Rightarrow|f'|^2+|f|^2\geqslant|f|^{\frac{1}{2}}|f'|^{\frac{3}{2}}. \tag{12.31}$$

于是

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-3x}\left[2ff'+2f'f''-3f^2-3(f')^2\right]\\&\leqslant e^{-3x}\left[2|ff'|+2|f'|\sqrt{|ff'|}-3f^2-3(f')^2\right]\\&\overset{(12.31)}{\leqslant} e^{-3x}\left[2|ff'|+2|f'|^2+2|f|^2-3f^2-3(f')^2\right]\\&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-3x}\left[|f|^2+|f'|^2+2|f'|^2+2|f|^2-3f^2-3(f')^2\right]=0.\end{aligned}$$

现在就证明了 g 递减, 从而 $0\leqslant g(x)\leqslant g(0)=0$, 故 $f(x)\equiv 0$.

例题 12.36 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$|f''(x)|\leqslant|f'(x)|+|f(x)|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.32}$$

证明

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 设

$$M=\max\left\{\sup_{\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]}|f|,\sup_{\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]}|f'|\right\},$$

然后由中值定理我们知道

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta)}{2}x^2,f'(x)=f'(0)+f''(\xi)x.$$

然后对 $x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, 由(12.32)得

$$\sup_{\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]}|f''|\leqslant 2M,$$

于是有

$$|f'(x)|=|f''(\xi)x|\leqslant 2M|x|\leqslant\frac{2}{3}M,|f(x)|=\frac{|f''(\theta)|}{2}x^2\leqslant Mx^2\leqslant\frac{M}{9}\leqslant\frac{2}{3}M.$$

现在用 $\frac{2}{3}M$ 代替 M, 我们可以得到

$$|f(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2M,|f'(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2M,\forall x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right].$$

然后依次下去得到

$$|f(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^nM,|f'(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^nM,\forall x\in\left[0,\frac{1}{3}\right],n=1,2,\cdots.$$

于是当 $n\to\infty$ 得 $f(x)=0,\forall x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$. 然后以 $\pm\frac{1}{3}$ 为起点继续如上操作可得 $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

例题 12.37 若二阶连续可微正值函数 f 满足

$$f''(x)f(x)\geqslant 2(f'(x))^2,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.33}$$

证明 f 为常数.

笔记 视为一阶构造类, 解微分方程得到构造函数.

证明 构造 $g(x)=\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, 则由条件(12.33)知

$$g'(x)=\frac{f''(x)f(x)-2(f'(x))^2}{f^3(x)}\geqslant 0.$$

另外一方面, 对任何 $x_0\in\mathbb{R}$, 我们构造

$$h(x)=-\frac{1}{f(x)}-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}(x-x_0),$$

然后

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

于是我们知道 $h(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减, $(x_0,+\infty)$ 递增.

现在若 $f'(x_0)>0$, 利用 f 正值函数, 则

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)\leqslant\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}(x-x_0)\right)=-\infty,$$

这是一个矛盾!

若 $f'(x_0)<0$, 利用 f 正值函数, 则

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)\leqslant\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}(x-x_0)\right)=-\infty,$$

这是一个矛盾!

故我们有 $f'(x_0)=0$, 由 x_0 任意性我们知道 f 为常数.

极值原理的想法.

例题 12.38 设 $f\in C^2[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)=0$, 若还有

$$f''(x)-g(x)f'(x)=f(x).\tag{12.34}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\in[0,1]$.

证明 如果 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的正的最大值, 设最大值点为 c 且 $f(c)>0,f'(c)=0,c\in(0,1)$, 代入(12.34)知 $f''(c)=f(c)>0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是极小值点, 这就是一个矛盾!

同样的考虑 f 在 $(0,1)$ 取得在 $[0,1]$ 上的负的最小值, 设最小值点为 c 且 $f(c)<0,f'(c)=0,c\in(0,1)$, 代入(12.34)知 $f''(c)=f(c)<0$. 又由极值的充分条件, 我们知道 c 是极大值点, 这就是一个矛盾!

综上, $f(x)=0,\forall x\in[0,1]$.

例题 12.39 设 $f\in D^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$. 若还有

$$f''(x)+\cos f'(x)=e^{f(x)}.\tag{12.35}$$

证明:$f(x)=0,\forall x\in(a,b)$.

证明 假若 f 有取值为正的点, 设 $x_0\in(a,b)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上最大值点, 则 $f'(x_0)=0,f''(x_0)\leqslant 0$. 故由(12.35)知

$$1\geqslant f''(x_0)+1=f''(x_0)+\cos f'(x_0)=e^{f(x_0)}\geqslant 1,$$

故 $f(x_0)=0$ 而矛盾! 假若 f 有取值为负的点则可类似讨论, 于是 $f(x)=0,\forall x\in(a,b)$.

再来看一个稍难的例子.

例题 12.40 设 $\alpha^2-4\beta>0$ 且 $f\in C[a,b]\bigcap D^2(a,b),f(a)=f(b)=0$, 满足

$$f''(x)+\alpha f'(x)+\beta f(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b].\tag{12.36}$$

证明 $f(x)\leqslant 0,\forall x\in[a,b]$.

笔记 证明的想法就是通过 $g=e^{\lambda x}f(x)$ 代替 f 来调整系数使得 g,g'' 系数符号相反.

证明 设 $g(x)=e^{\frac{\alpha}{2}x}f(x)$, 代入不等式(12.36), 我们知道

$$g''(x)\geqslant\left(\frac{\alpha^2}{4}-\beta\right)g(x),\forall x\in[a,b].$$

又设 g 在 $[a,b]$ 有正的最大值, 则

$$g(x_0)>0,g'(x_0)=0,x_0\in(a,b).$$

但是

$$g''(x_0) > \left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right) g(x_0) > 0,$$

故 x_0 是极小值, 这就是一个矛盾! 这就证明了 $g(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0, \forall x \in [a,b]$.

在多元微分学中我们将介绍完整的极值原理10.5. 但是我们再来看一例

例题 12.41 设 $f \in C^1[0,2\pi] \bigcap D^2(0,2\pi)$ 满足

$$f(0) = f'(0) = f(2\pi) = f'(2\pi) = 0$$

和

$$f''(x) + f(x) \geqslant 0, \forall x \in (0,2\pi). \tag{12.37}$$

证明: $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,2\pi]$.

笔记 我们的想法是考虑 $f'' + f = g$, 从而利用卷积特解法22.1得到 f 表达式来证明. 实际证明中无需解微分方程, 而是直接分部积分验证.

证明 只需要对 $x \in [0,\pi]$ 证明, 否则考虑 $f(2\pi - x)$ 即可.

Case 1 当 $f'' \in R[0,\pi]$, 我们分部积分并利用(12.37)有

$$f(x) = \int_0^x [f''(t) + f(t)] \sin(x-t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0, \forall x \in [0,\pi].$$

Case 2 对一般情况, f'' 不能做积分, 但是我们分部积分得[8]

$$f(x) = \int_0^x [f'(t)\cos(x-t) + f(t)\sin(x-t)]\,\mathrm{d}t.$$

利用(12.37)有

$$f(t)\sin(x-t) + f'(t)\cos(x-t) \geqslant -[f'(t)\sin(x-t)]', \forall x \in (0,\pi], t \in (0,x].$$

我们考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y [f(t)\sin(x-t) + f'(t)\cos(x-t)]\,\mathrm{d}t + f'(y)\sin(x-y).$$

于是

$$g'(y) = f(y)\sin(x-y) + f'(y)\cos(x-y) + \frac{d}{dy}[f'(y)\sin(x-y)] \geqslant 0.$$

因此

$$f(x) = g(x) \geqslant -f'(x)\sin(x-x) = 0, \forall x \in [0,\pi],$$

这就完成了证明.

笔记 [我们略去思维过程, 写一个证明.]

只需要对 $x \in [0,\pi]$ 证明, 否则考虑 $f(2\pi - x)$ 即可. 考虑

$$g(y) \triangleq \int_0^y [f(t)\sin(x-t) + f'(t)\cos(x-t)]\,\mathrm{d}t + f'(y)\sin(x-y),$$

于是对 $0 < y \leqslant x \leqslant \pi$, 由(12.37)得

$$\begin{aligned} g'(y) &= f(y)\sin(x-y) + f'(y)\cos(x-y) + [f'(y)\sin(x-y)]' \\ &= [f''(y) + f(y)]\sin(x-y) \geqslant 0, \end{aligned}$$

即

$$f(x) = g(x) \geqslant g(0) = 0, \forall x \in [0,\pi],$$

这就完成了证明.

来看凹凸性的想法:

[8] 构造的想法来自将 f'' 部分分部积分.

例题 12.42 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数且

$$f''(x)>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0.$$

若存在一个点 $x_0\in\mathbb{R}$ 有 $f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恰好有两个实根.

笔记 看到凹凸性应该兴奋, 往往就是用几何意义放缩.

证明 **Method 1** 依赖几何直观:

因为 f 严格下凸, 由

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$$

我们有 f 先减后增且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

因此我们结合零点定理知方程 $f(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恰好有两个实根.

Method 2 翻译几何直观为严格数学语言:

因为 $f''(x)>0$, 所以 f' 严格递增. 由

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$$

我们有 f 先减后增.

取 $x_1\in\mathbb{R}$ 使得 $f'(x_1)>0$, 我们由 Taylor 公式得

$$f(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{f''(\theta)}{2}(x-x_1)^2\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)\to+\infty,x\to+\infty.$$

取 $x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $f'(x_2)<0$, 我们由 Taylor 公式得

$$f(x)=f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_2)^2\geqslant f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)\to+\infty,x\to-\infty.$$

因此我们结合零点定理知方程 $f(x)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恰好有两个实根.

12.4 杂例

例题 12.43 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对某个 $k\in(0,1)$ 成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|.\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{12.38}$$

证明:$kx-f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 单调递增且存在唯一的 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x$.

证明 对 $y>x$, 我们由(12.38)得

$$f(y)-f(x)\leqslant k(y-x)\Rightarrow kx-f(x)\leqslant ky-f(y),$$

即 $kx-f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 单调递增.

存在性: 若 $f(x)\neq x,\forall x\in\mathbb{R}$, 则不妨设 $f(x)<x,\forall x\in\mathbb{R}$. 我们有

$$\lim_{x\to-\infty}[kx-f(x)]>\lim_{x\to-\infty}[(k-1)x]=+\infty,$$

这就和 $kx-f(x)$ 递增矛盾!, 于是我们知道存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=x$.

唯一性: 设 $f(x_i)=x_i,i=1,2$, 我们由(12.38)得

$$|x_1-x_2|=|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|,$$

即只能有

$$|x_1-x_2|=0\Rightarrow x_1=x_2.$$

我们完成了证明.

例题 12.44 设 f 是区间 I 上严格递增的下凸函数, 证明:f^{-1} 是区间 I 上严格递增的上凸函数.

证明 首先

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leqslant\lambda f\left(x\right)+(1-\lambda)f\left(y\right),\forall x,y\in I,\lambda\in[0,1],$$

然后

$$f\left(\lambda f^{-1}\left(x\right)+(1-\lambda)f^{-1}\left(y\right)\right)\leqslant\lambda x+(1-\lambda)y,\forall x,y\in f\left(I\right),\lambda\in[0,1].$$

现在

$$\lambda f^{-1}\left(x\right)+(1-\lambda)f^{-1}\left(y\right)\leqslant f^{-1}\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right),\forall x,y\in f\left(I\right),\lambda\in[0,1],$$

即 f^{-1} 是区间 I 上严格递增的上凸函数.

例题 12.45 设 $f\in D^2[0,1]$ 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$, 证明方程 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的根.

证明 注意到

$$\left[\frac{1}{2}f^2\left(x\right)\right]''=\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right)f''\left(x\right).$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$, 我们知道 $f(0)=0,f'(0)<0$, 所以在 0 的右邻域内我们有 $f(x)<0$, 从而结合 $f(1)>0$ 和零点定理我们可以找到 $(0,1)$ 之间的 f 其他零点 $a\in(0,1)$. 因此由罗尔中值定理知 $\left[\frac{1}{2}f^2\left(x\right)\right]'=f\left(x\right)f'\left(x\right)$ 在 $(0,a)$ 至少有一个根 b. 又 $f(0)=f(a)=0$, 故

$$f\left(a\right)f'\left(a\right)=f\left(b\right)f'\left(b\right)=f\left(0\right)f'\left(0\right)=0,$$

从而再次由罗尔中值定理就得到 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的根.

例题 12.46 设

$$p\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_n\right),q\left(x\right)=\left(x-x_1'\right)\left(x-x_2'\right)\cdots\left(x-x_n'\right),$$

这里

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,x_1'<x_2'<\cdots<x_n',x_i<x_i',i=1,2,\cdots,n. \tag{12.39}$$

证明对每个 $i=2,3,\cdots,n$, p' 在 (x_{i-1},x_i) 的根小于 q' 在 $\left(x_{i-1}',x_i'\right)$ 的根.

证明 对每个 $i=2,3,\cdots,n$, 由罗尔中值定理我们知道 p' 在 (x_{i-1},x_i) 有根, q' 在 $\left(x_{i-1}',x_i'\right)$ 有根. 由于 $n-1$ 次多项式恰好有 $n-1$ 个复根, 因此这些根也分别是 p',q' 的全部根.

记

$$p'\left(\theta_i\right)=0,q'\left(\theta_i'\right)=0,\theta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right),\theta_i'\in\left(x_{i-1}',x_i'\right).$$

取对数求导得

$$\frac{p'\left(\theta_i\right)}{p\left(\theta_i\right)}=\sum_{j=1}^n\frac{1}{\theta_i-x_j},\frac{q'\left(\theta_i'\right)}{q\left(\theta_i'\right)}=\sum_{j=1}^n\frac{1}{\theta_i'-x_j'}. \tag{12.40}$$

于是我们有

$$0=\sum_{j=1}^n\left[\frac{1}{\theta_i-x_j}-\frac{1}{\theta_i'-x_j'}\right]=\sum_{j=1}^n\frac{\theta_i'-\theta_i-\left(x_j'-x_j\right)}{\left(\theta_i-x_j\right)\left(\theta_i'-x_j'\right)}. \tag{12.41}$$

注意到由(12.39)的不等式, 我们得到

$$\left(\theta_i-x_j\right)\left(\theta_i'-x_j'\right)>0,x_j'>x_j,\forall j=1,2,\cdots,n,$$

于是若 $\theta_i'\leqslant\theta_i$, 式(12.41)必然变为

$$0=\sum_{j=1}^n\frac{\theta_i'-\theta_i-\left(x_j'-x_j\right)}{\left(\theta_i-x_j\right)\left(\theta_i'-x_j'\right)}\leqslant-\sum_{j=1}^n\frac{\left(x_j'-x_j\right)}{\left(\theta_i-x_j\right)\left(\theta_i'-x_j'\right)}<0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $\theta_i'>\theta_i$, 即对每个 $i=2,3,\cdots,n$, p' 在 (x_{i-1},x_i) 的根小于 q' 在 $\left(x_{i-1}',x_i'\right)$ 的根.

笔记 对多项式得到(12.40)这种表达式是常用操作, 应该积累.

例题 12.47 证明 $f(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{y}dy$ 在 $(0,+\infty)$ 有无穷多个零点.

证明 事实上,

$$f(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{y}dy=\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy.$$

我们记 $\frac{1}{x}=t\in(0,+\infty)$. 注意

$$g(t)=\int_t^{\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy, g'(t)=-\frac{\sin t}{t^2}, g''(t)=\frac{-t\cos t+2\sin t}{t^3},$$

于是

$$g'(n\pi)=0, g''(n\pi)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}, n=1,2,\cdots.$$

故当 n 偶数, $n\pi$ 是 g 极大值点, n 为奇数, $n\pi$ 是 g 极小值点. 于是只需判断 $g(n\pi)$ 的符号.

设 $n=2m, m\in\mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}\int_{2m\pi}^{\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy&=\sum_{k=m}^{\infty}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin y}{y^2}dy+\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\frac{\sin y}{y^2}dy\right)\\&=\sum_{k=m}^{\infty}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin y}{y^2}dy-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin y}{(y+\pi)^2}dy\right)>0.\end{aligned}$$

设 $n=2m-1, m\in\mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}\int_{(2m-1)\pi}^{\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy&=\sum_{k=m}^{\infty}\left(\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\sin y}{y^2}dy+\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin y}{y^2}dy\right)\\&=\sum_{k=m}^{\infty}\left(\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\sin y}{y^2}dy-\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\sin y}{(y+\pi)^2}dy\right)<0.\end{aligned}$$

因此我们证明了在 $((2m-1)\pi,2m\pi)$ 之间 g 必有零点, 由 m 的任意性, 我们知道 g 有无穷个零点, 从而 f 在 $(0,+\infty)$ 有无穷多个零点.

例题 12.48 设

$$n\in\mathbb{N}, f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^{\lambda_k}, x>0,$$

这里

$$\lambda_k>0\text{全不相同}, a_k\in\mathbb{R}, k=1,2,\cdots,n\text{不全为}0,$$

证明: f 至多只有 $n-1$ 个正零点 (计重数).

证明 当 $n=1$, 这是显然的. 假设 $n-1$ 时成立. 若 f 有 n 个零点, 我们不妨设

$$\lambda_1=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k,$$

则

$$x^{-\lambda_1}f(x)=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_kx^{\lambda_k-\lambda_1}.$$

注意到上述左边也有 n 个零点, 所以罗尔得

$$\left(x^{-\lambda_1}f(x)\right)'=\sum_{k=2}^{n}(\lambda_k-\lambda_1)a_kx^{\lambda_k-\lambda_1-1}$$

有 $n-1$ 个零点, 这就和归纳假设矛盾!, 因此我们证明了 n 时 f 至多只有 $n-1$ 个正零点, 从而由数学归纳法得到证明.

例题 12.49 设 $f,g:[0,1]\to[0,1]$ 都是 $[0,1]$ 上的连续函数且成立

$$f(g(x))=g(f(x)),\forall x\in[0,1].\tag{12.42}$$

1. 证明存在 $\lambda\in[0,1]$, 使得 $f(\lambda)=g(\lambda)$.
2. 若 f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 证明存在 $\lambda\in[0,1]$, 使得 $f(\lambda)=g(\lambda)=\lambda$.

证明

1. 若不然, 不妨设 $f(x)>g(x),\forall x\in[0,1]$, 则存在 $\delta\in(0,1]$ 使得

$$f(x)>g(x)+\delta,\forall x\in[0,1]. \tag{12.43}$$

考虑数列

$$x_{n+1}=f(f(x_n)),x_1=0,n=1,2,\cdots.$$

则反复运用(12.42)和(12.43)得

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=f(f(x_n))>g(f(x_n))+\delta=f(g(x_n))+\delta>g(g(x_n))+2\delta=g(g(f(f(x_{n-1}))))+2\delta\\&=f(f(g(g(x_{n-1}))))+2\delta>g(f(g(g(x_{n-1}))))+3\delta=f(g(g(g(x_{n-1}))))+3\delta>g(g(g(g(x_{n-1}))))+4\delta\\&\cdots,\end{aligned}$$

于是 $x_n\geqslant 2(n-1)\delta,n=1,2,\cdots$, 这和 x_n 有界矛盾! 这就证明了存在 $\lambda\in[0,1]$, 使得 $f(\lambda)=g(\lambda)$.

2. **Method 1** (不依赖第一问)

由于连续函数 $h(x)=g(x)-x$ 满足 $h(a)\geqslant 0,h(b)\leqslant 0$, 所以 h 有零点, 故存在 $x_1\in[a,b]$ 使得 $g(x_1)=x_1$.
考虑递推数列 $x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}$, 由递增递推数列的结论8.4.1我们知道 x_n 一定是单调数列. 注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]$, 所以 $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 此时就有 $\lambda=f(\lambda)$.
又设 $g(x_n)=x_n,n\in\mathbb{N}$, 由(12.42)得

$$g(x_{n+1})=g(f(x_n))=f(g(x_n))=f(x_n)=x_{n+1},$$

即归纳得证 $g(x_n)=x_n,\forall n\in\mathbb{N}$. 因此两边取极限得 $g(\lambda)=\lambda$, 这就完成了证明.

Method 2

由第一问知, 存在 $c\in[0,1]$ 使得 $f(c)=g(c)$, 考虑

$$x_{n+1}=f(x_n),y_{n+1}=g(y_n),x_1=y_1=c,n=1,2,\cdots,$$

于是运用(12.42)得

$$x_2=f(x_1)=f(c)=g(c)=g(y_1)=y_2,$$

若 $x_j=y_j,j=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2$, 继续运用(12.42)得

$$x_{n+1}=f(x_n)=f(y_n)=f(g(y_{n-1}))=g(f(y_{n-1}))=g(f(x_{n-1}))=g(x_n)=g(y_n)=y_{n+1},$$

从而归纳可得 $x_n=y_n,n=1,2,\cdots$.
显然 x_n 有界, 由结论8.4.1知 x_n 单调有界, 因此必然有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda\in[0,1].$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda,f(\lambda)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lambda,g(\lambda)=\lim_{n\to\infty}g(y_n)=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lambda.$$

这就完成了证明.

来看北京大学 2024 数学分析期末考试压轴题

例题 12.50 对 $q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 证明 e^q 是无理数.

笔记 由本结果可得对一切非 0 有理数 q 都有 e^q 是无理数. 因为若 $e^{\frac{q}{p}}\in\mathbb{Q}$ 则 $e^q\in\mathbb{Q}$.

证明 本证明参考予一人的回答所书写.

不妨设 $q>0$, 否则考虑 $(e^q)^{-1}=e^{-q}$ 即可. 事实上考虑 $f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ 和

$$F(x)=q^{2n}f(x)-q^{2n-1}f'(x)+q^{2n-2}f''(x)-\cdots+f^{(2n)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kq^{2n-k}f^{(k)}(x),$$

这里因为 f 是 $2n$ 次多项式, 所以 F 索性写成了无穷和. 由 $0,1$ 都是 f 的 n 重根知 f 在 $0,1$ 的直到 $n-1$ 阶导都

是 0. 当 $k \geqslant n$, 注意到

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{C_k^j}{n!} \left[(1-x)^n\right]^{(j)} \left[x^n\right]^{(k-j)} |_{x=0} \\ &= \frac{C_k^{k-n}}{n!} \left[(1-x)^n\right]^{(k-n)} \left[x^n\right]^{(n)} |_{x=0} \\ &= C_k^{k-n} \left[(1-x)^n\right]^{(k-n)} |_{x=0} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

类似的可得 $f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}, k \geqslant n$, 即

$$f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0. \tag{12.44}$$

现在考虑

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{2n-k} f^{(k+1)}(x) = -q \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} q^{2n-k-1} f^{(k+1)}(x) \\ &= -q\left[F(x) - q^{2n} f(x)\right] = q^{2n+1} f(x) - qF(x). \end{aligned}$$

现在运用 $0 < f(x) < \frac{1}{n!}, x \in (0,1)$, 我们有

$$\frac{q^{2n+1} e^q}{n!} > \int_0^1 q^{2n+1} e^{qx} f(x)\, dx = \int_0^1 \left[e^{qx} F(x)\right]' dx = e^q F(1) - F(0) > 0. \tag{12.45}$$

若 e^q 是有理数, 则取正整数 b 充分大使得 be^q 是有理数, 由(12.45)知

$$b\frac{q^{2n+1} e^q}{n!} > b\left[e^q F(1) - F(0)\right].$$

注意到由(12.44)知上式右边为正整数, 但左边 $\lim\limits_{n\to\infty} b\frac{q^{2n+1}e^q}{n!} = 0$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了 e^q 是无理数.

例题 12.51 设

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\right] \mathrm{d}t, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明:

1.
$$I_{n+1} = 2(2n+1) I_n - \pi^2 I_{n-1}, n = 1, 2, \cdots.$$

2. 对 $n \geqslant 1$, 存在整系数小于 n 次多项式 p_n 使得
$$I_n = p_n\left(\pi^2\right), n = 0, 1, 2, \cdots.$$

3. π^2 是无理数.

证明

1. 反复分部积分得

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n+1}(\sin t)'\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n} t\sin t\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n}(\sin t - t\cos t)'\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\left(t\sin t - t^2\cos t\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1} t\sin t\right]\mathrm{d}t - \pi^2 I_{n-1} + 4nI_n \\
&= \frac{2}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n}\cos t\right]\mathrm{d}t - \pi^2 I_{n-1} + 4nI_n \\
&= 2(2n+1)I_n - \pi^2 I_{n-1}.
\end{aligned}$$

2. 设

$$I_0 = 2, I_1 = 4, I_k = p_k\left(\pi^2\right), p_k \in \mathbb{Z}[x], \deg p_k < k, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

我们由递推得

$$I_{n+1} = 2(2n+1)I_n - \pi^2 I_{n-1} = 2(2n+1)p_n\left(\pi^2\right) - \pi^2 p_{n-1}\left(\pi^2\right),$$

取

$$p_{n+1} = 2(2n+1)p_n - xp_{n-1} \in \mathbb{Z}[x],$$

就有

$$\deg p_{n+1} < n, I_{n+1} = p_{n+1}\left(\pi^2\right).$$

3. 设 $\pi^2 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$, 于是

$$I_n = p_n\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{q_n}{b^n}, q_n \in \mathbb{Z}.$$

现在

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\left|b^n I_n\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{b^n}{n!}\right|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \mathrm{d}t\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\pi\frac{\left(\frac{\pi^2}{4}b\right)^n}{n!}\right] = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} b^n I_n = 0.$$

因此当 n 充分大时成立

$$I_n = \frac{q_n}{b^n} = 0,$$

这显然不可能!, 于是 π^2 是无理数.

例题 12.52 设 f 在 $[0,\pi]$ 可微且

$$\iint_D f(x)\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, F(x) = \cos x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\sin x,$$
$$D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi\}.$$

证明 F 在 $[0,\pi]$ 至少有三个零点.

证明 注意到

$$F(x) = \left[\sin x\cdot\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right]'.$$

又由积分中值定理, 存在 $\theta\in(0,\pi)$, 使得

$$\iint_D f(x)\sin y dxdy=\int_0^\pi\left[\sin y\cdot\int_0^y f(x)\,dx\right]dy=\int_0^\theta f(x)\,dx\cdot\int_0^\pi\sin y dy=2\int_0^\theta f(x)\,dx.$$

现在

$$F'(0)=F(0)=F(\pi)=F(\theta)=0,$$

于是由罗尔中值定理得 F 在 $[0,\pi]$ 至少有三个零点.

例题 12.53 设 g 是 $[0,+\infty)$ 的有界连续函数, 证明微分方程 $y''+14y'+13y=g(x)$ 的解 f 在 $[0,+\infty)$ 的每个解都是有界连续函数.

笔记 考虑 $t^2+14t+13=0$ 得 $t=-1,-13$.

证明 **Method 1** 我们运用上下极限的洛必达13.11有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to+\infty}}f(x)&=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^{13x}f(x)}{e^{13x}}\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^{13x}\left[f'(x)+13f(x)\right]}{13e^{13x}}=\frac{1}{13}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[f'(x)+13f(x)\right]=\frac{1}{13}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^x\left[f'(x)+13f(x)\right]}{e^x}\\&\leqslant\frac{1}{13}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^x\left[f''(x)+14f'(x)+13f(x)\right]}{e^x}=\frac{1}{13}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[f''(x)+14f'(x)+13f(x)\right]=\frac{1}{13}\overline{\lim_{x\to+\infty}}g(x)<\infty,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{x\to+\infty}}f(x)&=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^{13x}f(x)}{e^{13x}}\geqslant\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^{13x}\left[f'(x)+13f(x)\right]}{13e^{13x}}=\frac{1}{13}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\left[f'(x)+13f(x)\right]=\frac{1}{13}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^x\left[f'(x)+13f(x)\right]}{e^x}\\&\geqslant\frac{1}{13}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{e^x\left[f''(x)+14f'(x)+13f(x)\right]}{e^x}=\frac{1}{13}\underline{\lim_{x\to+\infty}}\left[f''(x)+14f'(x)+13f(x)\right]=\frac{1}{13}\underline{\lim_{x\to+\infty}}g(x)>-\infty.\end{aligned}$$

因此我们知道 f 有界.

Method 2 直接运用卷积法22.1求解微分方程得

$$f(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-13x}+\frac{1}{12}\int_0^x\left[\left(e^{-(x-t)}-e^{-13(x-t)}\right)\right]g(t)\,dt.$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|c_1|+|c_2|+\frac{\sup|g|}{12}\int_0^x\left|e^{-(x-t)}-e^{-13(x-t)}\right|dt\\&\leqslant|c_1|+|c_2|+\frac{\sup|g|}{12}\int_0^\infty\left|e^{-t}-e^{-13t}\right|dt<\infty.\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 12.54 设 $t\in\mathbb{N}_0$ 且 $f\in C^{4t+3}(\mathbb{R})$. 证明存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$\prod_{k=0}^{4t+3}f^{(k)}(a)\geqslant0.\tag{12.46}$$

证明 如果(12.46)不成立, 则

$$\prod_{k=0}^{4t+3}f^{(k)}(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^{(k)}(x)\neq0,\forall x\in\mathbb{R},k=0,1,2,\cdots,4t+3.$$

我们四个四个的为一组, 即

$$(ff'f''f''')\cdot\left(f^{(4)}f^{(5)}f^{(6)}f^{(7)}\right)\cdot\cdots\cdot\left(f^{(4t)}f^{(4t+1)}f^{(4t+2)}f^{(4t+3)}\right)<0.$$

故上式必有一组恒负, 不妨设为

$$ff'f''f'''<0.\tag{12.47}$$

我们来证明满足条件(12.47)的光滑函数不存在.

不妨设 $f'''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, 否则用 $-f$ 代替 f. 于是由(12.47)知

$$f(x)f'(x)f''(x)<0.\tag{12.48}$$

若 $f''(x)>0$, 注意到 $f(x)f'(x)<0$. 若 $f'>0$, 则 f 负值递增下凸, 作图知这不可能. 若 $f'<0$, 则 f' 也负值递增下凸, 这也不可能.

若 $f''(x)<0$, 意到 $f(x)f'(x)>0$. 若 $f'>0$, 则 f 正值递增上凸, 作图知这不可能. 若 $f'<0$, 则 f 负值递减上凸, 作图知这也不可能.

综上所述, 我们证明了存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得(12.46)成立.

例题 12.55 不存在连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(f(x))=-x^3+x^2+1. \tag{12.49}$$

笔记 注意(12.49)在 $x\to\pm\infty$ 符号相反, 这是解决此类问题的关键.

证明 求导可知 $-x^3+x^2+1$ 在 $(-\infty,0),\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 严格单调递减, 于是设 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 则

$$f(f(x_2))=f(f(x_1))=-x_1^3+x_1^2+1=-x_2^3+x_2^2+1.$$

因此 $x_1=x_2$, 故由连续单射等价严格单调12.2知 f 在 $(-\infty,0)$ 严格单调. 同理可知 f 在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 严格单调. 故设

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=B,A,B\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\},$$

则利用(12.49)知 $f(A)=-\infty,f(B)=+\infty$. 若 $A=+\infty$ 则 $A=f(+\infty)=-\infty$, 矛盾! 若 $A=-\infty$ 则 $B=f(-\infty)=-\infty$, 故 $f(-\infty)=+\infty$, 矛盾! 因此我们证明了这样的函数不存在.

例题 12.56 不存在连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(f(x))=x^2-3x+3. \tag{12.50}$$

证明 对 $x,y\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$, 若 $f(x)=f(y)$, 则由(12.50)得

$$x^2-3x+3=y^2-3y+3,$$

即 $x=y$. 故由命题12.2知 f 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 严格单调. 类似可证 f 在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 严格单调. 由(12.50)知 $f(\mathbb{R})\neq\mathbb{R}$ 以及相似例题12.55两边取极限得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. 继续由(12.50)得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

现在 f 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 递减, $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 递增.

现在由(12.50)赋值 $x=\frac{3}{2}$ 得 $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)\subset f(\mathbb{R})$, 因此

$$f\left(\frac{3}{2}\right)\leqslant\frac{3}{4}<\frac{3}{2}.$$

于是由介值定理取 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)=\frac{3}{2}$. 由(12.50)赋值 $x=x_0$ 得

$$f(f(x_0))=f\left(\frac{3}{2}\right)\geqslant\frac{3}{4},$$

即 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$. 由(12.50)赋值 $x=\frac{3}{2}$ 得 $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{3}{4}$, 即 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$, 这就是一个矛盾! 因此 f 不存在.

例题 12.57 求所有 $f\in C(\mathbb{R})$ 使得存在 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $f_n(x)=-x$, 这里

$$f_n\triangleq\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次}.$$

证明 设 $f\in C(\mathbb{R}),n\in\mathbb{N}$ 使得 $f_n(x)=-x$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则

$$-x_1=f_n(x_1)=f_n(x_2)=-x_2.$$

因此由命题连续单射等价严格单调12.2知 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调. 因为递增复合递增是递增, 递减复合递减还是递增且 $-x$ 递减, 所以 f 递减且 n 为奇数.

我们记 $g(x)\triangleq f(f(x))$, 则

$$g_n(x)=f_{2n}(x)=f_n(-x)=x.$$

设 $g(x_0)>x_0$, 则

$$x_0=g_n(x_0)>g_{n-1}(x_0)>\cdots>g(x_0)>x_0,$$

这就是矛盾! 类似得可证 $g(x_0)<x_0$ 也不可能. 现在我们知道

$$g(x)=f(f(x))=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

因此我们有

$$-x=f_n(x)=f(f_{n-1}(x))=f(x),$$

这就证明了 $f=-x$ 为所求全部解.

例题 12.58 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足

$$f(x)>0,f''(x)f(x)-[f'(x)]^2>0,\forall x\in\mathbb{R},$$

证明:

$$f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}. \tag{12.51}$$

若 $f(0)=1$, 再证明

$$f(x)\geqslant e^{f'(0)x},\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.52}$$

证明 注意到

$$(\ln f)''=\left(\frac{f'}{f}\right)'=\frac{f''f-(f')^2}{f^2}>0.$$

于是 $\ln f$ 下凸知对 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 有

$$\ln f(x_1)+\ln f(x_2)\geqslant 2\ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

即(12.51)成立.

由下凸函数恒在切线上方13.5得

$$\ln f(x)\geqslant\frac{f'(0)}{f(0)}x+\ln f(0),\forall x\in\mathbb{R}.$$

于是

$$\ln f(x)\geqslant\frac{f'(0)}{f(0)}x+\ln f(0)=f'(0)x,\forall x\in\mathbb{R},$$

即(12.52)成立.

例题 12.59

1. 设
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d}{dx^n}(x^2-1)^n,n=1,2,\cdots.$$
证明多项式 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$.
2. 设 $g(x)=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$, 证明 g 是只有实根的多项式.

笔记 本题第 1 问叫做勒让德多项式, 第 2 问叫做 Hermite 多项式. 第 2 问用罗尔时注意无穷远点也会提供零点.

证明

1. 显然 P_n 是 n 次多项式. 注意到 ±1 是 $(x^2-1)^n=0$ 的 n 重根, 我们知道 ±1 是 $\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^n\right)$ 的 $n-k$ 重根. 又由罗尔, $\frac{d}{dx}\left((x^2-1)^n\right)$ 在 $(-1,1)$ 必有一根, 于是 $\frac{d^2}{dx^2}\left((x^2-1)^n\right)$ 在 $(-1,1)$ 必有二根. 这样依次下去得 $\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$ 在 $(-1,1)$ 必有 n 个不同实根. 而 n 次多项式至多只有 n 个实根, 因此我们证明了 P_n 的全部根都是实数且分布在 $(-1,1)$.
2. 设 $\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x^2}\right)=p_k(x)e^{-x^2},k\in\mathbb{N}$, 于是
$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(e^{-x^2}\right)=[p_k'(x)-2xp_k(x)]e^{-x^2}=p_{k+1}(x)e^{-x^2}.$$

于是

$$p_{k+1}(x)=p_k'(x)-2xp_k(x),p_0(x)=1,$$

现在立即知道 $g(x)=p_n(x)$ 是 n 次实系数多项式.

假定 $p_k(x)$ 有 k 个不同实根的 k 次首系数为正的实系数多项式, 且其根为

$$x_1<x_2<\cdots<x_k,$$

运用 $p_{k+1}(x)=e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(p_k(x)e^{-x^2}\right)$ 和罗尔中值定理我们知道 $p_{k+1}(x)$ 在每个 $(x_{j-1},x_j),j=2,3,\cdots,k$ 有一根. 利用 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}p_k(x)=0$ 和广义罗尔中值定理, 我们知道 $p_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,x_1),(x_k,+\infty)$ 分别有一根, 所以我们证明了 $p_{k+1}(x)$ 有 $k+1$ 个不同实根的 $k+1$ 次首系数为正的实系数多项式, 因此 $p_n(x)$ 有 n 个实根, 而 n 次多项式至多只有 n 个根, 因此我们完成了证明.

例题 12.60 设 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意有界闭子区间上黎曼可积且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\in[-\infty,+\infty],$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{x}=A.$$

笔记 注意 f 未必连续, 不能直接使用洛必达法则.

证明 当 $A\in\mathbb{R}$, 对任何 $\epsilon>0$, 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{x}=A,$$

所以存在 $X_1>0$ 使得

$$|f(x)-A|\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall x\geqslant X_1.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{X_1}f(y)\,\mathrm{d}y\right)=0,$$

所以存在 $X_2>0$ 使得

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{X_1}f(y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall x\geqslant X_2.$$

于是当 $x\geqslant\max\{X_1,X_2\}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y-A\right|&\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{X_1}|f(y)-A|\,\mathrm{d}y+\frac{1}{x}\int_{X_1}^x|f(y)-A|\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{x}\int_{X_1}^x\frac{\epsilon}{2}\mathrm{d}y\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{x}=A.$$

当 $A=\pm\infty$ 是类似的, 我们略去证明.

第 12 章 练习

1. (1.) 设正值函数 $f,g\in C[0,1]$ 和正值函数 $K\in C[0,1]^2$ 满足

$$f(x)=\int_0^1 g(y)K(x,y)\,dy,g(x)=\int_0^1 f(y)K(x,y)\,dy.$$

证明

$$f(x)=g(x),\forall x\in[0,1].$$

2. (2.) 设 $\mathbb{R}$ 上的二阶连续可微函数满足 $f(0)=1$ 以及
$$f'(x)\leqslant 0\leqslant f(x), f''(x)\leqslant f(x), \forall x\geqslant 0.$$
求 $f'(0)$ 最小值.
3. (3.) 设正值函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调递增, 且满足
$$xy\leqslant \frac{1}{2}\left[xf(x)+yf^{-1}(y)\right], \forall x,y>0,$$
求 f 表达式.
4. (4.) 设 $a>0, a^2+4b<0$, 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数 f 使得
$$f'(f'(x))=af'(x)+bx.$$
5. (5.) 设 $f\in C[0,1]$, 且
$$|f(x)|\geqslant 1+\frac{1}{2}\int_0^x t|f(t)|\,dt, \forall x\in[0,1]. \tag{12.53}$$
证明:
$$\ln|f(x)|\geqslant \frac{x^2}{4}, \forall x\in[0,1].$$
6. (6.) 设 $f\in D^2[1,+\infty)$ 且 $f(1)=6, f'(1)=0$. 当 $x\geqslant 1$ 时有
$$x^2f''(x)-3xf'(x)-5f(x)\geqslant 0. \tag{12.54}$$
证明
$$f(x)\geqslant x^5+\frac{5}{x}, \forall x\geqslant 1.$$
7. (7.) 设 f,g 都是区间 $[a,b]$ 上的下凸函数且 f 在 $[a,b]$ 递增, 证明 $f\circ g$ 也是 $[a,b]$ 上的下凸函数.
8. (8.) 设正值二阶连续可微函数 f 满足 $f'(x)\geqslant |f(x)+f''(x)|, \forall x\in\mathbb{R}$, 证明 f 不存在.
9. (9.) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足 $f'(x)>f(x), \forall x\in(-\infty,+\infty)$, 证明 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上至多只有一根.
10. (10.) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微且满足 $f''(x)>f(x), \forall x\in(-\infty,+\infty)$, 证明 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上至多只有两根.
11. (11.) 设 $f,g\in C[a,b]$, g 在 (a,b) 可微且 $g(a)=0$. 若 $\lambda\neq 0$, 使得
$$|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant |g(x)|, x\in(a,b). \tag{12.55}$$
证明 $g(x)=0, \forall x\in[a,b]$.
12. (12.) 设 $f\in C^n(\mathbb{R}), n\in\mathbb{N}, f^{(k)}(x_0)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1$. 若对某个 $M>0$ 和 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-2}\geqslant 0, \lambda_{n-1}\geqslant 1$ 有不等式
$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M\prod_{k=0}^{n-1}\left|f^{(k)}(x)\right|^{\lambda_k}, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.56}$$
证明 $f(x)\equiv 0$.
13. (13.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足
$$f''(x)+xf'(x)+f(x)=0,$$
证明
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=0.$$
14. (14.) 设 $f\in D^1(\mathbb{R})$ 使得
$$|f'(x)+f(x)|\leqslant 1, \forall x\in\mathbb{R},$$
证明 $|f(x)|\leqslant 1, \forall x\in\mathbb{R}$.
15. (15.) 设 $f,g\in C[a,b]$ 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]$ 使得 $f(x_n)=g(x_{n+1}), n=1,2,\cdots$. 证明存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

16. (16.) 复旦大学 2024 研究生直博压轴题: 设 $\alpha>0, f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 证明 f'_+ 处处存在且若 $f'=g'$, 则必有 $f\in C^1(\mathbb{R})\Leftrightarrow\alpha>1$.
17. (17.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的下凸函数且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1-e^{-x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$, 求 f.
18. (18.) 设 $M,Q>0$, 定义
$$f(r)=1-\frac{M}{r^2}+\frac{Q}{r^4}-r^2, r>0.$$
设 $r_c>r_+>r_->0$ 是 f 的三个正根, 证明 $f'(r_+)+f'(r_-)<0$.
19. (19.) 设 $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 证明 f 递增且 $f(x)<1-\frac{4}{\pi^2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
20. (20.) 设正整数 $n\geqslant 2$, 实数 $R>0$ 且 $f\in C[0,R]\bigcap D^1(0,R)$, 证明
$$\sup_{x\in(0,R)}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{1}{n}\sup_{x\in(0,R)}\left|f'(x)+\frac{n-1}{x}f(x)\right|.$$
21. (21.) 设 $\delta,\lambda>0$ 且 f 在 $(0,\delta)$ 可微. 则
   (a). 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)-\lambda x f'(x))=0$, 是否有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$?
   (b). 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)+\lambda x f'(x))=0$, 是否有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$?
22. (22.) 设 $f\in C^3[0,1], f'(0)=0, |f'''(x)|<1$, 证明 $f'(1)<f''(0)+\frac{1}{2}$ 且
$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f''(x)\,\mathrm{d}x<\frac{1}{12}.$$
23. (23.) 设 $n>1$, 证明
$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$
24. (24.) 设 $f,g\in C[0,+\infty)$ 是正值函数且存在 $C_1,C_2>0$ 使得对任何 $t\geqslant 0$ 都有
$$\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\leqslant C_1, \tag{12.57}$$
以及
$$f(t)\leqslant C_2\left(2+\int_0^t g(s)f(s)\,\mathrm{d}s\right)\ln\left(2+\int_0^t g(s)f(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{12.58}$$
证明: 存在常数 $M>0$ 使得
$$f(t)<M, \forall t\in[0,+\infty). \tag{12.59}$$
25. (25.) 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 f 非常数且 $|f''(x)|\leqslant|f'(x)|$, 证明:f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调.
26. (26.) 设正值函数 $f\in C[1,+\infty)$ 且满足
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(f(x))^3, \forall x\geqslant 1.$$
证明:
$$f(x)\geqslant\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)}, \forall x\geqslant 1.$$
27. (27.) 求 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数的 α 取值范围.
28. (28.) 设非负函数 $f\in C[0,1], f(0)=f(1)=0$, 证明: 对任何 $a\in[0,1]$, 存在 $\zeta\in[0,1]$ 使得 $f(\zeta+a)=f(\zeta)$.
29. (29.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 以 2 为周期, 证明
$$F(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$
也以 2 为周期.

30. (30.♠) 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 并成立
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right]\mathrm{d}x=1. \tag{12.60}$$
证明:
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,|f(x)|<\frac{\sqrt{2}}{2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

31. (31.) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是周期函数, 证明: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$ 存在, 则
$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=\lim_{y\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f_i(y),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{12.61}$$

32. (32.) 设 $f,a,g\in C[0,+\infty)$ 以及 f 是正值函数. 若有
$$f'(x)+g(x)\leqslant a(x)f(x),\forall x\geqslant 0, \tag{12.62}$$
证明:
$$f(x)\leqslant f(0)e^{\int_0^x a(t)\mathrm{d}t}-\int_0^x e^{\int_t^x a(u)\mathrm{d}u}g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{12.63}$$
若还有 $f(0)=1,a(x)=\frac{2}{\sqrt{f(x)}}$, 证明:
$$f(x)\leqslant 2e^x-1-\int_0^x e^{x-t}g(t)\,\mathrm{d}t,\forall x\geqslant 0. \tag{12.64}$$

33. (33.) 是否存在连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得
$$f(f(x))=\cos^2 x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

34. (34.) 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得
$$f(0)=0,f(1)=1,|f''(x)|\leqslant 2,\forall x\in[0,1].$$
证明:
(a). $|f(x)-x|\leqslant\frac{1}{4},\forall x\in[0,1]$;
(b). 若 $f'(0)=f'(1)$, 则
$$x^2\leqslant f(x)\leqslant 2x-x^2,\forall x\in[0,1]. \tag{12.65}$$

35. (35.) 设 $f,g\in D^1[0,+\infty)$ 满足
$$f(0)=g(0)=0,|f'|\leqslant|g|,|g'|\leqslant|f|,$$
证明:$f,g=0$.

36. (36.) 证明: $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 的严格下凸函数.

37. (37.) 设 f 连续, 证明:
(a). 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在, 则 f 在 $x=0$ 可微;
(b). 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在, 则 f 在 $x=0$ 可微;
(c). 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}$ 存在, 则 f 在 $x=0$ 可微;
(d). 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在, 则 f 在 $x=0$ 可微.

38. (38.) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 可微且
$$f(x)-x\ln xf'(x)\neq 0,\forall x\in(0,+\infty),$$
证明:f 的零点不超过 2 个.

39. (39.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 且有
$$f'(x)+f(x)\tan x=\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\in[0,1].$$
证明:f 在 $[0,1]$ 恒为 0.

40. (40.) 设 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续函数, 若
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]=A>0, \tag{12.66}$$
计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)$.

41. (41.) 设 $f\in D^2(\mathbb{R}),a\in\mathbb{R}$ 满足
$$f'(x)=f(a-x). \tag{12.67}$$
求全部 f.

42. (42.) 设 $f\in C(\mathbb{R}),g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $\mathbb{R}$ 上递减函数. 证明:$f\equiv 0$.

43. (43.) 设
$$p(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}},x>0,$$
证明
$$p(x+1)=p(x)+\sin x$$
有无穷多个不相等的正实数解.

44. (44.) 设 $f\in C[0,+\infty)$ 满足
$$0\leqslant\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f^2(x),\forall x\geqslant 0.$$
证明:

(a). 若 $0\leqslant a<b,f(a)=f(b)=0$, 则
$$f(x)=0,\forall x\in[a,b].$$

(b). 若存在 $c>0$ 使得 $f(c)\neq 0$, 则
$$f(x)>\frac{1}{2}(x-c),\forall x\geqslant 0.$$

45. (45.) 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足
$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{12.68}$$
证明:
$$|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|\leqslant\frac{1}{2}(y-x)^2,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{12.69}$$

46. (46.) 设 f 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 连续且
$$|a|\neq|b|,\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+ax)-f(x_0+bx)}{x}=C\text{存在},$$
证明: $f'(x_0)$ 存在.

47. (47.) 设 $f\in D(\mathbb{R})$ 满足对任何 $x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$ 都有
$$f'(x)=\frac{f(x+n)-f(x)}{n}. \tag{12.70}$$
求 f.

48. (48.) 设 $f\in C[a,b]$, 证明:
$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a). \tag{12.71}$$

49. (49.) 设 $f\in C^2[a,b]$ 满足
$$f''(x)\neq 0,x\in[a,b],f(a)=f(b)=0,$$
且有
$$y_0=f(x_0)>0,f'(x_0)=0,$$

证明存在 $x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, b)$, 使得

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{y_0}{2},$$

且

$$\int_a^b f(x)\,dx < y_0(x_2 - x_1).$$

50. (50.) 证明

$$s! \leqslant s^s \leqslant e^s s!, \forall s \in \mathbb{N}_0, \tag{12.72}$$

以及对任何 $\eta \in (0,1)$, 都存在 $s_\eta \in \mathbb{N}$ 使得

$$(e\eta)^s s! \leqslant s^s, \forall s \geqslant s_\eta. \tag{12.73}$$

51. (51.) 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 满足对某个 $C > 0$ 成立

$$x^2 |f(x)| + |f''(x)| \leqslant C. \tag{12.74}$$

证明: 存在常数 $M > 0$ 使得

$$|xf'(x)| \leqslant M, \forall x \in \mathbb{R}.$$

52. (52.) 若 $f \in C^\infty(a, +\infty) \bigcap C[a, +\infty)$ 满足

$$f(a) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

证明: 对任何正整数 k, 存在 $x_k \in (a, +\infty)$ 使得 $f^{(k)}(x_k) = 0$.

53. (53.♠) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (-1, 1)$, 证明:

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1 + a_i a_j}{1 - a_i a_j} \geqslant 1,$$

并判断取等条件.

54. (54.)

(a). 求 $f(x) = 5\cos x - \cos(5x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 最大值;

(b). 给定 $\theta \in (0, \pi)$, 设 a 为实数, 证明: 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leqslant \cos\theta$;

(c). 若存在 $\varphi \in \mathbb{R}$ 使得对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leqslant b,$$

求 b 的最小值.

55. (55.) 设 $f \in C[-1, 1] \bigcap D^2(-1, 1)$ 满足

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x > f(1) + f(-1).$$

证明: 存在 $x_0 \in (-1, 1)$ 使得 $f''(x_0) < 0$.

56. (56.) 设 $f \in D^2(\mathbb{R})$ 满足

$$[f''(x)]^3 + e^x \sin[f'(x)] - f(x) = 0, \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

证明:$f \equiv 0$.

57. (57.) 设 $f \in D(0, +\infty)$ 使得

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + \frac{f'(x)}{x} \right] = 0.$$

证明: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

58. (58.) 设 f 在 $(0, +\infty)$ 中三阶可导且

$$f'(x) > 0, f''(x) > 0.$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{f''^2(x)}=\ell\neq 1$, 证明 $\ell<1$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}=\frac{1}{2-\ell}.$$

59. (59.) 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x+y)+g(x-y)=2f(x)g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

若 $|f(x)|\leqslant 1$ 且 f 不恒为常数, 证明

$$|g(x)|\leqslant 1.$$

60. (60.) 设 $f\in D^1(a,+\infty)$ 且 $|f'(x)|$ 在 $(a,+\infty)$ 递减. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}[xf'(x)]=0.$$

61. (61.) 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 是非负的且满足

$$f'(x)\geqslant 4-f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)\geqslant 2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

62. (62.) 设 $f\in D^2[a,b]$ 且对 $x\in[a,b]$, $f(x),f''(x)$ 同号或者同时为 0. 若 f 在 $[a,b]$ 任何一个子区间都不为 0, 证明:$f(x)=0$ 如果在 (a,b) 有根, 则必唯一.

63. (63.) 设 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},n=0,1,2,\cdots$, 证明:

(a). 当 n 为偶数时, f_n 在 $\mathbb{R}$ 上无零点. 当 n 为奇数时, f_n 在 $\mathbb{R}$ 上有唯一零点.

(b). 设 x_m 为 f_{2m+1} 在 $\mathbb{R}$ 上的唯一零点, 则 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 严格递减且 $\lim\limits_{m\to+\infty}x_m=-\infty$.

64. (64.) 设 $f\in D^1(1,+\infty)$ 且

$$f'(x)=\frac{x^2-f^2(x)}{x^2(f^2(x)+1)},\forall x\in(1,+\infty).$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=+\infty.$$

65. (65.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足

$$\int_0^{\pi}\frac{f(|\cos x|)}{\sin x}\mathrm{d}x=0,f''(x)>0,$$

证明:$f'(1)>0$.

66. (66.) 设

$$f(x)=\tan x\cdot\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)^2\cdot\left[\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]^4-16x^7.$$

证明:f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 递增.

67. (67.) 设 $f\in C^2[0,+\infty)$ 满足

$$f\left(\frac{2k}{\sqrt{3}}\pi\right)=0,k=0,1,2,\cdots,f''(x)+f'(x)+f(x)\geqslant 0,\forall x\in(0,+\infty).$$

求 f 表达式.

68. (68.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的周期 $T>0$ 的连续函数且满足 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明:$f\equiv 0$.

69. (69.) 设

$$f(x)=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(2k)!}x^{2k},k=1,2,\cdots,$$

证明:f 不存在三重根.

70. (70.) 设

$$P_0(t)=1,P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right],n=1,2,\cdots,$$

证明:

$$(n+1)P_{n+1}(t)=(2n+1)tP_n(t)-nP_{n-1}(t),n=1,2,\cdots,$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}.$$

71. (71.) 证明:

$$\left(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}\right)^{\sqrt{\alpha+1}}>\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)^{\sqrt{\alpha}},\alpha>0.$$

72. (72.) 设 $f,g\in C^1[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0;$$

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0,\forall x\in[a,b];$$

g在(a,b)存在唯一的零点ξ.

证明:

(a).

$$\int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x=-\int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x;$$

(b).

$$\int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x>0.$$

73. (73.)[9]设 $k\in\mathbb{N}$.

(a). $x^{3k+1}+x^2-6x+1=0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 有唯一根 x_k;

(b). 点列 $\{x_k\}$ 严格递减;

(c). 求极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k$.

74. (74.) 设 $S_n=1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n,n=1,2,\cdots$, 证明:

$$n^n\left[1+\frac{1}{4(n-1)}\right]\leqslant S_n<n^n\left[1+\frac{2}{e(n-1)}\right],\forall n\geqslant 2.$$

75. (75.) 设常数 $T>0$, f 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 且 $f(x)\cos x,f(x)\sin x$ 以 T 为周期函数.

(a). 证明 f 是周期 T 函数;

(b). 若 f 在 $\mathbb{R}$ 二阶可导且存在常数 $M>0$ 使得

$$|f''(x)|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$|f'(x)|\leqslant MT,\forall x\in\mathbb{R}.$$

76. (76.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ 上有二阶导数. 设

$$f'(x)<0<f''(x),\forall x\in(-\infty,x_0);$$

$$f'(x)>0>f''(x),\forall x\in(x_0,+\infty),$$

证明:f 在 x_0 不可微.

77. (77.) 设 $f\in D[0,1]$ 满足

$$f'(x)\neq 1,\forall x\in[0,1],f(0)=f(1),\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

[9]本题允许借助计算机观察函数图像.

证明: 对任意正整数 n 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

78. (78.) 设 $f\in D^2[0,1]$ 满足

$$f''(x)>0,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明:

$$|f(x)|\leqslant\max\{f(0),f(1)\}.$$

79. (79.) 设 $f\in C[0,1]$ 且满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 x^2f(x)=1.$$

证明: 存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|\geqslant 16$.

80. (80.) 设 $f\in C[0,+\infty)$ 满足

$$f(x)\cdot f(y)\leqslant xf\left(\frac{y}{2}\right)+yf\left(\frac{x}{2}\right),\forall x,y\geqslant 0.$$

证明:

$$f(x)\leqslant x,\forall x\geqslant 0.$$

81. (81.) 设正值函数 $f\in C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 且

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{f(x)}\sin x\ln f(x)\,\mathrm{d}x=0,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{f(x)}\cos x\ln f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明:

(a). 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在 x_1 使得 $f(x_1)=1$;

(b). 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在不同的 x_2,x_3 使得 $f(x_2)=f(x_3)$.

82. (82.) 设 $f\in C^2(0,+\infty)$ 满足

$$f''(x)+3f'(x)+2f(x)=\left(x^2+x+1\right)\sin\frac{1}{x},\forall x>0.$$

计算

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f''(x).$$

83. (83.) 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\forall x\neq y,x,y\in[0,1],$$

证明: 存在唯一的 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

84. (84.)

(a). 解微分方程

$$\begin{cases}y''-5y'+6y=0\\ y(0)=1,y'(0)=0\end{cases}.$$

(b). 设 $h\in C[0,+\infty),\varphi\in D^1[0,+\infty)$ 满足

$$\varphi'(x)+h(x)\varphi(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0.$$

证明:

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)e^{-\int_0^x h(t)\mathrm{d}t},\forall x\geqslant 0.$$

(c). 设函数 f 满足 $f(0)=1,f'(0)=0$ 且

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0.$$

证明:$f(x)\geqslant g(x)$, 其中 g 是第 1 问的解.

85. (85.) 设 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足
$$f(f(x))=6x-f(x).$$
求 f.

86. (86.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 有周期 $T>0$. 若对某个 $L>0$ 成立
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{-x}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)=0,|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R},$$
证明
   (a). $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$;
   (b). 存在 $\xi\in(0,T)$ 使得 $f(\xi)=0$;
   (c). 有 $\sup\limits_{x\in[0,T]}|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}LT$.

87. (87.) 设 $f\in C^{\infty}(0,+\infty)$, 我们称 f 零点指标为 n, 如果存在
$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n<+\infty$$
使得
$$f^{(k)}(x_{k+1})=0,0\leqslant k\leqslant n-1;$$
$$f^{(k)}(x)\text{ 在 }(x_k,x_{k+1})\text{ 无零点};0\leqslant k\leqslant n-1;$$
$$f^{(n)}(x)\text{ 在 }(x_n,+\infty)\text{ 无零点}.$$
若 f 本身无正零点, 则称 f 零点指标为 0.
   (a). 对 $v_1,v_2,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 若
$$v_1<v_2,v_2>0,\alpha^2+\beta^2\neq0,$$
   证明 $f(x)=\alpha x^{v_1}+\beta x^{v_2}$ 的任意零点指标不超过 1.
   (b). 对 $v_1,v_2,v_3,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, 若
$$v_1<v_2<v_3,v_3>1,v_2>0,\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq0,$$
   证明 $f(x)=\alpha x^{v_1}+\beta x^{v_2}+\gamma x^{v_3}$ 的任意零点指标不超过 2.

88. (88.) 设正值连续函数 $a,b,y\in C(\mathbb{R})$ 满足
$$\lim_{t\to+\infty}e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}=+\infty,\lim_{t\to+\infty}\frac{a(t)}{b(t)}=\beta\in\mathbb{R},y'(t)=y(t)(a(t)-b(t)y(t)).$$
计算 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)$.

89. (89.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且无不动点. 设
$$f_n\triangleq\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次}},n=1,2,\cdots.$$
证明: 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 无界.

90. (90.) 设 $f\in D^2[0,1]$ 满足
$$f(0)=0,xf''(x)+2f'(x)-f(x)=0.$$
证明:
$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

91. (91.) 对 $p\in[1,+\infty),n\in\mathbb{N}$, 定义
$$||\mathbf{x}||_p\triangleq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\mathbf{x}=\{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathbb{R}^n.$$
求最小的 $C>0$ 使得对任何 $n\in\mathbb{N},\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\theta\in(0,1),p\geqslant1$, 只要 $||\mathbf{x}||_p=||\mathbf{y}||_p$, 就有
$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_p\leqslant C||\theta\mathbf{x}-(1-\theta)\mathbf{y}||_p.$$

92. (92.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x)=2^x, x<0$. 记

$$D(x_0)\triangleq\{d\in\mathbb{R}: f(x_0+d)>f(x_0)\}, x_0\in\mathbb{R}.$$

(a). 若 $f(x)=1-x, x\geqslant 0$, 求 $D(-1)$.

(b). 若 f 为奇函数. 对 $x_1x_2\neq 0$ 的 x_1,x_2 且 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 证明 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$.

(c). 若 f 满足

I.

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\Rightarrow D(x_2)\subseteq D(x_1);$$

II.

$$f(x)<f(0), \forall x\in(0,1);$$

证明 $f(0)\geqslant 1$ 且 f 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

93. (93.) 设 $f(x)=xe^x-3x+1$.

(a). 若

$$f(x+m)-f(x)>m, \forall x>0,$$

求 m 取值范围.

(b). 若

$$f(k+x)+f(k-x)>2f(k), \forall x>0,$$

求 k 取值范围.

94. (94.) 证明:

$$\pi<\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}\leqslant 4, \forall x\in(0,1).$$

95. (95.) 设 $m\in\mathbb{N}, T>0$. 若周期 T 函数 $f\in C^m(\mathbb{R})$ 满足在 $[0,T)$ 内有 $N\in\mathbb{N}$ 个零点且存在自然数 $0\leqslant q<m$ 和 $c\in\mathbb{R}$ 使得

$$f^{(q)}(c)=f^{(q+1)}(c)=0.$$

证明: 对任何 $a\in\mathbb{R}$, $f^{(m)}$ 在 $[a,a+T)$ 内至少有 $N+1$ 个零点.

96. (96.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$.

(a). 若

$$f''(x)+e^{f(x)}-e^{-f(x)}=0, \forall x\in\mathbb{R},$$

证明:f 有界.

(b). 若

$$f(x+2\pi)=f(x), f''(x)-e^{f(x)}+e^{-f(x)}=0, \forall x\in\mathbb{R},$$

求 f.

第 13 章 数学类函数性态分析

内容提要

- 凸函数 ♡ 13.1
- 洛必达和函数 stolz 基本模型 13.2
- 基本分析定理 13.3
- R-S 积分和 L-S 积分理论 * 13.4
- 基本性态分析结论 13.5
- 逼近方法 13.6
- 函数性态分析训练集 13.7

13.1 凸函数 ♡

13.1.1 半连续函数 ♠

在本节我们仅仅讨论上半连续函数, 下半连续是类似的. 不熟悉拓扑空间的读者可以就当作 $\mathbb{R}$.

定义 13.1 (半连续函数定义)

拓扑空间 X 上的一个函数 $f: X \to [-\infty, +\infty)$ 被称为上半连续的, 如果对每个 $c \in \mathbb{R}$ 都有

$$\{x \in X : f(x) < c\}$$

是 X 的开集. ♣

笔记 显然 f 连续等价于 f 上半连续且下半连续. 顾名思义半连续函数有连续函数一半的性质. 对于度量空间 (X, d), 上半连续等价于对任何 $x_0 \in X, \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $d(x, x_0) < \delta$, 就有 $f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon$. 也等价于对任何 $x_0 \in X$ 都有 $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$. 因此类似连续, 你也可以把半连续函数局部定义.

命题 13.1 (上半连续函数基本性质)

设 X 是拓扑空间,

1. 若 f_α 是一族 X 上的上半连续函数, 则 $f = \inf\limits_\alpha f_\alpha$ 也是上半连续函数.
2. 若 f 是 X 上的上半连续函数, 则对每一个紧集 $K \subset X$ 有 $a \in K$ 使得 $f(x) \leqslant f(a), \forall x \in K$.
3. 设 $I \subset [-\infty, +\infty)$ 是开区间, 如果 $f: X \to I$ 和 $g: I \to [-\infty, +\infty)$ 是上半连续函数且 g 递增, 则 $g \circ f$ 是上半连续函数.

♠

笔记 第二条是说紧集上的上半连续函数一定有上界且取得最大值. 一个经典的技巧是, 很多时候如果一个命题对所有紧集成立, 则等价于这个命题局部上成立, 即对每个点, 都存在一个邻域使得在这个邻域上成立. 现在我们注意到对每个点 x, 如果其所有邻域上, 上半连续函数 f 无上界, 那么取 $x_n \to x$ 使得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$, 则 f 在紧集 $\{x_n\} \bigcup \{x\}$ 上无上界, 这就是一个矛盾!

证明

1. 对任何 $x_0 \in X, \beta$, 我们有

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \inf_\alpha f_\alpha(x) \leqslant \overline{\lim_{x \to x_0}} f_\beta(x) \leqslant f_\beta(x_0).$$

两边对 β 取下确界即得

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \inf_\alpha f_\alpha(x) \leqslant \inf_\beta f_\beta(x_0).$$

故 $f = \inf\limits_\alpha f_\alpha$ 也是上半连续函数.

2. 注意到开覆盖 $K=\bigcup\limits_{c}\{x\in K:f(x)<c\}$ 必有有限子覆盖

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}\{x\in K:f(x)<c_i\}.$$

不妨设 c_1 是 $c_i,i=1,2,\cdots,n$ 的最大值，则 $f(x)<c_1,\forall x\in K$. 取 $c=\sup\limits_{K}f$，如果 f 达不到最大值，注意到 $\frac{1}{c-f(x)}$ 是 K 上上半连续函数，因此同样应该有上界，故 $c>\sup\limits_{K}f$，矛盾！

3. 注意到 $\{x\in X:g(x)<c\}=[-\infty,\alpha_c)$，因此

$$\{x\in X:g\circ f(x)<c\}=\{x\in X:f(x)<\alpha_c\},$$

这就证明了 $g\circ f$ 是上半连续函数.

定理 13.1 (半连续函数逼近定理)

设 X 是一个度量空间，f 是 X 上的上半连续函数，则存在递减函数列 $f_n\subset C(X)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in X.$$

♡

证明 如果 $f\equiv-\infty$，取 $f_n=-n,n=1,2,\cdots$. 现在假定 $f\not\equiv-\infty$，然后考虑 $g=e^{-f}:X\to(0,+\infty]$ 并定义

$$g_n(x)=\inf_{z\in X}\{g(z)+nd(x,z)\},n=1,2,\cdots.$$

显然

$$g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x)\leqslant g(x),\forall x\in X,n=1,2,\cdots.$$

因为 $g\not\equiv+\infty$，我们知道 $g_n,n\in\mathbb{N}$ 都是有限函数. 若对某个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X$，有 $g_n(x)=0$. 则存在 $z_m\in X,m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}[g(z_m)+nd(z_m,x)]=0,$$

即

$$\lim_{m\to\infty}d(z_m,x)=0,\lim_{m\to\infty}f(z_m)=+\infty.$$

又由命题13.1的第二条和 Note 知 f 局部有上界，这就是矛盾！因此我们证明了

$$g_n(x)>0,\forall x\in X,n\in\mathbb{N}.$$

为了说明 $f_n=-\ln g_n,n\in\mathbb{N}$ 是我们需要的函数，我们只需证明

$$g_n\in C(X),\lim_{n\to\infty}g_n=g.$$

事实上，对任何 $x,y,z\in X$，我们有

$$g_n(x)\leqslant g(z)+nd(z,x)\leqslant g(z)+nd(y,z)+nd(x,y).$$

对 z 取下确界得

$$g_n(x)\leqslant g_n(y)+nd(x,y),$$

对称得

$$g_n(y)\leqslant g_n(x)+nd(x,y),$$

即

$$|g_n(y)-g_n(x)|\leqslant nd(x,y).$$

故 $g_n\in C(X),\forall n\in\mathbb{N}$.

给定 $x\in X$ 和 $\epsilon>0$，因为 g 下半连续，所以存在 x 的半径为 $\delta>0$ 的开球邻域 U，使得

$$g(z)>g(x)-\epsilon,\forall z\in U.$$

于是由 g_n 定义知

$$g_n(x) \geqslant \min\{g(x) - \epsilon, n\delta\}.$$

当 n 充分大, 我们知道 $g(x) \geqslant g_n(x) \geqslant g(x) - \epsilon$, 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. 我们证明了定理13.1.

作为半连续函数的运用, 我们考虑

例题 13.1 设有限函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), u_n \in C[a,b], n \in \mathbb{N}.$$

若 $u_n, n \in \mathbb{N}$ 非负, 证明 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 达到最小值.

证明 注意到对任何 $m \in \mathbb{N}$ 都有

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{m} \lim_{x\to x_0} u_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{m} u_n(x_0).$$

于是让 $m \to \infty$ 得 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) \geqslant S(x_0)$. 由下半连续函数的性质13.1, 我们有 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 达到最小值.

13.1.2 凸函数

注意到我们本节皆对下凸函数来叙述, 上凸函数类似的结果亦然成立, 读者应该了熟于心. 基础不好的同学可以就在 $\mathbb{R}$ 上理解本节. 本节对 $\mathbb{R}^n$ 上的结果对 Banach 空间也成立.

定义 13.2 (下凸函数的定义)

对集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 我们称

1. $f: S \to \mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x, y \in S$, 只要
$$\{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$
就有
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{13.1}$$
2. $f: S \to \mathbb{R}$ 是一个严格 Jensen 下凸函数, 如果对任何 $x \neq y \in S$, 只要
$$\{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$
就有
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{13.2}$$
3. 称 $f: S \to \mathbb{R}$ 是一个下凸函数, 如果对任何 $x, y \in S$, 只要
$$\{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$
就有
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall \lambda \in [0,1]. \tag{13.3}$$
4. 称 $f: S \to \mathbb{R}$ 是一个严格下凸函数, 如果对任何 $x \neq y \in S$, 只要
$$\{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1]\} \subset S,$$
就有
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall \lambda \in (0,1). \tag{13.4}$$

♣

笔记

1. 我们常用 $\{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1]\}$ 来表示连接 x, y 的线段[1].

[1] 线段的意思是闭的线段.

2. 显然 f 在 S 上各种凸的充要条件都是对任何含于 S 的线段 ℓ, 都有 $f|_\ell$ 上是对应的那种一元凸函数.
3. 注意到闭区间上的连续函数如果在开区间内是下凸函数, 则必然在闭区间上也是下凸函数.
4. 开集上的二阶可微函数为下凸函数等价于 Hess 矩阵半正定可以在任何一般数学分析教材上找到.

显然下凸蕴含 Jensen 下凸, 实际运用中我们更偏爱下凸而不是 Jensen 下凸, 推导二者的联系构成本节重要话题.

命题 13.2 (Jensen 不等式)

对集 $S\subset\mathbb{R}^n$, 设 $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 则对完全含于 S 内的一条线段上的点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和

$$\sum_{k=1}^m\lambda_k=1,\lambda_k\in[0,1]\bigcap\mathbb{Q},$$

我们有

$$f\left(\sum_{k=1}^m\lambda_kx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^m\lambda_kf\left(x_k\right). \tag{13.5}$$

特别的,

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^mx_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^m\frac{1}{m}f\left(x_k\right). \tag{13.6}$$

笔记 初等的, 如果 S 性质足够好且 f 二阶可微, 读者可以通过把 f 在 $\sum\limits_{k=1}^m\lambda_kx_k$ Taylor 展开, 然后丢掉二阶微分那项来得到不等式(13.5). 本部分的证明尽可能追求一般性.

证明 首先不等式(13.6)的建立是经典高中数学习题, 一个参考可以见Jensen 不等式.

我们归纳证明不等式(13.5), 当 $m=2$, 设有理数 $\frac{p}{q}\in[0,1],q>0$, 运用不等式(13.6), 我们有

$$f\left(\frac{p}{q}x+\left(1-\frac{p}{q}\right)y\right)=f\left(\underbrace{\frac{x}{q}+\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x}{q}}_{p\text{个}}+\underbrace{\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\cdots+\frac{y}{q}}_{q-p\text{个}}\right)\leqslant\frac{p}{q}f\left(x\right)+\left(1-\frac{p}{q}\right)f\left(y\right).$$

这就证明了(13.5)的 $m=2$ 的情况. 假定 m 时不等式(13.5)成立, 当 $m+1$ 时, 我们不妨设 $\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i\neq0$, 否则不等式(13.5)是平凡的. 现在

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_jf\left(x_j\right)&=\sum_{i=1}^m\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^m\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i}f\left(x_j\right)+\lambda_{m+1}f\left(x_{m+1}\right)\\&\geqslant\sum_{i=1}^m\lambda_i\cdot f\left(\sum_{j=1}^m\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i}x_j\right)+\lambda_{m+1}f\left(x_{m+1}\right)\\&\geqslant f\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^m\frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i}x_j+\lambda_{m+1}x_{m+1}\right)=f\left(\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_ix_j\right),\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 $m=2$ 时的不等式. 于是就对一般的 $m\in\mathbb{N}$, 我们证明了(13.5).

推论 13.1 (Jensen 不等式完整版本)

对集 $S\subset\mathbb{R}^n$, 设 $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个下凸函数, 则对完全含于 S 内的一条线段上的点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和

$$\sum_{k=1}^m\lambda_k=1,\lambda_k\in[0,1],$$

我们有

$$f\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f\left(x_k\right). \tag{13.7}$$

♡

证明 仔细检查命题13.2的证明, 我们容易发现(13.7)成立.

从不等式(13.5)和(13.7)可以看到, 他们的差异仅仅是是否允许 $\lambda_k\in[0,1]\backslash\mathbb{Q}$, 因此运用基本的逼近想法(12.2.1), 我们需要

定理 13.2 (Jensen 凸和凸的关系)

对集 $S\subset\mathbb{R}^n$, 设 $f:S\to\mathbb{R}$ 是一个 Jensen 下凸函数, 若对任何 S 中的线段 ℓ, $f|_\ell$ 连续, 则 f 是 S 上的下凸函数.

♡

笔记 显然我们需要的逼近是

$$\lim_{\lambda_k\to\mu_k,k=1,2,\cdots,n}f\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right)=f\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k x_k\right),$$

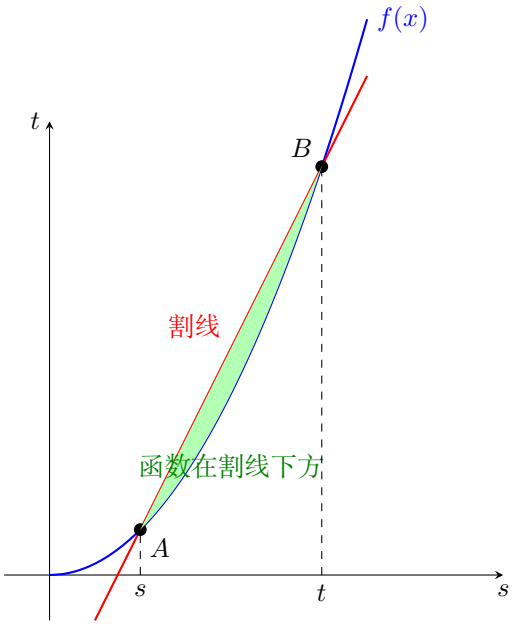
即 f 限制在 $x_k,k=1,2,\cdots,n$ 所在的线段上连续.

我们指出凸性的几何意义在难题里面是可以直接用的, 但是我们下面仍然对可能出现的情况做一个证明阐述. 其主要有割线斜率的单调性, 切线斜率 (导数) 单调性, 函数在切割线上下方, 函数二阶导数符号等等. 要穷尽每一种情况是困难的, 读者关键是理解其思想.

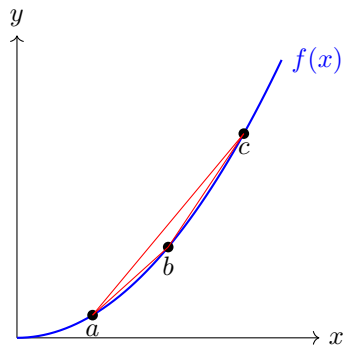
例题 13.2 在割线下方和凹凸性的关系 设 I 为一区间, $f:I\to\mathbb{R}$. 证明:

1. 若对任何 $[s,t]\subset I$ 成立
$$f(x)\leqslant\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s),\forall x\in[s,t]. \tag{13.8}$$
则 f 在 $[a,b]$ 下凸;
2. 若 f 在 $[a,b]$ 下凸, 则对任何 $[s,t]\subset I$ 成立(13.8);
3. 若对任何 $[s,t]\subset I$ 成立
$$f(x)<\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s),\forall x\in(s,t), \tag{13.9}$$
则 f 在 $[a,b]$ 严格下凸;
4. 若 f 在 $[a,b]$ 严格下凸, 则对任何 $[s,t]\subset I$ 成立(13.9).

注我们这里总是假设 $a\leqslant s<t\leqslant b$. 本题示意图如下:



笔记 本结果还能理解为对 $a\in I$, 则 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的递增性和严格递增性. 如下图



证明

1. 对 $[s,t]\subset I,\lambda\in[0,1]$, 在(13.8)中取 $x=\lambda s+(1-\lambda)t$ 得
$$f(\lambda s+(1-\lambda)t)\leqslant(\lambda-1)[f(s)-f(t)]+f(s)=\lambda f(s)+(1-\lambda)f(t),$$
于是 f 在 $[s,t]$ 下凸.
2. 对 $[s,t]\subset I,x\in[s,t]$, 我们取 $x=\lambda s+(1-\lambda)t,\lambda\in[0,1]$ 并利用下凸定义不等式得
$$f(x)=f(\lambda s+(1-\lambda)t)\leqslant\lambda f(s)+(1-\lambda)f(t)=(\lambda-1)[f(s)-f(t)]+f(s).$$
注意 $\lambda=\frac{x-t}{s-t}$, 我们有
$$f(x)\leqslant\left(\frac{x-t}{s-t}-1\right)[f(s)-f(t)]+f(s)=\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s).$$
这就完成了证明.
3. 若(13.9)成立, 则对 $\lambda\in(0,1)$, 1 推导的不等号自然变成严格不等号, 因此我们证明了 f 在 $[a,b]$ 严格下凸.
4. 对 $[s,t]\subset I,x\in(s,t)$, 我们取 $x=\lambda s+(1-\lambda)t,\lambda\in(0,1)$ 并利用严格下凸定义不等式得
$$f(x)=f(\lambda s+(1-\lambda)t)<\lambda f(s)+(1-\lambda)f(t)=(\lambda-1)[f(s)-f(t)]+f(s).$$
注意 $\lambda=\frac{x-t}{s-t}$, 我们有
$$f(x)<\left(\frac{x-t}{s-t}-1\right)[f(s)-f(t)]+f(s)=\frac{f(s)-f(t)}{s-t}(x-s)+f(s).$$
这就完成了证明.

例题 13.3 割线斜率单调性和凹凸性的关系 设 I 为一区间, $f:I\to\mathbb{R}$. 证明:

1. f 在 I 上下凸的充要条件是对 $x_1<x_2<x_3,x_1,x_2,x_3\in I$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{13.10}$$
2. f 在 I 上严格下凸的充要条件是对 $x_1<x_2<x_3,x_1,x_2,x_3\in I$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{13.11}$$

注式(13.10)等价于
$$f(x_2)\leqslant\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1). \tag{13.12}$$

证明

1. 必要性: 若 f 在 I 上下凸, 则对 $x_1<x_2<x_3,x_1,x_2,x_3\in I$, 注意到
$$\lambda\triangleq\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\in(0,1),x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3.$$
由下凸定义不等式得(13.12), 这恰好就是(13.10). 因此必要性得证.
充分性: 若对 $x_1<x_2<x_3,x_1,x_2,x_3\in I$, 有(13.10)成立, 则对 $x_1<x_3,x_1,x_3\in I,\lambda\in(0,1)$, 我们考虑
$$x_2\triangleq(1-\lambda)x_3+\lambda x_1\in(x_1,x_3).$$
利用(13.10)得(13.12), 这恰好就是下凸定义不等式.
2. 显然上述证明中的不等号可以全部改为严格不等号.

例题 13.4 导数单调性和割线斜率单调性的关系 函数 f 在 (a,b) 可导, 证明:

1. f' 递增的充要条件是对 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{13.13}$$
2. f' 严格递增的充要条件是对 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{13.14}$$

证明

1. 必要性: 由拉格朗日中值定理, 存在 $y_1\in(x_1,x_2),y_2\in(x_2,x_3)$ 使得
$$f'(y_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},f'(y_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
由 f' 递增和 $y_1<y_2$ 得(13.13).
充分性: 对 $a<s<t<b$, 由条件有
$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(y)-f(t)}{y-t},\forall s<x<y<t.$$
于是让 $x\to s^+,y\to t^-$ 得
$$f'(s)\leqslant\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\leqslant f'(t).$$
故 f' 递增. 这就完成了证明.
2. 必要性: 由拉格朗日中值定理, 存在 $y_1\in(x_1,x_2),y_2\in(x_2,x_3)$ 使得
$$f'(y_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},f'(y_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
由 f' 严格递增和 $y_1<y_2$ 得(13.14).
充分性: 对 $a<s<t<b$, 由条件有
$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s}<\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<\frac{f(y)-f(t)}{y-t},\forall s<x<y<t.$$
于是让 $x\to s^+,y\to t^-$ 得
$$f'(s)\leqslant\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\leqslant f'(t).$$

故 f' 递增. 若 $f'(s)=f'(t), a<s<t<b$, 则 f 在 $[s,t]$ 为线性函数, 因此在(8.67)中取 $x_1=s, x_2=\frac{s+t}{2}, x_3=t$ 即知矛盾! 因此 f' 严格递增.

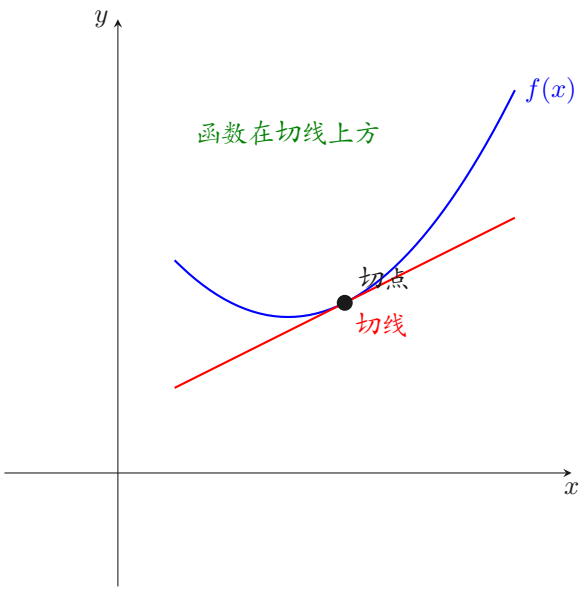
例题 13.5 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 证明:

1. f 在 (a,b) 下凸的充要条件是对任何 $x_0\in(a,b)$, 我们都有
$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \forall x\in(a,b). \tag{13.15}$$
2. f 在 (a,b) 严格下凸的充要条件是对任何 $x_0\in(a,b)$, 我们都有
$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \forall x\in(a,b)\setminus\{x_0\}. \tag{13.16}$$

证明

1. 必要性: 若 f 在 (a,b) 下凸, 则由例题13.2知 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 关于 x 递增, 因此我们有
$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&\geqslant\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \forall x\in(x_0,b);\\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&\leqslant\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \forall x\in(a,x_0),\end{aligned}$$
即(13.15)成立.
充分性: 若对任何 $x_0\in(a,b)$, 我们都有(13.15)成立, 则对 $a<x_1<x_2<b$, 由(13.15)得
$$\begin{cases}f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1);\\ f(x_1)\geqslant f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2),\end{cases}$$
即
$$f'(x_2)\geqslant\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geqslant f'(x_1).$$
现在由 f' 递增和例题13.4得 f 在 (a,b) 下凸.
2. 必要性: 若 f 在 (a,b) 下凸, 则由例题13.2知 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 关于 x 严格递增, 因此我们有
$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&>\frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0}\geqslant\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \forall x\in(x_0,b);\\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&<\frac{f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x+x_0}{2}-x_0}\leqslant\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \forall x\in(a,x_0),\end{aligned}$$
即(13.16)成立.
充分性: 若对任何 $x_0\in(a,b)$, 我们都有(13.16)成立, 则对 $a<x_1<x_2<b$, 由(13.15)得
$$\begin{cases}f(x_2)>f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1);\\ f(x_1)>f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2),\end{cases}$$
即
$$f'(x_2)>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>f'(x_1).$$
现在由 f' 严格递增和例题13.4得 f 在 (a,b) 严格下凸.

笔记



例题 13.6 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是可微函数. 若对任何 $a<x<y<b$, 都存在唯一的 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}. \tag{13.17}$$

证明: f 在 (a,b) 严格上凸或者下凸.

证明 若 f 在 (a,b) 上不严格上凸或者下凸, 则必然存在 $a<x_1<x_2<x_3<b$ 使得 $(x_i,f(x_i)),i=1,2,3$ 共线. 于是由拉格朗日中值定理得 $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3$ 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2),$$

这就是一个矛盾! 因此 f 在 (a,b) 严格上凸或者下凸.

实际上 Jensen 下凸函数在内点处只要有上界, 则必然在该点连续.

引理 13.1 (♠)

设 f 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域内是 Jensen 下凸函数, 若 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)<\infty$, 则 f 在 x_0 连续. ♡

证明 注意到

$$-\infty<f(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to0}\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\varliminf_{x\to x_0}f(x)+\frac{1}{2}\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x), \tag{13.18}$$

于是我们有 $\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)>-\infty$. 现在

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\leqslant\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{f(x_0)+f(2x-x_0)}{2}\leqslant\frac{f(x_0)}{2}+\frac{1}{2}\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x),$$

于是就有 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)\leqslant f(x_0)$. 代入式(13.18)我们知道 $f(x_0)\leqslant\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$, 这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

现在我们强调: 看到凸性应该兴奋, 凸性往往要从几何意义出发, 即割线斜率单调性, 切线斜率单调性, 导数单调性, 函数是否在切割线下方或者上方之类的几何意义出发来证明. 凸性的几何意义都是严谨的, 可以直接使用, 读者可以自己尝试严格证明或参考任何教科书.

定理 13.3 (开区间下凸函数左右导数处处存在)

(a,b) 上的下凸函数 f 在每一点左右导数都存在, 从而 f 在 (a,b) 连续. ♡

证明 证明的想法是用割线斜率单调性: 对 $x_0\in(a,b)$, 注意到 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x>x_0$ 和 $x<x_0$ 都是单调的且

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0},\forall x>x_0>y.$$

现在我们知道

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

都存在且 $f'_+(x_0)\geqslant f'_-(x_0)$. 现在自然有 f 在 x_0 连续.

笔记 在实分析中, 左右导数都存在的函数一定除去可数个点外可导, 因此由定理13.3知开区间上的下凸函数是除去可数集外的可微函数. 利用单调函数必然几乎处处可导和左右导数处处存在且单调可得下凸函数几乎处处二阶可微, 细节读者可以自行查阅.

定理 13.4

(a,b) 上的下凸函数 f 一定内闭 Lipschitz 连续. ♡

笔记 在实分析中我们知道闭区间上的连续下凸函数是绝对连续函数, 细节读者可以自行查阅.

证明 对 $[A,B]\subset(a,b)$, 则对固定的 $s\in(a,A),t\in(B,b)$, 我们记

$$L_{A,B,s,t}=\max\left\{\left|\frac{f(A)-f(s)}{A-s}\right|,\left|\frac{f(B)-f(t)}{B-t}\right|\right\},$$

则直接作图可知

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L_{A,B,s,t}|x-y|,\forall x,y\in[A,B]. \tag{13.19}$$

定理 13.5 (∗)

实变函数指出, $[a,b]$ 上的连续下凸函数 f 一定绝对连续. ♡

定理 13.6 (♠)

设 f 在 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域内是下凸函数, 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 连续. ♡

笔记 本结果在 Banach 空间是否成立未知. 本题证明的想法就是关于单变量的不等式(13.19)与其他分量无关.

证明 仅证明 $n=2$, 一般情况是类似的. 设 $\delta>0$, 使得 f 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 下凸, 于是

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|.$$

由于定理13.3我们知道 f 关于单变量连续, 于是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|=0.$$

运用定理13.4的不等式(13.19)知对任何 $|x-x_0|\leqslant\delta,|y-y_0|\leqslant\frac{\delta}{2}$ 都有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant\max\left\{\left|\frac{f(x,y_0-\delta)-f\left(x,y_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}\right|,\left|\frac{f(x,y_0+\delta)-f\left(x,y_0+\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}\right|\right\}\cdot|y-y_0|.$$

现在记

$$M_\delta=\sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\max\left\{\left|\frac{f(x,y_0-\delta)-f\left(x,y_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}\right|,\left|\frac{f(x,y_0+\delta)-f\left(x,y_0+\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\delta}{2}}\right|\right\},$$

于是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}M_\delta|y-y_0|=0.$$

这就证明了 f 在 (x_0,y_0) 连续.

推论 13.2 (开集上的下凸函数连续)

开集上的下凸函数是连续函数. ♡

作为半连续函数的运用, 我们考虑

定理 13.7 (♠ 下凸函数的局部定义)

设开集 $V\subset\mathbb{R}^n$, f 在 V 上上半连续, 如果对任何 $x\in V, y\in\mathbb{R}^n, \delta>0$, 都存在 $h\in(0,\delta)$, 使得

$$f(x)\leqslant\frac{f(x+hy)+f(x-hy)}{2}. \tag{13.20}$$

证明 f 是 V 上的下凸函数.

♡

笔记 本定理表明下凸函数是个局部的概念, 只要局部是下凸函数, 整体也是下凸函数. 从证明可以看到, 若对 $y\neq0$, 不等式(13.20)改为严格不等号, 则 f 也是严格下凸的.

证明 **Step 1** 下凸版本:

对 $x\in V, y\in\mathbb{R}^n$, 满足 $x+wy\in V, \forall w\in[-1,1]$, 考虑上半连续函数

$$g(w)=f(x+wy)-\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w-\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2},$$

现在有

$$g(1)=g(-1)=0.$$

如果存在 $s\in(-1,1)$, 使得 $g(s)>0$, 那么记

$$M\triangleq\sup_{[-1,1]}g>0, A\triangleq\{x\in[-1,1]:g(x)=M\}.$$

显然 A 是 $(-1,1)$ 中的紧集[2], 设 A 的最大值点 w_0, 则 $1-w_0>0$, 现在运用条件不等式(13.20), 我们知道存在充分小的 $h>0$, 使得

$$f(x+w_0y)\leqslant\frac{f(x+w_0y+hy)+f(x+w_0y-hy)}{2}.$$

于是对这个 h, 我们有

$$\begin{aligned}g(w_0)&=f(x+w_0y)-\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w_0-\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\\&\leqslant\frac{f(x+w_0y+hy)+f(x+w_0y-hy)}{2}-\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w_0-\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\\&=\frac{g(w_0+h)+g(w_0-h)}{2}<M,\end{aligned}$$

这是一个矛盾! 因此

$$g(w)\leqslant0, \forall w\in[-1,1].$$

因此

$$g(0)\leqslant0\Rightarrow f(x)\leqslant\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2},$$

故 f 是 Jensen 下凸函数, 因为 f 上半连续, 所以 f 局部有上界, 所以由引理13.1知 f 在 V 上连续, 因此我们证明了 f 是下凸函数.

Step 2 严格下凸版本:

对 $x\in V, y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 满足 $x+wy\in V, \forall w\in[-1,1]$, 考虑上半连续函数

$$g(w)=f(x+wy)-\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w-\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2},$$

现在有

$$g(1)=g(-1)=0.$$

由 **Step 1** 知

$$g(w)\leqslant0, \forall w\in[-1,1].$$

[2]注意到

$$\{x\in[-1,1]:g(x)=M\}=\{x\in[-1,1]:g(x)\geqslant M\}.$$

对 $w_0\in(-1,1)$ 运用条件不等式(13.20), 我们知道存在充分小的 $h>0$, 使得

$$f(x+w_0y)<\frac{f(x+w_0y+hy)+f(x+w_0y-hy)}{2}.$$

于是对这个 h, 我们有

$$\begin{aligned}g(w_0)&=f(x+w_0y)-\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w_0-\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\\&<\frac{f(x+w_0y+hy)+f(x+w_0y-hy)}{2}-\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w_0-\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\\&=\frac{g(w_0+h)+g(w_0-h)}{2}\leqslant M,\end{aligned}$$

即

$$g(w)<0,\forall w\in(-1,1).$$

现在对 $w\in(-1,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}f(x+wy)&<\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}w+\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}\\&=\frac{w+1}{2}f(x+y)+\frac{1-w}{2}f(x-y),\end{aligned}$$

故 f 是严格 Jensen 下凸函数,

命题 13.3 (♠)

设 f 在 (a,b) 上的下凸函数, 则 f 在 (a,b) 有上界的充要条件是

$$\lim_{x\to a^+}f(x),\ \lim_{x\to b^-}f(x)\text{ 存在.}\tag{13.21}$$

♠

笔记 由命题13.3我们知道如果 f 在 (a,b) 有上界, 则 f 可连续延拓到 $[a,b]$ 使得 f 在 $[a,b]$ 上仍然是下凸函数.

证明 由命题13.3知 f 在 (a,b) 连续. 若(13.21)成立, 则由 Cantor 定理知 f 在 (a,b) 一致连续, 因此 f 可连续延拓到 $[a,b]$ 上, 故 f 有界. 反之设 f 有上界, 设 $f(x)\leqslant M,\forall x\in(a,b)$. 取定 $x_0\in(a,b)$, 又 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 (x_0,b) 递增, 且

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\lim_{x\to b^-}\frac{M-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{M-f(x_0)}{b-x_0},$$

我们知道 $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在. 于是由

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\right].\tag{13.22}$$

知 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在. 类似的可得另外一侧极限, 因此我们证明了(13.21)成立.

定理 13.8 (♠ 闭区间凸函数的单调性刻画)

设 f 是 $[a,b]$ 上的下凸函数, 证明 f 只有下述三种情况:

1. f 在 $[a,b)$ 递减,
2. f 在 $(a,b]$ 递增,
3. 存在 $c\in(a,b)$, 使得 f 在 $[a,c]$ 递减, 在 $[c,b]$ 递增.

♡

笔记 定理中前两种情况之所以有一半是开区间, 是因为作图可知在端点处可能跳一下.

证明 由命题13.3知 f 在 (a,b) 连续. 先说明 f 有界. 实际上由割线不等式, 我们有

$$f(x)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),\forall x\in[a,b],$$

这给出 f 有上界. 由命题13.3知 f 可以连续延拓到 $\tilde f\in C[a,b]$.

下证

$$f(a)\geqslant\tilde f(a),f(b)\geqslant\tilde f(b).\tag{13.23}$$

事实上, 由命题13.3的证明中的(13.22)和 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(x_0,b]$ 递增知

$$\begin{aligned}\tilde{f}(b)&=\lim_{x\to b^-}f(x)\\&=\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\right]\\&\leqslant\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}+f(x_0)\right]\\&=f(b),\end{aligned}$$

类似可得 $f(a)\geqslant\tilde{f}(a)$, 这就证明了(13.23).

于是由(13.23)我们可以不妨设[3] $f\in C[a,b]$ 且不妨设 f 最小值为 0. 现在设 $c\in[a,b]$ 是 f 的最小值点. 若 $c\in(a,b)$, 则对 $b\geqslant x_2>x_1>c$, 我们有

$$\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}\geqslant\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}\Rightarrow f(x_2)\geqslant\frac{x_2-c}{x_1-c}f(x_1)\geqslant f(x_1).\tag{13.24}$$

故 f 在 $[c,b]$ 递增. 类似可知 f 在 $[a,c]$ 递减. 这就证明了递三种情况. 若 $c=a$, 则不等式(13.24)也成立, 故 f 在 $[a,b]$ 递增. 同样的若 $c=b$ 则 f 在 $[a,b]$ 递减, 我们完成了证明.

类似的我们有

推论 13.3 (开区间凸函数的单调性刻画)

设 f 是 (a,b) 上的下凸函数, a 允许取 $-\infty$, b 允许取 $+\infty$, 则 f 只有下述三种情况:

1. f 在 (a,b) 递减,
2. f 在 (a,b) 递增,
3. 存在 $c\in(a,b)$, 使得 f 在 $(a,c]$ 递减, 在 $[c,b)$ 递增.

♡

例题 13.7 设 $f_n,n=1,2,\cdots$ 是 $[a,b]$ 上下凸函数且满足:

1. $$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in[a,b];\tag{13.25}$$
2. $f_n,f,n=1,2,\cdots$ 在 $x_0\in(a,b)$ 可微;
3. $$\lim_{n\to\infty}f_n'(x_0)=\ell\in\mathbb{R}.\tag{13.26}$$

证明: $f'(x_0)=\ell$.

证明 若 $f'(x_0)\neq\ell$, 不妨设 $f'(x_0)<\ell$. 于是由(13.26)知存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$f_n'(x_0)>\frac{f'(x_0)+\ell}{2},\forall n\geqslant N.$$

由下凸函数在切线上方13.5得

$$f_n(x)-f_n(x_0)\geqslant f_n'(x_0)(x-x_0)\geqslant\frac{f'(x_0)+\ell}{2}(x-x_0),\forall x\in[x_0,b).$$

设 $n\to\infty$ 并利用(13.25)得

$$f(x)-f(x_0)\geqslant\frac{f'(x_0)+\ell}{2}(x-x_0),\forall x\in[x_0,b),$$

即

$$f'(x_0)\geqslant\frac{f'(x_0)+\ell}{2}\Rightarrow f'(x_0)\geqslant\ell,$$

这就是一个矛盾!

[3] 不改变题目叙述的单调性结论.

13.2 洛必达和函数 stolz

本节内容并不是一个结论性的东西方便以后大家使用, 而是展示一系列类似的题型, 需要掌握其证明的思想和方法.

定理 13.9 (反向洛必达法则)

1. 设 $f\in C[0,+\infty)\bigcap D^2(0,+\infty)$ 且 $f''(x)>-\frac{C}{x^2}$, 则有
$$\lim_{x\to 0^+}xf'(x)=0.$$
2. 设 $m>0$ 且 $yg'(y)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续递增满足
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{y^m}=A\in\mathbb{R}, \tag{13.27}$$
则
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g'(y)}{y^{m-1}}=mA.$$
3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 若有 f'' 有界, 则
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

♡

笔记 第一题可以看到这就是反向 Stolz 9.22的连续版本, 因此由第二个习题启发, 猜想一下 na_n 单调是否是反向 Stolz 的一个充分条件呢[4] ?

证明

1. 不妨设 $C>0$, 对 $h>0$, 由 Taylor 中值定理我们知道存在 $\theta\in(x,x+h)$, 使得
$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\theta)}{2}h^2.$$
于是
$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}h.$$
于是运用条件就有
$$f'(x)\leqslant\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}+\frac{C}{2\theta^2}h\leqslant\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}+\frac{C}{2x^2}h.$$
我们取 $h=\eta x,\eta\in(0,1)$, 就有
$$xf'(x)\leqslant x\frac{|f(x+\eta x)-f(x)|}{\eta x}+x\frac{C}{2x^2}\eta x=\frac{|f(x+\eta x)-f(x)|}{\eta}+\frac{C\eta}{2},$$
因此就有
$$\overline{\lim_{x\to0^+}}[xf'(x)]\leqslant\frac{C\eta}{2},$$
由 η 任意性可得
$$\overline{\lim_{x\to0^+}}[xf'(x)]\leqslant 0.$$
类似的由 Taylor 中值定理我们知道存在 $\vartheta\in(x-h,x)$, 使得
$$f(x-\eta x)=f(x)-f'(x)\eta x+\frac{f''(\vartheta)}{2}\eta^2x^2.$$
于是
$$\begin{aligned}xf'(x)&=\frac{f(x)-f(x-\eta x)}{\eta}+\frac{f''(\vartheta)}{2}\eta x^2\geqslant-\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta}-\frac{C}{2\vartheta^2}\eta x^2\\&\geqslant-\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta}-\frac{C}{2(x-\eta x)^2}\eta x^2=-\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta}-\frac{C\eta}{2(1-\eta)^2},\end{aligned}$$

[4]作者并未曾思考过.

于是

$$\varliminf_{x\to 0^+}\left[xf'(x)\right]\geqslant -\frac{C\eta}{2(1-\eta)^2}.$$

由 η 任意性可得

$$\varliminf_{x\to 0^+}\left[xf'(x)\right]\geqslant 0.$$

因此我们证明了

$$\lim_{x\to 0^+}\left[xf'(x)\right]=0.$$

2. 对 $c>1$, 注意到

$$g(cx)-g(x)=\int_x^{cx}g'(y)\,dy=\int_x^{cx}\frac{yg'(y)}{y}dy\geqslant xg'(x)\int_x^{cx}\frac{1}{y}dy=xg'(x)\ln c.$$

现在

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\leqslant\frac{1}{\ln c}\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{g(cx)-g(x)}{x^m}=\frac{c^m-1}{\ln c}A,$$

于是由 c 任意性可令 $c\to 1^+$ 并应用条件(13.27)知

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\leqslant\lim_{c\to 1^+}\frac{c^m-1}{\ln c}A=mA.$$

对 $0<c<1$, 我们有

$$g(x)-g(cx)=\int_{cx}^{x}g'(y)\,dy\leqslant\ln\frac{1}{c}\cdot xg'(x),$$

于是

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\geqslant\frac{1}{\ln\frac{1}{c}}\varliminf_{x\to+\infty}\frac{g(x)-g(cx)}{x^m}=\frac{1-c^m}{\ln\frac{1}{c}}A.$$

于是由 c 任意性可令 $c\to 1^-$ 并应用条件(13.27)知

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\geqslant\lim_{c\to 1^-}\frac{1-c^m}{\ln\frac{1}{c}}A=mA.$$

因此我们证明了

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g'(y)}{y^{m-1}}=mA.$$

3. 因为 f'' 有界, 所以 f' 一致连续, 于是由例13.40知

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

来看一个周民强的例子:

例题 13.8 设 $f\in D^2(0,1)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$. 若存在 $M>0$ 使得

$$\left(1-x^2\right)|f''(x)|\leqslant M,\forall x\in(0,1).$$

证明:

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)f'(x)=0.$$

证明 对 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right),h\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 我们由 Taylor 中值定理有 $\theta\in(x-h,x)$ 使得

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\theta)}{2}h^2.$$

于是

$$\begin{aligned}0 \leqslant \overline{\lim_{x\to 1^-}}\,(1-x)\left|f'(x)\right| &= \overline{\lim_{x\to 1^-}}\left[(1-x)\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}h\right|\right]\\ &\leqslant \overline{\lim_{x\to 1^-}}\left[(1-x)\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|\right]+\overline{\lim_{x\to 1^-}}\left(\frac{M(1-x)h}{2(1-\theta^2)}\right)\\ &= \overline{\lim_{x\to 1^-}}\left(\frac{M(1-x)h}{2(1-\theta^2)}\right)\leqslant \overline{\lim_{x\to 1^-}}\left(\frac{M(1-x)h}{2(1-x^2)}\right)=\frac{Mh}{4},\end{aligned}$$

让 $h\to 0^+$ 得

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}}\,(1-x)\left|f'(x)\right|=0\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}(1-x)f'(x)=0.$$

我们完成了证明.

来看一个非数决赛真题的例子.

例题 13.9♡ 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $\int_0^{+\infty}f(y)\,dy$ 收敛, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yf(y)\,dy}{x}=0.$$

笔记 本题不可直接洛必达. 他是结论8.3的连续版本, 在那里我们先 abel 变换8.2再 Stolz 定理9.1, 于是在这里我们先分部积分再洛必达.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yf(y)\,dy}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x yd\int_0^y f(z)\,dz}{x}=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(z)\,dz-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left(\int_0^y f(z)\,dz\right)dy}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(z)\,dz-\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(z)\,dz=0.\end{aligned}$$

我们来看两个数学类决赛真题的例子.

例题 13.10♡ 设 $a,b>0,f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^a}\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt=A\in\mathbb{R}$, 证明

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt=\frac{a}{b}A.$$

笔记 本题可沿用上题的方法, 思想即分部积分改善阶.

证明 记 $F(x)=\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt &= \frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-a}dF(t)=\frac{F(x)x^{b-a}-\lim\limits_{x\to0^+}x^{b-a}F(x)-(b-a)\int_0^x F(t)t^{b-a-1}dt}{x^b}\\ &= \frac{F(x)x^{b-a}-(b-a)\int_0^x F(t)t^{b-a-1}dt}{x^b}=\frac{F(x)}{x^a}-(b-a)\frac{\int_0^x F(t)t^{b-a-1}dt}{x^b},\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt=A-(b-a)\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x F(t)t^{b-a-1}dt}{x^b}=A-(b-a)\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)x^{b-a-1}}{bx^{b-1}}=\frac{a}{b}A.$$

例题 13.11 设 $a>0$ 且 f 在 $[0,+\infty)$ 二阶可微, 满足条件

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^a}=0,\ \overline{\lim_{x\to+\infty}}\,x^a\left|f''(x)\right|<\infty. \tag{13.28}$$

判断是否一定有

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0. \tag{13.29}$$

笔记 本题叙述比真题要难, 需要读者去猜测 a 的条件.

证明 **Step 1**

取

$$f(x)=x+\int_0^x \frac{1}{1+t^a}dt, x\geqslant 0,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+x^a}\right)=1\neq 0.$$

但是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\int_0^x \frac{1}{1+t^a}dt}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^a}}{ax^{a-1}}=0,\ \overline{\lim_{x\to+\infty}} x^a\left|f''(x)\right|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{ax^{2a-1}}{\left(1+x^a\right)^2}=0.$$

因此我们证明了 $a>1$, 不一定有(13.29)成立.

Step 2 当 $a\in(0,1]$, 我们类似反向洛必达13.9的思路. 对 $h>0$, 我们运用 Taylor 中值定理就有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\theta)}{2}h^2,\theta\in(x,x+h),$$

即

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}h.$$

现在就有

$$\left|f'(x)\right|\leqslant\frac{\left|f(x+h)-f(x)\right|}{|h|}+\left|\frac{f''(\theta)}{2}h\right|. \tag{13.30}$$

在(13.30)中取 $h=sx^a, s\in(0,1)$, 注意到

$$\left|\frac{f''(\theta)}{2}sx^a\right| \leqslant \left|\frac{f''(\theta)\theta^a}{2}\frac{sx^a}{\theta^a}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sup_{y\geqslant x}\left|f''(y)y^a\right|\cdot\frac{sx^a}{x^a}=\frac{s}{2}\sup_{y\geqslant x}\left|f''(y)y^a\right|, \tag{13.31}$$

$$\left|\frac{f(x+sx^a)}{sx^a}\right| = \left|\frac{f(x+sx^a)}{s(x+sx^a)^a}\left(1+sx^{a-1}\right)^a\right|. \tag{13.32}$$

于是由(13.31)和(13.32)知

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|f'(x)\right|\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{s}{2}\sup_{y\geqslant x}\left|f''(y)y^a\right|=\frac{s}{2}\cdot\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|f''(y)y^a\right|,$$

由 s 任意性可得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|f'(x)\right|=0,$$

这就证明了(13.29).

定理 13.10 (函数 Stolz 定理)

设 $T>0, f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是内闭有界函数

1. 设 $g(x+T)>g(x)$, 若有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}. \tag{13.33}$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A. \tag{13.34}$$

2. 设 $0<g(x+T)<g(x)$, 若有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0, \tag{13.35}$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}. \tag{13.36}$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A. \tag{13.37}$$

♡

证明 我们仅仅考虑 $A\in\mathbb{R}$, 其余情况类似, 为了书写方便, 我们不妨设 $A=0$, 否则用 $f-Ag$ 代替 f 即可. 不妨设 $T=1$, 否则用 $f(Tx)$ 代替 f 即可.

1. 对任何 $\epsilon>0$, 由(13.33)知存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\epsilon\left[g(x+1)-g(x)\right],g(x)>0. \tag{13.38}$$

于是对 $x>X$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|&=\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}\left[f(x-k+1)-f(x-k)\right]}{g(x)}+\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}\left[f(x-k+1)-f(x-k)\right]}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&\overset{(13.38)}{\leqslant}\epsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}\left[g(x-k+1)-g(x-k)\right]}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&=\epsilon\frac{g(x)-g(x-[x]+X)}{|g(x)|}+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|\\&\leqslant\epsilon+\left|\frac{f(x-[x]+X)}{g(x)}\right|.\end{aligned}$$

于是利用 f 在 $[X,X+1]$ 有界, 我们有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\epsilon,$$

由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

这就证明了(13.34).

2. 任何 $\epsilon>0$, 由(13.36)知存在某个 $X\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$|f(x+1)-f(x)|<\epsilon\left[g(x)-g(x+1)\right]. \tag{13.39}$$

于是对 $x>X, n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| &= \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x+k-1)-f(x+k)]+f(x+n)}{g(x)}\right| \\ &\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x+k-1)-f(x+k)|}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &\leqslant \epsilon\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[g(x+k-1)-g(x+k)]}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &= \epsilon\frac{g(x)-g(x+n)}{g(x)}+\frac{|f(x+n)|}{g(x)} \\ &\leqslant \epsilon+\frac{|f(x+n)|}{g(x)}.\end{aligned}$$

利用(13.35)得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x+n)|}{g(x)}=0\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\epsilon,$$

从而(13.37)成立.

13.3 基本分析定理

注本部分内容旨在对数学分析学中一些较为重要的定理做解释和辅助运用, 其目的都是为解决数学分析题服务的.

相似上下极限的 Stolz 定理9.1, 我们不加证明的给出上下极限的洛必达法则, 其证明和通常的洛必达法则一致[5].

定理 13.11 (上下极限洛必达法则)

设 f,g 满足洛必达法则的适用条件, 则有

$$\underline{\lim}\frac{f'}{g'}\leqslant\underline{\lim}\frac{f}{g}\leqslant\overline{\lim}\frac{f}{g}\leqslant\overline{\lim}\frac{f'}{g'}. \tag{13.40}$$

且

$$\underline{\lim}\left|\frac{f'}{g'}\right|\leqslant\underline{\lim}\left|\frac{f}{g}\right|\leqslant\overline{\lim}\left|\frac{f}{g}\right|\leqslant\overline{\lim}\left|\frac{f'}{g'}\right|. \tag{13.41}$$

♡

笔记 此定理第一部分(13.40)可以直接使用且以后可以不必再担心分子分母同时求导之后极限不存在而不能使用洛必达法则的情况[6]. 但(13.41)一般是不能直接用的, 需要给证明.

证明 以 $\to+\infty$ 为例, 事实上, 固定 x, 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, x<\xi<y.$$

我们断言对 $A\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$, 必有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=A. \tag{13.42}$$

[5]仔细思考 Stolz 和上下极限 Stolz 的证明相似之处.

[6]因为经典的洛必达法则的证明蕴含了第一部分的事实.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A$. 首先利用极限的四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1-\frac{g(x)}{g(y_n)}}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|.$$

利用

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|-\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|+\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|,\ \lim_{n\to\infty}g(y_n)=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=A.$$

反之设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{g(y_n)-g(x)}\right|=A$, 同样的由四则运算, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|=A.$$

于是由

$$\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|-\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|\leqslant\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}-\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|+\left|\frac{f(x)}{g(y_n)}\right|,\ \lim_{n\to\infty}|g(y_n)|=\infty,$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)}{g(y_n)}\right|=A.$$

现在就证明了(13.42).

于是由(13.42)得对任何 $x>0$, 我们有

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi_{y,x})}{g'(\xi_{y,x})}\right|;$$

$$\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right|=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi_{y,x})}{g'(\xi_{y,x})}\right|.$$

现在

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi_{y,x})}{g'(\xi_{y,x})}\right|\leqslant\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|;$$

$$\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\,\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|=\underline{\lim_{x\to+\infty}}\,\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(\xi_{y,x})}{g'(\xi_{y,x})}\right|\geqslant\underline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|.$$

这就完成了证明.

命题 13.4 (可积函数的连续点)

1. 设 f 在 $[a,b]$ 有界, 则 f 黎曼可积的充要条件是 f 的不连续点是勒贝格 0 测集.
2. 设 f 在 $[a,b]$ 黎曼可积, 则 f 在 $[a,b]$ 连续点是稠密的.
3. 设 f 在 $[a,b]$ 有界, $\Omega=\left\{x\in(a,b]:\lim\limits_{y\to x^-}f(y)\text{ 存在}\right\}$. 则 f 黎曼可积的充要条件是 $[a,b]\setminus\Omega$ 是勒贝格 0 测集.

证明 第一问可以参考徐森林的数学分析. 对于第二问, 若 f 在 $[a,b]$ 连续点不是稠密的, 则存在区间 $[c,d]\subset[a,b]$, 使得 f 在 $[c,d]$ 上处处不连续. 于是 f 不连续点的测度必然大于等于 $d-c>0$, 矛盾! 故 f 在 $[a,b]$ 连续点是稠密的. 第三问必要性由第一问即可得. 充分性: 若 $[a,b]\setminus\Omega$ 是勒贝格 0 测集, 由命题13.6知 Ω 中 f 的不连续点[7]至多可数. 至多可数和 0 测集之并还是 0 测集, 因此 f 不连续点是 0 测集, 从而 f 黎曼可积.

[7] $\mathbb{R}$ 上的拓扑.

定理 13.12 (Ascoli 定理经典形式)

设 X 是一个拓扑空间, Λ 是一个指标集, $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset C(X,\mathbb{R}^n)$, 如果 f_λ 满足条件

1. X 是可分的, 即 X 有可数稠子集;
2. 对任何 $x\in X$, 我们有
$$\sup_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda(x)|<\infty; \tag{13.43}$$
3. 对任何 $x\in X,\epsilon>0$, 存在 x 的邻域 V, 满足
$$|f_\lambda(x)-f_\lambda(y)|\leqslant\epsilon,\forall\lambda\in\Lambda,y\in V. \tag{13.44}$$

那么存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $f\in C(X,\mathbb{R}^n)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 在 X 的任何紧子集上一致的成立.

♡

笔记 条件(13.44)即局部等度连续,(13.43)即逐点一致有界,$C(X,\mathbb{R}^n)$ 表示 X 的 $\mathbb{R}^n$ 连续函数全体. 本结果表明 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $C(X,\mathbb{R}^n)$ 中的列紧集.

笔记 如果不熟悉拓扑也不要紧, 默认 $X=\mathbb{R}^n$ 或者 $X=\mathbb{R}$ 即可.

证明 索性不妨设 Λ 是一个可数集, 即 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}=\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Step 1 为了构建一个可能满足条件的 f, 我们用逐点有界. 即对任何 $x\in X$, 即 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 有界. 因此必有收敛子列, 而不可数个点会有技术困难, 所以第一个条件被加入了.

设 X 的一个可数稠子集是 $M=\{a_1,a_2,\cdots,\}$, 因此对每个 $j\in\mathbb{N}$, 都有 $\{f_m(a_j)\}_{m=1}^{\infty}$ 有界. 然后由对角线方法[8], 即反复抽子列

$$\begin{pmatrix} f_{m_1}(a_1) & f_{m_2}(a_1) & \cdots & \to & f(a_1)\\ f_{m_{12}}(a_2) & f_{m_{22}}(a_2) & \cdots & \to & f(a_2)\\ f_{m_{13}}(a_3) & f_{m_{23}}(a_3) & \cdots & \to & f(a_3)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

上式的下一排总是上一排的子列. 现在考虑其对角线 $\{f_{m_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$. 我们不妨把 $\{f_{m_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ 记为 $\{f_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 于是就有

$$\lim_{i\to\infty}f_{m_i}(a_j)=f(a_j),j\in\mathbb{N}. \tag{13.45}$$

Step 2 我们运用逐点有界条件在稠子集做好了 f, 要延拓到其他点, 那么只有第三个条件探索了邻域信息.

对任何 $x\in X,\epsilon>0$, 存在开集 $U_x\subset X$, 使得对每一个 f_m 都有

$$|f_m(y)-f_m(x)|\leqslant\epsilon,\forall y\in U_x.$$

现在 $a\in M\bigcap U_x$, 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\left|f_{m_i}(a)-f_{m_j}(a)\right|<\epsilon,\forall i,j\geqslant N$, 因此对 $z\in U_x,i,j\geqslant N$, 有

$$\begin{aligned}\left|f_{m_i}(z)-f_{m_j}(z)\right|&\leqslant|f_{m_i}(z)-f_{m_i}(x)|+|f_{m_i}(x)-f_{m_i}(a)|+\left|f_{m_i}(a)-f_{m_j}(a)\right|\\&\quad+\left|f_{m_j}(a)-f_{m_j}(x)\right|+\left|f_{m_j}(x)-f_{m_j}(z)\right|\leqslant5\epsilon.\end{aligned}$$

总结一下, 我们证明了 $\forall x\in X,\epsilon>0$, 存在开集 $U_x\subset X,N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|f_{m_i}(z)-f_{m_j}(z)\right|\leqslant5\epsilon,\forall z\in U_x,i,j\geqslant N.$$

对任何紧集 $K\subset X$, 由有限覆盖, 我们能找到 $N'\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|f_{m_i}(z)-f_{m_j}(z)\right|\leqslant5\epsilon,\forall z\in K,i,j\geqslant N'.$$

因此上面恰好是在紧集 K 上一致收敛的 Cauchy 列定义, $\{f_{m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 在每个点 $x\in X$ 收敛到 $f(x)$.

Step 3 说明 f 连续性. 注意, 如果是在 $\mathbb{R}^n$, 你可以通过经典的数学分析直接导出 f 的连续性, 但对一般的拓扑空间, 需要通过 f 的等度连续性来说明, 运用高级一点的术语, 即 $\mathbb{R}^n$ 是紧致生成的拓扑空间[9].

[8] 重要技巧, 积累.

[9] 见熊金诚翻译的点集拓扑.

对任何 $x\in X,\epsilon>0$, 存在开集 $U_x\subset X$, 使得对每一个 f_{m_i}, 都有

$$|f_{m_i}(y)-f_{m_i}(x)|\leqslant\epsilon,\forall y\in U_x.$$

则令 $i\to\infty$ 可得

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\epsilon,\forall y\in U_x.$$

因此 f 在 x 连续, 从而 f 是连续函数.

推论 13.4 (等度连续族的附加性质)

设 X 是拓扑空间, 函数列 $f_n,n\in\mathbb{N}$ 在 X 上局部等度连续.

若 f_n 在某个 X 的稠密子集 S 上有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 X 的每个紧集上一致收敛到某个连续函数.

♡

证明 仔细回顾 Ascoli 定理13.12的证明, 函数族的局部一致有界性只用来找了在稠子集上收敛的子列, 现在我们已经有 f_n 在稠子集上收敛了, 因此等度连续性让 f_n 具备了定理13.12对子列断言的性质.

定理 13.13 (Baire)

称拓扑空间 X 是 Baire 空间, 如果 X 的一列[a]无内点闭集之并也无内点[b]. Baire 空间有如下结果

1. 完备度量空间和局部紧空间是 Baire 空间;
2. Baire 空间的开子空间是 Baire 空间;
3. Baire 空间不能分解为可数个闭包的内点为空集的集合[c]之并.

[a]即可数个.

[b]等价于任意可数个稠密开集的交集稠密.

[c]即所谓第一纲集

♡

笔记 Baire 空间可参考熊金诚翻译的 Munkres 的第八章. 特别的, $\mathbb{R}^n$ 的开集和闭集都是 Baire 空间. Baire 能起到存在某个局部满足某种性质的效果.

推论 13.5 (逐点有界必然有邻域一致有界)

设开集 $V\subset X$, X 是 Baire 空间. 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(V)$ 满足对任何 $x\in V$, 都有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 则必有一个开集 $U\subset V$, 使得 f_n 在 U 上一致有界.

♡

证明 考虑集合分解

$$V=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x\in V:|f_n(x)|\leqslant m,\forall n\in\mathbb{N}\}.$$

因为 $f_n,n=1,2,\cdots$ 连续, 所以 $\{x\in V:|f_n(x)|\leqslant m,\forall n\in\mathbb{N}\}$ 是相对 V 的闭集. 注意到 V 是 Baire 空间, 于是我们知道必有 $m_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\{x\in V:|f_n(x)|\leqslant m_0,\forall n\in\mathbb{N}\}$ 包含某个 V 的开子集 U. 从而

$$|f_n(x)|\leqslant m_0,\forall x\in U,n\in\mathbb{N}.$$

这就完成了证明.

推论 13.6 (导数必然存在有界的局部)

设 $f\in D(a,b)$, 则存在 $(c,d)\subset(a,b)$ 使得 f' 在 (c,d) 有界.

♡

证明 考虑 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 并利用推论13.5知存在 $(c,d)\subset(a,b)$ 使得 f' 在 (c,d) 有界.

定理 13.14 (连续函数列的极限必有稠密的连续点)

是 X 是 Baire 空间且 $f_n\in C(X)$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in X$, 则 f 在 X 中连续点是稠密 G_δ 集.

♡

证明 证明参考熊金城翻译的 Munkres 点集拓扑第二版定理 48.5.

例题 13.12* 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 关于每个分量连续, 证明:f 是第一类 Baire 函数, 从而 f 连续点是稠密的.

证明 考虑

$$g(x)\triangleq\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},g_n(x)\triangleq\frac{g(x-n)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}g(x+k)},n\in\mathbb{Z},x\in\mathbb{R},$$

我们有

$$\operatorname{supp}g_n\subset[n-1,n+1],\forall n\in\mathbb{Z},\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

定义

$$f_n(x,y)\triangleq\sum_{k\in\mathbb{Z}}f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)g_k(2^ny),(x,y)\in\mathbb{R}^2,n\in\mathbb{N},\tag{13.46}$$

注意到 $f_n\in C(\mathbb{R}^2)$ 且对固定的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 我们有

$$\begin{aligned}|f_n(x,y)-f(x,y)|&\leqslant\sum_{2^ny-1\leqslant k\leqslant 2^ny+1}\left|f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)-f(x,y)\right|g_k(2^ny)\\&\leqslant\sup_{y-\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{k}{2^n}\leqslant y+\frac{1}{2^n}}\left|f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)-f(x,y)\right|\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k(2^ny)\\&=\sup_{y-\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{k}{2^n}\leqslant y+\frac{1}{2^n}}\left|f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)-f(x,y)\right|.\end{aligned}$$

现在由 f 关于 y 的连续性得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y-\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{k}{2^n}\leqslant y+\frac{1}{2^n}}\left|f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)-f(x,y)\right|=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y).$$

由定理13.14我们知道 f 连续点是稠密的.

我们加强推论13.6为

推论 13.7

设 $f\in D(a,b)$, 则 f' 在 (a,b) 的某个稠子集上连续. ♡

证明 同样的结合 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 和定理13.14即可得 f' 在 (a,b) 的某个稠子集上连续.

命题 13.5 (极值至多可数)

1. 区间上的函数的极值至多可数.
2. 区间上函数的严格极值点至多可数. ♠

证明 显然不妨设区间为有界闭区间 $[a,b]$, 其余情况总可以分解为至多可数个有界闭区间 $[a,b]$ 的并.

1. 考虑

$$M=\{x\in[a,b]:\exists\delta>0,f(y)\leqslant f(x),\forall y\in[x-\delta,x+\delta]\},$$

以及对 $r,s\in\mathbb{Q},r<s$, 考虑

$$M_{r,s}=\{x\in(r,s):f(a)\leqslant f(x),\forall a\in(r,s)\}.$$

然后对 $x,y\in M_{r,s}$, 我们有

$$f(x)\leqslant f(y),f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(x)=f(y),$$

故 $M_{r,s}$ 中的点函数值相同. 注意到 $M=\bigcup\limits_{(r,s)\in\mathbb{Q}^2,r<s} M_{rs}$, 则由

$$f(M)=\bigcup_{(r,s)\in\mathbb{Q}^2,r<s} f(M_{rs})$$

知 $f(M)$ 至多可数. 类似的可以讨论极小值, 我们完成了证明.

2. 考虑

$$M=\{x\in[a,b]:\exists\delta>0,f(y)<f(x),\forall y\in[x-\delta,x+\delta]\setminus\{x\}\},$$

以及对 $r,s\in\mathbb{Q},r<s$, 考虑

$$M_{r,s}=\{x\in(r,s):f(a)<f(x),\forall a\in(r,s)\setminus\{x\}\}.$$

然后对 $x,y\in M_{r,s}$, 若 $x\neq y$, 我们有

$$f(x)<f(y),f(y)<f(x),$$

这不可能, 故 $M_{r,s}$ 是单点集. 注意到 $M=\bigcup\limits_{(r,s)\in\mathbb{Q}^2,r<s} M_{rs}$, 于是我们知道 M 至多可数. 类似的可以讨论极小值, 我们完成了证明.

命题 13.6 (第一类间断点至多可数)

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个区间, 证明: 对函数 $f:I\to\mathbb{R}$, 则集合

$$\left\{x_0\in I^\circ:f\text{在}x_0\text{不连续, 但是}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)\text{存在}\right\}$$

至多可数.

注显然, 作为命题13.6的推论, 函数的第一类间断点至多可数.

证明 不妨设 I 为开区间, 定义 $S\triangleq\{x\in I:f(x^+)\text{存在}\}$, 对每个自然数 $n\in\mathbb{N}$, 作

$$E_n\triangleq\left\{x\in I:\text{存在}\delta>0,\text{使得}|f(x')-f(x'')|<\frac{1}{n},\forall x',x''\in(x-\delta,x+\delta)\right\}.$$

注意到 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是 f 的连续点集以及

$$S\setminus\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(S\setminus E_n),$$

我们只需指出对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $S\setminus E_n$ 可数.

固定 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in S$, 由 $f(x^+)$ 存在, 取 $\delta>0$, 使得

$$\left|f(x')-f(x^+)\right|<\frac{1}{2n},\forall x'\in(x,x+\delta).$$

从而当 $x',x''\in(x,x+\delta)$ 就有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\left|f(x')-f(x^+)\right|+\left|f(x'')-f(x^+)\right|<\frac{1}{n}.$$

这说明 $(x,x+\delta)\subset E_n$. 因此我们说明了 $S\setminus E_n$ 中的点都是 E_n 的子开区间的左端点.

现在若 $S\setminus E_n$ 中的点 $x_1\neq x_2$, 作为左端点所在 E_n 的子开区间为 I_1,I_2. 显然 $I_1\bigcap I_2=\emptyset$. 于是我们知道不交开区间可以分别对应一个有理数从而他们是至多可数的, 因此我们知道 $S\setminus E_n$ 是至多可数的, 这就完成了证明.

在数学类低年级组中, 是可能考察常微分方程的. 但其本质上就是函数性态分析, 但国内教材普遍没有把这个问题说的很清楚. 因此我们严格来看.

定理 13.15 (Banach 不动点定理)

设 (X,d) 是非空完备度量空间, $T:X\to X$ 是一个压缩映射, 也即存在 $L\in(0,1)$, 使得

$$d\left(T\left(x\right),T\left(y\right)\right)\leqslant Ld\left(x,y\right). \tag{13.47}$$

那么在 X 上 T 存在唯一的不动点.

笔记 本结果是属于泛函分析的大定理, 大家可以无脑直接使用, 严格证明可见Banach 不动点定理及其应用.

定理 13.16 (Schauder 不动点定理)

设 X 是赋范空间, C 是 X 的闭凸子集. $T:C\to C$ 连续且 $\overline{T(C)}$ 是紧集, 则 T 在 C 上有一个不动点.

笔记 本结果是属于泛函分析的大定理, 大家可以无脑直接使用. 真正好用的常用不动点定理一共有两个, 一个是 Schauder 不动点定理, 还有一个是 Banach 不动点定理. 严格证明可见张恭庆泛函分析 P.50 定理 1.5.15.

定理 13.17 (常微分方程解的存在定理)

Peano 设 f 在 $(0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 邻域内连续, 证明微分方程

$$\begin{cases}y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}\right)\\ y^{(j)}\left(0\right)=y_j,j=0,1,2,\cdots,n-1\end{cases}. \tag{13.48}$$

在 $x=0$ 的邻域内存在一个解 y.

- 若还有 f 在 $(0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 内关于分量 y 满足 Lipschitz 条件, 则 $x=0$ 的邻域内存在唯一一个解 y.

笔记 在国内经典的常微分方程理论中, 这部分证明一般是严格的. 为了讲出新意, 我们考虑更完整的版本. 此外国内教科书会给一个 y 具体的存在范围的刻画. 出于基础数学应用的目的, 我们略去, 当然其范围可以从证明过程中看出.

定理 13.18 (解的延拓定理)

设 f 在连通开集 $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 内连续, 则微分方程(13.48)的解的存在最大的区间是开区间 (a,b), 这里 $a,b\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\}$. 且对任何紧集 $K\subset G$, 有

$$\left\{\left(x,f\left(x\right),f'\left(x\right),\cdots,f^{(n-1)}\left(x\right)\right):x\in(a,b)\right\}\bigcap(G\setminus K)\neq\emptyset.$$

笔记 不可采用解一定靠近边界这种国内教科书普遍采用的术语, 而用解的曲线不能含于任何在 G 内的紧集来描述. 证明的大概想法即若被某个紧集包含, 则 f 在 K 上有界, 从而在 K 上一致连续, 故可以延拓到闭区间 $[a,b]$, 从而在端点处继续用解的存在定理13.17知矛盾!

定理 13.19 (单位分解定理)

设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是一个集合且有开覆盖 $S\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}V_i$. 则存在从属于 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的单位分解 $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}\subset C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 即

1. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\rho_i\left(\mathbf{x}\right)=1,\mathbf{x}\in S$;
2. 对每个 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $\lambda_i\in\mathbb{N}$, 使得 $\rho_i\in C_c^{\infty}\left(V_{\lambda(i)}\right)$.
3. $\mathrm{supp}\rho_i,i\in\mathbb{N}$ 是局部有限的[a]

[a]拓扑空间 X 的集族 $S_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 称为局部有限的, 如果对每个 $x\in X$, 存在 x 的邻域 U, 使得只有有限个 $\lambda\in\Lambda$, 满足 $U\bigcap S_\lambda\neq\emptyset$. 局部有限族最好用的一个结果是

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{S_\lambda}.$$

从而 X 的每个紧集 K 只和有限个 S_λ 相交.

笔记 显然本结果只需对 S 为开集证明即可，条件中涉及的拓扑性质也是对 S 的拓扑来说的. 一个证明参考可见龚升的《简明复分析》70 页. 其证明是绝对严格的.

定义 13.3 (微分严格定义)

设 X,Y 是一个 Banach 空间，$U\subset X$ 是一个开集，我们称 $f:U\to Y$ 在 U 上可微的，如果对每一个 $x\in U$，存在 X 到 Y 的有界线性算子 $A(x)$，使得

$$\lim_{||h||\to 0}\frac{||f(x+h)-f(x)-A(x)h||}{||h||}=0. \tag{13.49}$$

此时我们定义 f 在 x 的微分[10]为 $A(x)$，记为 $Df(x)$.

注读者无需担心自己不懂泛函分析，可以只考虑 $X=\mathbb{R}^n,Y=\mathbb{R}$. 数学分析较好的读者可以考虑 $X=\mathbb{R}^n,Y=\mathbb{R}^m$. 此时一切线性映射都是有界的.

笔记 高等数学中的形式记号 $df(x)=f'(x)dx$ 的本质就是在说对每个 x，微分 $df(x)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的线性函数，这个线性函数作用在一个元素 $\xi\in\mathbb{R}$ 上恰好是 $f'(x)\xi$. 对于记号 $df(x)=f'(x)dx$，这里的 dx 就是 ξ 的意思，可以理解为是历史遗留记号 (当然，在现代数学理论中，其有更丰富的含义，即微分形式.).

笔记 为照顾读者基础，对 $X=\mathbb{R}^n,Y=\mathbb{R}$，我们有

$$Df(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right).$$

定理 13.20 (一致可微暗含微分一致连续)

设 X 是一个实 Banach 空间，$f:X\to\mathbb{R},A(x)\in X^*,\forall x\in X$. 若对任何 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $||h||<\delta$，就有

$$||f(x+h)-f(x)-A(x)h||\leqslant\epsilon||h||,\forall x\in X. \tag{13.50}$$

证明 $A:X\to X^*,x\to A(x)$ 是一致连续的.

注读者无需担心自己不懂泛函分析，可以不妨设 $X=\mathbb{R}^n$，本题就是再说一致可微函数的所有偏导数一致连续.

证明

由可微的定义，我们知道 f 是可微的且 $A(x)$ 就是微分. 然后对任何 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $||h||<\delta$，就有(13.50)成立. 现在固定 $t\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$，则当 $||x-y||<t$ 时，我们有

$$\sup_{||w||=1}||tw||=t<\delta,||y-x||<t<\delta,\ \sup_{||w||=1}||x-y+tw||<2t<\delta.$$

[10]Fréchet 可微.

于是利用(13.50)和绝对值不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
||A(x)-A(y)|| &= \sup_{||w||=1}|A(x)w-A(y)w| \\
&= \frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|A(x)(tw)-A(y)(tw)| \\
&\leqslant \frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|f(x+tw)-f(x)-A(x)(tw)-f(y+tw)+f(y)-A(y)(tw)| \\
&\quad+\frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|f(x+tw)-f(x)-[f(y+tw)-f(y)]| \\
&\leqslant \frac{2\epsilon}{t}||tw||+\frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|f(x+tw)-f(x)-f(y+tw)+f(y)| \\
&\leqslant 2\epsilon+\frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|f(x+tw)-f(x)-A(x)(tw)|+\frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|-f(y+tw)+f(x)+A(x)(y-x+tw)| \\
&\quad+\frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|-f(x)+f(y)-A(x)(y-x)|+\frac{1}{t}\sup_{||w||=1}|A(x)(tw)-A(x)(y-x+tw)+A(x)(y-x)| \\
&\leqslant 2\epsilon+\frac{\epsilon}{t}||tw||+\frac{\epsilon}{t}||y-x+tw||+\frac{\epsilon}{t}||y-x|| \\
&\leqslant 3\epsilon+\frac{\epsilon}{t}||y-x||+\frac{\epsilon}{t}||tw||+\frac{\epsilon}{t}||y-x|| \\
&\leqslant 4\epsilon+\epsilon+\epsilon=6\epsilon.
\end{aligned}$$

从而我们证明了 $A:X\to X^*, x\to A(x)$ 是一致连续的.

定理 13.21 (最一般的导数极限定理,*)

给定开集 $D\subset X$,X 是一个 (实或者复)Banach 空间, 若 $x_0\in D$ 且 $f\in C(D)$ 满足 f 在 $D\setminus\{x_0\}$ 可微且

$$\lim_{x\to x_0}Df(x)=A\in X^*. \tag{13.51}$$

证明 f 在 D 上可微且 $Df(x_0)=A$.

证明 对任何 $h\in X$, 我们考虑 $g_h(t)=f(x_0+th)\in C[0,\delta]\bigcap D^1(0,\delta]$, 这里 $\delta>0$ 充分小使得 $x_0+th\in D, \forall t\in[0,\delta]$. 注意到 $g_h'(t)=Df(x_0+th)h$, 于是结合条件(13.51)和导数极限定理12.2, 我们知道 $\lim\limits_{t\to0^+}g_h'(t)=Ah$ 以及 g_h 在 $t=0$ 可导且 $g_h'(0)=Ah$. 于是

$$g_h'(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=Ah,$$

这就暗示 f 在 x_0 处 Gâteaux 可微[11] 注意到条件(13.51)暗示 f 的 Gâteaux 导算子在 x_0 连续. 由于Gâteaux 导算子是有界线性算子且连续则 Fréchet 可微, 因此我们证明了 f 在 D 上可微且 $Df(x_0)=A$.

定理 13.22

设 $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), n,m\in\mathbb{N}$, 则

(a): 若 $n>m$, 则 f 不是单射.

(b): 若 $n<m$, 则 f 不是满射.

证明 先来看 (a), 如果 f 是单射, 我们考虑连续单射

$$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}=\mathbb{R}^n, x\to(f(x),0),$$

由于经典的区域不变性定理(读者也可以参考周民强第三册), 我们知道 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的连续单射必然是开映射. 注意到 $(f(\mathbb{R}^n),0)$ 不是开集, 矛盾! 因此这就证明了 f 不是单射.

先来看 (b), 我们断言 $f(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的勒贝格 0 测集. 事实上 $\mathbb{R}^n$ 能分解为若干闭球的可数并, 我们只需断言对任何 $\mathbb{R}^n$ 的闭球 B, 有 $f(B)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的勒贝格 0 测集. 事实上由于紧集上的连续函数必有界, 我们知道 f 的微

[11] 即每个方向导数都存在.

分必然有界, 中值定理告诉我们 f 在 B 上 Lipschitz 连续, 设 Lipschitz 常数为 L. 运用Evans, Lawrence C. ; Gariepy, Ronald F. Measure theory and fine properties of functions.97 页的 Theorem 2.8 的 (i), 我们知道

$$H^m(f(B)) \leqslant L^m H^m(B) = 0,$$

注意 H^m 是 m 维 Hausdorff 测度, 也就是 $\mathbb{R}^m$ 的勒贝格测度. 这就说明了 $f(\mathbb{R}^n)$ 是勒贝格 0 测集, 矛盾! 因此 f 不是满射.

接下来用 $||\cdot||$ 表示对应空间的自然范数. 读者不熟悉微分严格定义的可以阅读定义13.3.

定理 13.23 (拟微分中值定理)

设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $f: V \to \mathbb{R}^m$ 是可微的, 则对 $x, y \in V$ 且 $\lambda x + (1-\lambda) y \in V, \lambda \in [0,1]$, 我们必有

$$||f(x) - f(y)|| \leqslant \sup_{\theta \in [0,1]} ||Df(\theta x + (1-\theta) y)|| \cdot ||x - y||. \tag{13.52}$$

♡

笔记 若 $m = 1$, 即数值的情况, 可以有比(13.52)更强的恒等式. 就是经典的中值定理. 对 $m > 1$ 这种向量值的情况只能建立形如(13.52)的不等式. 本题证明的想法就是所谓的值域一维化. 本题结果对实或复的 Banach 空间都是对的. Df 表示 f 的微分, 即雅克比矩阵.

证明 取线性函数 φ[12]使得

$$||\varphi|| = 1, \varphi(f(x) - f(y)) = ||f(x) - f(y)||.$$

构造

$$g(\lambda) = \varphi(f(\lambda x + (1-\lambda) y)), \lambda \in [0,1].$$

注意到 g 是可微函数且对 $\lambda_0 \in (0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \varphi\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda x + (1-\lambda) y) - f(\lambda_0 x + (1-\lambda_0) y)}{\lambda - \lambda_0}\right) \\ &= \varphi(Df(\lambda_0 x + (1-\lambda_0) y)(x - y)). \end{aligned}$$

于是由拉格朗日中值定理, 我们知道存在 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$g(1) - g(0) = \varphi(f(x) - f(y)) = ||f(x) - f(y)|| = \varphi(Df(\alpha x + (1-\alpha) y)(x - y)),$$

于是两边取范数直接放缩就得

$$||f(x) - f(y)|| \leqslant ||\varphi|| \cdot \sup_{\theta \in [0,1]} ||Df(\theta x + (1-\theta) y)|| \cdot ||x - y||,$$

即不等式(13.52)成立.

接下来讨论隐函数存在定理, 记

$$\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}, \left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}'\right) \mapsto \mathbf{x}', \mathbf{x}^{(m)} = (x_1, x_2, \cdots, x_m), \mathbf{x}' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n). \tag{13.53}$$

定理 13.24 (隐函数定理)

设正整数 $n \geqslant m$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_m)^T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上在 $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right)$ 邻域内的 $C^k, k \in \mathbb{N}$ 映射且满足

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0, J\mathbf{F}(x_0) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{是可逆矩阵.}$$

则存在 $\mathbf{x}_0$ 的凸开邻域 U 和 $\mathbf{f}: \pi(U) \to \mathbb{R}^m$, 使得

[12]在无穷维空间中则需要连续线性函数, 无穷维时用的是泛函延拓定理, 有限维可以直接待定系数解方程构造.

(a): 使得

$$\{\mathbf{x}\in U:\mathbf{F}(\mathbf{x})=0\}=\{(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}'):\mathbf{x}'\in\pi(U)\}.$$

(b): $\mathbf{f}$ 是 C^k 映射且 $\det J\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\neq 0,\forall\mathbf{x}'\in\pi(U)$, 并成立

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}')=-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\,D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}'),\tag{13.54}$$

这里 D 表示对后 $n-m$ 个分量求微分.

(c): $\pi:\{\mathbf{x}\in U:\mathbf{F}(\mathbf{x})=0\}\to\pi(U)$ 是同胚且 $(\pi|_U)^{-1}\in C^k(\pi(U))$.

♡

证明 本证明中我们约定 $B_r^n(\mathbf{a})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\mathbf{a}$ 为心, 半径为 r 的开球. 显然, 存在 $\tau>0$, 使得对每一个 $\mathbf{x}\in\overline{B_\tau^n(\mathbf{x}_0)}$, 都有

$$\det(J\mathbf{F}(\mathbf{x}))\neq 0,\left|\left|I_m-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\cdot J\mathbf{F}(\mathbf{x})\right|\right|<\frac{1}{2}.\tag{13.55}$$

然后取 $r\in(0,\tau)$, 使得对每个 $\mathbf{x}\in\overline{B_r^n(\mathbf{x}_0)}$, 都有

$$\left|\left|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x})-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\right|\right|<\frac{\tau}{4}.\tag{13.56}$$

然后固定 $\mathbf{x}'\in\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^{n-m}(\mathbf{x}_0')}$, 对每一个 $\mathbf{x}_1^{(m)},\mathbf{x}_2^{(m)}\in\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)}$, 我们看见

$$\left(\mathbf{x}_1^{(m)},\mathbf{x}'\right),\left(\mathbf{x}_2^{(m)},\mathbf{x}'\right)\in\overline{B_\tau^n(\mathbf{x}_0)},\left(\mathbf{x}_0^{(m)},\mathbf{x}'\right)\in\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^n(\mathbf{x}_0)}.\tag{13.57}$$

考虑

$$T:\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)}\to\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)},\mathbf{x}^{(m)}\mapsto\mathbf{x}^{(m)}-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(m)},\mathbf{x}'\right).$$

显然有

$$\left|\left|T\mathbf{x}_1^{(m)}-T\mathbf{x}_2^{(m)}\right|\right|\overset{\text{拟微分中值定理13.23}}{\leqslant}\sup_{\theta\in\overline{B_\tau^n(\mathbf{x}_0)}}\left|\left|I_m-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\cdot J\mathbf{F}(\theta)\right|\right|\cdot\left|\left|\mathbf{x}_2^{(m)}-\mathbf{x}_1^{(m)}\right|\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\left|\mathbf{x}_2^{(m)}-\mathbf{x}_1^{(m)}\right|\right|.$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\left|T\mathbf{x}_1^{(m)}-\mathbf{x}_0^{(m)}\right|\right|&=\left|\left|\mathbf{x}_1^{(m)}-\mathbf{x}_0^{(m)}-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_1^{(m)},\mathbf{x}'\right)\right|\right|\\&\leqslant\left|\left|\mathbf{x}_1^{(m)}-\mathbf{x}_0^{(m)}-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_1^{(m)},\mathbf{x}'\right)+(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_0^{(m)},\mathbf{x}'\right)\right|\right|\\&\quad+\left|\left|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_0^{(m)},\mathbf{x}'\right)-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_0^{(m)},\mathbf{x}_0'\right)\right|\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\left|\left|\mathbf{x}_1^{(m)}-\mathbf{x}_0^{(m)}\right|\right|+\frac{\tau}{4}\\&<\frac{\tau}{4}+\frac{\tau}{4}=\frac{\tau}{2}.\end{aligned}$$

现在 $T\left(\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)}\right)\subset B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)$, 且由不动点定理13.15, 存在唯一的 $\mathbf{f}(\mathbf{x}')\in\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)}$, 使得

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}')=T(\mathbf{f}(\mathbf{x}'))\in B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)$$

且

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')=0.$$

现在我们取 $U=B_{\frac{\tau}{2}}^m\left(\mathbf{x}_0^{(m)}\right)\times B_{\frac{\tau}{2}}^{n-m}(\mathbf{x}_0')$, 我们可以看到 $\pi(U)=B_{\frac{\tau}{2}}^{n-m}(\mathbf{x}_0')$ 且 (a) 成立.

对 $\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\in\overline{B_{\frac{\tau}{2}}^{n-m}(\mathbf{x}_0')}$, 运用(13.55),(13.56),(13.57), 我们有

$$\begin{aligned}||\mathbf{f}(\mathbf{x}_1')-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2')||&=\left|\left|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1')-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2')-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1'),\mathbf{x}_1')+(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_2')\right|\right|\\&\leqslant\left|\left|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1')-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2')-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1'),\mathbf{x}_1')+(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_1')\right|\right|\\&\quad+\left|\left|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_2')-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_1')\right|\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}||\mathbf{f}(\mathbf{x}_2')-\mathbf{f}(\mathbf{x}_1')||+\left|\left|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_2')-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_1')\right|\right|,\end{aligned}$$

即得

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x}_1')-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2')||\leqslant 2\left||(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_2')-(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2'),\mathbf{x}_1')\right||.$$

由 $\mathbf{F}$ 连续性即得 $\mathbf{f}$ 连续性. 固定 $\mathbf{x}'\in\pi(U)$, 对任何 $\epsilon>0$, 当 $\mathbf{h}'$ 充分小使得 $\mathbf{x}'+\mathbf{h}'\in\pi(U)$ 且

$$\begin{aligned}&\left||\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}'),\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')+J\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')(\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}'))+DF(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\mathbf{h}'\right||\\&\leqslant\epsilon\left||\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')\right||+\epsilon\left||\mathbf{h}'\right||.\end{aligned}$$

即

$$\left||J\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')(\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}'))+D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\mathbf{h}'\right||\leqslant\epsilon\left||\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')\right||+\epsilon\left||\mathbf{h}'\right||.\tag{13.58}$$

一方面我们有

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')+(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\,D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\mathbf{h}'\right\|\\&\leqslant\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|\cdot\left||J\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')(\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}'))+D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\mathbf{h}'\right||\\&\overset{(13.58)}{\leqslant}\epsilon\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|\cdot\left||\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')\right||+\epsilon\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|\cdot\left||\mathbf{h}'\right||\end{aligned}$$

另外一方面我们有

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')+(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\,D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\mathbf{h}'\right\|\\&\geqslant\left||\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')\right||-\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\,D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|\cdot\left||\mathbf{h}'\right||,\end{aligned}$$

于是当 ϵ 充分小, 我们有

$$\left||\mathbf{f}(\mathbf{x}'+\mathbf{h}')-\mathbf{f}(\mathbf{x}')\right||\leqslant\frac{\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\,D\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|+\epsilon\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|}{1-\epsilon\left\|(J\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right\|}\left||\mathbf{h}'\right||.$$

带回(13.58)即得(13.54). 显然可得 (b).

注意到 π 是连续开映射且

$$\pi(\{\mathbf{x}\in U:\mathbf{F}(\mathbf{x})=0\})=\pi(U).$$

由 (a) 知 π 是单射且 $(\pi|_U)^{-1}(\mathbf{x}')=(\mathbf{f}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')$, 由 (b) 知 $\pi:\{\mathbf{x}\in U:\mathbf{F}(\mathbf{x})=0\}\to\pi(U)$ 是同胚且 $(\pi|_U)^{-1}\in C^k(\pi(U))$.

定理 13.25 (开映射定理)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集且 C^1 映射 $\mathbf{f}:U\to\mathbb{R}^n$ 满足对每个 $\mathbf{x}\in U$, 微分 $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是可逆的, 则 $\mathbf{f}(U)$ 是开集. ♡

证明 给定 $\mathbf{x}_0\in U$, 我们要证明 $\mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 是 $\mathbf{f}(U)$ 内点. 考虑

$$\mathbf{F}:U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}.$$

因为 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 是可逆的, 其刚好是对 $\mathbf{x}$ 的雅可比 $J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$, 于是由隐函数存在定理13.24, 我们知道存在 $\mathbf{y}_0$ 的邻域 W 和一个 W 上的 C^1 映射 $\mathbf{g}$, 使得

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))-\mathbf{y}=0,\forall\mathbf{y}\in W.$$

于是我们知道 $W\subset\mathbf{f}(U)$, 这就完成了证明.

推论 13.8 (反函数定理)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集且 $\mathbf{f}:U\to\mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{f}$ 是 $C^k,k\in\mathbb{N}$ 的单射. 则 $\mathbf{f}^{-1}:\mathbf{f}(U)\to U$ 是 C^k 的充要条件是

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})\text{ 可逆},\forall\mathbf{x}\in U.$$

♡

证明 由开映射定理13.25, 我们知道 $\mathbf{f}(U)$ 是开集. 定义投影算子 $\tau:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,(\mathbf{x},\mathbf{y})\to\mathbf{y}$.

充分性: 若 $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 可逆, $\forall\mathbf{x}\in U$ 考虑

$$\mathbf{F}:U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}.$$

因为 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 是可逆的, 其刚好是对 $\mathbf{x}$ 的雅可比 $J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$, 于是由隐函数存在定理13.24, 存在 $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ 的邻域 $W_{\mathbf{x}_0}$ 和 $\tau(W_{\mathbf{x}_0})$ 上的 C^k 映射 $\mathbf{g}_{x_0}$, 使得

$$\{\mathbf{x}\in W_{\mathbf{x}_0}:\mathbf{F}(\mathbf{x})=0\}=\left\{\left(\mathbf{g}_{x_0}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}'\right):\mathbf{x}'\in\tau(W_{\mathbf{x}_0})\right\}. \tag{13.59}$$

注意到 $\mathbf{f}(U)=\bigcup\limits_{\mathbf{x}_0\in U}\tau(W_{\mathbf{x}_0})$, 我们可定义

$$\mathbf{g}:\mathbf{f}(U)\to U,\mathbf{g}(\mathbf{x}')=\mathbf{g}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}'),\mathbf{x}'\in\tau(W_{\mathbf{x}_0}),$$

由(13.59)和 $\mathbf{f}$ 单射知上述定义是良定的且 $\mathbf{g}$ 为所求逆映射.

必要性: 若 $\mathbf{f}^{-1}:\mathbf{f}(U)\to U$ 是 C^k 的, 则

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{x},\forall\mathbf{x}\in U.$$

两边取微分得

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x})=I_n,$$

即 $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 对任何 $\mathbf{x}\in U$ 都是可逆的.

(*) 为了方便读者理解, 我们可以考虑最简单的和 Gauss-Green 公式. 接下来我们严格建立 $\mathbb{R}^n$ 的曲面测度和 Gauss-Green 公式.

定义 13.4 (光滑曲面和法向量严格定义)

我们称 $S\subset\mathbb{R}^n$ 为 C^1 曲面, 如果对每个 $x\in S$, 存在 x 的邻域 V 和 $f\in C^1(V)$ 使得

1. $V\bigcap S=\{x\in V:f(x)=0\}$;
2. $df(x)\triangleq(f_{x_1}(x),f_{x_2}(x),\cdots,f_{x_n}(x))\neq 0,\forall x\in V$.

此外对 C^1 曲面 S 和 $x\in S$, 我们定义 S 在 x 的法向量为

$$\mathbf{n}(x)=(n_1(x),n_2(x),\cdots,n_n(x))=\left(\frac{f_{x_1}(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n|f_{x_i}(x)|^2}},\frac{f_{x_2}(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n|f_{x_i}(x)|^2}},\cdots,\frac{f_{x_n}(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n|f_{x_i}(x)|^2}}\right).$$

♣

注

1. 我们称 (f,V) 为 S 的一个坐标卡.
2. 对开集 $U\subset\mathbb{R}^n$, 若 ∂U 是一个 C^1 曲面且 (f,V) 为 ∂U 在 x_0 的一个坐标卡. 如果有 $V\bigcap U=\{x\in V:f(x)<0\}$, 则称我们定义的 n_i 为外法向量.

注意到显然法向量至少有两种不同的方向, 那么是否只能有这两种方向呢, 实际上

定理 13.26 (定义函数的关系)

设 S 为 C^1 曲面, $(f,V),(g,U)$ 都是 $x_0\in S$ 处的坐标卡, 则存在 x_0 的邻域 $W\subset U\bigcap V$ 和 $h\in C(W)$, 成立

1. $$f(x)=h(x)g(x),x\in W;$$
2. $$df(x)=h(x)dg(x),x\in S\bigcap W. \tag{13.60}$$

♡

笔记 证明的想法是局部同胚到半空间然后直接构造.

证明 我们称 x_0 的两个坐标卡 $(f,V)\sim(g,U)$, 如果定理表述的 W 和 h 存在. 显然这构成一个等价关系. 于是我们不妨设 $x_0=0$ 且由隐函数定理13.24, 不妨设

$$f\left(x^{(m)},x'\right)=x_1-\sigma(x'),\left(x^{(m)},x'\right)\in V,$$

这里 $x'=(x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 且 $\pi:V\bigcap S\to\pi(V\bigcap S),(x_1,x')\mapsto x'$ 是一个同胚, 并满足 $\sigma\in C^1(\pi(V\bigcap S))$.

考虑同胚映射

$$\Phi : V \to \Phi(V), x \mapsto (x_1 - \sigma(x'), x'),$$

有逆映射

$$\Phi^{-1} : \Phi(V) \to V, x \mapsto (x_1 + \sigma(x'), x').$$

缩小 V 为一个包含 $x_0 = 0$ 的邻域得 W, 使得 $W \subset U \bigcap V, \Phi(W)$ 是以 $\mathbf{0}$ 为心, 半径为 $r > 0$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中的开球. 注意此时 $\pi : W \bigcap S \to \pi(W \bigcap S), (x_1, x') \mapsto x'$ 仍然是一个微分同胚, 以及成立

$$W \bigcap S = \{x : x_1 = \sigma(x'), x = (x_1, x') \in W\}.$$

于是对 $x \in \Phi(W)$, 我们定义

$$\Lambda(x) = \int_0^1 g_{x_1}\left(\Phi^{-1}(tx_1, x')\right) dt.$$

一方面

$$\Lambda(x) = \int_0^1 g_{x_1}\left(\Phi^{-1}(tx_1, x')\right) dt = g_{x_1}(\sigma(x'), x'), x \in \Phi\left(S \bigcap W\right),$$

另外一方面, 由牛顿莱布尼兹公式, 我们有

$$\Lambda(x) x_1 = \int_0^1 g_{x_1}\left(\Phi^{-1}(tx_1, x')\right) x_1 dt = g\left(\Phi^{-1}(x)\right), x \in \Phi(W).$$

由 $g(\sigma(x'), x') = 0$ 对两边求导得

$$g_{x_1}(\sigma(x'), x') \sigma_{x_i}(x') + g_{x_i}(\sigma(x'), x') = 0, i = 2, 3, \cdots, n.$$

考虑

$$h(x) = \Lambda(\Phi(x)), x \in W.$$

直接计算发现为我们所需的函数[13].

推论 13.9

结合定理13.26和定义13.4我们知道法向量仅有是否反向两种可能. ♡

定义 13.5 (曲面测度定义)

(a) 局部版本的曲面测度定义.

设 S 是一个 C^1 曲面, 对 S 的一个坐标卡 (f, V), 且 f 形如

$$f(x) = x_i - \sigma(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

且 $\pi_i : V \to \pi_i(V), x \mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ 为同胚. 则我们定义局部版本的曲面测度为

$$\rho(V, E) = \int_{\pi_i E} \frac{1}{\left|n_i\left(\pi_i^{-1}(x)\right)\right|} dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n, \forall E是V \bigcap S的Borel可测子集.$$

(b) 整体的曲面测度定义. 设 S 有满足 (a) 的坐标卡 $(f, V_i), i = 1, 2, \cdots$ 且 $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. 取

$$Y_1 = V_1 \bigcap S, Y_n = \left(V_n \bigcap S\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Y_i, n = 2, 3, \cdots.$$

则

$$\bigcup_{i=1}^{n} Y_i = \bigcup_{i=1}^{n} \left(V_i \bigcap S\right).$$

[13] h 的非 0 性质可以由等式(13.60)得到.

我们定义

$$\rho(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(V_i,E\bigcap Y_i\right),\forall E是S的Borel可测子集.$$

♣

注我们来证明上述定义中的曲面测度是良定的, 这并不是一个平凡的事情.

首先我们证明对每个形如 (a) 描述的两个坐标卡 $(f,V),(g,U)$ 和 Borel 可测集 $E\subset U\bigcap V\bigcap S$, 有

$$\rho(U,E)=\rho(V,E).$$

事实上不失一般性不妨设

$$f=x_1-\sigma(x'),g=x_i-\tau\left(x^i\right),i\in\{1,2,\cdots,n\},$$

这里 $x^i=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$.

i=1, 我们由法向量唯一性13.9知

$$\rho(V,E)=\int_{\pi_1E}\frac{1}{\left|n_1\left(\pi_1^{-1}(x)\right)\right|}dx'=\rho(U,E).$$

i>1, 不妨设 $i=2$, 则做换元

$$x=\pi_1\pi_2^{-1}y=\pi_1\left(y_1,\tau\left(y_1,y_3,\cdots,y_n\right),y_3,\cdots,y_n\right)=\left(\tau\left(y_1,y_3,\cdots,y_n\right),y_3,\cdots,y_n\right),y\in\pi_2E,$$

我们有

$$\begin{aligned}\rho(V,E)&=\int_{\pi_2E}\frac{1}{\left|n_1\left(\pi_2^{-1}(y)\right)\right|}\left|\tau_{y_1}\left(y_1,y_3,\cdots,y_n\right)\right|dy_1dy_3\cdots dy_n\\&=\int_{\pi_2E}\frac{1}{\left|n_2\left(\pi_2^{-1}(y)\right)\right|}dy_1dy_3\cdots dy_n\\&=\rho(U,E).\end{aligned}$$

这就证明了断言.

现在设 S 有两种覆盖 $S\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}V_i,S\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}U_j$, 对应的 (b) 中无交并构造为 $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty},\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$, 则对任何 S 的 Borel 可测集 E, 我们有

$$\begin{aligned}\rho(E)&=\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(V_i,E\bigcap Y_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\rho\left(V_i,E\bigcap Y_i\bigcap Z_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\rho\left(V_j,E\bigcap Y_i\bigcap Z_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\rho\left(V_j,E\bigcap Z_j\right),\end{aligned}$$

这就证明了曲面测度的定义是良定的.

此外对每个 Borel 可测子集 $E\subset S\bigcap V_i,i\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\rho(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho\left(V_n,E\bigcap Y_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho\left(V_i,E\bigcap Y_n\right)=\rho(V_i,E).$$

定义 13.6 ($\mathbb{R}^n$ 上紧化序列)

存在 $\chi_n\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m),n\in\mathbb{N}$ 满足对某个 $M>0$ 有

$$0\leqslant\chi_n(x)\leqslant1,\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial\chi_n(x)}{\partial x_j}\right|^2\leqslant M^2,\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial\chi_n(x)}{\partial x_j}\right|^2=0,\lim_{n\to\infty}\chi_n(x)=1.$$

♣

笔记 作图可以直接得到, 当然也可以写出明确表达式. 此外 $X\neq\mathbb{R}^n$ 我们就不能指望有 M 了, 因此在边界附近读者可用拉格朗日中值定理来说明 $\sum\limits_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial\chi_n(x)}{\partial x_j}\right|^2$ 必然无界.

接下来就可以给出我们著名的 Gauss-Green 公式了.

定义 13.7

我们称 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有 C^1 边界的开集, 如果对每一个 $x\in\partial V$, 存在 x 的邻域 U 和 $f\in C^1(U)$ 使得

1. $V\bigcap U=\{x\in U:f(x)<0\}$;
2. $\partial V\bigcap U=\{x\in U:f(x)=0\}$;
3. $df(x)\triangleq(f_{x_1}(x),f_{x_2}(x),\cdots,f_{x_n}(x))\neq 0,\forall x\in U$.

♣

定理 13.27 (Gauss-Green 公式)

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有 C^1 边界的开集, n_k 是 ∂V 的单位外法向量的第 k 个分量. 若 $f\in C^1(V)\bigcap C(\overline{V})$ 且 f_{x_k},f 依 dx 可积, $f\cdot n_k$ 依 dS 可积, 则我们有

$$\int_V f_{x_k}(x)\,dx=\int_{\partial V}f(x)\cdot n_k(x)\,dS. \tag{13.61}$$

♡

证明 不失一般性, 我们假设 $k=1$. 根据 C^1 曲面定义, 对每个 $x_0\in\partial V$, 取坐标卡 (g,V_{x_0}) 且

$$g(x)=x_{j_{x_0}}-\sigma_{x_0}\left(x^{j_{x_0}}\right),j_{x_0}\in\{1,2,\cdots,n\},\partial V\bigcap V_{x_0}=\{x\in V_{x_0}:f(x)<0\}.$$

对 $x_0\in V$, 取有界开集 $V_{x_0}\subset V$. 于是全体 V_{x_0} 构成 $\overline{V}$ 的开覆盖且不妨设都是开凸集. 由 Lindelof 性质[14]我们记这个可数子覆盖为 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, 再由单位分解定理13.19, 取从属于 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的单位分解为 $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$. 为证明(13.61), 只需对 $\mathrm{supp}f$ 是含于 $\overline{V}$ 的紧子集的情况证明

$$\int_V f_{x_1}(x)\,dx=\int_{\partial V}f(x)\cdot n_1(x)\,dS. \tag{13.62}$$

这是因为如果证明了(13.62), 取紧化序列13.6, 则利用(13.62)知

$$\int_V(\rho_j\chi_n f)_{x_1}(x)\,dx=\int_{\partial V}\chi_n(x)\rho_j(x)f(x)\cdot n_1(x)\,dS,\forall n,j\in\mathbb{N}.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_V(\rho_j\chi_n f)_{x_1}(x)\,dx=\int_V(\chi_n f)_{x_1}(x)\,dx,$$

以及

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\partial V}\chi_n(x)\rho_j(x)f_{x_1}(x)\cdot n_1(x)\,dS=\int_{\partial V}\chi_n(x)f(x)\cdot n_1(x)\,dS.$$

这里换序求和是因为 $\mathrm{supp}\rho_j,j\in\mathbb{N}$ 的局部有限性和 $\mathrm{supp}\chi_n f$ 的紧性, 所以上述求和都是有限和.

现在我们在

$$\int_V(\chi_n f)_{x_1}(x)\,dx=\int_{\partial V}\chi_n(x)f(x)\cdot n_1(x)\,dS$$

两边让 $n\to\infty$ 即得(13.61).

所以我们只需集中注意力证明(13.62). 当 $V_i\subset V$, 则

$$\int_{V_i}f_{x_1}(x)\,dx=\int_{\pi_1(V_i)}\int_{a(x')}^{b(x')}f_{x_1}(x_1,x')\,dx_1dx'=0,$$

这里

$$\pi_1:V_i\to\mathbb{R}^{n-1},x=(x_1,x')\mapsto x'.$$

以及有

$$\int_{\partial V}f(x)\cdot n_1(x)\,dS=\int_{\partial V}0\cdot n_1(x)\,dS=0.$$

当 $U=V_i\bigcap\partial V\neq\emptyset$, 紧集 $\mathrm{supp}f\subset U$ 且

$$U\bigcap\partial V=\{x\in U:x_1=\sigma(x')\},$$

[14]即任何开覆盖有可数子覆盖.

且

$$\pi_1 : U\bigcap\partial V \to \pi_1\left(U\bigcap\partial V\right) = \pi_1\left(U\right)$$

是一个同胚.

则

$$\begin{aligned}\int_U f_{x_1}\left(x\right)dx &= \int_{\pi_1(U)}\int_{a(x')}^{\sigma(x')} f_{x_1}\left(x_1,x'\right)dx_1dx'\\ &= \int_{\pi_1(U\bigcap\partial V)} f\left(\sigma\left(x'\right),x'\right)dx'\\ &= \int_{\pi_1(U\bigcap\partial V)} \sqrt{1+\sum_{j=2}^{n}\left|\sigma_{x_j}\left(x'\right)\right|^2}\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{j=2}^{n}\left|\sigma_{x_j}\left(x'\right)\right|^2}} f\left(\sigma\left(x'\right),x'\right)dx'\\ &= \int_{\partial V\bigcap U} f\left(x\right)\cdot n_1\left(x\right)dS\\ &= \int_{\partial V} f\left(x\right)\cdot n_1\left(x\right)dS,\end{aligned}$$

这恰好就是(13.62).

当 $U = V_i\bigcap\partial V \neq \emptyset$, 紧集 $\mathrm{supp} f \subset U$ 且

$$U\bigcap\partial V = \left\{x\in U : x_j = \sigma\left(x^j\right)\right\},$$

且

$$\pi_j : U\bigcap\partial V \to \pi_j\left(U\bigcap\partial V\right) = \pi_j\left(U\right)$$

是一个同胚. 不妨设 $j=2$. 则

$$\begin{aligned}\int_U f_{x_1}\left(x\right)dx &= \int_{\pi_2(U)} f_{x_1}\left(x_1,x_2+\sigma\left(x_1,x_3,\cdots,x_n\right),x_3,\cdots,x_n\right)dx\\ &= \int_{\pi_2(U)}\frac{\partial}{\partial x_1} f\left(x_1,x_2+\sigma\left(x_1,x_3,\cdots,x_n\right),x_3,\cdots,x_n\right)dx\\ &\quad -\int_{\pi_2(U)} f_{x_2}\left(x_1,x_2+\sigma\left(x_1,x_3,\cdots,x_n\right),x_3,\cdots,x_n\right)\sigma_{x_1}\left(x_1,x_3,x_4,\cdots,x_n\right)dx\\ &= -\int_{\pi_2(U)} f_{x_2}\left(x_1,x_2+\sigma\left(x_1,x_3,\cdots,x_n\right),x_3,\cdots,x_n\right)\sigma_{x_1}\left(x_1,x_3,x_4,\cdots,x_n\right)dx\\ &= \int_{\pi_2(U)} f\left(x_1,\sigma\left(x_1,x_3,\cdots,x_n\right),x_3,\cdots,x_n\right)\sigma_{x_1}\left(x_1,x_3,x_4,\cdots,x_n\right)dx\\ &= \int_{\pi_2(U)} f\left(x_1,\sigma\left(x_1,x_3,\cdots,x_n\right),x_3,\cdots,x_n\right)\frac{-\sigma_{x_1}\left(x_1,x_3,x_4,\cdots,x_n\right)}{\sqrt{1+\sum\limits_{j\neq 2}\left|\sigma_{x_j}\left(x^2\right)\right|^2}}\sqrt{1+\sum_{j\neq 2}\left|\sigma_{x_j}\left(x^2\right)\right|^2}dx\\ &= \int_{U\bigcap\partial V} f\left(x\right)\cdot n_1\left(x\right)dS,\end{aligned}$$

这就证明了(13.62). 因此我们完成了定理的证明.

记

$$P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, \left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \to \left(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n\right), i = 1,2,\cdots,n.$$

注意我们的曲面测度是 Borel 的, 我们来考虑它的完备化测度.

定理 13.28

设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^n$ 是有 C^1 边界的曲面, 其上有 σ 有限测度 $m_{\partial V}$ 如定义13.5. 设 $\widetilde{m_{\partial V}}$ 是 $m_{\partial V}$ 完备化. 对 Σ 的开集 U, P_i 是 U 到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中某个开集的同胚且逆映射是 C^1 的, 则 $A\subset U$ 是完备测度下的可测集等价于 $P_i\left(A\right)$

是勒贝格可测集. 并且此时有

$$\widetilde{m_{\partial V}}(A)=\int_{P_i(A)}\frac{1}{|n_i(\mathbf{x}')|}\mathrm{d}\mathbf{x}'. \tag{13.63}$$

♡

注这个 PDF 中, 曲面测度和其上的可积函数如未特别说明, 都是 Borel 意义下的.

证明 设 $A\subset U$ 是完备测度下的 0 测集, 则存在 Σ 的 Borel 可测集 $E\subset U$ 使得 $m_{\partial V}(E)=0$, 于是 $m(P_i(E))=0$, 从而 $P_i(A)\subset P_i(E)$ 是勒贝格 0 测集.

反过来, 对 $A\subset U$ 使得 $P_i(A)$ 是勒贝格 0 测集, 可取 $P_i(U)$ 的 Borel 集 $F\supset P_i(A)$ 使得 $m(F)=0$, 于是

$$m_{\partial V}\left(P_i^{-1}(F)\right)=0\Rightarrow\widetilde{m_{\partial V}}\left(P_i^{-1}(F)\right)=0.$$

因为 $A\subset P_i^{-1}(F)$, 所以 A 是依完备测度的 0 测集.

现在对一般的完备测度下的可测集 $A\subset U$. 我们知道

$$A=A_1\bigcup A_2, A_1\bigcap A_2=\emptyset, m_{\partial V}(A_1)=\widetilde{m_{\partial V}}(A_1), \widetilde{m_{\partial V}}(A_2)=0,$$

这里 A_1 是 Borel 可测的. 结合 0 测集的讨论和 $P_i(A)=P_i(A_1)\bigcup P_i(A_2)$ 可知 $P_i(A)$ 勒贝格可测且

$$\widetilde{m_{\partial V}}(A)=m_{\partial V}(A_1)=\int_{P_i(A_1)}\frac{1}{|n_i(\mathbf{x}')|}\mathrm{d}\mathbf{x}'=\int_{P_i(A)}\frac{1}{|n_i(\mathbf{x}')|}\mathrm{d}\mathbf{x}'.$$

反之对 $A\subset U$ 使得 $P_i(A)$ 勒贝格可测, 我们有

$$P_i(A)=S_1\bigcup S_2, m(S_1)=m(P_i(A)), m(S_2)=0,$$

这里 S_1 是 Borel 可测集, S_2 是勒贝格可测集. 于是结合 0 测集的情况和 $A=P_i^{-1}(S_1)\bigcup P_i^{-1}(S_2)$ 得 A 依完备测度可测, 这就完成了证明.

基于微分拓扑的整体证明, 其需要的条件更弱一些. 对开集 $V\subset\mathbb{R}^n$, 其具有 C^1 边界是太强的, 因此我们考虑更弱的定义.

我们把 ∂V 分成两个不交集 $\partial V=\partial_r V\bigcup(\partial V\setminus\partial_r V)$ 使得

$$\partial_r V=\left\{\mathbf{x}\in\partial V:\text{存在}\mathbf{x}\text{的邻域}V_{\mathbf{x}}, f\in C^1(V_{\mathbf{x}})\text{使得有定义13.7叙述的三条性质}\right\}.$$

注意到 $\partial_r V$ 是 ∂V 开子集且相似定义13.5, 我们可以在 $\partial_r V$ 赋予 Borel 曲面测度.

回忆" 最强" 微积分基本定理:

定理 13.29 (最强微积分基本定理)

设 $f\in C[a,b]$ 且 f 在 (a,b) 内除去至多可数个点外存在导数 f'. 若 $f'\in L^1[a,b]$, 则有

$$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

注证明见参加今年（2016）的丘成桐大学生数学竞赛是怎样一种体验？ - 知乎.

先来看一个小习题, 他为一般的 Gauss-Green 提供最简单的动机.

命题 13.7

1. 设 $f\in L^1[0,+\infty)$ 在每个 $[0,+\infty)$ 的有界闭子区间上绝对连续且 $f'\in L^1[0,+\infty)$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0, \int_0^\infty f'(x)\,\mathrm{d}x=-f(0).$$

2. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in C^1(\mathbb{R}^n)$, 若

$$\sum_{i=1}^n f_i^2\in L^1(\mathbb{R}^n), \sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=0.$$

♠

注 这里例子是想表明 Gauss-Green 公式是如何做到一般无界区域的, 以及需要什么条件.

证明

1. 因为 f 内闭绝对连续, 所以 f' 几乎处处存在. 由 $\int_0^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ 知存在 $x_n\in[0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=0.$$

于是由 f 内闭绝对连续和牛顿莱布尼兹公式得

$$f(0)=f(x_n)-\int_0^{x_n}f'(y)\,\mathrm{d}y.$$

令 $n\to+\infty$ 得

$$\int_0^{\infty}f'(y)\,\mathrm{d}y=-f(0).$$

类似的我们有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\lim_{x\to+\infty}\int_x^{\infty}f(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

2. 设 $\eta_k\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n),k\in\mathbb{N}$ 使得

$$\eta_k(t)=0,t\leqslant k,\eta_k(t)=1,t\geqslant k+1,C\triangleq\sup_{k\geqslant1,t\in\mathbb{R}}|\eta_k'(t)|<\infty,0\leqslant\eta_k(t)\leqslant1,\forall t\in\mathbb{R}.$$

设

$$r(\mathbf{x})\triangleq||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial\left((\eta_k\circ r)\cdot f_i\right)}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial\left((\eta_k\circ r)\cdot f_i\right)}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\eta_k\circ r)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}f_i\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}(r)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

一方面

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\eta_k\circ r)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}\mathbf{x}<\infty,$$

此时由控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\eta_k\circ r)\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=0.$$

由 Cauchy 不等式16.1得

$$\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}f_i\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}(r)\right|\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\sum_{i=1}^{n}\left|f_i\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}(r)\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant C^2\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\geqslant k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial r}{\partial x_i}f_i\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}(r)\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0.$$

现在

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial\left[(1-\eta_k\circ r)f\right]}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\leqslant k+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial\left[(1-\eta_k\circ r)f\right]}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\overset{\text{通常的 Gauss 公式}}{=}0.\end{aligned}$$

定理 13.30

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集, $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且 $P_k\left(\partial V\setminus\partial_r V\right)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的勒贝格 0 测集, n_k 是 ∂V_r 的单位外法向量的第 k 个分量.

对 $f:\overline{V}\to\mathbb{R}$ 满足

(1): 对几乎所有 $\mathbf{x}'=(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)\in P_k(V)$, 都有 $f(\cdot,\mathbf{x}')$ 在[a]$\left\{t\in\mathbb{R}:(t,\mathbf{x}')\in\overline{V}\right\}$ 上连续且在 $\{t\in\mathbb{R}:(t,\mathbf{x}')\in V\}$ 上除去至多可数个点外可导;

(2): f_{x_k} 在 V 上几乎处处存在且 $f_{x_k}\in L^1(V,\mathrm{d}\mathbf{x})$, $f\cdot n_k\in L^1(\partial_r V,\mathrm{d}S)$;

(3): 对几乎所有 $\mathbf{x}'=(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)\in P_k(V)$, 都有 $f(\cdot,\mathbf{x}')$ 在 $\left\{t\in\mathbb{R}:(t,\mathbf{x}')\in\overline{V}\right\}$ 上是 L^1 的.

则我们有

$$\int_V f_{x_k}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\partial_r V}f(\mathbf{x})\cdot n_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x}). \tag{13.64}$$

[a]为书写方便, 我们把第 k 个分量放在第一个位置.

♡

注我们指出在 (1) 的条件下, f_{x_k} 在 V 上不一定几乎处处存在. (3) 的条件在 V 有界时由 (1) 自动成立.

笔记 ♡ 为方便学员运用定理13.30, 我们可以简单理解为开集 V 的边界只有至多可数个点不光滑且 f 只需要对求导那个分量具有光滑性, 并且涉及的积分都是可积的, 就可以使用 Guass-Green 定理. 注意开集可以是无界的或者多连通的.

证明 不失一般性, 假设 $k=1$, 我们考虑

$$H\triangleq\{\mathbf{x}\in\partial V_r:n_1(\mathbf{x})=0\},S\triangleq H\bigcup(\partial V\setminus\partial_r V).$$

用 m 表示勒贝格测度, $m_{\partial_r V}$ 表示 $\partial_r V$ 的曲面测度, $\widetilde{m_{\partial V}}$ 是其完备化. 在证明过程中, 为书写方便, 我们把 $[a,+\infty)$(以及类似的区间) 也写作 $[a,+\infty]$(以及类似的区间).

Step 1

注意到 Sard 定理告诉我们 $P_1(H)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的勒贝格 0 测集, 所以结合条件得 $P_1(S)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的勒贝格 0 测集.

Step 2

断言对 $(x_1,\mathbf{x}')\in\partial V\setminus S$, 必然存在 $\delta_0>0$, 使得要么

$$(x_1+\delta,\mathbf{x}')\in V,\forall\delta\in(0,\delta_0). \tag{13.65}$$

要么

$$(x_1-\delta,\mathbf{x}')\in V,\forall\delta\in(0,\delta_0). \tag{13.66}$$

但是(13.65), (13.66)不能同时成立. 且当(13.65)成立时 $n_1((x_1,\mathbf{x}'))<0$, (13.66)成立时 $n_1((x_1,\mathbf{x}'))>0$.

不失一般性, 假设 $(x_1,\mathbf{x}')$ 的邻域 W 满足

$$W\bigcap V=\{(y_1,\mathbf{y}')\in W:y_1<\rho(\mathbf{y}')\},W\bigcap\partial V=\{(y_1,\mathbf{y}')\in W:y_1=\rho(\mathbf{y}')\},\rho\in C^1.$$

于是存在 $\delta_0>0$, 使得

$$(x_1\pm\delta,\mathbf{x}')\in W,\forall\delta\in(0,\delta_0).$$

可以看到

$$(x_1+\delta,\mathbf{x}')\notin V,(x_1-\delta,\mathbf{x}')\in W\bigcap V,\forall\delta\in(0,\delta_0),$$

此时

$$n_1((x_1,\mathbf{x}'))=\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=2}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(x_1,\mathbf{x}')\right|^2}}>0,$$

这就证明了 **Step 2**.

Step 3

对固定的 $\mathbf{x}' \in P_1(V)$, 我们由开集构造定理知道

$$\{t \in \mathbb{R} : (t, \mathbf{x}') \in V\} = \bigcup_{i=1}^{N_{\mathbf{x}'}} (a_i(\mathbf{x}'), b_i(\mathbf{x}')),$$

这里

$$N_{\mathbf{x}'} \in \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}, +\infty \geqslant b_i(\mathbf{x}') > a_i(\mathbf{x}') \geqslant -\infty$$

以及 $(a_i(\mathbf{x}'), b_i(\mathbf{x}'))$ 两两不交. 显然当 $a_i(\mathbf{x}') > -\infty, b_i(\mathbf{x}') < +\infty$, 总有 $(a_i(\mathbf{x}'), \mathbf{x}'), (b_i(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \in \partial V$.

考虑[15]

$$A \triangleq \left\{(a_i(\mathbf{x}'), \mathbf{x}'), (b_i(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') : \mathbf{x}' \in P_1(S) \bigcap P_1(V), a_i(\mathbf{x}') > -\infty, b_i(\mathbf{x}') < +\infty, i = 1, 2, \cdots, N_{\mathbf{x}'}\right\} \bigcap (\partial V \setminus S),$$

为方便, 记 $A = \{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. 我们来证明

$$\widetilde{m_{\partial_r V}}(A) = 0. \tag{13.67}$$

对每一个 $\mathbf{x}_\lambda \in A$, 因为 $n_1(\mathbf{x}_\lambda) \neq 0$, 可取在 $\partial_r V$ 的邻域 U_λ 使得 P_1 把 U_λ 同胚到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个开集且逆映射 P_1^{-1} 是连续可微的. 由 Lindelof 性质可选出这些开集中的可数个 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. 对每个 $i \in \mathbb{N}$, 由 **Step 1** 和 $P_1(A \bigcap U_i) \subset P_1(S)$ 我们知道 $P_1(A \bigcap U_i)$ 是勒贝格 0 测集. 取 Borel 集[16]

$$P_1\left(A \bigcap U_i\right) \subset C_i \subset P_1(U_i), m(C_i) = 0, i \in \mathbb{N},$$

于是我们有

$$m_{\partial_r V}\left(P_1^{-1}(C_i)\right) = 0 \Rightarrow \widetilde{m_{\partial_r V}}\left(A \bigcap U_i\right) = 0, i \in \mathbb{N}.$$

由 0 测集可数并也 0 测知(13.67)成立.

Step 4

一方面对 $\mathbf{x} \in \partial V \setminus (S \bigcup A)$, 我们取其在 $\partial_r V$ 的邻域 $V_{\mathbf{x}}$ 使得 P_1 把 $V_{\mathbf{x}}$ 同胚到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个开集, 于是由 Lindelof 性, 存在 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{V_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \partial V \setminus (S \bigcup A)}$ 有

$$\partial V \setminus \left(S \bigcup A\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

由光滑曲面定义, 我们知道

$$V_i \bigcap \partial V = \{(c_i(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') : \mathbf{x}' \in P_1(V_i)\}, i = 1, 2, \cdots.$$

设

$$T_1 = \left[\partial V \setminus \left(S \bigcup A\right)\right] \bigcap V_1, T_j = \left\{\left[\partial V \setminus \left(S \bigcup A\right)\right] \bigcap V_j\right\} \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i\right], j = 2, 3, \cdots,$$

我们有划分 $\partial V \setminus (S \bigcup A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$. 我们断言

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P_1(T_i) = \left(P_1(V) \bigcap P_1(\partial_r V)\right) \setminus P_1(S). \tag{13.68}$$

设 $\mathbf{x}' \in (P_1(V) \bigcap P_1(\partial_r V)) \setminus P_1(S)$, 则存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $(t, \mathbf{x}') \in \partial V$ 且 $n_1((t, \mathbf{x}')) \neq 0$. 因为 $\mathbf{x}' \notin P_1(S)$, 所以 $(t, \mathbf{x}') \notin A$. 因此

$$(t, \mathbf{x}') \in \partial V \setminus \left(S \bigcup A\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i \Rightarrow \mathbf{x}' \in \bigcup_{i=1}^{\infty} P_1(T_i).$$

对每一个 $i \in \mathbb{N}$, 注意到 $T_i \subset \partial V \setminus (S \bigcup A)$, 所以 $n_1(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in T_i$. 于是对每一个 $\mathbf{x} \in T_i$ 都有 $\delta > 0$ 使得

[15] 当 $N_{\mathbf{x}'} = +\infty$, i 取值就是全体自然数 $\mathbb{N}$.

[16] 当然可以直接对完备测度用定理13.28, 这里再一次回到 Borel 是提醒读者记得牢记什么时候是完备测度, 什么时候是 Borel 测度.

$\mathbf{x}\pm\delta e_1\in V$ 之一成立, 故

$$P_1(T_i)\subset P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V).$$

设 $P_1(T_i)\bigcap P_1(S)\neq\emptyset$, 取

$$(t_1,\mathbf{x}')\in S,(t_2,\mathbf{x}')\in T_i\subset\partial V\setminus\left(S\bigcup A\right).$$

注意到 $n_1((t_2,\mathbf{x}'))\neq 0$, 所以要么对充分小的 $\delta>0$ 都有 $(t_2+\delta,\mathbf{x}')\in V$, 要么对充分小的 $\delta>0$ 都有 $(t_2-\delta,\mathbf{x}')\in V$ 且两者不能同时发生, 我们有 t_2 只能是 $a_i(\mathbf{x}'),b_i(\mathbf{x}')$ 中的某一个. 回忆 A 定义, $(t_2,\mathbf{x}')\in A$, 这就是一个矛盾! 从而(13.68)成立.

Step 5

现在有

$$\begin{aligned}\int_{\partial_r V}f(\mathbf{x})n_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x})&=\int_{\partial V\setminus(S\bigcup A)}f(\mathbf{x})n_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{T_i}f(\mathbf{x})n_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{P_1(T_i)}f(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\cdot\frac{n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')}{|n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')|}\mathrm{d}\mathbf{x}'\\&=\int_{(P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V))\setminus P_1(S)}\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{P_1(T_i)}(\mathbf{x}')f(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\cdot\frac{n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')}{|n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')|}\mathrm{d}\mathbf{x}'.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{(P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V))\setminus P_1(S)}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\chi_{P_1(T_i)}(\mathbf{x}')\frac{f(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')}{|n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')|}\right|\mathrm{d}\mathbf{x}'=\int_{\partial_r V}|f\cdot n_1|\,\mathrm{d}S<\infty,$$

即对几乎所有 $\mathbf{x}'\in(P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V))\setminus P_1(S)$ 都有

$$g(\mathbf{x}')\triangleq\sum_{i=1}^{\infty}\left[\chi_{P_1(T_i)}(\mathbf{x}')\frac{f(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')}{|n_1(c_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')|}\right].\tag{13.69}$$

绝对收敛.

另外一方面, 注意到

$$\int_V|f_{x_1}(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{P_1(V)\setminus P_1(S)}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}'}}\int_{a_i(\mathbf{x}')}^{b_i(\mathbf{x}')}|f_{x_1}(x_1,\mathbf{x}')|\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}\mathbf{x}'<\infty,$$

从而对几乎所有 $\mathbf{x}'\in P_1(V)\setminus P_1(S)$ 都有

$$\int_{a_i(\mathbf{x}')}^{b_i(\mathbf{x}')}|f_{x_1}(x_1,\mathbf{x}')|\,\mathrm{d}x_1<\infty.$$

因此结合最强微积分基本定理13.29得对几乎所有 $\mathbf{x}'\in P_1(V)\setminus P_1(S)$, 我们有 f 关于第一个分量在每一个 $[a_i(\mathbf{x}'),b_i(\mathbf{x}')]$ 的每个闭子区间上绝对连续.

Step 6

现在由牛顿莱布尼兹公式和命题13.7得[17]

$$\begin{aligned}\int_V f_{x_1}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}&=\int_{P_1(V)\setminus P_1(S)}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}'}}\int_{a_i(\mathbf{x}')}^{b_i(\mathbf{x}')}f_{x_1}(x_1,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}\mathbf{x}'\\&=\int_{P_1(V)\setminus P_1(S)}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}'}}[f(b_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')-f(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')]\right)\mathrm{d}\mathbf{x}'\\&=\int_{(P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V))\setminus P_1(S)}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}'}}[f(b_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')-f(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')]\right)\mathrm{d}\mathbf{x}'.\end{aligned}$$

注意在有限点 $(b_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')$ 处对充分小的 $\delta>0$ 有 $(b_i(\mathbf{x}')-\delta,\mathbf{x}')\in V$, 因此 $n_1(b_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')>0$, 同理在有限点处

[17]注意若 $b_i(\mathbf{x}')=+\infty$ 或者 $a_i(\mathbf{x}')=-\infty$, 我们有 $f(b_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')=0$ 或者 $f(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')=0$.

$n_1(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')<0$. 考虑和式

$$h(\mathbf{x}')\triangleq\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}'}}\left[f(b_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')-f(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\right],\tag{13.70}$$

再来断言对每一个 $\mathbf{x}'\in(P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V))\setminus P_1(S)$, 都有

$$\{c_i(\mathbf{x}'):i=1,2,\cdots\}=\{a_i(\mathbf{x}'),b_i(\mathbf{x}')\in\mathbb{R}:i=1,2,\cdots,N_{\mathbf{x}'}\}.\tag{13.71}$$

对每一个 $i\in\mathbb{N}$, 由 $c_i(\mathbf{x}')$ 定义, 我们知道 $(c_i(\mathbf{x}')\pm\delta,\mathbf{x}')\in V$ 必有一个对充分小的 $\delta>0$ 成立, 因此 $c_i(\mathbf{x}')$ 必然是 $\{t\in\mathbb{R}:(t,\mathbf{x}')\in V\}$ 的构成区间的端点, 即某个 $a_j(\mathbf{x}'),b_j(\mathbf{x}')\in\mathbb{R}$. 反之注意到在有限点处 $n_1((a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}'))\neq 0$, 于是

$$(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\in\partial V\setminus\left(S\bigcup A\right)=\bigcup_{j=1}^{\infty}T_j,$$

即

$$(a_i(\mathbf{x}'),\mathbf{x}')\in\partial V\setminus\left(S\bigcup A\right)=\bigcup_{j=1}^{\infty}T_j$$

属于某个 T_j, 从而 $a_i(\mathbf{x}')=c_j(\mathbf{x}')$. 类似的对 $b_i(\mathbf{x}')$ 也成立, 这就证明了(13.71).

于是由(13.71), 对几乎所有 $\mathbf{x}'\in(P_1(V)\bigcap P_1(\partial_r V))\setminus P_1(S)$, 删除为 0 的项之后, 级数(13.70)是级数(13.69)的重排, 因此

$$g(\mathbf{x}')=h(\mathbf{x}'),a.e,$$

这就证明了(13.64).

注如果读者不熟悉微分拓扑的 Sard 定理, 那我们可以使用平坦空间的 Sard 定理13.32来证明 $P_1(S)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的勒贝格 0 测集. 由 Lindelof 性, 我们只需对每一个坐标卡和 H 之交部分在 P_1 下的像 0 测就可以了. 事实上, 不妨设开集 $W\subset\mathbb{R}^{n-1},U\subset\mathbb{R}^n$ 且 $\varphi\in C^1(W)$ 满足

$$U\bigcap\partial V_r=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:x_2=\varphi(x_1,x_3,\cdots,x_n),(x_1,x_3,\cdots,x_n)\in W\}.$$

注意到

$$P_2\left(U\bigcap H\bigcap\partial V_r\right)=\left\{(x_1,x_3,\cdots,x_n)\in W:\frac{\partial\varphi(x_1,x_3,\cdots,x_n)}{\partial x_1}=0\right\}.$$

对固定的 $\left(x_3^0,x_4^0,\cdots,x_n^0\right)$, 记

$$A_{\left(x_3^0,\cdots,x_n^0\right)}\triangleq\left\{x_1\in\mathbb{R}:\left(x_1,x_3^0,\cdots,x_n^0\right)\in W,\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\left(x_1,x_3^0,\cdots,x_n^0\right)=0\right\},\varphi_{\left(x_3^0,\cdots,x_n^0\right)}\triangleq\varphi\left(\cdot,x_3^0,\cdots,x_n^0\right).$$

我们由定理13.32得

$$\int_{\varphi_{\left(x_3^0,\cdots,x_n^0\right)}\left(A_{\left(x_3^0,\cdots,x_n^0\right)}\right)}1\mathrm{d}x_2=0.$$

由上式两边对所有 $\left(x_3^0,\cdots,x_n^0\right)$ 积分和 Fubini 定理得 $P_1(U\bigcap H\bigcap\partial_r V)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的勒贝格 0 测集, 因此得 $P_1(S)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的勒贝格 0 测集.

我们有如下组合结果:

定理 13.31

1. $\mathbb{R}^n$ 中有限个球[a]中必然能挑出若干个不交球, 把这些球半径变成 3 倍之后, 能覆盖原本的球族;
2. $\mathbb{R}^n$ 中无限个半径有界的球[b]中必然能挑出至多可数个不交球, 把这些球半径变成 $a,a>3$ 倍之后, 能覆盖原本的球族.

[a]可开可闭或者只是球的内部和部分边界的并.

[b]可开可闭或者只是球的内部和部分边界的并.

♡

笔记 $\mathbb{R}^1$ 上有界开区间, 有界闭区间, 有界半开半闭区间都可以看作 $\mathbb{R}^1$ 上的球.

证明

1. 设全部球为 $\Gamma=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$, 取其中半径最大的球, 不妨设为 B_1, 再取和其不相交的半径最大的球, 不妨设为 B_2. 继续取和 $B_1\bigcup B_2$ 不相交的半径最大的球, 不妨设为 B_3. 依次下去可得 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 使得

$$B_j\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{s}B_i\right)\neq\emptyset,j=s+1,\cdots,m.$$

下证

$$B_j\subset\bigcup_{i=1}^{s}3B_i,j=s+1,\cdots,m. \tag{13.72}$$

事实上对固定的 $j=s+1,\cdots,m$, 我们设 $B_j\bigcap B_i\neq\emptyset,i\in\{1,2,\cdots,s\}$. 设 i 是最小的正整数使得 $B_j\bigcap B_i\neq\emptyset$, 于是 B_i 半径大于等于 B_j 半径. 现在不妨设 B_i 是球心在原点, 半径为 $r>0$ 的球, 然后设 B_j 的球心是 $\mathbf{a}$, 半径为 $\rho>0$, 则设 $\mathbf{x}\in B_j\bigcap B_i$, 对 $\mathbf{y}\in B_j$, 我们有

$$||\mathbf{y}||\leqslant||\mathbf{y}-\mathbf{x}||+||\mathbf{x}||\leqslant||\mathbf{y}-\mathbf{a}||+||\mathbf{x}-\mathbf{a}||+||\mathbf{x}||\leqslant2\rho+r\leqslant3r. \tag{13.73}$$

若(18.43)中任一不等号不成立等号, 则 $\mathbf{y}\in3B_i^{\circ}$. 若(18.43)中所有不等号都是等号, 则 $\rho=r$, 因此

$$||\mathbf{y}||=3r,||\mathbf{y}-\mathbf{x}||=2r,||\mathbf{y}-\mathbf{a}||=||\mathbf{x}-\mathbf{a}||=||\mathbf{x}||=r,$$

即 $\mathbf{y}=3\mathbf{x}$, 因此 $\mathbf{y}\in3B_i$. 现在就证明了(13.72), 从而完成了证明.

2. 您能对比证明吗?

定理 13.32 (Sard 定理)

设 $f\in C^1(\mathbb{R})$. 记 $F=\{x\in\mathbb{R}:f'(x)=0\}$, 则 $f(F)$ 是 0 测的 F_δ 集. ♡

证明 对每一个 $n\in\mathbb{Z}$, 注意到 $F\bigcap[n,n+1]$ 是紧集, 则 $f(F\bigcap[n,n+1])$ 是紧集, 从而

$$f(F)=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}f\left(F\bigcap[n,n+1]\right)\in F_\delta.$$

现在对 $x\in F\bigcap[n,n+1]$, 存在开集 $U_x\subset(n-1,n+2)$ 使得 $|f'(y)|\leqslant\epsilon,\forall y\in U_x$. 考虑开覆盖

$$\left(F\bigcap[n,n+1]\right)\subset\bigcup_{x\in F\bigcap[n,n+1]}U_x,$$

由开集构造定理, 存在划分

$$\bigcup_{x\in F\bigcap[n,n+1]}U_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i),$$

这里 $(a_i,b_i),i\in\mathbb{N}$ 是两两无交的. 对 $c,d\in[a_i,b_i]$, 由拉格朗日中值定理我们有

$$|f(d)-f(c)|\leqslant\epsilon\cdot|d-c|\leqslant\epsilon(b_i-a_i),$$

于是由 $f([a_i,b_i])$ 是一个闭区间得

$$f((a_i,b_i))\leqslant f([a_i,b_i])\leqslant\epsilon(b_i-a_i).$$

现在

$$m\left(f\left(F\bigcap[n,n+1]\right)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(f((a_i,b_i)))\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon(b_i-a_i)\leqslant\epsilon(n+2-(n-1))=3\epsilon.$$

由 ϵ 任意性得

$$m\left(f\left(F\bigcap[n,n+1]\right)\right)=0,\forall n\in\mathbb{Z},$$

这就给出了

$$m(f(F))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m\left(f\left(F\bigcap[n,n+1]\right)\right)=0,$$

即 $m(f(F))=0$.

定理 13.33

设只有实根的 n 次实系数多项式 p 和 $n-1$ 次实系数多项式 q 满足对任何 $a\in\mathbb{R}$ 都有 $p+aq$ 只有实根, 则 p,q 具有交错的零点.

即设 A 的零点是

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n,$$

B 的零点是

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1},$$

则有

$$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant\lambda_2\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\lambda_n. \tag{13.74}$$

证明

由例题12.7, 设 p_ϵ,q_ϵ 的根分别为

$$\lambda_1(\epsilon)>\lambda_2(\epsilon)>\cdots>\lambda_n(\epsilon),\mu_1(\epsilon)>\mu_2(\epsilon)>\cdots>\mu_{n-1}(\epsilon).$$

对任何 $\alpha\in\mathbb{R}$ 也有

$$(p+\alpha q)_\epsilon=p_\epsilon+\alpha q_\epsilon$$

只有 n 个实单零点. 如果我们已经证明了

$$\lambda_1(\epsilon)\geqslant\mu_1(\epsilon)\geqslant\lambda_2(\epsilon)\geqslant\mu_2(\epsilon)\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}(\epsilon)\geqslant\lambda_n(\epsilon). \tag{13.75}$$

现在运用(13.75)和多项式的根是系数的连续函数[18]23.38知(13.74)成立.

固定 $\epsilon>0$, 为了证明(13.75), 我们不妨设 p_ϵ,q_ϵ 没有公共根, 否则提出公因式后对剩下部分建立不等式之后再插入公共根即可. 因此我们将证明:

$$\lambda_1(\epsilon)>\mu_1(\epsilon)>\lambda_2(\epsilon)>\mu_2(\epsilon)>\cdots>\mu_{n-1}(\epsilon)>\lambda_n(\epsilon), \tag{13.76}$$

这等价于对每一个 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有 $(\lambda_j(\epsilon),\lambda_{j-1}(\epsilon))$ 之间必有一个 q_ϵ 的零点.

若存在一个 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $(\lambda_j(\epsilon),\lambda_{j-1}(\epsilon))$ 之间没有 q_ϵ 的零点. 注意到不存在实数 λ 使得

$$\begin{cases}ap_\epsilon(\lambda)+bq_\epsilon(\lambda)=0\\ ap'_\epsilon(\lambda)+bq'_\epsilon(\lambda)=0\end{cases}$$

有不全为 0 的实数 a,b 解, 即

$$d(x)\triangleq p_\epsilon(x)q'_\epsilon(x)-q_\epsilon(x)p'_\epsilon(x)\neq0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

现在

$$\left(\frac{p_\epsilon}{q_\epsilon}\right)'=\frac{p'_\epsilon q_\epsilon-p_\epsilon q'_\epsilon}{q_\epsilon^2}\neq0.$$

但是

$$\frac{p_\epsilon(\lambda_{j-1}(\epsilon))}{q_\epsilon(\lambda_{j-1}(\epsilon))}=\frac{p_\epsilon(\lambda_j(\epsilon))}{q_\epsilon(\lambda_j(\epsilon))}=0,$$

即和罗尔中值定理矛盾!, 故我们证明了(13.76), 从而完成了证明.

[18]更精确的, 设

$$p=a(\lambda-\xi_1)^{s_1}(\lambda-\xi_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\xi_t)^{s_t},$$

这里 ξ_i 两两不同. 现在对充分小的半径做 $\xi_j,j=1,2,\cdots,t$ 为心的圆使得两两不交, 此时当 $\epsilon>0$ 充分小时, p_ϵ 的根会落在这些圆内且每个圆内有 s_j 个根. 如此一来实际上

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lambda_j(\epsilon)=\lambda_j,j=1,2,\cdots,n.$$

定理 13.34

设 $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是 C^2 映射且 DF 处处可逆. 若

$$\lim_{||\mathbf{x}||\to\infty}||F(\mathbf{x})||=\infty,$$

则 F 是微分同胚. ♡

笔记 在 $\mathbb{R}^N$ 中, 显然

$$\lim_{||\mathbf{x}||\to\infty}||F(\mathbf{x})||=\infty$$

等价于对任何紧集 $K\subset\mathbb{R}^N$, 都有 $F^{-1}(K)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的紧集.

注 借助代数拓扑中的复叠空间和映射提升定理, 定理13.34对 C^1 映射的 F 也成立.

证明 不妨设 $F(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 否则做一个平移即可. 考虑

$$H:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N,(t,\mathbf{x})\mapsto\begin{cases}\frac{F(t\mathbf{x})}{t}, & t>0\\ DF(\mathbf{0})(\mathbf{x})+\frac{1}{2}D^2F(\mathbf{0})(\mathbf{x},\mathbf{x})t, & t\leqslant 0\end{cases}.$$

容易看到 H 是 C^1 映射且对 $t>0,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$ 有

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})=\frac{\partial F}{\partial x_i}(t\mathbf{x}),i=1,2,\cdots,N;\frac{\partial H}{\partial t}(t,\mathbf{x})=\frac{DF(t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{t}-\frac{F(t\mathbf{x})}{t^2}.$$

我们还有

$$H(0,\cdot)=DF(\mathbf{0}),H(1,\cdot)=F(\cdot).$$

对 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$, 考虑

$$C(\mathbf{y})\triangleq\left\{(t,\mathbf{x})\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^N:H(t,\mathbf{x})=\mathbf{y}\right\}.$$

因为 $H(0,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的双射, 所以任何 $C(\mathbf{y})$ 都不是空集. 于是对 $\mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^N$, 存在 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^N$ 使得 $DF(\mathbf{0})(\mathbf{x}_0)=\mathbf{y}_0$.

设 $(t_1,\mathbf{x}_1)\in C(\mathbf{y}_0)$, 注意到

$$D_{\mathbf{x}}(H(t,\cdot)-\mathbf{y}_0)(t_1,\mathbf{x}_1)=DF(t_1\mathbf{x}_1)$$

是可逆的, 隐函数定理表明 $(t_0,\mathbf{x}_0)$ 某个邻域内一定有 C 中的点.

考虑 $(0,\mathbf{x}_0)$ 邻域内由隐函数定理确定的函数 $\mathbf{x}=\Phi(t)$. 我们将证明 Φ 定义域可以延拓到 $[0,+\infty)$. 若不然, 则设最大定义区间为 $[0,t_0)$. 我们有

$$H(t,\Phi(t))=\mathbf{y}_0\Rightarrow F(t\Phi(t))=t\mathbf{y}_0,\forall t\in[0,t_0).$$

由

$$\lim_{||\mathbf{x}||\to\infty}||F(\mathbf{x})||=\infty$$

知 $\Phi(t)$ 在 t_0 去心左邻域有界. 于是可设

$$\lim_{n\to\infty}t_n=t_0,\lim_{n\to\infty}\Phi(t_n)=\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^N.$$

现在

$$H(t_0,\mathbf{x}_2)=\lim_{n\to\infty}H(t_n,\Phi(t_n))=\mathbf{y}_0,$$

这就和最大定义区间为 $[0,t_0)$ 矛盾!, 因此我们证明了存在 $\mathbf{x}_3\in\mathbb{R}^N$ 使得

$$H(1,\mathbf{x}_3)=F(\mathbf{x}_3)=\mathbf{y}_0,$$

即 F 是满射.

现在证明 F 是单射. 若不然, 设不同的 $\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5\in\mathbb{R}^N$ 使得 $\mathbf{y}_0=F(\mathbf{x}_4)=F(\mathbf{x}_5)$. 相似满射的证明, 隐函数定理确定的 $(1,\mathbf{x}_4),(1,\mathbf{x}_5)$ 邻域的解可以延拓到 $(0,\mathbf{y}_1),(0,\mathbf{y}_2)$, 从而

$$Df(\mathbf{0})(\mathbf{x}_6)=Df(\mathbf{0})(\mathbf{x}_7)=\mathbf{y}_0,$$

即 $\mathbf{x}_6=\mathbf{x}_7$. $(0,\mathbf{x}_6)$ 处出发的解应该是唯一的, 因此 $(1,\mathbf{x}_4)=(1,\mathbf{x}_5)$, 这就是一个矛盾!, 至此我们证明了 F 单射.

综上所述, F 是 $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 微分同胚.

13.4 R-S 积分和 L-S 积分理论 *

阅读本章至少具备夏道行上册的知识点. 本节结果可以自然扩充至复值函数, 根据需要自己临时再建立即可.

定义 13.8 (R-S 积分定义)

对 $f,\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$, 我们称 $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 存在, 如果存在某个数字 $A\in\mathbb{R}$, 使得对任何 $\epsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得对任何一个满足 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})\leqslant\delta$ 的划分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

和 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$ 都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))-A\right|<\epsilon.$$

此时我们记 $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=A$.

♣

注R-S 积分也有类似黎曼积分的性质, 但是也不完全一致. 具体性质我们可以实际做题时联想定义直接得到. 其中最值得注意的是

$$(R-S)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x),(R-S)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$$

存在却推不出 $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 存在.

考虑

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant 1\end{cases},\alpha(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

对任何划分

$$-1=x_0<\cdots<x_{i-1}<0<x_i<\cdots<x_n=1,$$

我们有

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1}))=f(\xi_i)=\begin{cases}0, & \xi_i\leqslant 0\\ 1, & \xi_i>0\end{cases}.$$

现在 $(R-S)\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 不存在.

但是一定有

$$(R-S)\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=f(0),(R-S)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=0.$$

我们给出一些 R-S 积分的性质定理, 其证明可以参考Rudin 数学分析 Chapter 6.

命题 13.8

1. 设 $f\in C[a,b],\alpha$ 是有界变差函数[a], 则 $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 存在.
2. 设 $f\in C[a,b],\alpha$ 在 $[a,b]$ 绝对连续, 则有

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=(L)\int_a^b f(x)\alpha'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.77}$$

3. $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$, $(R-S)\int_a^b \alpha(x)\,\mathrm{d}f(x)$ 其中一个存在, 则另外一个必然存在且

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)+(R-S)\int_a^b \alpha(x)\,\mathrm{d}f(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a).$$

[a] 等价于两个递增函数之差.

♠

笔记 实变函数告诉我们当 α 在 $[a,b]$ 除去可数个点外可导且 $\alpha'\in L^1[a,b]$, 必有 α 在 $[a,b]$ 绝对连续, 所以绝大部分微积分教材中的函数都满足(13.77).

在 Rudin 数学分析中, 我们将黎曼积分的 Darboux[19]和推广到 $R-S$ 积分, 即:

定义 13.9

设 α 是 $[a,b]$ 递增函数且对有界实函数 f 和 $[a,b]$ 的划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 我们记

$$U(P,f,\alpha)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\cdot(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}));$$

$$L(P,f,\alpha)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\cdot(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})),$$

以及

$$(上)\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\triangleq\inf_P U(P,f,\alpha),(下)\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\triangleq\sup_P L(P,f,\alpha).$$

♣

和黎曼积分一样, 我们有大和不增, 小和不减且 (上)$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\geqslant$ (下)$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha$. 完全类似的, 有如下结果

定理 13.35

设 α 是 $[a,b]$ 递增函数且 f 是 $[a,b]$ 有界实函数, 则 $(R-S)\int_a^b f\mathrm{d}\alpha$ 存在的充要条件是下述两个条件之一成立.

1. 对任何 $\epsilon>0$, 存在一个 $[a,b]$ 的划分 P 使得

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon.$$

2. 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的划分 P 使得

$$\sum_{i=1}^{n}w_i(P)(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))<\epsilon,$$

这里

$$w_i(P)\triangleq\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),i=1,2,\cdots,n.$$

♡

注显然, 上述 2 是 1 的更为大家熟悉的一种叙述.

推论 13.10 (函数的右连续化)

定义在 (a,b) 上的函数 $f(t)$ 满足

$$\tilde{f}(t)=\lim_{h\to0^+}f(t+h)\text{ 存在},\forall t\in(a,b),$$

则 $\tilde{f}(t)$ 是 (a,b) 上右连续函数.

♡

证明 给定 $t_0\in(a,b)$, 对任何 $\epsilon>0$, 有 $\delta>0$ 使得

$$\tilde{f}(t_0)-\varepsilon\leqslant f(t)\leqslant\tilde{f}(t_0)+\epsilon,\ \forall t\in(t_0,t_0+\delta)\bigcap(a,b).$$

[19] 只适用于递增函数诱导的 $R-S$ 积分.

对任意 $t\in(t_0,t_0+\delta)\bigcap(a,b)$, 取极限显然有

$$\tilde{f}(t_0)-\epsilon\leqslant\tilde{f}(t)\leqslant\tilde{f}(t_0)+\epsilon.$$

因此 $\tilde{f}$ 在 (a,b) 上右连续.

引理 13.2

对定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 f, 设 $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ 存在且存在 $[a,b]$ 上的函数 h 使得

(1): $g(a)=h(a)$;

(2): $g(b)=h(b)$;

(3): $\{x\in(a,b):g(x)=h(x)\}$ 是 (a,b) 稠子集;

(4): $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}h(x)$ 存在.

则

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}h(x).\tag{13.78}$$

♡

注本结果表明了: 为了保持 $R-S$ 积分意义不改变, 我们最多可以对权函数做多少改变.

证明

因为

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x),\ (R-S)\int_a^b f(x)\,dh(x)$$

存在, 对任何 $\epsilon>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得对划分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|<\delta,$$

和任何 $\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\left[(g-h)(x_i)-(g-h)(x_{i-1})\right]-(R-S)\int_a^b f(x)\,d(g-h)(x)\right|<\epsilon.$$

我们取

$$y_i=a+\frac{(b-a)\,i}{n},\ i=0,1,\cdots,n,\ \ n>\frac{2(b-a)}{\delta}.$$

在区间上 $[y_{i-1},y_i]$ 的内部, 由稠密性必然可以取到 $g(x_i)=h(x_i)$, $x_i\in(y_{i-1},y_i)$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 因此对于划分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|<\delta,$$

此时有 $\left|\int_a^b f(x)\,d(g-h)(x)\right|<\epsilon$, 因此

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d(g-h)(x)=0.$$

我们简要回忆一下 $L-S$ 测度的构建: 给一个严格右递增连续函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 然后给 $\mathbb{R}$ 上区间 $(a,b]$ 赋予测度 $g(b)-g(a)$. 然后将其自然延拓到 $\mathbb{R}$ 的 Borel 可测集上并完备化就得到了 $L-S$ 测度 $\mathrm{d}g$.

引理 13.3

给定 $[a,b]$ 上的有界函数 f, $n\in\mathbb{N}$ 和划分

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b,\ \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\left|x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right|=0,$$

证明

$$\text{在}f\text{的连续点}x_0\in[a,b],\ \text{有}\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0),$$

这里

$$f_n(x) \triangleq \begin{cases} \sup\limits_{x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}} f(x), & x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \ \ i = 2, 3, \cdots, m_n \\ \sup\limits_{x_0^{(n)} \leqslant x \leqslant x_1^{(n)}} f(x), & x \in \left[x_0^{(n)}, x_1^{(n)}\right] \end{cases}.$$

♡

证明 不妨设[20]$x_0 \in (a,b]$, 则对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 必有 $1 \leqslant i_n \leqslant m_n$ 使得 $x_0 \in (x_{i_n-1}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$.

记

$$M_i^{(n)} \triangleq \sup_{x_{i-1}^{(n)} \leqslant x \leqslant x_i^{(n)}} f(x), \ i = 1, 2, \cdots, m_n.$$

对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, $\forall x \in [x_{i_n-1}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$.

再取 $x \in [x_{i_n-1}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$, 使得 $\left|M_{i_n}^{(n)} - f(x)\right| \leqslant \epsilon$, 于是对 $n \geqslant N$ 都有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left|M_{i_n}^{(n)} - f(x_0)\right| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + \left|M_{i_n}^{(n)} - f(x)\right| \leqslant 2\epsilon,$$

因此我们完成了证明.

众所周知, 闭区间上的有界函数黎曼可积的充要条件是其依勒贝格测度几乎处处连续. 我们自然提问: 闭区间上的有界函数依 $R-S$ 可积的充要条件是其依 $L-S$ 测度几乎处处连续吗? 首先从定义可以看到, 给定一般递增函数 g, 其可以诱导 $R-S$ 积分, 但未必可以诱导 $L-S$ 测度, 因此我们需要一个右连续化的操作(13.79).

此外对右连续递增函数 g 诱导的 $L-S$ 测度 μ, 我们有

命题 13.9

$$\mu(\{a\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\mu(a) - \mu\left(a - \frac{1}{n}\right)\right] = \mu(a) - \mu(a^-);$$

$$\mu([a,b]) = \mu(\{a\}) + \mu((a,b]) = \mu(b) - \mu(a) + \mu(a) - \mu(a^-) = \mu(b) - \mu(a^-);$$

$$\mu([a,b)) = \mu([a,b]) - \mu(\{b\}) = \mu(b) - \mu(a^-) - \mu(b) + \mu(b^-) = \mu(b^-) - \mu(a^-);$$

$$\mu((a,b)) = \mu((a,b]) - \mu(\{b\}) = \mu(b) - \mu(a) - \mu(b) + \mu(b^-) = \mu(b^-) - \mu(a).$$

♠

定理 13.36

设 g 是 $[a,b]$ 上递增函数, 则在闭区间 $[a,b]$ 上有界函数 f 是依 g 是 $R-S$ 可积的充分必要条件是 f 依 $\tilde{g}$ 诱导的 $L-S$ 测度几乎处处连续, 且此时

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg = (L-S)\int_a^b f(x)\,d\tilde{g},$$

这里

$$\tilde{g}(x) \triangleq \begin{cases} g(b) - g(a) & x \geqslant b \\ \lim\limits_{y\to x^+} g(y) - g(a) & x \in [a,b) \\ 0 & x < a \end{cases}. \tag{13.79}$$

♡

注从引理13.10我们知道(13.79)得到的 $\tilde{g}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的右连续函数. 显然, 设 $c \in \mathbb{R}$, $\tilde{g} + c$ 诱导的 $L-S$ 测度和 $\tilde{g}$ 诱导的 $L-S$ 测度一致.

证明 考虑 $\tilde{g}$ 诱导的 $\mathbb{R}$ 上的 $L-S$ 测度. 由命题13.6知 $\tilde{g}$ 除去可数个点外连续. 对

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_{m_n}^{(n)} = b, \ \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\left|x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right| = 0.$$

[20]希望读者模仿证明 $x_0 = a$ 的情况.

且这些分点除 a,b 外都是 $\tilde{g}$ 的连续点, 令

$$h_n(x) \triangleq \begin{cases} M_i^{(n)} - m_i^{(n)}, & x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1,2,\cdots,m_n \\ M_1^{(n)} - m_1^{(n)}, & x = a \end{cases},$$

这里

$$M_i^{(n)} \triangleq \sup_{x \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]} f(x),\ m_i^{(n)} \triangleq \inf_{x \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]} f(x),\ i = 1,2,\cdots,m_n.$$

于是

$$\begin{aligned}
&(L-S)\int_a^b h_n \mathrm{d}\tilde{g} = h_n(a)\left(\tilde{g}(a) - \tilde{g}(a^-)\right) + \sum_{i=1}^{m_n}\left(M_i^{(n)} - m_i^{(n)}\right)\left[\tilde{g}\left(x_i^{(n)}\right) - \tilde{g}\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\
&= h_n(a)\left(\tilde{g}(a) - \tilde{g}(a^-)\right) + \left(M_1^{(n)} - m_1^{(n)}\right)\left[\tilde{g}\left(x_1^{(n)}\right) - \tilde{g}(a)\right] + \sum_{i=2}^{m_n}\left(M_i^{(n)} - m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\
&= h_n(a)\left(g(a^+) - g(a)\right) + \left(M_1^{(n)} - m_1^{(n)}\right)\left[g\left(x_1^{(n)}\right) - g(a^+)\right] + \sum_{i=2}^{m_n}\left(M_i^{(n)} - m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m_n}\left(M_i^{(n)} - m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \to (\text{上})\int_a^b f\mathrm{d}g - (\text{下})\int_a^b f\mathrm{d}g.
\end{aligned}$$

考虑 $P \triangleq \left\{x_j^{(n)} : j = 1,2,\cdots,m_{n-1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = w_f(x)$, $x \notin P$ 且 P 是依 $\tilde{g}$ 0 测集.

因此由控制收敛定理

$$(L-S)\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}\tilde{g}(x) \to (L-S)\int_a^b w_f(x)\,\mathrm{d}\tilde{g}(x)$$

于是

$$(L-S)\int_a^b w_f(x)\,\mathrm{d}\tilde{g}(x) = (\text{上})\int_a^b f(x)\,dg - (\text{下})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g.$$

结合定理13.35, 我们有

$$w_f(x) = 0,\ a.e\text{于}\tilde{g} \Leftrightarrow (R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g\text{存在}.$$

于是由定理13.44我们知道闭区间 $[a,b]$ 上有界函数 f 是依 g 是 $R-S$ 可积的充分必要条件是 f 依 $\tilde{g}$ 诱导的 $L-S$ 测度几乎处处连续.

又对依 g $R-S$ 可积的函数 f, 我们令

$$k_n(x) \triangleq \begin{cases} M_i^{(n)}, & x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1,2,\cdots,m_n \\ M_1^{(n)}, & x = a \end{cases}.$$

由引理13.3, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} k_n(x) = f(x),\ \text{当}x\text{是}f\text{连续点}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b k_n(x)\,\mathrm{d}\tilde{g} = (L-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g.$$

另外一方面

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b k_n(x)\,\mathrm{d}\tilde{g} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)}\left[g\left(x_i^{(n)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\
&= (R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g.
\end{aligned}$$

我们完成了证明.

推论 13.11

对 $(a,b]$ 上的有界函数 f, 有 $(R-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor$ 存在的充分必要条件是 f 在 $(a,b]$ 的所有整数点连续, 且积分存在时成立

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor=\sum_{a<x\leqslant b} f(x). \tag{13.80}$$

♡

证明 显然向下取整函数 $\lfloor x\rfloor$ 是 $\mathbb{R}$ 上单调递增的右连续函数, 于是我们定义 $\lfloor x\rfloor^a=\begin{cases}\lfloor x\rfloor & x\geqslant a\\ \lfloor a\rfloor & x<a\end{cases}$. 由定理13.36我们知道对依 $\lfloor x\rfloor$ 的 $R-S$ 可积函数 f, 有

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor=(R-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor^a=(L-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor^a.$$

对于 $[a,b]$ 的非整数点 c, 则 c 的 $L-S$ 测度是 $\lfloor c\rfloor^a-\lim\limits_{x\to c^-}\lfloor x\rfloor^a=0$, 对于 $[a,b]$ 的除 a 外的整数点 c, 则 c 的 $L-S$ 测度是 $\lfloor c\rfloor^a-\lim\limits_{x\to c^-}\lfloor x\rfloor^a=1$, 因此

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor=(L-S)\sum_{a<k\leqslant b}\int_{\{k\}} f(x)\,d\lfloor x\rfloor^a=\sum_{a<x\leqslant b} f(x),$$

并且结论叙述的充要条件成立.

笔记 [EM 公式9.3的动机]

当 $f\in C^1[a,b]$, 由 $R-S$ 积分的分部积分公式, 我们有

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x)=(R-S)\int_a^b f(x)\,d\lfloor x\rfloor=\lfloor b\rfloor f(b)-\lfloor a\rfloor f(a)-\int_a^b \lfloor x\rfloor f'(x)\,dx.$$

稍微整理就有

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x)=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b b_1(x)f'(x)\,dx+b_1(a)f(a)-b_1(b)f(b),$$

这里 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$.

例题 13.13 将式(13.77)可以扩充到 f 黎曼可积的情形.

证明 不妨设 $f\neq 0,\int_E|g'(x)|\,\mathrm{d}x>0$.

对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $E\subset[a,b],mE<\delta$, 我们有

$$\int_E|g'(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{4\sup|f|}.$$

存在 $\eta>0$, 对

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i<\eta,$$

我们有

$$\frac{\epsilon}{2\int_0^1|g'(x)|\,\mathrm{d}x}\sum_{w_i(f)\geqslant\frac{\epsilon}{2\int_0^1|g'(x)|\mathrm{d}x}}\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n w_i(f)\Delta x_i<\frac{\epsilon\delta}{2\int_0^1|g'(x)|\,\mathrm{d}x},$$

即

$$\sum_{w_i(f)\geqslant\frac{\epsilon}{2\int_0^1|g'(x)|\mathrm{d}x}}\Delta x_i<\delta.$$

于是对

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i<\eta,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]-\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x)-f(x_i)\right|\cdot\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{w_i(f)\geqslant\frac{\epsilon}{2\int_0^1|g'(x)|\mathrm{d}x}} w_i(f)\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x+\sum_{w_i(f)<\frac{\epsilon}{2\int_0^1|g'(x)|\mathrm{d}x}} w_i(f)\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\sup|f|\cdot\sum_{w_i(f)\geqslant\frac{\epsilon}{2\int_0^1|g'(x)|\mathrm{d}x}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x+\frac{\epsilon}{2\int_0^1\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x}\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,
\end{aligned}$$

即 $(R-S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ 存在且(13.77)成立.

13.5 基本性态分析结论

13.5.1 一致连续

我们来看一致连续函数和 Lipschitz 连续函数差了多少. 回忆课本定理:

定理 13.37

1. $f\in C(a,b)$ 一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.
2. f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty},\{x_n''\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n''-x_n')=0$ 都有
$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n'')-f(x_n')\right)=0.$$

♡

注注意第一个结论叫做 Cantor 定理, 读者应该自己思考清楚 f 在 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 的版本. 上面两个结果证明都可以在常规数学分析教材找到且可以直接使用.

命题 13.10

设 f 定义在区间 I 的函数. 证明 f 在区间 I 一致连续的充要条件是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得对任何 $x_1,x_2\in I$, 都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_1-x_2|+\epsilon. \tag{13.81}$$

♠

证明 必要性: 因为 f 一致连续, 所以对每个 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $x,y\in I$, 只要 $|x-y|\leqslant\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon. \tag{13.82}$$

当 $|f(x)-f(y)|\leqslant\epsilon$, 不等式(13.81)当然成立. 当 $|f(x)-f(y)|>\epsilon$, 不妨设 $y>x, f(y)>f(x)$ 且令[21] $f(y)-f(x)=kt, k\in\mathbb{N}, t\in(\epsilon,2\epsilon]$. 由介值定理, 存在 $x=x_0<x_1<\cdots<x_k=y$ 使得

$$f(x_j)=f(x)+jt, j=0,1,2,\cdots,k.$$

于是

$$f(x_j)-f(x_{j-1})=t>\epsilon, j=1,2,\cdots,k,$$

[21] 这里 k,t 存在性可以如此得到: 考虑 $(\epsilon,+\infty)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}(k\epsilon,2k\epsilon]$. 因为 $(k+1)\epsilon\leqslant 2k\epsilon, k=1,2,\cdots$, 所以不同的 $(k\epsilon,2k\epsilon]$ 是连在一起的.

由(13.82)知 $x_j - x_{j-1} > \delta, j = 1, 2, \cdots, k$. 从而我们有

$$y - x = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) > k\delta.$$

现在可取 $M = \frac{2\epsilon}{\delta} > 0$, 于是就有

$$|f(y) - f(x)| = kt \leqslant \frac{t}{\delta} |y - x| \leqslant \frac{2\epsilon}{\delta} |y - x| = M |y - x|.$$

这就证明了不等式(13.81)成立.

充分性: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得对任何 $x_1, x_2 \in I$, 都有(13.81)成立. 于是取 $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$, 当 $x, y \in I, |x - y| \leqslant \delta$, 我们就有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\epsilon,$$

这就证明了 f 在 I 上一致连续.

命题 13.11 (∗)

设 f 定义在凸开集 $V \subset \mathbb{R}^n$ 上, 证明 f 在 V 一致连续的充要条件是对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得对任何 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, 都有

$$|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leqslant M ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|| + \epsilon. \tag{13.83}$$

♠

证明 充分性类似13.10证明, 必要性可用标准的一维化方法. 对任何固定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \epsilon, \forall ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leqslant \delta. \tag{13.84}$$

对任何 $\mathbf{a} \in V, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 且 $||b|| = 1$, 考虑开集 $V_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \in V\}$, 注意到对 $\lambda_1, \lambda_2 \in V_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, \mu \in [0, 1]$, 我们有

$$\mathbf{a} + (\mu\lambda_1 + (1 - \mu)\lambda_2)\mathbf{b} = \mu(\mathbf{a} + \lambda_1\mathbf{b}) + (1 - \mu)(\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}) \in V,$$

即 $V_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的凸开集, 于是是一个开区间. 考虑

$$g(\lambda) = f(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}), \lambda \in V_{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

当 $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta, \lambda_1, \lambda_2 \in V_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, 由(13.84)知 $|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| \leqslant \epsilon$. 于是由13.10的证明过程知

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| \leqslant \frac{2\epsilon}{\delta} |\lambda_1 - \lambda_2|, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in V_{\mathbf{a},\mathbf{b}}. \tag{13.85}$$

于是由(13.85)知

$$|f(\mathbf{a} + \lambda_1\mathbf{b}) - f(\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b})| \leqslant \frac{2\epsilon}{\delta} |\lambda_1 - \lambda_2| = \frac{2\epsilon}{\delta} ||\mathbf{a} + \lambda_1\mathbf{b} - \mathbf{a} - \lambda_2\mathbf{b}||.$$

显然 $\mathbf{a} + \lambda_1\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ 可以遍历整个 V, 于是我们证明了(13.83).

我们有更强的结果. 留给有兴趣的读者学习.

定理 13.38 (∗)

设 $f(x)$ 是度量空间 (X, d) 上的一致连续的有界函数, 则存在支撑包含于 f 支撑的 Lipschitz 连续函数列 g_n, 使得 g_n 一致收敛到 f.

♡

证明 先考虑 f 非负的情形, 对每个 $\epsilon > 0$, 记

$$\mathscr{U}_n = \left\{ F\text{是}X\text{上非负一致连续函数} : \sup_{x \in X} F(x) \leqslant n\epsilon \right\}, n \in \mathbb{N}.$$

我们归纳证明对每个 $n \in \mathbb{N}, F \in \mathscr{U}_n$, 使得存在 X 上支撑包含于 F 支撑的 Lipschitz 连续函数 g, 有

$$\sup_{x \in X} |F(x) - g(x)| \leqslant 2\epsilon.$$

事实上, 当 $n = 1, 2$, 可取 $g(x) = 0$, 现在假设对 $n \leqslant k, k \geqslant 2$ 时成立, 当 $n = k + 1$ 时, 取 $F \in \mathscr{U}_{k+1}$, 如果 $F \in \mathscr{U}_k$, 则运用归纳假设显然可以找到 g.

如果 $F\notin\mathscr{U}_k$, 当 $\inf\limits_{x\in X}F(x)=0$, 取 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon,\forall d(x,y)<\delta,$$

记非空集合

$$A=\{x\in X:F(x)\leqslant(k-1)\epsilon\},C=\{x\in X:F(x)\geqslant k\epsilon\},$$

注意到对 $x\in A,y\in C$, 有

$$|F(x)-F(y)|\geqslant\epsilon,$$

从而 $d(x,y)\geqslant\delta,d(y,A)\geqslant\delta$, 取 $v(x)=\frac{\epsilon}{\delta}\min\{\delta,d(x,A)\}$, 满足

$$0\leqslant v(x)\leqslant\epsilon,v(x)=0,x\in A,v(x)=\epsilon,x\in C.$$

再利用 $|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y)$, 以及 Lipschitz 连续函数对线性组合和取绝对值封闭, 我们知道 v 是支撑包含于 F 支撑的 Lipschitz 连续函数且 $0\leqslant F-v\leqslant k\epsilon$, $F-v$ 的支撑包含于 F 的支撑. 现在 $F-v\in\mathscr{U}_k$, 运用归纳假设, 存在 X 上支撑包含于 $F-v$ 支撑的 Lipschitz 连续函数 g', 使得

$$\sup_{x\in X}|F(x)-v(x)-g'(x)|\leqslant2\epsilon$$

此时 $g=v+g'$ 为所求.

如果 $F\notin\mathscr{U}_k$, 当 $\inf\limits_{x\in X}F(x)>0$, 此时 F 支撑是 X, 仍然有 $F-\inf\limits_{x\in X}F(x)\in\mathscr{U}_{k+1}$, 则由 $\inf\limits_{x\in X}F(x)=0$ 的证明, 可以知道存在 X 上的 Lipschitz 连续函数 g', 有

$$\sup_{x\in X}\left|F(x)-\inf_{x\in X}F(x)-g'(x)\right|\leqslant2\epsilon.$$

取 $g=g'+\inf\limits_{x\in X}F(x)$ 即为所求.

现在存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $f\in\mathscr{U}_N$, 因此存在 X 上支撑包含于 f 支撑的 Lipschitz 连续函数 g, 有

$$\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\leqslant2\epsilon.$$

这样我们就对非负的情形证明了命题.

对一般情形, 考虑支撑包含于 f 支撑的非负函数

$$f_1(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2},f_2(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2},$$

则 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, 显然 f_1,f_2 是有界且一致连续的, 运用刚才证明的结果, 存在支撑包含于 f_1,f_2 支撑的 Lipschitz 连续函数列 g_n^1,g_n^2, 使得

$$g_n^1\rightrightarrows f_1,g_n^2\rightrightarrows f_2,n\to\infty,$$

现在考虑 $g_n=g_n^1-g_n^2$, 则 g_n 即我们所求.

于是我们有如下重要推论

推论 13.12 (一致连续函数被线性函数控制)

若 f 在 $\mathbb{R}$ 一致连续且 $f(0)=0$, 证明存在 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant1+M|x|,\forall x\in\mathbb{R}.\tag{13.86}$$

♡

笔记 读者应该积累大概的感觉: 一致连续函数的增长速度不超过线性函数, 这能帮助我们快速排除一些非一致连续函数.

证明 在命题13.10中取 $\epsilon=1$ 和 $x_2=0,x_1=x$ 就有 $M>0$ 使得(13.86)成立.

推论 13.13 (一致连续函数的阶的提升)

若 f 在 $[1,+\infty)$ 一致连续, 证明存在 $M>0$ 使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant M,\forall x\geqslant1.$$

♡

证明 在命题13.10中取 $x_2=1, x_1=x, \epsilon=1$ 知存在 $c>0$ 使得

$$|f(x)-f(1)| \leqslant c|x-1|+1, \forall x \geqslant 1.$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(1)}{x}\right|+\frac{|f(1)|}{x} \leqslant c\left|1-\frac{1}{x}\right|+\frac{1+|f(1)|}{x}.$$

注意到

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[c\left|1-\frac{1}{x}\right|+\frac{1+|f(1)|}{x}\right]=c,$$

于是我们知道存在 $M>0$ 使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant M, \forall x \geqslant 1.$$

命题 13.12

证明区间 I 上的函数 f 一致连续的充要条件是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\ell>0$, 使得当 $x_1 \neq x_2 \in I$, 就有:

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\ell \Rightarrow |f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon.$$

证明 必要性: 对任何 $\epsilon>0$, 由命题13.10我们知道存在 $M>0$, 使得不等式(13.81)成立. 又存在 $\delta>0$, 使得对任何 $x, y \in I$, 只要 $|x-y| \leqslant \delta$, 就有(13.82)成立. 于是取 $\ell=\frac{\epsilon}{\delta}+M$, 当 $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\ell$, 我们知道

$$\ell<\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leqslant M+\frac{\epsilon}{|x_1-x_2|} \Rightarrow |x_1-x_2| \leqslant \delta,$$

于是由(13.82)知 $|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$.

充分性: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\ell>0$, 使得当 $x_1 \neq x_2 \in I$, 就有:$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|>\ell$ 可推 $|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$.

取 $\delta \in \left(0, \frac{\epsilon}{\ell}\right)$, 此时如果 $|f(x_2)-f(x_1)| \geqslant \epsilon$ 但 $|x_1-x_2| \leqslant \delta$, 那么我们有

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \geqslant \frac{\epsilon}{\delta}>\ell,$$

即 $|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$, 这就是一个矛盾. 于是我们证明了只要 $|x_1-x_2| \leqslant \delta$ 就有(13.82)成立. 因此 f 一致连续.

命题 13.13 (一致连续函数的拼接)

设 $f \in C[0,+\infty)$, 若存在 $\delta>0$ 使得 f 在 $[\delta,+\infty)$ 一致连续, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

笔记 证明的想法比结论本身重要, 在和本命题叙述形式不同的时候需要快速准确判断出来 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 由 Cantor 定理, 存在 $\eta \in (0,1)$ 使得对 $x, y \in [0, \delta+1], |x-y| \leqslant \eta$, 都有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon. \tag{13.87}$$

由题目条件, 对 $x, y \in [\delta,+\infty), |x-y| \leqslant \eta$, 都有(13.87)成立.

现在对 $x, y \in [0,+\infty), |x-y| \leqslant \eta$, 要么 x, y 落在 $[0, \delta+1]$, 要么落在 $[\delta,+\infty)$, 因此都有(13.87)成立. 于是 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

命题 13.14 (一致连续函数保 Cauchy 列)

给定区间 I 上的函数 f,

1. 若 f 在 I 上一致连续, 则 f 保 Cauchy 列.
2. 若 I 是有界区间且 f 保 Cauchy 列, 则 f 在 I 上一致连续.

注所谓保 Cauchy 列, 即对一切 Cauchy 列 $\{x_n\} \subset I$ 都有 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列.

证明

1. 设 Cauchy 列 $\{x_n\}\subset I$, 于是 $\lim\limits_{n,m\to\infty}[x_n-x_m]=0$. 因为 f 一致连续, 所以
$$\lim_{n,m\to\infty}[f(x_n)-f(x_m)]=0.$$
于是我们证明了 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列.
2. 若 f 不一致连续, 则存在 $\epsilon_0>0, n\in\mathbb{N}$ 和 $x_n,y_n\in I$ 使得
$$|x_n-y_n|\leqslant\frac{1}{n},|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\epsilon_0. \tag{13.88}$$
因为 I 是有界区间所以存在 x_n,y_n 的子序列 x_{n_k},y_{n_k} 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k},\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$ 存在. 由(13.88)知
$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}.$$
于是构造 Cauchy 列
$$x_{n_1},y_{n_1},x_{n_2},y_{n_2},\cdots,x_{n_k},y_{n_k},\cdots.$$
现在我们有 Cauchy 列
$$f(x_{n_1}),f(y_{n_1}),f(x_{n_2}),f(y_{n_2}),\cdots,f(x_{n_k}),f(y_{n_k}),\cdots.$$
现在 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|=0$ 和(13.88)矛盾! 因此我们证明了 f 一致连续.

定义 13.10 (连续模)

设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数, 证明: 存在一致连续递增的函数 $w:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 使得 $w(0)=0$ 且对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有
$$|f(x)-f(y)|\leqslant w(|x-y|).$$
♣

证明 记连续模
$$w_f(t)\triangleq\sup\{|f(x)-f(y)|:|x-y|\leqslant t\},t\in[0,+\infty),$$
则由定义显然有 $w_f(0)=0, w_f$ 递增且
$$|f(x)-f(y)|\leqslant w_f(|x-y|).$$
对任何 $t,s\geqslant0,\epsilon>0$, 存在 $x_\epsilon,y_\epsilon\in\mathbb{R}$ 使得
$$|x_\epsilon-y_\epsilon|\leqslant t+s, w_f(t+s)\leqslant\epsilon+|f(x_\epsilon)-f(y_\epsilon)|.$$
设 $z_\epsilon=\frac{s}{t+s}x_\epsilon+\frac{t}{t+s}y_\epsilon$, 于是
$$x_\epsilon-z_\epsilon=\frac{t}{t+s}(x_\epsilon-y_\epsilon),z_\epsilon-y_\epsilon=\frac{s}{t+s}(x_\epsilon-y_\epsilon).$$
现在由 $|x_\epsilon-z_\epsilon|\leqslant t,|z_\epsilon-y_\epsilon|\leqslant s$ 得
$$w_f(t+s)\leqslant\epsilon+|f(x_\epsilon)-f(z_\epsilon)|+|f(z_\epsilon)-f(y_\epsilon)|\leqslant\epsilon+w_f(t)+w_f(s).$$
由 ϵ 任意性得
$$w_f(t+s)\leqslant w_f(t)+w_f(s),\forall t,s\geqslant0. \tag{13.89}$$
由 f 一致连续性, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\epsilon,\forall|x-y|\leqslant\delta.$$
于是
$$0=w_f(0)\leqslant w_f(\delta)\leqslant\epsilon.$$
从而对 $s\in[0,\delta]$, 由(13.89)得
$$|w_f(t+s)-w_f(t)|\leqslant w_f(s)\leqslant w_f(\delta)\leqslant\epsilon,\forall t\geqslant0.$$
于是 w_f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

例题 13.14 设 $f\in C[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 由函数极限的 Cauchy 收敛准则, 我们知道存在 $A>0$, 使得对 $x_1,x_2\geqslant A$, 都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon. \tag{13.90}$$

在 $[0,A+1]$ 上用 Cantor 定理[22], 我们知道存在 $\delta\in(0,1)$, 使得只要 $x_1,x_2\in[0,A+1]$ 且 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$, 就有(13.90)成立. 现在当 $x_1,x_2\in[0,+\infty),|x_1-x_2|\leqslant\delta$, 我们知道要么 x_1,x_2 都落在 $[0,A+1]$, 要么都落在 $[A,+\infty)$, 于是不等式(13.90)成立. 我们证明了 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

我们来看一个更强的版本.

例题 13.15 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $g\in C[0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0. \tag{13.91}$$

证明 g 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 因为(13.91)和 f 一致连续我们知道存在 $A>0,\delta\in(0,1)$, 使得对任何 $x,y\in[0,+\infty),|x-y|\leqslant\delta$ 都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}. \tag{13.92}$$

对任何 $x\geqslant A$, 有

$$|f(x)-g(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}. \tag{13.93}$$

在 $[0,A+1]$ 上用 Cantor 定理, 我们知道存在 $\eta\in(0,\delta)$, 使得只要 $x,y\in[0,A+1]$ 且 $|x-y|\leqslant\eta$, 就有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}. \tag{13.94}$$

于是对 $x,y\in[0,+\infty),|x-y|\leqslant\eta$, 我们知道要么 x,y 都落在 $[0,A+1]$, 要么都落在 $[A,+\infty)$. 对于前者, 我们知道有不等式(13.94)成立. 对于后者, 运用(13.92)和(13.93)我们知道

$$|g(x)-g(y)|\leqslant|g(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-g(y)|\leqslant\epsilon,$$

于是我们知道 g 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

我们来看一个经典题, 但我们的条件削得相当弱.

例题 13.16 设 f 在 $[1,+\infty)$ 一致连续. 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 也在 $[1,+\infty)$ 一致连续.

证明 由推论13.13我们知道

$$M=\sup_{x\geqslant1}\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\infty.$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right|=\left|\frac{yf(x)-xf(y)}{xy}\right|\leqslant\frac{|f(x)-f(y)|}{x}+\frac{|y-x|}{yx}|f(y)|\leqslant|f(x)-f(y)|+M|y-x|. \tag{13.95}$$

现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-y|\leqslant\delta$, 我们有 $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}$ 现在取

$$\delta'=\min\left\{\delta,\frac{\epsilon}{2M}\right\}.$$

当 $|x-y|\leqslant\delta'$, 我们运用不等式(13.95)有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

因此我们证明了 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续.

例题 13.17 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且对任何 $x\geqslant0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 并说明如果去掉一致连续则结论不对.

笔记 证明的想法即把点拉回到 $[0,1]$ 并用一致连续来解决.

[22]每年都有无数人问这个点, 千万别去读周民强那段文字, 没有意义. 这里之所以考虑 $[0,A+1]$ 而不是 $[0,A]$, 是因为如果 $x_1\in[0,A],x_2\in[A,+\infty)$, 则没有不等式可以用. 但是用 $[0,A+1]$, 就会变成要么 x_1,x_2 都落在 $[0,A+1]$, 要么都落在 $[A,+\infty)$.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $|x-y|\leqslant\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}. \tag{13.96}$$

对 $m>\frac{1}{\delta}$, 我们考虑 $[0,1)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m})$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{i}{m}+n\right)=0, i=0,1,\cdots,m-1,$$

我们知道存在 $K\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|f\left(\frac{i}{m}+n\right)\right|<\frac{\epsilon}{2}, i=1,2,\cdots,m-1, n=K,K+1,\cdots. \tag{13.97}$$

对 $x\geqslant K+1$, 存在自然数 $N\geqslant K$ 和 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $x-N\in[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m})$. 此时有 $\left|f(x)-f\left(\frac{i-1}{m}+N\right)\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2}$. 结合不等式(13.96)和不等式(13.97)就有

$$|f(x)|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{i-1}{m}+N\right)\right|+\left|f\left(\frac{i-1}{m}+N\right)\right|\leqslant\epsilon,$$

我们证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

为说明去掉一致连续之后结论不对, 我们考虑

$$g(x)\triangleq\begin{cases}1-\left|n^2\left(x-n+\frac{1}{n}\right)\right|, & \left|x-\left(n-\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

注意到 $g\in C(\mathbb{R})$ 且 $g\left(n-\frac{1}{n}\right)=1$. 此外对任何 $x\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}$, 对每一个充分大的 $m\in\mathbb{N}$, 我们断言

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left|x+m-\left(n-\frac{1}{n}\right)\right|\geqslant\frac{1}{n^2}. \tag{13.98}$$

事实上, 如果(13.98)不成立, 则存在 $n_m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|x+m-\left(n_m-\frac{1}{n_m}\right)\right|<\frac{1}{n_m^2}.$$

显然 $\lim\limits_{m\to\infty}n_m=+\infty$, 故

$$\lim_{m\to\infty}|x+m-n_m|<\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{n_m^2}+\frac{1}{n_m}\right)=0.$$

但是显然 $\{x+m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 到整数会有一个正距离, 因此(13.98)成立. 至此我们证明了 $\lim\limits_{m\to\infty}g(x+m)=0$, 从而给出了一个去掉一致连续后例13.17不成立的反例.

例题 13.18 设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 证明 f 在 $[a,+\infty)$ 不一致连续.

证明 若 f 在 $[a,+\infty)$ 一致连续, 则由一致连续函数被线性函数控制13.13知 $|f(x)|\leqslant c|x|+d$. 由上下极限的洛必达法则13.11得

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}f'(x)\leqslant\underline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{x}\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{x}<\infty,$$

这就是一个矛盾! f 在 $[a,+\infty)$ 不一致连续.

✍ **练习 13.1** 设 f 在 $\mathbb{R}$ 一致连续, 证明下述条件等价.

1. 对任何 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数 g, fg 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续,
2. $|x|f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明 我们只需设 $|x|f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续来证对任何 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数 g, fg 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续,

由命题13.13, 我们只需证明 fg 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续[23] 事实上, 因为推论13.13, 我们知道

$$\sup_{y\geqslant1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|<\infty,\sup_{x\geqslant1}|f(x)|<\infty.$$

[23] $(-\infty,-1]$ 上的一致连续性质类似.

于是

$$\begin{aligned}
|f(y)g(y)-f(x)g(x)| &\leqslant |y||f(y)-f(x)|\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|g(y)-g(x)|\cdot|f(x)| \\
&\leqslant |yf(y)-yf(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|g(y)-g(x)|\cdot\sup_{|x|\geqslant 1}|f(x)| \\
&\leqslant |yf(y)-xf(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|x-y||f(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|g(y)-g(x)|\cdot\sup_{|x|\geqslant 1}|f(x)| \\
&= ||y|f(y)-|x|f(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|x-y||f(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|g(y)-g(x)|\cdot\sup_{|x|\geqslant 1}|f(x)| \\
&\leqslant ||y|f(y)-|x|f(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|x-y|\sup_{x\geqslant 1}|f(x)|\sup_{y\geqslant 1}\left|\frac{g(y)}{y}\right|+|g(y)-g(x)|\cdot\sup_{|x|\geqslant 1}|f(x)|,
\end{aligned}$$

类似例题13.16容易知道 fg 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 我们完成了证明.

命题 13.15 (连续周期函数必然一致连续)

设 f 是周期 $T>0$ 的 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

♠

证明 由 Cantor 定理, f 在 $[0,2T]$ 一致连续, 所以对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,T)$ 使得对 $|x_1-x_2|<\delta, x_1,x_2\in[0,2T]$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\epsilon.$$

现在对 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $0<x_2-x_1<\delta$. 注意到

$$x_1-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\in[0,T), x_2-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\in[0,2T), |x_1-x_2|<\delta,$$

我们有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|f\left(x_1-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\right)-f\left(x_2-\left\lfloor\frac{x_1}{T}\right\rfloor T\right)\right|\leqslant\epsilon,$$

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

13.5.2 Dini 定理

定理 13.39 (Dini 定理)

设 X 为拓扑空间, 若 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C(X), f\in C(X)$ 且对每一个 $x\in X$, 都有 $f_n(x)$ 有同样的单调性并成立

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x). \tag{13.99}$$

证明, 对每一个紧集 $K\subset X$, 都有(13.99)关于 $x\in K$ 一致.

♡

证明 基础不好的同学可以视 $X=K=[a,b]$. 本定理结论可以直接使用.

证明 f_n-f 看成整体可以不妨设 $f=0$. 不妨设 f_n 递减的, 固定紧集 $K\subset X,\epsilon>0$, 考虑相对 K 的子空间拓扑的开集列

$$K_n\triangleq\{x\in K: f_n(x)<\epsilon\}, n\in\mathbb{N}.$$

注意到 $K=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$, 由有限覆盖性, 我们知道存在 $n_1,n_2,\cdots,n_s\in\mathbb{N}$, 使得 $K=\bigcup\limits_{k=1}^{s}K_{n_k}$. $\{f_n\}$ 的单调性表明存在一个 $n_0\in\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$ 使得 $K=K_{n_0}$. 因此结合 $\{f_n\}$ 的单调性表明

$$|f_n(x)|<\epsilon, \forall n\geqslant n_0,$$

这就证明了(13.99)关于 $x\in K$ 一致.

定理 13.40 (Dini 定理函数单调版本)

设 $f_n \in C[a,b], n=1,2,\cdots$ 都是单调函数[a]. 若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in C[a,b]. \tag{13.100}$$

则(13.100)中的极限是一致的.

[a]可以不同的 n 有不同的单调性.

♡

证明 对任何 $\epsilon>0$, 由一致连续性, 取 $\delta>0$ 使得

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \epsilon, \forall |y-x| \leqslant \delta, x, y \in [a,b]. \tag{13.101}$$

现在设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ 使得 $x_i-x_{i-1}\leqslant\delta, i=1,2,\cdots,m$. 然后取 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(x_i)-f(x_i)| \leqslant \epsilon, \forall i=0,1,\cdots,m, n\geqslant N. \tag{13.102}$$

于是对任何 $x\in[a,b]$, 当 $n\geqslant N$, 我们知道存在 $i=1,2,\cdots,m$ 使得 $x\in[x_{i-1},x_i]$, 则利用(13.101)和(13.102)有

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &\leqslant |f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)| \\
&\leqslant |f_n(x_{i-1})-f_n(x_i)|+\epsilon+\epsilon \\
&\leqslant |f_n(x_{i-1})-f(x_{i-1})|+|f(x_{i-1})-f(x_i)|+|f(x_i)-f_n(x_i)|+\epsilon+\epsilon \\
&\leqslant \epsilon+\epsilon+\epsilon+\epsilon+\epsilon=5\epsilon,
\end{aligned}$$

这里第二个不等号的第一个式子用到了单调性. 于是我们完成了证明.

定理 13.41 (无穷区间的 Dini 定理)

设 $f_n\in C[a,+\infty)$ 且对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 f_n 非负递减.

若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\in C[a,b], \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

则关于 $x\in[a,+\infty)$ 有 $f_n\rightrightarrows f$.

♡

证明 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $X\in(a,+\infty)$ 使得

$$|f(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}, \forall x\geqslant X.$$

存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(X)-f(X)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}, \forall n\geqslant N_1.$$

由函数单调版本的 Dini 定理13.40, 我们知道在 $f_n\rightrightarrows f$ 在任何有界闭区间上成立. 于是存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\epsilon, \forall n\geqslant N_2, x\in[a,X].$$

现在当 $n\geqslant\max\{N_1,N_2\}$, 对 $x\geqslant X$ 得

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &\leqslant f_n(x)+|f(x)| \leqslant f_n(X)+|f(x)| \\
&\leqslant |f_n(X)-f(X)|+|f(X)|+|f(x)|\leqslant\epsilon.
\end{aligned}$$

对 $x\in[a,X]$ 得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\epsilon.$$

现在关于 $x\in[a,+\infty)$ 有 $f_n\rightrightarrows f$.

13.5.3 更弱定义的导数

我们先来考虑只有单侧导数存在时的性质, 仅仅以右可导为例, 左可导是类似的.

定理 13.42 (最弱递增条件)

1. 设 $f\in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0\in(a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$
则 f 在 $[a,b]$ 递增.
2. 设 $f\in C[a,b]$ 满足对任何 $x_0\in(a,b)$ 都有
$$\overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0, \tag{13.103}$$
则 f 在 $[a,b]$ 严格递增.
3. 设 $f\in C(a,b)$ 满足对任何 $x\in(a,b)$, 都有
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}>0.$$
证明 f 在 (a,b) 严格递增.
4. 设 $f\in C(a,b)$ 满足对任何 $x\in(a,b)$, 都有
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\geqslant 0.$$
证明 f 在 (a,b) 递增.

♡

注第 2, 4 问的目的是展示如何从递增过渡到严格递增或如何从严格递增过渡到递增.

证明

1. 只需证明 $f(b)\geqslant f(a)$. 由极限保号性, 我们只需证明对充分小的 $\epsilon>0$, 有 $f(b)\geqslant f(a+\epsilon)$.
考虑
$$F(x)=f(x)-f(a+\epsilon)-\frac{f(b)-f(a+\epsilon)}{b-a-\epsilon}(x-a-\epsilon),$$
则
$$F(b)=F(a+\epsilon)=0,\ \overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\overline{\lim_{x\to x_0^+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(b)-f(a+\epsilon)}{b-a-\epsilon},\forall x_0\in[a+\epsilon,b).$$
于是设 F 在 $[a+\epsilon,b]$ 最大值点为 $c\in[a+\epsilon,b)$, 则
$$0\geqslant\overline{\lim_{x\to c^+}}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\overline{\lim_{x\to c^+}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\frac{f(b)-f(a+\epsilon)}{b-a-\epsilon}\geqslant-\frac{f(b)-f(a+\epsilon)}{b-a-\epsilon},$$
故 $f(b)\geqslant f(a+\epsilon)$. 证毕!
2. 若 f 在 $[a,b]$ 不严格递增, 则存在 $[c,d]\subset[a,b]$ 使得 $f(d)=f(c)$, 不妨设 $[c,d]\subset(a,b)$, 否则抽 $[c,d]$ 一个子区间即可. 注意到由 1 知 f 在 $[c,d]$ 递增, 从而只能为常数, 这显然和(13.103)矛盾! 故我们证明了则 f 在 $[a,b]$ 严格递增.
3. 对 $[c,d]\subset(a,b)$, 我们断言存在 $x_1\in(c,d)$ 使得
$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geqslant\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}. \tag{13.104}$$
现在我们用 $g(x)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c)-f(x)$ 代替 f. 于是考虑 $g\in C[c,d],g(d)=g(c)=0$, 此时要证明(13.104), 就只需证明存在 $x_1\in(c,d)$ 使得
$$\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{g(x_1+h)-g(x_1-h)}{2h}\geqslant 0. \tag{13.105}$$
若 $g\equiv 0$, 已经得到了不等式(13.105).
若 $t\in(a,b)$ 是 g 的最大值点使得 $g(t)>0$. 取 $k\in(0,g(t))$, 则构造非空有界集
$$U=\{x\in[c,t]:g(x)>k\}.$$

记 $x_1=\inf U$, 则存在 $t_n\in U, n\in\mathbb{N}$ 使得

$$t_n\geqslant x_1,\ \lim_{n\to\infty}t_n=x_1.$$

注意 $x_1\neq c$, 若 $g(x_1)>k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $g>k$, 这和 x_1 是 inf 矛盾! 故我们只有 $x_1\notin U$ 且 $g(x_1)=k$. 注意到

$$\frac{g(x_1+t_n-x_1)-g(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geqslant\frac{k-k}{2(t_n-k_1)}=0,$$

这就给出了(13.105).

若 f 有负的最小值 $g(t)<0$. 取 $k\in(g(c),0)$, 构造非空有界集

$$V=\{x\in[t,d]:g(x)<k\}.$$

并取 $x_1=\sup V$, 同样的 $g(x_1)=k$ 且 $x_1\neq d$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是由

$$\frac{g(x_1+x_1-s_n)-g(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geqslant\frac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0$$

知(13.105)成立.

现在由不等式(13.104)和题目条件就证明了 $f(d)>f(c)$, 从而 f 严格递增.

4. 注意到 $f(x)+\epsilon x,\epsilon>0$ 满足第 3 问要求, 因此

$$f(y)+\epsilon y>f(x)+\epsilon x,\forall b>y>x>a,\epsilon>0.$$

让 $\epsilon\to0^+$, 我们有 $f(y)\geqslant f(x)$, 这就证明了 f 在 (a,b) 递增.

推论 13.14 (右可导函数非负则递增)

设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且在开区间 (a,b) 右可导. 若 $f'_+(x)\geqslant0,\forall x\in(a,b)$, 证明 f 在 $[a,b]$ 递增.

♡

定义 13.11 (Schwartz 导数)

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, 我们称 f 在 $x_0\in(a,b)$ Schwartz 可导, 如果存在极限

$$f^S(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.\tag{13.106}$$

如果 f 在 (a,b) 处处 Schwartz 可导, 则称 f 在 (a,b) Schwartz 可导.

♣

笔记 显然 f 在 x_0 可导则必然在 x_0 Schwartz 可导且 $f'(x_0)=f^S(x_0)$, 但反之不一定成立.

定理 13.43 (Schwartz 导数的拉格朗日中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) Schwartz 可导, 证明存在 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得

$$f^S(x_1)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f^S(x_2).\tag{13.107}$$

♡

笔记 本定理是此类问题的核心定理. 其余结果都是本定理的平凡推论.

证明 和证明拉格朗日中值定理一样, 我们只需证明罗尔中值定理的情况即可. 即不妨设 $f(a)=f(b)=0$, 否则用 $f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f 即可.

若 $f\equiv0$, 则命题是显然的. 若 f 有正的最大值, 则设 $c\in(a,b)$ 是 f 的最大值点使得 $f(c)>0$, 取 $k\in(0,f(c))$, 构造非空有界集

$$U=\{x\in[a,c]:f(x)>k\}.$$

于是记 $x_1=\inf U$, 就有 $t_n\in U$, 使得

$$t_n\geqslant x_1,\ \lim_{n\to\infty}t_n=x_1.$$

注意 $x_1\neq a$ 且若 $f(x_1)>k$, 则且由函数连续性知 x_1 左侧仍有 $f>k$, 这和 x_1 是 inf 矛盾! 故我们只有 $x_1\notin U$

且 $f(x_1)=k$.

现在

$$f^S(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1+t_n-x_1)-f(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{k-k}{2(t_n-k_1)}=0.$$

若 f 有负的最小值 $f(c)<0$. 取 $k\in(f(c),0)$, 构造非空有界集

$$V=\{x\in[c,b]:f(x)<k\}.$$

并取 $x_1=\sup V$, 同样的 $f(x_1)=k$ 且 $x_1\neq b$. 存在 $s_n\in V$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_1$. 于是

$$f^S(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1+x_1-s_n)-f(x_1-(x_1-s_n))}{2(x_1-s_n)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{k-k}{2(x_1-s_n)}=0.$$

考虑 $f(a+b-x)$ 可得 x_2, 这就完成了定理的证明.

命题 13.16

设 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) Schwartz 可导, 若 $f^S(x)\geqslant 0,\forall x\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 递增.

证明 对 $[c,d]\subset[a,b]$, 由定理13.43知存在 $\theta\in(c,d)$ 使得

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geqslant f^S(\theta)\geqslant 0,$$

故

$$f(d)\geqslant f(c).$$

这就完成了证明.

命题 13.17 (Schwartz 导数连续则原函数可导)

若 f 在 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 有连续的 Schwartz 导数, 则 f 在 (a,b) 可微且

$$f'(x)=f^S(x),\forall x\in(a,b).$$

证明 由定理13.43, 我们知道

$$f^S(\theta_2)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant f^S(\theta_1),$$

且 θ_1,θ_2 基于 x_1,x_2 之间.

让 $x_2\to x_1$, 由 Schwartz 导数连续性和夹逼准则即可得

$$f'(x_1)=f^S(x_1).$$

这就完成了证明.

命题 13.18 (右导数的拉格朗日中值定理)

设 f 在 (a,b) 右可导且 $C[a,b]$ 上连续, 证明存在 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得

$$f'_+(x_2)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant f'_+(x_1).\tag{13.108}$$

笔记 类似的, 我们有左导数的版本.

证明 和定理13.43证明一样, 我们可以不妨设 $f(b)=f(a)=0$. 如果结论不对, 假设 $f'_+(x)\geqslant 0$ 恒成立. 于是由定理13.42我们知道 f 递增, 故 $f\equiv 0$, 因此此时仍然有(13.108)成立, 矛盾! 这就完成了证明.

命题 13.19 (右导数连续则原函数可导)

设 f 在 (a,b) 右可导且 f'_+ 在 (a,b) 连续, 证明 f 在 (a,b) 可导且 $f'(x)=f'_+(x),\forall x\in(a,b)$.

笔记 类似的, 我们有左导数的版本.

证明 和命题13.17证明完全一致.

例题 13.19 设 $f\in C(a,b)$ 且存在极限:

$$f^{[2]}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}. \tag{13.109}$$

1. 若 f 在 $x_0\in(a,b)$ 二阶可导, 则 $f''(x_0)=f^{[2]}(x_0)$.
2. 若 $f^{[2]}(x)<0,\forall x\in(a,b)$, 证明 f 为 (a,b) 上的严格凹函数.
3. 若 $f^{[2]}(x)<0,\forall x\in(a,b)$ 且 f 在 (a,b) 是有下界函数, 证明 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在.
4. 若 $f^{[2]}(x)=0,\forall x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 为线性函数.

证明

1. 因为 f 在 $x_0\in(a,b)$ 二阶可导, 所以 f 在 x_0 邻域一阶可导, 所以
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)}{4h^2}&\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0-2h)}{8h}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0)}{8h}+\lim_{h\to 0^+}\frac{2f'(x_0)-2f'(x_0-2h)}{8h}\\&=\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}=f''(x_0).\end{aligned}$$
2. 对任何 $x\in(a,b)$, 存在充分小的 $\eta>0$, 只要 $h\in(0,\eta)$, 就有
$$f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)<0,$$
即
$$\frac{f(x+2h)+f(x-2h)}{2}<f(x).$$
现在对 $x\in(a,b),y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\delta>0$, 取 $0<h<\min\left\{\delta,\frac{2\eta}{|y|}\right\}$, 就有
$$f(x)>\frac{f(x+hy)+f(x-hy)}{2}.$$
由定理13.7知 f 是 (a,b) 上的严格上凸函数.
3. 由命题13.3和第二问我们知道 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在.
4. **Method 1** 由第二问我们知道 f 在 (a,b) 即凹又凸. 则由例12.13知 f 是线性函数.

   Method 2 不失一般性, 假设 $f\in C[a,b]$, 否则内闭的考虑即可. 标准的摄动法, 保持二阶导且不破坏 0 边界条件的最好的摄动函数是 $(x-a)(x-b)$.

   我们用 $f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 代替 f, 从而不妨设 $f(a)=f(b)=0$. 若某个 $x_0\in(a,b)$ 有 $f(x_0)>0$, 考虑
$$f_\epsilon(x)=f(x)+\epsilon(x-a)(x-b),$$
这里 $\epsilon>0$, 使得
$$f(x_0)+\epsilon(x_0-a)(x_0-b)>0.$$
不妨设 x_0 是 f_ϵ 的最大值点, 现在
$$f_\epsilon(a)=f_\epsilon(b)=0,f_\epsilon(x_0)=\max_{x\in[a,b]}f_\epsilon(x),f_\epsilon^{[2]}(x_0)=2\epsilon>0.$$
但是
$$f_\epsilon^{[2]}(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f_\epsilon(x_0+2h)-2f_\epsilon(x_0)+f_\epsilon(x_0-2h)}{4h^2}\leqslant 0.$$
这就是一个矛盾! 于是我们证明了 $f\leqslant 0$. 考虑 $-f$ 可得 $f\equiv 0$. 证毕!

我们还有如下类似题.

引理 13.4 (♡)

任何 $\mathbb{R}$ 上的函数都能唯一的分解成奇函数和偶函数之和. ♡

证明 注意到设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, f_1 偶, f_2 奇, 则 $f(-x)=f_1(x)-f_2(x)$. 解方程得

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}. \tag{13.110}$$

这就完成了证明.

例题 13.20 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$\lim_{h\to+\infty}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]=0, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{13.111}$$

证明 f 是线性函数.

证明 有定理13.4和其表达式(13.110)我们知道只需对 f 为偶函数或者奇函数证明即可.

当 f 为偶函数, 注意运用(13.111)得

$$\lim_{h\to+\infty}[f(h)-2f(0)+f(-h)]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=f(0). \tag{13.112}$$

继续运用(13.111)和 $f(x-h)=f(h-x)$ 得

$$\lim_{h\to+\infty}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]=2f(0)-2f(x).$$

利用极限的唯一性和(13.112)我们知道 $f(x)\equiv f(0)$.

当 f 为奇函数, 对任何 $x>0$, 注意运用(13.111), 我们知道

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x+nx)-2f(x)+f(x-nx)]=0,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}[f((n+1)x)-f((n-1)x)]=2f(x). \tag{13.113}$$

运用例题8.13和(13.113), 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n}=f(x). \tag{13.114}$$

由于 f 奇函数, 因此(13.114)对 $x\in\mathbb{R}$ 都成立. 接下来我们将利用 Cauchy 方程技巧12.5.

注意到利用(13.114), 我们对所有 $m\in\mathbb{N}$ 和 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(mx)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(nmx)}{n}=m\lim_{n\to\infty}\frac{f(nmx)}{nm}=mf(x).$$

由奇函数知上式对所有 $m\in\mathbb{Z}$ 都成立. 现在对任何有理数 $\frac{p}{q}, q\neq0$, 我们有

$$qf\left(\frac{p}{q}x\right)=f(px)=pf(x)\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}x\right)=\frac{p}{q}f(x),$$

然后由 f 连续性和无理数可以用有理数逼近知

$$f(rx)=rf(x), \forall r\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}.$$

特别的我们知道 $f(x)\equiv f(1)x$. 这就完成了证明.

来看大学数学的一个征解题.

例题 13.21 设 $f\in C[a,b]$ 满足对每一个 $x\in(a,b)$ 都有

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h^3}\int_{-h}^{h}tf(x+t)\,\mathrm{d}t\geqslant0. \tag{13.115}$$

证明 f 在 $[a,b]$ 递增.

笔记 类似的, 当(13.115)不等号反向且把下极限改为上极限, 则 f 在 $[a,b]$ 递减. 于是若(13.115)不等号改为等号, 下极限改为极限, 则 f 在 $[a,b]$ 为常数. 容易从证明看到, 当(13.115)不等号改为严格不等号, 则 f 单调性改为严格单调性.

证明 记 $F(x)\triangleq\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y, x\in[a,b]$, 我们知道对每一个 $x\in(a,b)$, 当 h 充分小, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^3}\int_{-h}^{h}tf(x+t)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{h^3}\int_0^h\{t[f(x+t)-f(x-t)]\}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{h^3}\int_0^h t\mathrm{d}[F(x+t)+F(x-t)]\\&=\frac{F(x+h)+F(x-h)}{h^2}-\frac{1}{h^3}\int_0^h[F(x+t)+F(x-t)]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

定义

$$F_\epsilon(x)\triangleq F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)+\epsilon(x-a)(x-b),\epsilon>0,$$

我们有 $F_\epsilon(a)=F_\epsilon(b)=0$ 且利用(13.115)得

$$\varliminf_{h\to0^+}\left(\frac{F_\epsilon(x+h)+F_\epsilon(x-h)}{h^2}-\frac{1}{h^3}\int_0^h[F_\epsilon(x+t)+F_\epsilon(x-t)]\,\mathrm{d}t\right)\geqslant\frac{4}{3}\epsilon>0.\tag{13.116}$$

若 F_ϵ 在 (a,b) 达到在 $[a,b]$ 的正的最大值, 则设 $c\in(a,b)$ 是 F_ϵ 在 $[a,b]$ 的最大值点. 定义 $u(t)=F_\epsilon(c+t)+F_\epsilon(c-t)$ 并取 $\delta\triangleq\min\{c-a,b-c\}>0$. 注意到 u 在 $t=0$ 取最大值, 于是可取 $h_1\in(0,\delta]$ 使得 h_1 是 u 在 $(0,\delta]$ 最小值点. 假设 h_k 已取得, 取 $h_{k+1}\in\left(0,\frac{1}{2}h_k\right]$ 使得 h_{k+1} 是 u 在 $\left(0,\frac{1}{2}h_k\right]$ 的最小值点. 显然 h_n 递减到 0. 现在 h_k 是 u 在 $(0,h_k]$ 的最小值点, 于是结合(13.116)得

$$0\geqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{h_n^3}\int_0^{h_n}[u(h_n)-u(t)]\,\mathrm{d}t\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u(h_n)}{h_n^2}-\frac{1}{h_n^3}\int_0^{h_n}u(t)\,\mathrm{d}t\right)\geqslant\frac{4}{3}\epsilon>0,$$

这就是一个矛盾!, 至此我们证明了

$$F_\epsilon(x)\leqslant0,\forall x\in[a,b],\epsilon>0.$$

让 $\epsilon\to0^+$ 得

$$F(x)\leqslant F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a),\forall x\in[a,b].$$

现在对一般的 $[s,t]\subset[a,b]$, 类似的在 $[s,t]$ 上割线不等式也成立, 因此由凹凸性等价定义我们知道 F 在 $[a,b]$ 是下凸函数, 所以 $f=F'$ 递增[24].

例题 13.22 设 f 在 (a,b) 处处右可导, 证明: 存在一个区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ 使得 f 在 (α,β) 连续.

证明 若不然, 对任何 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, f 在 (α,β) 都有不连续点. 于是任意取定一个 f 不连续点 $x_1\in(a,b)$, 存在 $\epsilon_1\in(0,x_1-a),y_1\in\left(x_1-\frac{\epsilon_1}{1},x_1\right)$ 有 $|f(y_1)-f(x_1)|>\epsilon_1$, 从而

$$\frac{|f(y_1)-f(x_1)|}{|y_1-x_1|}>1.$$

由 f 在 y_1 右连续我们有 $z_1\in(y_1,x_1)$ 使得

$$\frac{|f(y)-f(x_1)|}{|y-x_1|}>1,\forall y\in[y_1,z_1].$$

取 $x_2\in(y_1,z_1)$ 是 f 不连续点, 于是存在 $\epsilon_2\in(0,x_2-y_1),y_2\in\left(x_2-\frac{\epsilon_2}{2},x_2\right)$ 使得 $|f(y_2)-f(x_2)|>\epsilon_2$, 从而

$$\frac{|f(y_2)-f(x_2)|}{|y_2-x_2|}>2.$$

继续由 f 在 y_2 右连续性, 我们得 $z_2\in(y_2,x_2)$ 使得

$$\frac{|f(y)-f(x_2)|}{|y-x_2|}>2,\forall y\in[y_2,z_2].$$

如此依次下去, 可得

$$y_n<y_{n+1}<z_{n+1}<x_{n+1}<z_n<x_n,n=1,2,\cdots$$

[24] 见非数学类函数性态分析习题41..

满足

$$0<|x_n-y_n|<\frac{\epsilon_n}{n}<\frac{b-a}{n},n=1,2,\cdots\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0,$$

以及

$$\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|>n,n=1,2,\cdots.$$

由闭区间套定理知存在 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[y_n,z_n]$. 显然

$$y_n\leqslant\xi\leqslant z_n<x_n,n=1,2,\cdots,\lim_{n\to\infty}x_n=\xi,$$

于是

$$\lim_{x\to\xi^+}\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x_n)-f(\xi)|}{|x_n-\xi|}=+\infty,$$

这就和 f 在 ξ 右可导而矛盾! 因此我们完成了证明.

引理 13.5 (数列内插)

给定实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 设

$$\sup_{n\geqslant0}|x_n|=M,\sup_{n\geqslant0}|x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n|=K,$$

我们断言

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant2\sqrt{MK},\forall n\geqslant0.$$

♡

证明

事实上当 M 或者 K 为 0 时命题显然成立 ($K=0$ 意味着 x_n 是有界的等差数列, 必然常数列), 因此不妨假设 $M,K>0$. 注意到对 $n\geqslant2$, 我们有

$$\begin{aligned}M\geqslant x_n&=x_0+\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\\&=x_0+(x_1-x_0)n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}(x_{j+1}-2x_j+x_{j-1})\\&\geqslant-M+(x_1-x_0)n-\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}K\\&=-M+(x_1-x_0)n-\frac{(n-1)n}{2}K,\end{aligned}$$

因此容易看见

$$x_1-x_0\leqslant\frac{2M}{n}+\frac{n-1}{2}K,\forall n\geqslant1.$$

另外一方面对 $n\geqslant2$, 我们有

$$\begin{aligned}-M\leqslant x_n&=x_0+\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\\&=x_0+(x_1-x_0)n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}(x_{j+1}-2x_j+x_{j-1})\\&\leqslant M+(x_1-x_0)n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}K\\&=M+(x_1-x_0)n+\frac{n(n-1)}{2}K,\end{aligned}$$

因此容易看见

$$-\frac{2M}{n}-\frac{n-1}{2}K\leqslant x_1-x_0,\forall n\geqslant1.$$

所以

$$|x_1 - x_0| \leqslant \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K, \forall n \geqslant 1.$$

注意到

$$\frac{2M}{n} + \frac{n}{2}K - \frac{K}{2} - 2\sqrt{MK} = \frac{Kn^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)n + 4M}{2n}.$$

以及 $Kx^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)x + 4M$ 的两个零点的差为 $\sqrt{1 + 8\sqrt{\frac{M}{K}}} > 1$, 二次函数对称轴在 $x > 0$ 且 $K0^2 - \left(4\sqrt{KM} + K\right)0 + 4M > 0$, 因此必然存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $|x_1 - x_0| \leqslant \frac{2M}{n} + \frac{n-1}{2}K \leqslant 2\sqrt{MK}$, 类似的可以证明

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant 2\sqrt{MK}, \forall n \geqslant 0.$$

例题 13.23 若有界函数 f 满足

$$\lim_{h\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0,$$

证明 f 一致连续.

证明

对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}, h \in [-\delta, \delta].$$

现在对固定的 $h \in [-\delta, \delta]$, 考虑 $\{f(x+nh)\}_{n=0}^{\infty}$, 我们有

$$\sup_{n\geqslant 0}|f(x+nh)| \leqslant \sup|f|, \sup_{n\geqslant 0}|f(x+(n+2)h) - 2f(x+(n+1)h) + f(x+nh)| \leqslant \epsilon.$$

由前面的数列内插13.5, 我们有

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant 2\sqrt{\epsilon \cdot \sup|f|}, \forall x \in \mathbb{R}, h \in [-\delta, \delta],$$

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

定义 13.12 (振幅函数的定义)

设 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是有界函数, 我们定义函数 f 的振幅函数为

$$w_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+}\sup\left\{|f(y) - f(z)| : y, z \in (x-\delta, x+\delta)\bigcap[a,b]\right\}, x \in [a,b].$$

♣

笔记 因为 f 有界, 所以

$$0 \leqslant \sup\left\{|f(y) - f(z)| : y, z \in (x-\delta, x+\delta)\bigcap[a,b]\right\} < +\infty$$

且单调递减. 因此 w_f 是 $[a,b]$ 上良定义的非负函数.

定理 13.44 (用振幅函数刻画连续性)

设 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是有界函数, 则 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 连续的充分必要条件是 $w_f(x_0) = 0$.

♡

证明 充分性:

设 $x_0 \in [a,b], w_f(x_0) = 0$, 则对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sup\left\{|f(y) - f(z)| : y, z \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap[a,b]\right\} \leqslant \epsilon.$$

于是对 $|y - x_0| < \delta, y \in [a,b]$, 我们有 $|f(y) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$, 这就证明了 f 在 x_0 连续, 这就完成了充分性证明.

必要性:

若 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 连续, 则存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(y) - f(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \forall y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap[a,b].$$

于是我们有

$$|f(y)-f(z)|\leqslant|f(y)-f(x_0)|+|f(z)-f(x_0)|\leqslant\epsilon,\forall y,z\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\bigcap[a,b].$$

因此 $0\leqslant w_f(x_0)\leqslant\epsilon$, 从而由 ϵ 任意性得 $w_f(x_0)=0$, 这就完成了必要性证明.

13.6 逼近方法

13.6.1 Stone weierstrass

定理 13.45 (Stone weierstrass 定理)

1. 实版本: 设 K 为紧 Hausdorff 空间, $C(K)$ 表示其上实值连续函数全体, 赋予上确界范数. 设 $M\subset C(K)$ 为子代数[a]满足
   (a). 一致收敛封闭性, 即 M 是闭子代数
   (b). 可分点性: 即对 $x_1\neq x_2\in K$, 存在 $g\in M$, 使得 $g(x_1)\neq g(x_2)$.
   (c). 对任何 $x\in K$, 存在 $g\in M$, 使得 $g(x)\neq 0$.
   则 $M=C(K)$.
2. 复版本: K 为紧 Hausdorff 空间, $C(K)$ 表示其上复值连续函数全体, 赋予上确界范数. 设 $M\subset C(K)$ 为子代数, 满足
   (a). 一致收敛封闭性, 即 M 是闭子代数
   (b). 可分点性: 即对 $x_1\neq x_2\in K$, 存在 $g\in M$, 使得 $g(x_1)\neq g(x_2)$.
   (c). 对任何 $x\in K$, 存在 $g\in M$, 使得 $g(x)\neq 0$.
   (d). M 自伴, 即对 $f\in M$, 必有 $\overline{f}\in M$.
   则 $M=C(K)$.

[a]即有乘法运算的线性空间, 可参考丘维声高等代数下册.

♡

注我们以实版本为例来叙述定理13.45的注意事项.

1. 若 M 含幺, 即 $1\in M$, 那么第三条自动成立.
2. 所谓一致收敛封闭性, 即 $f_n\in M$ 且一致的有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$, 则 $f\in M$.
3. 实际运用中你只需要验证子代数 M 满足定理13.45中的 $(b),(c)$, 则就能推出 M 在 $C(K)$ 中稠密[25].
4. 本定理可以直接使用, 不熟悉拓扑空间的读者只考虑 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集即可.

笔记 本定理可以直接使用而不必理解证明.

证明 $*$.

1. 实版本证明:
   Step 1 真正的逼近部分. 即对每个 $n\in\mathbb{N}$, $|x|$ 可以被多项式在 $[-n,n]$ 一致逼近. 本部分是真正的逼近, 后面的操作都是抽象层面的操作. 证明的方法非常多, 例如可以参考 rudin 数学分析用卷积, 也可以用我们马上要讲的 Bernstein 多项式13.13, 故我们略去.
   Step 2 我们用定义

$$f\vee g\triangleq\max\{f,g\},f\wedge g\triangleq\min\{f,g\},$$

   容易看到若 $f,g\in M$, 则我们由命题12.1去证明 $|f|,f\vee g,f\wedge g\in M$.
   事实上, 因为 $f\in M$, 所以存在 $C\in\mathbb{N}$, 使得

$$\sup_{x\in K}|f(x)|<C.$$

[25]即 $C(K)$ 中函数可以被 M 中函数一致逼近

然后由 **Step 1** 可以找到 $p_n \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$||x| - p_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}, \forall x \in [-C, C].$$

因为 M 是代数, 所以 $p_n(f) \in M$ 且

$$||f(x)| - p_n(f(x))| \leqslant \frac{1}{n}, \forall x \in K.$$

注意 M 闭, 所以

$$f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in M, f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in M.$$

Step 3 我们证明对任何 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \in K$, 则存在 $f \in M$, 使得

$$f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2.$$

注意到存在 $g, h, k \in M$ 使得

$$g(x_1) \neq g(x_2), h(x_1) \neq 0, k(x_2) \neq 0.$$

类似于拉格朗日插值, 可以直接写出

$$f(x) = c_1 \frac{g(x) - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \frac{h(x)}{h(x_1)} + c_2 \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} \frac{k(x)}{k(x_2)}.$$

Step 4 第四步: 我们证明对任何 $h \in C(K), \epsilon > 0$, 存在 $f \in M, |f(x) - h(x)| \leqslant \epsilon, \forall x \in K$.
事实上, $\forall t, s \in K$, 取 $f_{ts} \in M$, 使得 $f_{ts}(t) = h(t), f_{ts}(s) = h(s)$.
因为 $f_{ts} \in C(K)$, 所以 $\exists s$ 开邻域 $U(s)$, 使得

$$f_{ts}(x) \geqslant h(x) - \epsilon, \forall x \in U(s).$$

当 s 遍历 K, K 紧, 因此有有限覆盖 $K = \bigcup_{i=1}^{m} U(s_i)$. 取 $f_t(x) = f_{t1_1} \vee f_{ts_2} \vee \cdots \vee f_{ts_m}$, 则

$$f_t(x) \geqslant h(x) - \epsilon, \forall x \in K.$$

现在对每个 t, 存在 t 开邻域 $U(t)$, 使得 $f_t(x) \leqslant h(x) - \epsilon$. 让 t 遍历 K, 存在有限覆盖 $K = \bigcup_{i=1}^{n} U(t_i)$. 取 $f = f_{t_1} \wedge f_{t_2} \wedge \cdots \wedge f_{t_n}$, 则有

$$f(x) \leqslant h(x) - \epsilon, \forall x \in K.$$

显然

$$f(x) \geqslant h(x) - \epsilon, \forall x \in K,$$

因此

$$|f(x) - h(x)| \leqslant \epsilon, \forall x \in K.$$

2. 复版本证明: 考虑所有实值 $M_{\mathbb{R}} \subset M$, 然后 $C_{\mathbb{R}}(K)$ 表示实值连续函数全体. 注意到 $M_{\mathbb{R}}$ 是 $C_{\mathbb{R}}(K)$ 的实子代数且对一致收敛封闭. 容易验证 $M_{\mathbb{R}}$ 满足实版本 Stone weierstrass 定理13.45的 $(b), (c)$, 于是 $M_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}}(K)$, 因此 $M = C(K)$.

推论 13.15 (第二逼近定理)

$\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

证明 证明的想法即在换元 $t \to e^{it}, t \in \mathbb{R}$ 下把周期函数视为单位圆周上的函数来证明. 因为可以直接使用, 我们略去证明.

例题 13.24

1. 设 $f \in C[0, 1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x) x^n dx = 0, \forall n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明

$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

2. 设 $f\in C[a,b]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)e^{nx}dx=0,\forall n=1,2,\cdots$$

证明

$$f(x)=0,\forall x\in[a,b].$$

证明

1. 对任何 $\epsilon>0$, 由 SW 定理13.45, 我们知道存在实系数多项式 p 使得

$$|p(x)-f(x)|\leqslant\epsilon,\forall x\in[0,1].$$

于是由题目条件知 $\int_0^1 f(x)p(x)dx=0$ 和

$$\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1 f(x)[f(x)-p(x)]dx\leqslant\epsilon\int_0^1|f(x)|dx.$$

由 ϵ 任意性即得

$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

2. 显然 $\operatorname{span}\{e^{nx}:n\in\mathbb{N}\}$ 也符合 SW 定理13.45的条件. 因此类似第一问我们得

$$f(x)=0,\forall x\in[a,b].$$

我们将常用的 SW 定理13.45推广到有限阶导数的形式. 注意, 不能推广到任意阶导数.

定理 13.46

1. 设 $f(x)\in C^k[a,b]$, 这里 $a<b,a,b\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}_0$, 那么对任意 $\epsilon>0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\left|f^{(j)}(x)-p^{(j)}(x)\right|\leqslant\epsilon,\forall x\in[a,b],j=0,1,2,\cdots,k.$$

2. 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, 这里 $a<b,a,b\in\mathbb{R}$, 记

$$V=\operatorname{span}\left\{e^{\lambda x}:\lambda\in\mathbb{N}_0\right\},$$

那么对任意 $\epsilon>0$, 存在 $p(x)\in V$, 使得

$$\sup_{x\in[a,b]}[|f'(x)-p'(x)|+|f(x)-p(x)|]\leqslant\epsilon.$$

♡

证明

1. 注意到由 Taylor 公式积分余项11.4

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)dt.$$

由 SW 定理13.45, 取实多项式 q 使得

$$\left|q(t)-f^{(k)}(t)\right|\leqslant\epsilon,\forall t\in[a,b],$$

于是考虑

$$p(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-1}q(t)dt,$$

有 $p^{(k)}(x)=q(x)$, 以及对 $s=0,1,2\cdots,k-1$, 我们有

$$p^{(s)}(x)=\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-s-1}q(t)dt.$$

我们还有

$$f^{(s)}(x)=\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x(x-t)^{k-s-1}f^{(k)}(t)\,dt.$$

因此我们有

$$\left|f^{(s)}(x)-p^{(s)}(x)\right|\leqslant\frac{\epsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s)!},$$

这就证明了我们需要的结果.

2. 运用 SW 定理13.45, V 在 $C[a,b]$ 稠密, $M=\operatorname{span}\{e^{nx}:n\in\mathbb{N}\}$ 也符合 SW 定理13.45的条件. 现在对 $\epsilon>0$, 取 $P(x)\in M$, 使得

$$\sup_{x\in[a,b]}|P(x)-f'(x)|\leqslant\min\left\{\frac{\epsilon}{2(b-a)},\frac{\epsilon}{2}\right\},$$

考虑

$$p(x)=f(a)+\int_a^x P(y)\,dy,$$

断言 $p(x)$ 为所求, 事实上

$$p'(x)=P(x),\ |p(x)-f(x)|=\left|\int_a^x P(y)-f'(y)\,dy\right|\leqslant(b-a)\frac{\epsilon}{2(b-a)}=\frac{\epsilon}{2},\forall x\in[a,b],$$

这给出了

$$\sup_{x\in[a,b]}[|f'(x)-p'(x)|+|f(x)-p(x)|]\leqslant\epsilon.$$

我们还需要说明 $p\in V$, 因为 V 是线性空间, 所以我们只需考虑

$$\int_a^x e^{\lambda y}dy=\frac{e^{\lambda x}-e^{\lambda a}}{\lambda}\in V,\lambda\neq0.$$

这就证明了我们需要的结果.

例题 13.25 设多项式列 $p_n,n=1,2,\cdots$ 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛到 f, 证明 f 为多项式.

证明 注意到存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|p_m(x)-p_n(x)|\leqslant1,\forall m\geqslant n\geqslant N.$$

而有界多项式必为常数, 所以

$$p_n(x)=p_N(x)+c_n,n\geqslant N.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)$ 存在, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ 存在. 这就证明了

$$f(x)=p_N(x)+c.$$

13.6.2 Bernstein 多项式

Bernstein 多项式都能定义在 $[a,b]$ 上, 因为只差一个换元法, 因此我们不妨设 $[a,b]=[0,1]$.

定义 13.13 (一维 Bernstein 多项式)

设 $f\in C[0,1],n\in\mathbb{N}_0$, 定义 f 的 Bernstein 多项式为

$$B_n(f,x)\triangleq\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}.\tag{13.117}$$

♣

Bernstein 多项式主要有如下结论.

定理 13.47 (Bernstein 多项式性质)

1. 设
$$\varphi(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right],n=1,2,3,\cdots,$$
则有
$$B_n'(f,x)=B_{n-1}(\varphi,x),n\in\mathbb{N}. \tag{13.118}$$
2. 若 f 递增或者递减, 则 $B_n(f,x),n\in\mathbb{N}_0$ 也递增或者递减.
3. 若 f 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数, 则对每个 $n\in\mathbb{N}_0$ 都有 $B_n(f,x)$ 是 $[0,1]$ 的凸或者凹函数.
4. 设 $f\in C^k[0,1],k\in\mathbb{N}_0$, 则关于 $x\in[0,1]$, 一致的有
$$\lim_{n\to\infty}B_n(f,x)=f(x),\lim_{n\to\infty}B_n'(f,x)=f'(x),\cdots,\lim_{n\to\infty}B_n^{(k)}(f,x)=f^{(k)}(x). \tag{13.119}$$

♡

证明

1. 对 $n\geqslant 1$, 直接计算得
$$\begin{aligned}B_n'(f,x)&=\left[\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right]'\\&=\sum_{k=1}^{n}kf\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}x^k(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n-1}\right)C_{n-1}^kx^k(1-x)^{n-k-1}\\&=B_{n-1}(\varphi,x),\end{aligned}$$
这就给出了式(13.118).
2. 如果 f 递增, 则由(13.118)知 $B_n'(f,x)=B_{n-1}(\varphi,x)\geqslant 0$, 故 $B_n(f,x)$ 递增. 类似可得递减.
3. 如果 f 下凸, 对 $n=1$ 的情况是否符合条件都可以单独验证, 我们略去过程, 下设 $n\geqslant 2$. 注意继续由(13.118)知
$$B_n''(f,x)=B_{n-1}'(\varphi,x)=B_{n-2}(\psi,x),\psi=(n-1)\left[\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x+\frac{1}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}x\right)\right],$$
从而
$$\begin{aligned}B_{n-2}(\psi,x)&=\sum_{j=0}^{n-2}\left[\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{j}{n-1}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\&=2n\sum_{j=0}^{n-2}\left[\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right)+f\left(\frac{j}{n}\right)}{2}-f\left(\frac{\frac{j+2}{n}+\frac{j}{n}}{2}\right)\right]\frac{(n-1)!}{j!(n-2-j)!}(1-x)^{n-2-j}x^j\\&\geqslant 0,\end{aligned}$$
这就证明了 $B_n(f,x)$ 下凸. 类似的可讨论上凸情况.
4. **Step 1** 我们证明 $k=0$ 时命题成立. 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $|x-y|\leqslant\delta$, 就有
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\epsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\left|B_n(f,x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left|\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leqslant \epsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}\left|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| + 2\sup|f|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leqslant \epsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + 2\frac{\sup|f|}{\delta^2}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leqslant \epsilon + 2\frac{\sup|f|}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \epsilon + 2\frac{\sup|f|}{n\delta^2}x(1-x),
\end{aligned}$$

于是从上式立得

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n(f,x)-f(x)\right| \leqslant \epsilon + \frac{\sup|f|}{2n\delta^2}.$$

故我们得到了 $k=0$ 时, 式(13.119)成立.

Step 2 $(*)$ 我们定义

$$T_n f(x) = n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right], n\in\mathbb{N}.$$

$$B_n'(f,x) = B_{n-1}(T_n f,x), \forall n\in\mathbb{N}.$$

归纳证明

$$T_{n-j+1}\cdots T_n f(x) = (n-j+1)\cdots(n-1)\,n\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right), \forall j\in\mathbb{N}.$$

事实上, 当 $j=1$, 由(13.118)可知命题显然成立, 假设命题对 $j \in \mathbb{N}$ 成立, 则

$$
\begin{aligned}
&T_{n-j} \cdots T_n f(x) \\
&= T_{n-j}\left((n-j+1)\cdots(n-1)\, n \sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j} C_j^k T_{n-j}\left(f\left(\frac{n-j}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n!\,(n-j)}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j} C_j^k\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right)\right] \\
&= \frac{n!\,(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!} \\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k+1}{n}\right) \\
&\quad-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right) \\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1+j} C_j^{k-1} f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right) \\
&\quad-\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+j} C_j^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{n!\,(-1)^j\left[f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-j-1}{n}x\right)\right]}{(n-j-1)!} \\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!} f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{j+1}{n}\right)-\frac{n!}{(n-j-1)!}(-1)^j f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{1}{n}\right) \\
&\quad+\frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1+j}\left(C_j^{k-1}+C_j^k\right) f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{n!}{(n-j-1)!}\sum_{k=0}^{j+1}(-1)^{k+1+j} C_{j+1}^k f\left(\frac{n-j-1}{n}x+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}
$$

因此我们证明了对 $j+1$, 结论也成立, 因此由数学归纳法, 对所有 $j \in \mathbb{N}$, 命题都成立.

Step 3 $(*)$ 我们证明一个中值定理的结果.

由拉格朗日插值公式11.1, 对 $x \in [0,1]$, 存在 $\theta \in [0,1]$, 我们有

$$
f(x)=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{\left(x-\frac{s+i}{n}\right)}{\left(\frac{k+i}{n}-\frac{s+i}{n}\right)} f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{f^{(j)}(\theta)}{j!}\prod_{s=1}^{j}\left(x-\frac{s+i}{n}\right).
$$

特别的存在 $\theta\in\left[\frac{i}{n},\frac{j+i}{n}\right]$, 使得

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{i}{n}\right)&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{\left(\frac{i}{n}-\frac{s+i}{n}\right)}{\left(\frac{k+i}{n}-\frac{s+i}{n}\right)}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{f^{(j)}(\theta)}{j!}\prod_{s=1}^{j}\left(\frac{i}{n}-\frac{s+i}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{\left(-\frac{s}{n}\right)}{\left(\frac{k-s}{n}\right)}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^{j}f^{(j)}(\theta)}{n^{j}}\\
&=\sum_{k=1}^{j}\prod_{s\neq k}\frac{s}{s-k}\cdot f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^{j}f^{(j)}(\theta)}{n^{j}}\\
&=\sum_{k=1}^{j}\frac{j!}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{(j-k)!(k-1)!}f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^{j}f^{(j)}(\theta)}{n^{j}}\\
&=\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1}C_{j}^{k}f\left(\frac{k+i}{n}\right)+\frac{(-1)^{j}f^{(j)}(\theta)}{n^{j}},
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k}C_{j}^{k}f\left(\frac{k+i}{n}\right)=\frac{(-1)^{j}f^{(j)}(\theta)}{n^{j}}.$$

Step 4 $(*)$ 注意到

$$B_{n}^{(j)}(f,x)=B_{n-j}\left(T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_{n}f,x\right),1\leqslant j\leqslant k,n>k.$$

于是运用 **Step 3**, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|B_{n}^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)\right|\\
&\leqslant\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|\\
&\quad+\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-B_{n-j}\left(T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_{n}f,x\right)\right|\\
&\leqslant\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-j}\left|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-T_{n-j+1}\cdots T_{n-1}T_{n}f\left(\frac{i}{n-j}\right)\right|C_{n-j}^{i}x^{i}(1-x)^{n-j-i}\\
&=\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-j}\left|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k+j}C_{j}^{k}f\left(\frac{k+i}{n}\right)\right|C_{n-j}^{i}x^{i}(1-x)^{n-j-i}\\
&=\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|+\sum_{i=0}^{n-j}\left|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-\frac{n!f^{(j)}(\theta)}{(n-j)!n^{j}}\right|C_{n-j}^{i}x^{i}(1-x)^{n-j-i}\\
&\leqslant\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|+\sum_{i=0}^{n-j}\left|f^{(j)}\left(\frac{i}{n-j}\right)-f^{(j)}(\theta)\right|C_{n-j}^{i}x^{i}(1-x)^{n-j-i}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-j}\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^{j}}\right|\cdot\left|f^{(j)}(\theta)\right|C_{n-j}^{i}x^{i}(1-x)^{n-j-i}.
\end{aligned}$$

Step 5 $(*)$ **Step 1** 告诉我们关于 $x\in[0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}B_{n}\left(f^{(j)},x\right)=f^{(j)}(x),j=0,1,2,\cdots,k.$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n!}{(n-j)!n^{j}}\right)=0,$$

以及

$$\left|\frac{i}{n}-\frac{i}{n-j}\right|=\frac{ji}{n(n-j)}\leqslant\frac{j}{n},\left|\frac{i+j}{n}-\frac{i}{n-j}\right|\leqslant\frac{2j}{n},\forall n>j.$$

我们同时假设

$$M_j\triangleq\sup_{x\in[0,1]}\left|f^{(j)}(x)\right|,j=0,1,2,\cdots,k.$$

并注意到 $f^{(j)}$ 是一致连续的.

现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$, 使得

$$\left|B_{n-j}\left(f^{(j)},x\right)-f^{(j)}(x)\right|<\frac{\epsilon}{3},\forall x\in[0,1],$$

$$\left|1-\frac{n!}{(n-j)!n^j}\right|<\frac{\epsilon}{3M_j},\forall n>N,$$

$$\left|f^{(j)}(x)-f^{(j)}(y)\right|<\frac{\epsilon}{3},\forall|x-y|<\delta,x,y\in[0,1].$$

因此当正整数 $n>\max\left\{\frac{2j}{\delta},j,N\right\}$, 利用 **Step 4**, 我们有

$$\left|B_n^{(j)}(f,x)-f^{(j)}(x)\right|<\epsilon,\forall x\in[a,b],$$

这就完成了证明.

13.6.3 可积函数的逼近

引理 13.6 (可积被连续函数逼近)

1. 设 $f\in R[a,b]$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $g\in C[a,b]$, 使得
$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx<\epsilon.\tag{13.120}$$
2. 第一问中的 g 还可以要求 $g\in C_c(a,b)$, 这里 $C_c(a,b)$ 表示 g 有含于 (a,b) 的紧支撑的连续函数.
3. 设 $p\geqslant1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx<\infty$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 使得
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g(x)|^p\,dx<\epsilon.$$

♡

笔记 证明的想法即分段线性连接. 紧支撑逼近也叫紧化方法. 第三问对勒贝格积分也是对的.

证明

1. 对任何 $\epsilon>0$, 因为 $f\in R[a,b]$, 所以存在一个划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得
$$\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\epsilon,w_i(f)\text{表示}f\text{在}[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n\text{的振幅}.$$
连接线段 $(x_{i-1},f(x_{i-1})),(x_i,f(x_i)),i=1,2,\cdots,n$ 得到连续函数 g. 则
$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|\,dx\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_{i-1})|\,dx+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-f(x_{i-1})|\,dx\\&\leqslant\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})\right|dx\\&\leqslant\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n w_i(f)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right|dx\\&=\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\frac{3}{2}\epsilon,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

2. 对任何 $\epsilon \in (0,1)$, 设 $g \in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{4}.$$

取充分小的 $\delta > 0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{4}, \int_{b-\delta}^b |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{16}.$$

再取 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

(a): $0 \leqslant h(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

(b): $h(x) = 0, \forall x \in (-\infty, a+\delta] \bigcup (b-\delta, +\infty]$;

(c): $h(x) = 1, \forall x \in [a+2\delta, b-2\delta]$.

于是取 $g_1(x) = h(x)g(x) \in C_c(a,b)$, 就有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-g_1(x)|\,dx &= \int_a^b |f(x)-g(x)h(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)-h(x)g(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)-g(x)|\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\,dx \\
&\leqslant \frac{3\epsilon}{4} + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\,dx + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)-h(x)g(x)|\,dx \\
&\leqslant \frac{3\epsilon}{4} + 2\int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)|\,dx + 2\int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)|\,dx \\
&\leqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

3. 证明的想法和第二问类似. 即对任何 $\epsilon > 0$, 取 $X > 0$, 使得

$$\int_X^\infty |f(x)|^p\,dx + \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|^p\,dx < \epsilon.$$

因为 f 在 $[-X,X]$ 黎曼可积, 所以由第二问, 存在 $g \in C_c(-X,X)$ 使得[26]

$$\int_{-X}^X |f(x)-g(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{1+\sup\limits_{[-X,X]} |2f|^{p-1}}.$$

从前两问的构造可以看到

$$\sup_{[-X,X]} |g| \leqslant \sup_{[-X,X]} |f|,$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty |f(x)-g(x)|^p\,dx &= \int_{|x|\geqslant X} |f(x)|^p\,dx + \int_{-X}^X |f(x)-g(x)|^p\,dx \\
&\leqslant \epsilon + \sup_{[-X,X]} |f-g|^{p-1} \int_{-X}^X |f(x)-g(x)|\,dx \\
&\leqslant \epsilon + \sup_{[-X,X]} (2|f|)^{p-1} \int_{-X}^X |f(x)-g(x)|\,dx \\
&< \epsilon + \epsilon,
\end{aligned}$$

[26] 分母加了 1 是为了保证分母不是 0.

这就完成了证明.

定理 13.48 (积分的绝对连续性)

设 $p \geqslant 1$ 且反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty$, 证明

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0. \tag{13.121}$$

♡

笔记 本结果对勒贝格积分也是正确的, 但我们证明只对黎曼积分进行. 我们定义

$$\|f\|_{L^p} \triangleq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{13.122}$$

由闵可夫斯基不等式积分形式, 我们知道[27]

$$\left| \|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p} \right| \leqslant \|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

证明 不妨设 $h > 0$, 当 $f \in C_c(\mathbb{R})$, 注意到 f 一致连续, 于是假设 $\operatorname{supp} f \subset [-n, n], n \in \mathbb{N}$, 则对 $h \in (0,1)$, 我们有

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = \lim_{h \to 0^+} \int_{-n-1}^{n+1} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = \int_{-n-1}^{n+1} \lim_{h \to 0^+} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

由引理13.6的第三条, 我们知道对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\|f - g\|_{L^p} < \epsilon.$$

考虑 $T_h f = f(x+h) - f(x)$, 则

$$\|T_h f\|_{L^p} \leqslant \|f(x+h)\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} = 2\|f\|_{L^p}.$$

由章节9.4的 Friedrichs mollifier technique, 我们知道 $\lim_{h \to 0^+} \|T_h f\|_{L^p} = 0$, 即(13.121).

我们引入磨光子的概念. 注意作为数学分析课, 我们仅对 $n = 1$ 证明, 但是一般情况是类似的且证明也是类似的.

定义 13.14 (卷积磨光核)

对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\int_{|\mathbf{x}|<1} e^{-\frac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}} \, d\mathbf{x}} e^{-\frac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}}, & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| \geqslant 1 \end{cases}, \chi_\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta^n} \chi\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right), \delta > 0.$$

类似例题经典光滑函数12.1, 容易看到 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 χ 是一个非负偶函数且 $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1$.

♣

笔记 作为数学分析的应用, 我们更关心 $n = 1$ 的情况且 χ 的选取可以根据需要更换.

注对一个定义在 $\mathbb{R}$ 上在每个紧集可积的函数 f, 我们可以定义

$$f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \chi_\delta(x-y) \, dy.$$

则有下述结果可以直接使用, 证明也是直接考虑定义会发现是平凡的

(a): $f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f_\delta^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{d^n}{dx^n} \chi_\delta(x-y) \, dy$;

(b): $\operatorname{supp} f_\delta \subset \left\{ x \in \mathbb{R} : \inf_{y \in \operatorname{supp} f} |x-y| \leqslant \delta \right\}$, 即磨光函数的支撑至多只扩大半径 δ.

最后, 我们将结果总结为如下定理.

定理 13.49 (可积光滑逼近定理)

设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $p \in [1, +\infty)$ 则

[27] 以后可以直接使用而无需证明.

1. $C_c^\infty(X)$ 在 $L^p(X)$ 中按 L^p 范数稠密. 即对任何 $\epsilon>0, f\in L^p(X)$, 存在 $g\in C_c^\infty(X)$, 使得
$$\left(\int_X |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$
当 $X=\mathbb{R}^n$, 若还有 $\Lambda\subset\mathbb{N}$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^p(X), \forall j\in\Lambda$, 则可以要求: 存在 $g\in C_c^\infty(X)$, 对任何 $j\in\Lambda$ 都有
$$\left(\int_X |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X \left|\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)-\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$
2. 设 $x\in L^p[0,T]$, 则存在周期 T 的函数 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C^\infty(\mathbb{R})$, 使得
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |x_n(t)-x(t)|^p\,dt=0.$$
♡

笔记 出于考试需要, 我们只对 $n=1$ 证明. 回忆符号(13.122).

证明

1. **Step 1** 对满足反常积分 $\int_{-\infty}^\infty |h(x)|^p\,dx<\infty$ 的 h, 我们有
$$\begin{aligned}||h_\delta-h||_{L^p}&=\left|\left|\int_{-\infty}^\infty h(y)\chi_\delta(x-y)\,dy-h(x)\right|\right|_{L^p}\\&=\left|\left|\int_{-\infty}^\infty [h(x-\delta y)-h(x)]\chi(y)\,dy\right|\right|_{L^p}\\&\leqslant\int_{-\infty}^\infty ||h(x-\delta y)-h(x)||_{L^p}\cdot\chi(y)\,dy.\end{aligned}$$
由积分的绝对连续性13.48, 我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在 $c>0$, 使得对任何 $\eta\in(-c,c)$, 都有
$$||h(x+\eta)-h(x)||_{L^p}<\epsilon.$$
于是当 $\delta\in(0,c)$, 我们有
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty ||h(x-\delta y)-h(x)||_{L^p}\cdot\chi(y)\,dy&=\int_{-1}^1 ||h(x-\delta y)-h(x)||_{L^p}\cdot\chi(y)\,dy\\&\leqslant\epsilon\int_{-1}^1\chi(y)\,dy=\epsilon.\end{aligned}$$
这给出了 $\lim\limits_{\delta\to0^+}||h_\delta-h||_{L^p}=0$.
推广情形可以先乘紧化序列13.6之后同样的卷积磨光, 然后注意到等式 $\frac{\partial f_\delta}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_\delta$ 即可直接得到.
Step 2 在 X 外对 f 我们补充定义 0. 然后由引理13.6的第三条, 对任何 $\epsilon>0$, 存在[28] $g\in C_c(X)$, 使得
$$||f-g||_{L^p}<\epsilon.$$
然后由 **Step 1**, 取 $\delta>0$ 使得 $||g_\delta-g||_{L^p}<\epsilon$ 且 $\mathrm{supp}g_\delta\subset X$, 于是
$$||f-g_\delta||_{L^p}\leqslant||f-g||_{L^p}+||g-g_\delta||_{L^p}\leqslant2\epsilon,$$
这就完成了证明.
2. 注意到改变一个点不影响积分值, 我们不妨设 $x(0)=x(T)$ 并作周期 T 延拓, 考虑
$$x_n(t)=\int_{-\infty}^\infty x(y)\chi_{\frac{1}{n}}(t-y)\,dt=\int_{-\infty}^\infty x(t-y)\chi_{\frac{1}{n}}(y)\,dy\in C^\infty(\mathbb{R}),n\in\mathbb{N}.$$
注意到
$$x_n(t+T)=\int_{-\infty}^\infty x(t+T-y)\chi_{\frac{1}{n}}(y)\,dy=\int_{-\infty}^\infty x(t-y)\chi_{\frac{1}{n}}(y)\,dy=x_n(t).$$

[28] 从引理证明可以看到可以要求 $\mathrm{supp}g\subset X$.

和第一问类似, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x||_{L^p}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_0^T|x_n(t)-x(t)|^p\,dt=0,$$

这就完成了证明.

定理 13.50 (黎曼可积函数的上下逼近)

$f\in R[a,b]$ 的充分必要条件是对任何 $\epsilon>0$, 存在实系数多项式 p,q, 使得

- $$\int_a^b p(x)-q(x)\,dx\leqslant\epsilon;$$
- $$q(x)\leqslant f(x)\leqslant p(x),\forall x\in[a,b].$$

♡

笔记 本结果反应了黎曼可积函数相比勒贝格可积的优势, 它可以上下的用多项式来逼近, 但勒贝格可积不可以.

证明 充分性:

事实上对任何 $\epsilon>0$, 我们知道存在实系数多项式 p,q, 使得

- $$\int_a^b p(x)-q(x)\,dx\leqslant\frac{\epsilon}{2};$$
- $$q(x)\leqslant f(x)\leqslant p(x),\forall x\in[a,b].$$

这样也容易知道 f 有界, 再取划分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^n\sup_{[x_{i-1},x_i]}p\cdot(x_i-x_{i-1})\leqslant\int_a^b p(x)\,dx+\frac{\epsilon}{4},$$

以及

$$\sum_{i=1}^n\inf_{[x_{i-1},x_i]}q\cdot(x_i-x_{i-1})\geqslant\int_a^b q(x)\,dx-\frac{\epsilon}{4}.$$

那么记

$$w_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f,i=1,2,\cdots,n,$$

则有

$$\sum_{i=1}^n w_i(x_i-x_{i-1})\leqslant\sum_{i=1}^n\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}p-\inf_{[x_{i-1},x_i]}q\right)(x_i-x_{i-1})\leqslant\epsilon.$$

因此我们说明了 $f\in R[a,b]$.

必要性:

假设 $f\in R[a,b]$, 对每个 $\epsilon>0$, 如果我们只找到了 $p,q\in C[a,b]$ 满足我们的要求, 那么运用魏斯特斯拉定理13.45知道, 存在实系数多项式 p',q' 使得有

$$q-\epsilon\leqslant q'\leqslant q,\ p\leqslant p'\leqslant p+\epsilon,$$

因此我们有

- $$\int_a^b p'(x)-q'(x)\,dx\leqslant\int_a^b p(x)-q(x)\,dx+2\epsilon(b-a)\leqslant(1+2(b-a))\epsilon;$$
- $$q'(x)\leqslant f(x)\leqslant p'(x),\forall x\in[a,b].$$

这样就可以完成定理的证明, 因此只需要对每个 $\epsilon>0$, 只找 $p,q\in C[a,b]$ 满足我们的要求.

事实上, 因为 f 黎曼可积, 所以对每个 $\epsilon>0$, 存在一个划分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\left(x_i-x_{i-1}\right) \leqslant \frac{\epsilon}{4},$$

这里

$$M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]} f, m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]} f, w_i=M_i-m_i, i=1,2,\cdots,n.$$

我们可取

$$q_0(x)=m_i, x\in[x_{i-1},x_i), i=1,2,\cdots,n, q_0(b)=m_n,$$

则

$$\int_a^b f(x)-q_0(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-m_i\right)dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} w_i\left(x_i-x_{i-1}\right) \leqslant \frac{\epsilon}{4},$$

待定 $c>0$ 充分小, 对 $i=1,2,\cdots,n-1$, 如果 $m_i \leqslant m_{i+1}$, 对 $x\in[x_i,x_i+c]$, 我们取

$$q(x)=\frac{x_i+c-x}{c}m_i+\frac{x-x_i}{c}m_{i+1}.$$

当 $m_i>m_{i+1}$, 对 $x\in[x_i-c,x_i]$, 我们取

$$q(x)=\frac{x_i-x}{c}m_i+\frac{x-(x_i-c)}{c}m_{i+1},$$

在其他地方令 $q(x)=q_0(x)$, 则读者可以直接看出 (例如作图)

$$q(x)\in C[a,b], q(x) \leqslant q_0(x) \leqslant f(x),$$

且有

$$\int_a^b\left[q_0(x)-q(x)\right]dx=\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left|m_{i+1}-m_i\right| \leqslant (n-1)\,c\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|m_i\right|,$$

选取 $c>0$ 充分小就有

$$\int_a^b\left[q_0(x)-q(x)\right]dx \leqslant \frac{\epsilon}{4},$$

因此

$$\int_a^b f(x)-q(x)\,dx=\int_a^b f(x)-q_0(x)\,dx+\int_a^b q_0(x)-q(x)\,dx \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

类似的可选 $p\in C[a,b]$, 使得

$$f(x) \leqslant p(x), x\in[a,b], \int_a^b p(x)-f(x)\,dx \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$

因此恰好有

$$\int_a^b p(x)-q(x)\,dx=\int_a^b p(x)-f(x)\,dx+\int_a^b f(x)-q(x)\,dx \leqslant \epsilon.$$

我们完成了证明.

推论 13.16 (黎曼可积函数用周期连续函数上下逼近.)

$f\in R[a,b]$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在周期 $b-a$ 的三角多项式 p,q, 使得

- $$\int_a^b p(x)-q(x)\,dx \leqslant \epsilon;$$
- $$q(x) \leqslant f(x) \leqslant p(x), \forall x\in[a,b].$$

♡

证明

因为第二逼近定理13.15, 我们知道三角多项式可以一致逼近连续周期函数, 因此相似定理13.50证明, 我们只

需要找到连续周期函数 p,q 满足要证的结果即可.

由定理13.50, 我们知道只需对 f 为多项式证明这个命题即可. 显然命题的叙述的性质保持线性, 因此我们不妨设 $f(x)=(x-a)^n, n\in\mathbb{N}$. 为了计算方便, 不失一般性, 我们假定 $a=0,b=1$. 注意到 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$.

现在

$$x^n\geqslant q(x)\triangleq\begin{cases}x^n, & x\in[0,1-\epsilon]\\ \frac{(1-\epsilon)^n}{\epsilon}(1-x), & x\in[1-\epsilon,1]\end{cases},$$

以及

$$\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}(1-\epsilon)^{n+1}+\frac{1}{2}\epsilon(1-\epsilon)^n.$$

我们同样有

$$x^n\leqslant p(x)=\begin{cases}\frac{\epsilon^n-1}{\epsilon}x+1, & x\in[0,\epsilon]\\ x^n, & x\in[\epsilon,1]\end{cases},$$

以及

$$\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\left(1-\epsilon^{n+1}\right)+\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon(\epsilon^n-1).$$

由

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left[\frac{1}{n+1}\left(1-\epsilon^{n+1}\right)+\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon(\epsilon^n-1)\right]=\frac{1}{n+1};$$
$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left[\frac{1}{n+1}(1-\epsilon)^{n+1}+\frac{1}{2}\epsilon(1-\epsilon)^n\right]=\frac{1}{n+1},$$

知 p,q 为所求.

定理 13.51 (可积被分段常值函数逼近)

$f\in R[a,b]$ 的充要条件是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}$ 上阶梯函数 g,h 使得

- $$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x-\epsilon\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x+\epsilon;$$
- $$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\forall x\in[a,b].$$

♡

注 $\mathbb{R}$ 上阶梯函数 f 定义为存在有限个互不相交的有限区间 $I_j,j=1,2,\cdots,n$ 使得 $f|_{I_j},j=1,2,\cdots,n$ 为常值函数且 $f|_{\mathbb{R}\setminus\left(\bigcup\limits_{j=1}^n I_j\right)}=0$.

证明 充分性相似定理13.50的证明即可. 我们证明必要性:

对任何 $\epsilon>0$, 因为 $f\in R[a,b]$, 所以存在一个划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得

$$\sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i-x_{i-1})\leqslant\epsilon, w_i(f)\text{ 表示}f\text{在}[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n\text{的振幅}.$$

取

$$h(x) \triangleq \begin{cases} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), & x \in [x_{i-1},x_i), i=1,2,\cdots,n-1 \\ \sup\limits_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x), & x \in [x_{n-1},x_n] \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$g(x) \triangleq \begin{cases} \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), & x \in [x_{i-1},x_i), i=1,2,\cdots,n-1 \\ \inf\limits_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x), & x \in [x_{n-1},x_n] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

显然有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \forall x \in [a,b],$$

以及

$$\begin{aligned} \int_a^b [h(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [h(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n w_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b [h(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b [f(x)-h(x)]\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b [g(x)-h(x)]\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon. \end{aligned}$$

至此我们完成了证明.

我们给出类似 SW 定理13.45的可积版本的逼近定理.

定理 13.52 (Multiplicative System Theorems ∗)

1. 考虑测度空间 $(X,\mathscr{B},\mu)$, H 是 X 上某些可测实值函数的线性空间, 如果满足:
   (1): H 对一致有界函数列逐点收敛封闭;
   (2): $1 \in H$.
   设 $M \subset H$ 且对乘法封闭且 M 中都是有界函数则 H 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界实值可测函数.
2. 考虑测度空间 $(X,\mathscr{B},\mu)$, H 是 X 上某些可测复值函数的线性空间, 如果满足:
   (1): H 对一致有界函数列逐点收敛封闭;
   (2): $1 \in H$;
   (3): 对取共轭封闭.
   设 $M \subset H$ 且对乘法和共轭封闭且 M 中都是有界函数, 则 H 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界复值可测函数. ♡

注$\sigma(M)$ 表示包含 M 的最小 σ 代数.

证明

1. 记 H_0 是包含 $1,M$ 的最小的满足 $(1),(2)$ 的某些有界可测实值函数的线性空间.

   考虑

   $$H_0^f=\{g\in H_0:fg\in H_0\},\ f\in H_0,$$

   首先 $1\in H_0^f$, 其次设

   $$g_n\in H_0^f,|g_n|\leqslant M,\lim_{n\to\infty}g_n=g,$$

   有

   $$fg_n\in H_0,|fg_n|\leqslant M\sup_{x\in X}|f|,\lim_{n\to\infty}fg_n=fg,|fg|\leqslant M\sup_{x\in X}|f|.$$

   因此对 $f\in M$, H_0^f 是包含 $1,M$ 的最小的满足 $(1),(2)$ 的某些有界可测实值函数的线性空间, 这告诉我们

   $$H_0^f=H_0\Longrightarrow fg\in H_0,\forall f\in M,g\in H_0$$

   从而对 $f\in H_0$, H_0^f 是包含 $1,M$ 的最小的满足 $(1),(2)$ 的某些有界可测实值函数的线性空间, 这告诉我们

   $$H_0^f=H_0\Longrightarrow fg\in H_0,\forall f,g\in H_0.$$

   要证明 $\chi_A\in H_0$, $\forall A\in\sigma(M)$, 构造

   $$S=\{A\in\sigma(M):\chi_A\in H_0\}.$$

   显然 $X,\varnothing\in S$, 且

   $$A\in S\Longrightarrow\chi_A\in H_0\Longrightarrow\chi_{A^c}=1-\chi_A\in H_0\Longrightarrow A^c\in S,$$

   $$A,B\in S\Longrightarrow\chi_A,\chi_B\in H_0\Longrightarrow\chi_A\chi_B=\chi_{A\bigcap B}\in H_0\Longrightarrow A\bigcap B\in S.$$

   $$A_n\in S,A_n\uparrow A\Longrightarrow\chi_{A_n}\in S,\chi_A=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}\Longrightarrow\chi_A\in S,$$

   因此 S 是单调的代数, 从而是 σ 代数.

   只需再断言

   $$f^{-1}((c,+\infty))\in S,\forall f\in M,c\in\mathbb{R}.$$

   设 $|f(x)|\leqslant s$, 考虑 $\varphi_n(x)\in C(\mathbb{R})$, $|\varphi_n(t)|\leqslant 1$, $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\chi_{(c,+\infty)}(t)$ 和多项式 $g_n(t)$, 有

   $$|\varphi_n(t)-g_n(t)|\leqslant\frac{1}{n},t\in[-s,s],$$

   则有

   $$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(f(x))=\chi_{(c,+\infty)}(f(x))=\chi_{f^{-1}((c,+\infty))}(x),$$

   以及

   $$|g_n(t)|\leqslant 2,\lim_{n\to\infty}g_n(f(x))=\chi_{f^{-1}((c,+\infty))}(x).$$

   因此 $\chi_{f^{-1}((c,+\infty))}(x)\in S$. 因此 H_0 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界实值可测函数.

   考虑 H 和所有有界实值可测函数空间之交 H_1, 显然 H_1 满足 $(1),(2)$ 且 $M\subset H_1$, 这样 H_1 就包含所有 $\sigma(M)-$ 有界实值可测函数, 从而 H 亦然, 我们完成了证明.

2. 无妨考虑 M 张成的复线性空间, 仍然记为 M, 分别考虑 H,M 中全体实值函数即可 (由共轭封闭, 恰好是全体实部虚部构成).

   从实际运用出发, 我们考虑

定理 13.53 (*)

设 $1\leqslant p<\infty$.

1. 考虑全有限测度空间 $(X,\mathscr{B},\mu)$, M 是 X 上某些有界可测实值函数的集合, 如果满足:

(1)：对乘法封闭;
(2)：$\sigma(M)=\mathscr{B}$;
(3)：$1\in\overline{spanM}$.
则有 $\overline{spanM}=L^p(X,\mathscr{B},\mu)$.

2. 考虑全有限测度空间 $(X,B(X),\mu)$, M 是 X 上某些有界可测复值函数的集合, 如果满足:
(1)：对乘法和共轭封闭;
(2)：$\sigma(M)=\mathscr{B}$;
(3)：$1\in\overline{spanM}$.
则有 $\overline{spanM}=L^p(X,\mathscr{B},\mu)$.

♡

证明

1. 显然 $\overline{spanM}$ 对一致有界收敛封闭, 容易知道 $\overline{spanM}$ 是 X 上某些可测实值函数组成的线性空间. 只需要 $1\in\overline{spanM}$, 那么运用定理13.52就有 $\overline{spanM}$ 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界实值可测函数, 因此 $\overline{spanM}$ 包含 X 上的所有特征函数, 所以 $\overline{spanM}=L^p(X,\mathscr{B},\mu)$.
2. 显然 $\overline{spanM}$ 对一致有界收敛封闭, 容易知道 $\overline{spanM}$ 是 X 上某些可测复值函数组成的线性空间. 只需要 $1\in\overline{spanM}$, 那么运用定理13.52就有 $\overline{spanM}$ 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界复值可测函数, 因此 $\overline{spanM}$ 包含 X 上的所有特征函数, 即 $\overline{spanM}=L^p(X,\mathscr{B},\mu)$.

实际做题中, $\sigma(M)=\mathscr{B}$ 更容易对 Borel 代数验证, 但是勒贝格测度是完备的, 因此我们需要一个结果使得只需要对 Borel 可测验证就够了.

引理 13.7 (∗)

设 μ 是环 R 上的 σ 有限测度, 那么对任何 $E\in R^*$, 存在 $F,H\in S(R)$ 和, 使得

$$F\subset E,\mu^*(E\setminus F)=0,H\supset E,\mu^*(H\setminus E)=0.$$

♡

笔记 本结果是测度构造所带来的效果, 可以见夏道行编著的实变函数与泛函分析上册定理 2.4.8, p.109-110.

定理 13.54 (∗)

设 (X,R,μ) 是 σ 有限测度空间, 其完备化为 (X,R^*,μ^*), $E\in R^*$, 则对任何广义 R^* 可测函数 $f:E\to[-\infty,+\infty]$, 存在 X 上的 R 可测函数 $h:X\to[-\infty,+\infty]$, 使得 $h|_{X\setminus E}=0$ 且 $\mu^*(\{x\in E:h(x)\neq f(x)\})=0$. 特别的, 当 f 是几乎处处有限函数时, h 也可以是有限函数.

♡

笔记 我们把依 R 可测叫 Borel 可测, 依 R^* 可测叫完备可测.

证明 我们知道存在 $f_n=\sum_{i=1}^{\ell_n}a_i^{(n)}\chi_{E_i^{(n)}},n=1,2,\cdots$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in E,$$

这里

$$E_i^{(n)}\subset E,E_i^{(n)}\in R^*,a_i^{(n)}\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,\ell_n.$$

由引理13.7, 存在

$$B_i^{(n)}\subset E_i^{(n)},B_i^{(n)}\in R,,i=1,2,\cdots,\ell_n,n=1,2,\cdots,$$

使得 $\mu^\star\left(E_i^{(n)}\setminus B_i^{(n)}\right)=0$.

现在我们知道

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\ell_n}\left(E_i^{(n)}\setminus B_i^{(n)}\right)\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\ell_n}\mu^*\left(E_i^{(n)}\setminus B_i^{(n)}\right)=0,$$

记

$$E_0 \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\ell_n}\left(E_i^{(n)} \setminus B_i^{(n)}\right) \in R^*.$$

由引理13.7, 存在 $B_0 \in RE_0 \subset B_0$ 使得 $\mu(B_0)=0$, 我们考虑

$$h_n(x) \triangleq g_n(x)\chi_{X\setminus B_0}(x), n=1,2,\cdots,$$

这里 $g_n \triangleq \sum_{i=1}^{\ell_n} a_i^{(n)}\chi_{B_i^{(n)}}$.

注意到对 $x \in (X\setminus B_0)\bigcap E$, 显然

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

对 $x \in (B_0\bigcap E)\bigcup(X\setminus E)$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0.$$

于是定义

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in (B_0\bigcap E)\bigcup(X\setminus E) \\ f(x), & (X\setminus B_0)\bigcap E \end{cases}.$$

由于 $h_n, n=1,2,\cdots$ Borel 可测, 因此 h Borel 可测, 显然 $\mu^*(\{x\in E: h(x)\neq f(x)\})=0$.

当 f 几乎处处有限时, 我们修正 f 的值使得其为有限函数 $\tilde{f}$, 从上述证明可以看到, 对应 $\tilde{f}$ 取的 h 是有限函数. 显然有 $\mu^*(\{x\in E: h(x)\neq f(x)\})=0$.

我们完成了证明.

接下来就是逼近手法的训练题.

例题 13.26 设 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx < \infty, p\geqslant 1$, 证明

$$\lim_{|h|\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x)+f(x-h)|^p dx = 2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx.$$

笔记 本题虽然不是 Friedrichs mollifier technique 但确是 Friedrichs mollifier technique 的想法.

证明 不妨只考虑 $h\to+\infty$.

当 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 设 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\mathrm{supp} f\subset(-n,n)$, 则当 $h>2n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f(x)+f(x-h)|^p dx &= \int_{|x|>n}|f(x-h)|^p dx + \int_{-n}^{n}|f(x)+f(x-h)|^p dx \\ &= \int_{|x+h|>n}|f(x)|^p dx + \int_{-n}^{n}|f(x)|^p dx \\ &= 2\int_{-n}^{n}|f(x)|^p dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx.\end{aligned}$$

对一般的满足 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx<\infty$ 的 f, 约定

$$||f||_p \triangleq \left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

对任何 $\epsilon>0$, 由定理13.49, 存在 $g\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 使得

$$||f-g||_p < \frac{\epsilon}{2^{\frac{1}{p}}+2}.$$

那么当 h 充分大, 我们有

$$\begin{aligned}\left|||f(x)+f(x-h)||_p-2^{\frac{1}{p}}||f||_p\right| &\leqslant \left|||f(x)+f(x-h)||_p-||g(x)+g(x-h)||_p\right| \\ &\quad+\left|||g(x)+g(x-h)||_p-2^{\frac{1}{p}}||g||_p\right|+2^{\frac{1}{p}}\left|||f||_p-||g||_p\right| \\ &\leqslant ||f(x)-g(x)+f(x-h)-g(x-h)||_p+2^{\frac{1}{p}}||f-g||_p \\ &\leqslant \left(2^{\frac{1}{p}}+2\right)||f-g||_p \\ &\leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

因此由 ϵ 任意性即得我们需要的结果.

练习 13.2 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leqslant Mt^2. \tag{13.123}$$

证明

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant M|t|.$$

笔记 直观的, 若 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|}{t^2}&=\lim_{t\to0^+}\frac{|f'(x+t)-f'(x-t)|}{2t}\\ &=\lim_{t\to0^+}\frac{|f''(x+t)+f''(x-t)|}{2}=|f''(x)|\leqslant M,\end{aligned}$$

于是由拉格朗日中值定理即得

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant M|t|.$$

证明 取磨光核 χ 如13.14, 则

$$f_\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\chi_\delta(x-y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\delta y)\chi(y)\,dy.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}|f_\delta(x+t)-2f_\delta(x)+f_\delta(x-t)|&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+t-\delta y)-2f(x-\delta y)+f(x-t-\delta y)]\chi(y)\,dy\right|\\ &\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t-\delta y)-2f(x-\delta y)+f(x-t-\delta y)|\chi(y)\,dy\\ &\overset{(13.123)}{\leqslant}M\int_{-\infty}^{\infty}|t|^2\chi(y)\,dy=M|t|^2,\end{aligned}$$

于是由笔记我们有

$$|f_\delta'(x+t)-f_\delta'(x)|\leqslant M|t|. \tag{13.124}$$

又分部积分得

$$f_\delta'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\chi_\delta'(x-y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f'(y)\chi_\delta(x-y)\,dy,$$

于是我们有

$$\lim_{\delta\to0^+}|f_\delta'(x)-f'(x)|\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\int_{-1}^{1}|f'(x-\delta y)-f'(x)|\chi(y)\,dy=0,$$

这就证明了

$$\lim_{\delta\to0^+}|f_\delta'(x)-f'(x)|=0,\forall x\in\mathbb{R},$$

从而对(13.124)取极限得

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant M|t|.$$

练习 13.3 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant M_1|x-y|,|f(x)|\leqslant M_0. \tag{13.125}$$

证明

$$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}.$$

证明 由导数内插11.34, 我们知道当 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 时有

$$|f''(x)|\leqslant M_1,|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}.$$

一般情况取磨光核 χ 如13.14, 则

$$f_\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\chi_\delta(x-y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\delta y)\chi(y)\,dy.$$

于是我们有

$$|f_\delta'(x_1)-f_\delta'(x_2)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x_1-\delta y)-f'(x_2-\delta y)|\cdot\chi(y)\,dy\leqslant M_1|x_1-x_2|,$$

以及

$$|f_\delta(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\cdot\chi_\delta(x-y)\,dy\leqslant M_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi_\delta(x-y)\,dy=M_0.$$

因此就有

$$|f_\delta'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}.$$

和训练13.2类似, 我们知道

$$\lim_{\delta\to0^+}f_\delta'(x)=f(x)\Rightarrow|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_1}.$$

13.7 函数性态分析训练集

常微分方程性态分析本质上就是函数性态分析, 本来没必要区分, 但为了训练方便, 我们仍然做一个子节分类. 此外要注意不代表性态分析部分就不具有常微分方程的训练题.

13.7.1 微分方程类

定理 13.55 (常微分方程第一比较定理) 设 $f(x,y),g(x,y)$ 是区域 $G\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数且设 $x_0\in(a,b)$ 使得函数 $y_1,y_2\in C^1(a,b)$ 满足 $y_1(x_0)=y_2(x_0)$ 且

$$y_1'(x)=f(x,y_1(x)),y_2'(x)=g(x,y_2(x)),x\in(a,b). \tag{13.126}$$

若

$$f(x,y)<g(x,y),\forall(x,y)\in G, \tag{13.127}$$

则

$$y_1(x)<y_2(x),\forall x\in(x_0,b). \tag{13.128}$$

$$y_2(x)<y_1(x),\forall x\in(a,x_0). \tag{13.129}$$

♡

证明 若(13.128)不成立, 记 $z(x)=y_1(x)-y_2(x),x\in[x_0,b)$, 则由(13.127)得 $z(x_0)=0,z'(x_0)<0$, 故存在 $\delta>0$

使得

$$z(x)<0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta).$$

取[29]

$$c\triangleq\inf\{x\in[x_0+\delta,b):z(x)=0\}\geqslant x_0+\delta,$$

我们有 $z(c)=0$ 且在 c 的去心左邻域内有 $z<0$, 从而

$$z'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{z(x)-z(c)}{x-c}\geqslant 0.$$

但由(13.127)得

$$y_1'(c)=f(c,y_1(c))<g(c,y_2(c))=y_2'(c)\Rightarrow z'(c)<0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了(13.128). 不等式(13.129)类似可证, 这就完成了证明.

经典的 Peano 解的存在定理告诉我们: 设

$$f(t,x)\in C(R),R=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2:|t-t_0|\leqslant a,|x-x_0|\leqslant b\right\},$$

则令 $M=\max\limits_{(t,x)\in R}|f(t,x)|,h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$, 必有初值问题

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}.\tag{13.130}$$

在 $|t-t_0|\leqslant h$ 有解.

定义 13.15 (∗)

设 φ,Φ 分别是初值问题(13.130)在某个区间 I 的两个解. 若对(13.130)在 I 上的任一个解 ψ 都有

$$\varphi(t)\leqslant\psi(t)\leqslant\Phi(t),\forall t\in I,$$

则称 φ,Φ 分别是初值问题(13.130)在 I 的最小解和最大解. ♣

定理 13.56 (最大最小解存在性 ∗)

对任何 $\delta\in(0,h)$, 初值问题(13.130)在 $|t-t_0|\leqslant\delta$ 的最大最小解存在. ♡

证明 由 Peano 解的存在定理, 我们有初值问题

$$x'(t)=f(t,x)+\frac{1}{m},x(t_0)=x_0$$

必有解

$$x=\varphi_m(t),|t-t_0|\leqslant h_m,h_m=\min\left\{a,\frac{b}{M_m}\right\},M_m=\sup_{(t,x)\in R}\left|f(t,x)+\frac{1}{m}\right|,m\in\mathbb{N}.$$

因为 $\lim\limits_{m\to\infty}h_m=h$, 我们任意固定 $\delta_1\in(0,h)$, 当 m 充分大, (13.130)的解和 φ_m 在 $|t-t_0|\leqslant\delta_1$ 都有定义. 另外一方面, 我们有

$$\varphi_m(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\left[f(\tau,\varphi_m(\tau))+\frac{1}{m}\right]\mathrm{d}\tau.\tag{13.131}$$

于是对 $|t_1-t_0|\leqslant\delta_1,|t_2-t_0|\leqslant\delta_1$ 和充分大的 m 我们有

$$\begin{aligned}|\varphi_m(t_1)-\varphi_m(t_2)|&=\left|\int_{t_1}^{t_2}\left[f(\tau,\varphi_m(\tau))+\frac{1}{m}\right]\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}(M+1)\,\mathrm{d}\tau\right|=(M+1)|t_2-t_1|,\end{aligned}$$

[29]集合非空来自假设(13.128)不成立.

即 $\{\varphi_m\}$ 在 $|t-t_0|\leqslant\delta_1$ 等度连续. 由

$$|\varphi_m(t)|\leqslant|x_0|+|\varphi_m(t)-x_0|\leqslant|x_0|+b$$

得 $\{\varphi_m\}$ 在 $|t-t_0|\leqslant\delta_1$ 一致有界. 故由定理13.12得 $\{\varphi_m\}$ 有某个在 $|t-t_0|\leqslant\delta_1$ 一致收敛的子序列, 不妨仍然记为 $\{\varphi_m\}$. 在(13.131)两边让 $m\to+\infty$ 得某个 Φ 是初值问题(13.130)在 $|t-t_0|\leqslant\delta_1$ 的解. 由定理13.55知对任何初值问题(13.130)的解 φ 都有

$$\varphi(t)<\varphi_m(t),\forall t\in(t_0,t_0+\delta_1),\varphi(t)>\varphi_m(t),\forall t\in(t_0-\delta_1,t_0).$$

让 $m\to+\infty$ 得

$$\varphi(t)\leqslant\Phi(t),\forall t\in(t_0,t_0+\delta_1),\varphi(t)\geqslant\Phi(t),\forall t\in(t_0-\delta_1,t_0).$$

同理可得初值问题(13.130)的解 Ψ 使得

$$\varphi(t)\geqslant\Psi(t),\forall t\in(t_0,t_0+\delta_1),\varphi(t)\leqslant\Psi(t),\forall t\in(t_0-\delta_1,t_0).$$

设

$$Z(t)\triangleq\begin{cases}\Phi(t), & t\in[t_0,t_0+\delta_1]\\ \Psi(t), & t\in[t_0-\delta_1,t_0]\end{cases},W(t)\triangleq\begin{cases}\Psi(t), & t\in[t_0,t_0+\delta_1]\\ \Phi(t), & t\in[t_0-\delta_1,t_0]\end{cases},$$

于是 $Z(t),W(t)$ 分别是初值问题(13.130)在 $|t-t_0|\leqslant\delta_1$ 的的最大解和最小解.

相似这个证明, 我们可以得到[30]

定理 13.57 (常微分方程第二比较定理 *)

设 $f(x,y),g(x,y)$ 是区域 $G\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数且设 $x_0\in(a,b)$ 使得函数 $y_1,y_2\in C^1(a,b)$ 满足 $y_1(x_0)=y_2(x_0)$ 且

$$y_1'(x)=f(x,y_1(x)),y_2'(x)=g(x,y_2(x)),x\in(a,b).\tag{13.132}$$

以及

$$f(x,y)\leqslant g(x,y),\forall(x,y)\in G.\tag{13.133}$$

若还有 y_2 是 $y'=g(x,y),y(x_0)=y_1(x_0)$ 在 $[x_0,b)$ 的最大解, $(a,x_0]$ 的最小解, 则

$$y_1(x)\leqslant y_2(x),\forall x\in(x_0,b).\tag{13.134}$$

$$y_2(x)\leqslant y_1(x),\forall x\in(a,x_0).\tag{13.135}$$

笔记 实际运用中 g 往往具有局部 Lipschitz 性从而初值问题 $y'=g(x,y),y(x_0)=y_1(x_0)$ 的解唯一. 这就不用担心如何计算其最大解和最小解问题.

练习 13.4 设 $y'=x+y^3$ 且 $y(0)=0$, 证明: 若 y 的解的最大成立区间为 (a,b), 则 $a=-\infty,b\in\left[\frac{(2\pi)^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{9}{10}}},\frac{5}{4}2^{\frac{3}{5}}\right]$.

笔记 用一阶构造类的方法11.10, 我们把 y^2 看成整体解微分方程.

证明 显然 $a<0,b>0$. 求导可证

$$y(x)=e^{\int_0^x y^2(t)\mathrm{d}t}\cdot\int_0^x te^{-\int_0^t y^2(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t,x\in(a,b).$$

注意到

$$y(x)>0,\forall x\in(a,b).\tag{13.136}$$

由(13.136)得

$$y'(x)>0,\forall x\in(0,b).\tag{13.137}$$

若 $a>-\infty$, 则由常微分方程解的延拓定理13.18知 $y(x)$ 在 $x=a$ 右邻域内应该无界, 从而存在 $x_n\to a^+$ 使得

[30]我们还是给一个证明的引用.

$y(x_n)\to+\infty$. 由(13.136)得

$$\left[\frac{1}{2y^2(x)}+x\right]'=-\frac{y'(x)}{y^3(x)}+1=\frac{-x}{y^3(x)}>0,\forall x\in(0,a),$$

故 $\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{1}{2y^2(x)}+x\right)$ 存在. 现在

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{1}{2y^2(x)}+x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2y^2(x_n)}+x_n\right)=a,$$

从而 $\lim\limits_{x\to a^+}y(x)=+\infty$. 因此当 x 充分靠近 a, 由 $y'=x+y^3$ 知 y 应该是递增的, 这和 $\lim\limits_{x\to a^+}y(x)=+\infty$ 矛盾! 故 $a=-\infty$.

若 $b=+\infty$. 注意到

$$\left[\frac{1}{2y^2(x)}+x\right]'=\frac{-y'(x)}{y^3(x)}+1=\frac{-x}{y^3(x)}<0,\forall x>0,$$

于是 $\frac{1}{2y^2(x)}+x$ 在 $(0,+\infty)$ 递减, 但是

$$\frac{1}{2y^2(x)}+x\geqslant x\to+\infty,x\to+\infty,$$

这就是一个矛盾!

若 $b<+\infty$, 则由常微分方程解的延拓定理13.18知 y 在 $[0,b)$ 无界, 因此由(13.136)和(13.137)知 $\lim\limits_{x\to b^-}y(x)=+\infty$.

注意到 $y'(x)\leqslant b+y^3(x),\forall x\in[0,b)$, 于是我们有

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}b^{\frac{2}{3}}}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{b+t^3}\mathrm{d}t=\int_0^b\frac{y'(t)}{b+y^3(t)}\mathrm{d}t\leqslant b,$$

故

$$b\geqslant\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{5}}=\frac{(2\pi)^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{9}{10}}}\approx1.12072.$$

我们设 $b>\frac{5}{4}2^{\frac{3}{5}}\approx1.8946$, 则由 $\frac{1}{2y^2(x)}+x$ 在 $(0,+\infty)$ 递减知

$$\frac{1}{2y^2(x)}+x\geqslant b\Rightarrow y(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2(b-x)}},\forall x\in[0,b).\tag{13.138}$$

又由 $y'(x)\geqslant x,\forall x\in[0,b)$ 知

$$y(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2,\forall x\in[0,b).$$

结合(13.138)得 $\frac{1}{2}x^2\leqslant\frac{1}{\sqrt{2(b-x)}},\forall x\in[0,b)$, 即 $b\leqslant\frac{2}{x^4}+x,\forall x\in[0,b)$. 为了使得右边达到最小, 取 $x=2^{\frac{3}{5}}\approx1.5157<b$, 我们有

$$b\leqslant\left(\frac{2}{x^4}+x\right)\Big|_{x=2^{\frac{3}{5}}}=\frac{5}{4}2^{\frac{3}{5}},$$

这就是一个矛盾! 故我们证明了 $a=-\infty,b\in\left[\frac{(2\pi)^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{9}{10}}},\frac{5}{4}2^{\frac{3}{5}}\right]\subset(1,2)$.

例题 13.27 设 $p,q\in\mathbb{R},f\in C(\mathbb{R})$ 是周期 $T>0$ 函数. 证明若 $x^2+px+q=0$ 没有形如 $\frac{2k\pi i}{T},k\in\mathbb{Z}$ 的解, 则微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 存在周期解.

笔记 作为常系数线性微分方程, 读者当然可以直接使用卷积特解法22.1直接写出通项来证明周期解存在. 我们这里提醒读者采用向量值的观点也是一个重要技巧.

证明 把方程写为

$$\begin{pmatrix}y'\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-q&-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\f(x)\end{pmatrix}.$$

记

$$\mathbf{y}\triangleq\begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix},\mathbf{f}(x)\triangleq\begin{pmatrix}0\\f(x)\end{pmatrix},A\triangleq\begin{pmatrix}0&1\\-q&-p\end{pmatrix}.$$

对微分方程

$$\begin{cases}\mathbf{y}'=A\mathbf{y}+\mathbf{f}(x)\\\mathbf{y}(T)=\mathbf{y}(0)\end{cases}$$

的解 $\mathbf{y}$ 有 $\mathbf{y}(x+T),\mathbf{y}(x)$ 是 $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}+\mathbf{f}(x)$ 有相同初值的解. 解的唯一性表明 $\mathbf{y}(x+T)\equiv\mathbf{y}(x)$, 从而 $\mathbf{y}$ 是周期 T 解.

常数变易法得

$$\mathbf{y}(x)=e^{A\mathbf{x}}\mathbf{y}(0)+\int_0^x e^{A(x-s)}\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

为了 $\mathbf{y}(T)=\mathbf{y}(0)$, 只需

$$\mathbf{y}(0)=\left(1-e^{AT}\right)^{-1}\int_0^T e^{A(x-s)}\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s,$$

由定理23.32, 这相当于 A 没有形如 $\frac{2k\pi i}{T},k\in\mathbb{Z}$ 的特征值. 我们得证.

在张伟年的常微分方程中, 有一个题目证明过于口语, 导致非常多的人学不懂常微分方程, 现在我们来严格化.

练习 13.5 证明: 常微分方程 $\begin{cases}x'=\left(-x+t^2-3t+2\right)e^{xt}\\x(t_0)=x_0\end{cases}$ 的解能延拓到 $[t_0,\infty)$.

证明 由解的延拓定理13.18, 我们知道若解只能延拓到 $[t_0,\alpha),\alpha>t_0$, 则 $x(t)$ 是 $[t_0,\alpha),\alpha>t_0$ 上的无界函数.

Step 1 若 $-x(t_0)+t_0^2-3t_0+2<0$, 则考虑非空[31]有下界集

$$S=\left\{t_0<s<\alpha:-x(t)+t^2-3t+2\leqslant 0,\forall t\in[t_0,s]\right\}.$$

记 $t_1=\sup S$, 则存在 $s_n\in S$, 使得 s_n 递增收敛到 t_1. 当 $t_1<\alpha$, 若 $-x(t_1)+t_1^2-3t_1+2\neq 0$, 从而

$$-x(s_n)+s_n^2-3s_n+2\leqslant 0\Rightarrow -x(t_1)+t_1^2-3t_1+2<0,$$

由连续函数的性质知 t_1 邻域内仍然有 $-x(t)+t^2-3t+2\leqslant 0$, 这和 t_1 是上确界而矛盾! 故 $-x(t_1)+t_1^2-3t_1+2=0$. 当 $t_1=\alpha$, 则 $-x(t)+t^2-3t+2\leqslant 0$ 恒成立, 故 $x(t)$ 递减, 从而

$$\lim_{t\to\alpha^-}x(t)\geqslant\lim_{t\to\alpha^-}\left(t^2-3t+2\right)=\alpha^2-3\alpha+2>-\infty.\tag{13.139}$$

这和 $x(t)$ 无界矛盾! 因此我们证明了

$$t_1\in(t_0,\alpha),x(t_1)=t_1^2-3t_1+2.$$

此时

$$0=x'(t_1)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(t_1)-x(s_n)}{t_1-s_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(t_1^2-3t_1+2\right)-\left(s_n^2-3s_n+2\right)}{t_1-s_n}=2t_1-3\Rightarrow t_1\geqslant\frac{2}{3}.$$

[31] 由连续函数的性质知非空.

类似的, 若 $-x(t_0)+t_0^2-3t_0+2>0$, 则必有

$$t_1\in(t_0,\alpha),x(t_1)=t_1^2-3t_1+2,t_1\leqslant\frac{2}{3}.$$

Step 2 若 $-x(t_0)+t_0^2-3t_0+2<0$, 现在由 **Step 1** 得到 t_1. 若有某个 $t_2>t_1$ 使得 $-x(t)+t^2-3t+2>0$, 则对这个 t_2, 用 **Step 1** 可得一个 $t_3>t_2>\frac{2}{3}$ 使得 $t_3\leqslant\frac{2}{3}$, 矛盾! 因此对任何 $t>t_1$ 有 $-x(t)+t^2-3t+2\leqslant 0$, 而此时 x_t 递减, 同样因为(13.139)矛盾! 类似的可知 $-x(t_0)+t_0^2-3t_0+2>0$ 也不发生, 这样可得 $-x(t_0)+t_0^2-3t_0+2=0$, 我们可以随意指定 $[t_0,\alpha)$ 中的点为新的初值, 此时必有 $-x(t)+t^2-3t+2\equiv 0$, 从而 $x(t)$ 有界矛盾!

例题 13.28 考虑微分方程

$$\begin{cases}y'=\lambda\left(1+\sin^2x+\sin^2y\right)+x\\ y(0)=0\end{cases}.\tag{13.140}$$

证明:

(1): 方程(13.140)的解的存在区间为 $\mathbb{R}$.

(2): 对任何 $b\in\mathbb{R}$, 存在唯一的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得方程(13.140)的解满足 $y(1)=b$.

证明

(1): 设最大存在区间为 (a,b). 注意到

$$|y'(x)|=\left|\lambda\left(1+\sin^2x+\sin^2y(x)\right)+x\right|\leqslant 3|\lambda|+\max\{|a|,|b|\},\forall x\in(a,b),$$

由 Cantor 定理知 y 可以延拓到 $[a,b]$. 这就和 (a,b) 为最大存在区间矛盾! 故方程(13.140)的解的存在区间为 $\mathbb{R}$.

(2): 由解对参数的可微依赖定理, 我们知道方程(13.140)存在解 $y(x,\lambda)\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

注意到

$$y(1,\lambda)=\lambda\int_0^1\left(1+\sin^2t+\sin^2y(t,\lambda)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}.$$

我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}y(1,\lambda)=+\infty,\lim_{\lambda\to-\infty}y(1,\lambda)=-\infty,$$

所以存在点 $\lambda_0\in\mathbb{R}$ 使得 $y(1,\lambda_0)=b$.

注意到

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right)}{\partial x}=1+\sin^2x+\sin^2y+\lambda\sin(2y(x,\lambda))\cdot\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda},$$

我们解微分方程得

$$\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^x\left[1+\sin^2t+\sin^2y(t,\lambda)\right]e^{\int_x^t\lambda\sin(2y(s,\lambda))\mathrm{d}s}\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{\partial y(1,\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^1\left[1+\sin^2t+\sin^2y(t,\lambda)\right]e^{\int_1^t\lambda\sin(2y(s,\lambda))\mathrm{d}s}\mathrm{d}t>0,\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

这就证明了存在唯一的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得方程(13.140)的解满足 $y(1)=b$.

例题 13.29 设 $x:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$ 是下述常微分方程的解

$$x''+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x+1)^3}=0.\tag{13.141}$$

证明 x 是周期函数.

证明 首先由(13.141)知存在 $C\in\mathbb{R}$ 使得

$$(x')^2+\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{4(x+1)^2}=C.\tag{13.142}$$

于是由(13.142)知

$$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{4(x+1)^2}\leqslant C.\tag{13.143}$$

若对任何 $t_0>0$, 都有 $x'(t)\neq 0,\forall t>t_0$. 则 $x(t)$ 在 $(t_0,+\infty)$ 单调. 由(13.143)知 x 是有界函数. 于是

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=s\geqslant -1.$$

由结论12.1知存在

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}h_n=+\infty,$$

使得

$$\lim_{n\to\infty}x'(t_n)=\lim_{n\to\infty}x''(h_n)=0.$$

于是由(13.141)知

$$0=\lim_{n\to\infty}\left(x''(h_n)+\frac{1}{4(1+x(h_n))}-\frac{1}{4(x(h_n)+1)^3}\right)=\frac{1}{4(s+1)}-\frac{1}{4(s+1)^3},$$

即 $s=0$.

再由(13.142)知

$$C=\lim_{n\to\infty}\left((x'(t_n))^2+\frac{1}{2}\ln(1+x(t_n))+\frac{1}{4(x(t_n)+1)^2}\right)=\frac{1}{4},$$

即 $C=\frac{1}{4}$. 结合(13.143)我们知道 $x\equiv 0$.

若对任何 $t_0>0$, 都有 $t>t_0$, 有 $x'(t)=0$. 则因为 $x'=0$ 时由(13.142)必有 $\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{4(x+1)^2}=C$, 我们知道 x 取值只能有有限种可能. 因此必然存在 $t_2>t_1>0$ 使得

$$x(t_2)=x(t_1),x'(t_1)=x'(t_2)=0.$$

由于 $x(t+t_2-t_1)$ 和 $x(t)$ 在 t_1 有相同的初值条件, 由解的唯一性定理13.17知 $x(t+t_2-t_1)\equiv x(t)$, 故 x 有周期 t_2-t_1.

来看复旦 2024 考研真题.

例题 13.30 给定 $x_0\in\mathbb{R}$, $f\in C[0,+\infty)$, 证明: 至多存在一个 $y\in C^1[0,+\infty)$ 使得

$$y'=-y^3+f(x),\forall x\geqslant 0,y(0)=x_0.$$

证明 若有两个满足条件的 y_1,y_2, 则有

$$y_1'-y_2'=y_2^3-y_1^3=-\left(y_2^2+y_1^2+y_1y_2\right)(y_1-y_2).$$

解方程得

$$y_1(x)-y_2(x)=ce^{-\int_0^x\left(y_2^2(t)+y_1^2(t)+y_1(t)y_2(t)\right)\mathrm{d}t}.$$

代入初值条件得 $c=0$, 故 $y_1=y_2$, 这就完成了证明.

例题 13.31 设 $\epsilon>0$, 考虑微分方程

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(y)\\ y(x_0)=a\end{cases},\tag{13.144}$$

其中 $f\in C([a-\epsilon,a+\epsilon])$ 且 $f(y)=0\Leftrightarrow y=a$. 证明: 对任何 $x_0\in\mathbb{R}$, 微分方程(13.144)的解局部唯一的充分必要条件是

$$\int_a^{a\pm\epsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\text{发散}.\tag{13.145}$$

证明 由 Peano 解的存在定理我们知道微分方程(13.144)的解 y 局部存在. 注意到 $y_1\equiv a$ 是微分方程(13.144)一个解.

充分性: 若(13.145)成立且还有一个解 y_2, 则设 $y_2(x_1)\neq a$. 显然, 必存在 $x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $y_2(x_2)=a$ 且 $(x_2,x_1]$

或者 $[x_1,x_2)$ 上 $y_2\neq a$. 不妨设为前者, 于是由(13.145)和牛顿莱布尼兹公式得

$$x_1-x_2=\int_{x_2}^{x_1}\frac{y_2'(x)}{f(y_2(x))}\mathrm{d}x=\int_a^{y_2(x_1)}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\text{发散},$$

这就是一个矛盾! 因此微分方程(13.144)的解唯一.

必要性: 若(13.145)不成立, 我们首先不妨设

$$f(y)>0,\forall y\in(a,a+\epsilon],$$

于是对任何 $x\geqslant x_0$ 且 x 充分靠近 x_0, 有唯一的 $y=y(x)\geqslant a$ 使得

$$\int_a^{y(x)}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=x-x_0.$$

注意到

$$\frac{\partial\left(\int_a^y\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t-x+x_0\right)}{\partial y}|_{(x,y(x))}=\frac{1}{f(y(x))}>0,\forall x\text{在}a\text{去心右邻域}.$$

由隐函数存在定理知我们找到的解 y 在 a 的去心右邻域连续可微且 $y'(x)=f(y(x))$. 现在

$$0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\int_a^{y(x)}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\Rightarrow\lim_{x\to x_0^+}y(x)=a=y(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0^+}y'(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(y(x))=f(a)=0.$$

导数极限定理12.2表明 y' 在 $x=0$ 连续且 $y'(0)=0$. 定义 $y(x)=a,x<x_0$, 于是我们就找到了一个非常数解 y, 故必要性得证.

例题 13.32 考虑微分方程

$$\begin{cases}y'=x^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases}.\tag{13.146}$$

证明上述微分方程(13.146)解的最大存在区间是有界区间.

证明 设 y 的存在区间为 (a,b) 不是有界的, 则 a,b 必有一个为 ∞, 不妨设为 b. 考虑

$$y'\geqslant 1+y^2,\forall x\geqslant 1,$$

我们有

$$\arctan y\geqslant x-1,\forall x\geqslant 1.$$

让 $x\to+\infty$ 可得矛盾! 故微分方程(13.146)解的最大存在区间是有界区间.

例题 13.33 证明存在唯一的 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 使得

$$f'(t)=f^3(t)+\cos t,\forall t\in\mathbb{R}.$$

然后对这个 f, 证明存在 $T>0$ 使得 f 有周期 T.

证明

唯一性:

设 $f_1,f_2\in C^1(\mathbb{R})$ 满足原方程, 若 $f_1(t_0)=f_2(t_0)$, 则由解的唯一性定理易得 $f_1\equiv f_2$. 其余情况考虑非 0 函数 $h\triangleq f_1-f_2$, 此时不妨设 h 为正, 则

$$h'=h\left(f_1^2+f_1f_2+f_2^2\right)\geqslant\frac{1}{4}h(f_1-f_2)^2=\frac{1}{4}h^3.$$

我们有

$$\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2}t\right)'=-\frac{2h'}{h^3}+\frac{1}{2}\leqslant 0,$$

此时

$$\frac{1}{h^2(t)}\leqslant\frac{1}{h^2(0)}-\frac{t}{2},\forall t\geqslant 0,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了唯一性.

存在性:

对 $x\in\mathbb{R}$, 考虑有界 Lipschitz 连续函数

$$F(y)\triangleq\begin{cases}1, & y\geqslant 1\\ y^3, & |y|\leqslant 1\\ -1, & y\leqslant -1\end{cases}.$$

注意由解的连续依赖和延拓定理, 微分方程

$$\begin{cases}y'=F(y)+\cos t\\ y(0)=x\end{cases}. \tag{13.147}$$

的解 $y(t,x)\in C\left(\mathbb{R}^2\right)$.

当 $x>1$ 有 $y'(0,x)=2>0$. 记

$$a\triangleq\sup\{t\geqslant 0: y(s,x)>1,\forall s\in[0,t]\}\in(0,+\infty].$$

我们有

$$y'(t,x)=1+\cos t\geqslant 0,\forall t\in[0,a],$$

从而

$$y(a,x)\geqslant y(0,x)>1.$$

这只能有 $a=\infty$, 即

$$y'(t,x)=1+\cos t,\forall t\geqslant 0.$$

现在就有

$$y(2\pi,x)-x=2\pi,\forall x>1.$$

类似可得

$$y(2\pi,x)-x=-2\pi,\forall x<-1.$$

于是连续函数介值定理得 $x_0\in[-1,1]$ 使得

$$y(2\pi,x_0)=x_0=y(0,x_0).$$

现在 $y(t+2\pi,x_0),y(t,x_0)$ 满足相同的初值问题(13.147), 我们有

$$y(t+2\pi,x_0)=y(t,x_0),\forall t\in\mathbb{R}.$$

若

$$M\triangleq\max_{t\in\mathbb{R}}y(t,x_0)=y(t_0,x_0)>1,$$

则在 t_0 邻域 $y(t,x_0)>1$, 从而 $y(t,x_0)$ 在这个邻域递增且

$$y'(t_0,x_0)=1+\cos t_0=0.$$

但是在 t_0 邻域 $1+\cos t$ 可能取负值, 这就是一个矛盾!, 即

$$y(t,x_0)\leqslant 1,\forall t\in\mathbb{R}.$$

同理可得

$$y(t,x_0)\geqslant -1,\forall t\in\mathbb{R}.$$

因此 $y(t,x_0)$ 是原方程的周期 2π 解.

例题 13.34 考虑微分方程

$$\begin{cases}y'(t)=\prod\limits_{k=1}^{5}\left(y(t)-k^2\right)\left(y(t)+k^2\right)\\ y(0)=12\end{cases}.$$

求 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

笔记 从考试角度来讲, 肯定可以猜测 y 应该趋于 9 或者 16. 对 $9<y<16$, 我们有

$$y'=\prod_{k=1}^{5}\left(y-k^2\right)\left(y+k^2\right)>0,$$

所以直接猜测出答案 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=16$.

证明 由解的存在唯一性定理知 y 存在. 由解的延拓定理容易得 y 解在整个实轴上有定义. 由 $y'(0)>0$ 可考虑

$$t_0\triangleq\sup\left\{t\geqslant 0:9<y(x)<16,\forall x\in[0,t]\right\}.$$

则若 $t_0<\infty$, 必有 $y(t_0)=16$, 因此

$$+\infty=\int_{12}^{y(t_0)}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{5}\left(z-k^2\right)\left(z+k^2\right)}\mathrm{d}z=\int_0^{t_0}\frac{y'(t)}{\prod\limits_{k=1}^{5}\left(y(t)-k^2\right)\left(y(t)+k^2\right)}\mathrm{d}t=t_0,\tag{13.148}$$

这就是一个矛盾! 故 $t_0=+\infty$. 又继续由(13.148)得

$$\lim_{y\to+\infty} y(t)=y(t_0)=16.$$

例题 13.35

1. 设 $f(x,y)$ 是包含 (x_0,y_0) 的开集 G 上的实解析函数, 证明
$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$
存在一个 x_0 某个邻域上的实解析解.
2. 设 f 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的包含 $(x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的开集 G 上的实解析函数, 证明
$$\begin{cases}y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}\right)\\ y^{(k)}(x_0)=y_k,k=0,1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$
存在一个 x_0 某个邻域上的实解析解.
3. 特别的, 在 2 中, 如果 f 在原点邻域内的 Taylor 级数系数非负且
$$y_k\geqslant 0,k=0,1,2,\cdots,n-1,$$
则解 y 在原点邻域内的 Taylor 级数系数非负.

笔记 本题展示的方法叫做强函数法, 是经典的实解析系数的线性微分方程的处理手法.

证明

1. 为书写简便, 不妨设 $(x_0,y_0)=0$. 设 $\delta>0$ 使得有
$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}f_{i,j}x^iy^j,|x|\leqslant\delta,|y|\leqslant\delta,$$
这里
$$\sum_{i,j=0}^{\infty}|f_{i,j}|\delta^{i+j}<\infty.$$
于是我们知道存在 $C>0$ 使得
$$|f_{i,j}|\leqslant\frac{C}{\delta^{i+j}},\forall i,j=0,1,2,\cdots.$$
接下来考虑微分方程
$$y'=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C}{\delta^{i+j}}x^iy^j=C\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{y}{\delta}\right)},y(0)=0,$$

分离变量可解得

$$y_0(x)=\delta\left(1-\sqrt{1+2C\ln\left(1-\frac{x}{\delta}\right)}\right),x\in\left(-\infty,\delta\left(1-e^{-\frac{1}{2C}}\right)\right],$$

显然这是一个 x 邻域的实解析函数.

考虑形式幂级数 $y(x)\sim\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$, 我们代入方程来确定 $a_i,i=0,1,2,\cdots$. 首先 $a_0=y(0)=0$, 然后

$$a_1=y'(0)=f(0,0),a_2=2y''(0)=f'_x(0,0)+y'(0)f'_y(0,0),\cdots,$$

如此下去可用 $f_{i,j}$ 表示出 a_i.

设 $y_0(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_ix^i$, 则上述迭代过程可以类似的进行, 即完全一样的用 $\frac{C}{\delta^{i,j}}$ 表示出 b_i, 从而 $|a_i|\leqslant b_i,i=0,1,2,\cdots$, 这也得到了 $y(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ 确实是一个满足原方程的实解析解, 我们完成了证明.

2. 不失一般性, 假设

$$(x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})=(0,0,\cdots,0).$$

注 和第一问同样的想法, 我们只需解微分方程

$$y^{(n)}=\frac{C}{\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\left(1-\frac{y'}{\delta}\right)\cdots\left(1-\frac{y^{(n-1)}}{\delta}\right)},y^{(k)}(0)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1.\tag{13.149}$$

看看是否为实解析解即可. 但这样做会发现方程(13.149)不容易显式求出, 因此我们要抽象的处理.

首先由常微分方程解的存在定理我们知道(13.149)在 0 邻域内存在唯一解 y. 回忆定理19.8, 我们来证明

$$y^{(k)}\geqslant 0,k=0,1,2,\cdots$$

在 0 的某个右邻域内成立.

首先由方程(13.149)初值条件, 我们知道在 0 的某个邻域内可设

$$y^{(k)}<\delta,k=0,1,\cdots,n-1,$$

从而在这个邻域内 $y^{(n)}>0$, 从而由 $y^{(n-1)}$ 递增得 $y^{(n-1)}$ 在这个邻域的右侧非负, 同样的可得 $y^{(k)},k=0,1,2,\cdots,n-2$ 在这个邻域右侧也非负.

由定理10.2, 注意到对每一个 $m=1,2,\cdots$, 都有

$$\begin{aligned}y^{(n+m)}&=C\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{\delta}\right)^{i_0}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{i_1}\left(\frac{y'}{\delta}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{y^{(n-1)}}{\delta}\right)^{i_n}\right]^{(m)}\\&=Cm!\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=0}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m\\\alpha_j\in\mathbb{N}_0,j=0,1,\cdots,n}}\frac{1}{\delta^{i_0+i_1+\cdots+i_n}}\left(x^{i_0}\right)^{(\alpha_0)}\left(y^{i_1}\right)^{(\alpha_1)}\cdots\left(\left(y^{(n-1)}\right)^{i_n}\right)^{(\alpha_n)}.\end{aligned}$$

于是归纳可得在 0 的某个右邻域内有

$$y^{(k)}\geqslant 0,k=0,1,2,\cdots.$$

因此定理19.8告诉我们 y 在原点的 Taylor 级数在这个右邻域上收敛到 y. 而由零点孤立性19.7知这个 Taylor 级数确定的 0 邻域内的和函数也是微分方程(13.149)的解. 因此由解的唯一性知道和函数就是 y, 所以我们证明了 y 在 0 的邻域实解析. 从而完成了本题的证明.

3. 直接在方程

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}\right)$$

两边用链式法则求导并代入 x_0 易归纳证明

$$y^{(k)}(x_0)\geqslant 0,\forall k=0,1,2,\cdots,$$

因此我们证明了解 y 在原点邻域内的 Taylor 级数系数非负.

13.7.2 性态分析数学分析题

例题 13.36 设 f 在 $(0,+\infty)$ 可微且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

笔记 本题就是让你证明洛必达法则,因此不可以直接使用洛必达法则.

证明 对任何 $\epsilon>0$,存在 $X>0$ 使得

$$|f'(x)|\leqslant\epsilon,\forall x\geqslant X.$$

对 $x\geqslant X$,由拉格朗日中值定理得

$$|f(x)-f(X)|=|f'(\theta)(x-X)|\leqslant\epsilon(x-X).$$

于是[32]

$$0\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(X)}{x}\right|\leqslant\epsilon\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(1-\frac{X}{x}\right)=\epsilon,$$

即由 ϵ 任意性得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

例题 13.37 设 f 在 $[a,b]$ 上每一个点极限都存在,证明:f 在 $[a,b]$ 有界.

笔记 极限存在必然局部有界,本题就是说局部有界可以推出在紧集上有界. 在大量问题中会有一个公共现象:即局部的性质等价于在所有紧集上的性质. 证明的想法就是有限覆盖.

证明 对每一个 $c\in[a,b]$,因为 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在,我们知道存在 c 的邻域 U_c 使得存在 $M_c>0$ 有

$$\sup_{x\in U_c\bigcap[a,b]}|f(x)|\leqslant M_c.$$

现在 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{c\in[a,b]}U_c$,我们由有限覆盖定理得 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in[a,b]$ 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n}U_{c_k}.$$

因此

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}M_{c_k},$$

这就证明了 f 在 $[a,b]$ 有界.

例题 13.38♡ 设 $f\in D^s(0,+\infty)\bigcap C[0,+\infty),s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0,j=0,1,2,\cdots,s-1. \tag{13.150}$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geqslant0,\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i=1,C>0$,满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leqslant C|f(x)|^{\lambda_1}|f'(x)|^{\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}(x)\right|^{\lambda_s},\forall x\geqslant0. \tag{13.151}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant0.$

证明 分析阶,即不等式(13.151)左右是齐次的. 因此考虑 $K>0$ 使得[33]

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_{s-1}^{\lambda_{s-1}}x_s^{\lambda_s+1}\leqslant K\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2\right),\forall x_1,x_2,\cdots,x_s\geqslant0. \tag{13.152}$$

[32]注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(X)}{x}=0.$

[33]不妨设 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=1$,左边的函数在紧集上必有最大值.

待定 $M>0$, 构造 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2+\cdots+\left|f^{(s-1)}(x)\right|^2\right]$, 则

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式,(13.151)}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[2\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2+2C\left|f^{(s-1)}\right|\cdot|f|^{\lambda_1}|f'|^{\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}\right|^{\lambda_s}-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right]\\
&=e^{-Mx}\left[2\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2+2C|f|^{\lambda_1}|f'|^{\lambda_2}\cdots\left|f^{(s-1)}\right|^{\lambda_s+1}-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right]\\
&\overset{(13.152)}{\leqslant} e^{-Mx}\left[(2+2CK)\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right],
\end{aligned}$$

当 $M>2+2CK$, 我们有 $g'(x)\leqslant 0$. 于是由(13.150)知 $g(x)\leqslant g(0)=0$, 这就证明了 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

例题 13.39 设 $f\in D^s(0,+\infty)\bigcap C[0,+\infty), s\in\mathbb{N}$ 且满足

$$f^{(j)}(0)=0, j=0,1,2,\cdots,s-1. \tag{13.153}$$

若还存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\geqslant 0$, 满足

$$\left|f^{(s)}(x)\right|\leqslant\lambda_1|f(x)|+\lambda_2|f'(x)|+\cdots+\lambda_s\left|f^{(s-1)}(x)\right|,\forall x\geqslant 0. \tag{13.154}$$

证明 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

证明 待定 $M>0$, 构造 $g(x)=e^{-Mx}\left[|f(x)|^2+|f'(x)|^2+\cdots+\left|f^{(s-1)}(x)\right|^2\right]$, 则

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+\cdots+2f^{(s-1)}f^{(s)}-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right]\\
&\overset{(13.154)}{\leqslant} e^{-Mx}\left[2ff'+2f'f''+\cdots+2f^{(s-2)}f^{(s-1)}+2\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_{j+1}\left|f^{(s-1)}f^{(j)}\right|-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right]\\
&\overset{\text{均值不等式}}{\leqslant} e^{-Mx}\left[|f|^2+2|f'|^2+\cdots+2\left|f^{(s-2)}\right|^2+\left|f^{(s-1)}\right|^2+\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_{j+1}\left|f^{(s-1)}\right|^2+\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_{j+1}\left|f^{(j)}\right|^2-M\sum_{j=0}^{s-1}\left|f^{(j)}\right|^2\right].
\end{aligned}$$

显然, 当 M 充分大必有 $g'(x)\leqslant 0$. 于是由(13.153)知 $g(x)\leqslant g(0)=0$, 这就证明了 $f(x)=0,\forall x\geqslant 0$.

练习 13.6 设 $f\in C^3(-\infty,+\infty)$ 且 f,f',f'',f''' 都为正. 若还有

$$f'''(x)\leqslant f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{13.155}$$

证明

$$f'(x)<\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 注意到 f,f',f'' 都是递增函数, 于是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在, 从而由结论12.1我们知道 f',f'' 都有趋于 $-\infty$ 的子列使得其极限为 0. 因此我们知道

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}f''(x)=0. \tag{13.156}$$

运用(13.155)知

$$f''f'''+(f')^2\leqslant ff''+(f')^2=(ff')',$$

两边在 $(-\infty,x)$ 积分并运用 f'' 递增得

$$\frac{1}{2}(f'')^2+\frac{1}{f''(x)}\int_{-\infty}^{x}(f'(y))^2f''(y)\,dy\leqslant\frac{1}{2}(f'')^2+\int_{-\infty}^{x}(f'(y))^2\,dy\leqslant ff',$$

即

$$\frac{1}{2}\left(f''\right)^2+\frac{1}{3f''}\left(f'\right)^3\leqslant ff'.$$

注意到均值不等式

$$\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3t}\left(f'\right)^3=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{3t}\left(f'\right)^3\geqslant 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}t^2\right)\left(\frac{1}{4}t^2\right)\left(\frac{1}{3t}\left(f'\right)^3\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}f't,$$

于是我们有

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}f'f''\leqslant ff'.$$

两边在 $(-\infty,x)$ 积分得

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(f'\right)^2<f^2,$$

即

$$f'(x)<\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

例题 13.40 设 f' 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

笔记 本题也有积分版本: 设 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续且 $\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

证明 事实上若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0.$ 则存在 $\epsilon_0>0$ 和严格递增的 $x_n\geqslant 0$ 使得

$$\left|f'(x_n)\right|\geqslant\epsilon_0. \tag{13.157}$$

由(13.157)知 x_n 中必有无穷项使得 $f'(x_n)\geqslant\epsilon_0$ 或者 $f'(x_n)\leqslant-\epsilon_0$ 同时发生, 不失一般性, 考虑为前者.

现在由 f' 一致连续知存在 $\delta>0$, 只要 $|x-x'|\leqslant\delta,x,x'\geqslant 0$, 就有

$$\left|f'(x)-f'(x')\right|\leqslant\frac{\epsilon_0}{2}. \tag{13.158}$$

现在我们就有

$$f(x_n)-f(x_n-\delta)=\int_{x_n-\delta}^{x_n}f'(y)\,dy\overset{(13.158)}{\geqslant}\int_{x_n-\delta}^{x_n}\left[f'(x_n)-\frac{\epsilon_0}{2}\right]dy\geqslant\frac{\epsilon_0\delta}{2}>0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n)-f(x_n-\delta)\right]=0,$$

矛盾! 因此我们证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

来看北京大学的期中考试题

例题 13.41 设 $f,g\in R[a,b]$ 满足对 $[a,b]$ 的任一划分

$$P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\lambda(P)\triangleq\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(x_i-x_{i-1}\right),$$

任取 $\xi_i,\eta_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n.$ 证明:

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 记 $w_i(g),i=1,2,\cdots,n$ 是 g 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的振幅. 因为 g 黎曼可积, 所以

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}\left[w_i(g)(x_i-x_{i-1})\right]=0.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(g\left(\eta_i\right)-g\left(\xi_i\right)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right|\\ \leqslant&\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{i=1}^{n}\left(\left|g\left(\eta_i\right)-g\left(\xi_i\right)\right|\cdot\left|x_i-x_{i-1}\right|\right)\\ \leqslant&\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{i=1}^{n}\left[w_i(g)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right],\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(g\left(\eta_i\right)-g\left(\xi_i\right)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right)=0.$$

因为 $fg\in R[a,b]$, 我们有

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)g\left(\xi_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是我们有

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)g\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

练习 13.7 设 $0\leqslant a<b$, 是否存在 $f\in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)x^{2n}\mathrm{d}x>0,\int_a^b f(x)x^{2n+1}\mathrm{d}x<0,n=0,1,2,\cdots. \tag{13.159}$$

如果存在, 请给出存在, 如果不存在, 请给出理由.

证明 我们考虑 $F(t)=\int_a^b f(x)\,e^{-xt}dx,t\geqslant0$, 则容易得到

$$|F(t)|\leqslant\max_{[a,b]}|f|\cdot\int_0^{\infty}e^{-xt}dx=\frac{\max\limits_{[a,b]}|f|}{t},$$

即 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=0$.

但是对任何 $t>0$, 我们都有

$$F(t)=\int_a^b f(x)\,e^{-xt}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f(x)\,\frac{(-xt)^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,t^n}{n!}\int_a^b f(x)\,x^n dx\overset{(13.159)}{\geqslant}\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了满足题目条件的 f 不存在.

练习 13.8 设同胚映射 $f,g:[0,1]\to[0,1]$ 的不动点都有且只有 $x=0,1$, 证明存在同胚映射 $h:[0,1]\to[0,1]$ 使得 $h\circ f\circ h^{-1}=g$.

笔记 思路提示: 本题的想法即局部局部的寻找同胚, 然后在将得到的同胚粘结在一起, 而 $n=1$ 的时候题目条件极其容易做好区间 $(0,1)$ 的剖分. 这种想法广泛存在现代几何学和分析学之中.

证明 注意到 $f(x)-x,g(x)-x$ 在 $(0,1)$ 内必然不变号. 因此可以不妨设 $f(x)>x,g(x)>x,\forall x\in(0,1)$, 其余情况可以类似处理.

于是我们记

$$f^{(n)}(x)\triangleq\begin{cases}\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次}(x), & n>0\\ \underbrace{f^{-1}\circ f^{-1}\circ\cdots\circ f^{-1}}_{-n次}(x), & n<0\\ x, & n=0\end{cases},x\in[0,1],g^{(n)}(x)\triangleq\begin{cases}\underbrace{g\circ g\circ\cdots\circ g}_{n次}(x), & n>0\\ \underbrace{g^{-1}\circ g^{-1}\circ\cdots\circ g^{-1}}_{-n次}(x), & n<0\\ x, & n=0\end{cases},x\in[0,1].$$

我们知道

$$f^{(n+1)}(x)>f^{(n)}(x),g^{(n+1)}(x)>g^{(n)}(x),\forall x\in[0,1],n\in\mathbb{Z}.$$

注意到对固定的 $x\in(0,1)$, 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}f^{(n)}(x)&=\lim_{n\to+\infty}f\left(f^{(n-1)}(x)\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}f^{(n-1)}(x)\right)\\ \lim_{n\to-\infty}f^{(n)}(x)&=\lim_{n\to-\infty}f\left(f^{(n-1)}(x)\right)=f\left(\lim_{n\to-\infty}f^{(n-1)}(x)\right)\end{aligned},$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}f^{(n)}(x)=1,\lim_{n\to-\infty}f^{(n)}(x)=0.$$

类似的 g 也成立上式, 这就证明了

$$(0,1)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[f^{(n)}(x),f^{(n+1)}(x)\right]=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[g^{(n)}(x),g^{(n+1)}(x)\right].$$

任意取定 $x_0\in(0,1)$, 我们定义

$$h(x)=\begin{cases}x, & x\in\{0,1\}\\ g^{(n)}\left(\frac{g(x_0)-x_0}{f(x_0)-x_0}\left(f^{(-n)}(x)-x_0\right)+x_0\right), & x\in\left[f^{(n)}(x_0),f^{(n+1)}(x_0)\right],n\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

断言 h 为所求. 注意到连续映射严格单调等价于单射, f,g 是单射可容易验证 h 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的一一映射且

$$\lim_{x\to f^{(n)}(x_0)}h(x)=g^{(n)}(x_0)=h\left(f^{(n)}(x_0)\right),\forall n\in\mathbb{Z}.$$

于是 h 在 $(0,1)$ 连续且是一一映射, 从而严格单调. 而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}h(x)&=\lim_{n\to+\infty}h\left(f^{(n)}(x_0)\right)=\lim_{n\to+\infty}g^{(n)}(x_0)=1=h(1)\\ \lim_{x\to0^+}h(x)&=\lim_{n\to-\infty}h\left(f^{(n)}(x_0)\right)=\lim_{n\to-\infty}g^{(n)}(x_0)=0=h(0),\end{aligned}$$

这就给出了 $h\in C[0,1]$, 反函数定理告诉我们 h 是 $[0,1]$ 的同胚. 此外

$$\begin{aligned}h\circ f(x)&=\begin{cases}x, & x\in\{0,1\}\\ g^{(n+1)}\left(\frac{g(x_0)-x_0}{f(x_0)-x_0}\left(f^{(-n-1)}(f(x))-x_0\right)+x_0\right), & x\in\left[f^{(n)}(x_0),f^{(n+1)}(x_0)\right],n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ &=\begin{cases}x, & x\in\{0,1\}\\ g\left(g^{(n)}\left(\frac{g(x_0)-x_0}{f(x_0)-x_0}\left(f^{(-n)}(x)-x_0\right)+x_0\right)\right), & x\in\left[f^{(n)}(x_0),f^{(n+1)}(x_0)\right],n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ &=g\circ h(x).\end{aligned}$$

这就证明了 $h\circ f\circ h^{-1}=g$.

例题 13.42* 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 满足 $f'(t)>f(f(t)),\forall t\in\mathbb{R}$, 证明

$$f(f(f(t)))\leqslant0,\forall t\geqslant0.$$

证明 **Step 1** 我们证明 $\varliminf\limits_{t\to+\infty}f(t)<+\infty$.

反证, 如若不然, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$. 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}f'(t)\geqslant\lim_{t\to+\infty}f(f(t))=+\infty,\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}f'(t)=+\infty.$$

因此存在 $N\geqslant1$, 使得 $f(t)\geqslant t\geqslant N,\forall t\geqslant N$. 从而

$$f'(x)>f(f(x))\geqslant f(x),\forall x\geqslant N.$$

于是

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}>1,\forall x\geqslant N\Rightarrow\ln f(x)>x-N+\ln f(N),\forall x\geqslant N.$$

即 $f(x)\geqslant f(N)e^{x-N}\geqslant N,\forall x\geqslant N$, 从而

$$f'(x)>f(f(x))\geqslant f(N)e^{-N}e^{f(x)},\forall x\geqslant N.$$

这给出了

$$\left[e^{-f(x)}\right]' = -f'(x)\,e^{-f(x)} \leqslant -f(N)\,e^{-N} < 0, \forall x \geqslant N,$$

从而 (因为有负的增长率) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-f(x)} = -\infty$, 这和 $e^{-f(x)} > 0$ 矛盾, 因此我们证明了 $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} f(t) < +\infty$.

Step 2 如果存在 $t_0 > 0$ 使得 $f(t_0) = t_0$,

- 对所有 $t \geqslant t_0$, 都有 $f(t) \geqslant t_0$, 那么

$$f'(t) > f(f(t)) \geqslant t_0, \forall t \geqslant t_0,$$

于是这和 **Step 1** 矛盾 (导数有正增长率).

- 存在 $t \geqslant t_0$, 都有 $f(t) < t_0$, 设

$$T \triangleq \inf\{t \geqslant t_0 : f(t) < t_0\},$$

由 f 的连续性可以知道 $f(T) = t_0$, 于是

$$f'(T) > f(f(T)) = f(t_0) = t_0 > 0,$$

于是在 T 的右邻域内 $f > f(T) = t_0$, 这不可能.

因此我们证明了 $f(t) = t$ 在 $t > 0$ 无解, 所以结合 **Step 1** 知 $f(t) > t, \forall t > 0$ 必然不能恒成立, 故 $f(t) < t, \forall t > 0$.

断言给定 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(s_1) > 0$ 且 $f(s_2) \geqslant s_1$, 那么对所有 $s > s_2$, 都有 $f(s) > s_1$.

事实上, 若存在 $s > s_2$, 使得 $f(s) \leqslant s_1$, 那么令

$$S = \inf\{s > s_2 : f(s) \leqslant s_1\}.$$

于是由 f 连续性, 我们知道 $f(S) = s_1$, 由

$$f'(S) > f(f(S)) = f(s_1) > 0,$$

如 $S > S_2$, 在 S 的左邻域内 $f < f(S) = s_1$, 这和 S 定义矛盾. 如果 $S = s_2$, 那么在 S 右邻域内 $f > f(S) = s_1$, 这也和 S 定义矛盾. 因此我们证明了断言.

特别的我们取 $s_2 = s_1 < 0$, 则有

$$f(s_1) > 0 \Rightarrow f(s) > s_1, \forall s > s_1.$$

Step 3 如果有某个 $t_0 > 0$ 使得 $f(f(f(t_0))) > 0$, 记

$$t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1), t_3 = f(t_2) > 0,$$

我们来证明 $0 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$.

由 **Step 1** 的 $f(t) < t, \forall t > 0$, 我们知道 $t_0 > f(t_0) = t_1$ 且只需证明 $t_1, t_2 > 0$. 如果 $t_1 < 0, f(t_1) > 0$, 则由 **Step 2** 的特别的, 我们有 $f(t) > t_1, \forall t > t_1 = f(t_0)$, 取 $t = t_0$ 即知 $t_1 = f(t_0) > t_1$, 这不可能. 因此 $t_1 < 0$ 时 $t_2 = f(t_1) \leqslant 0$. 此外 $t_1 = 0$ 时, 我们由 $f(t) \leqslant t, \forall t \geqslant 0$ 有 $t_2 = f(t_1) \leqslant t_1 = 0$. 这就说明了如果 $t_1 \leqslant 0$ 则 $t_2 \leqslant 0$. 如果 $t_2 = 0$, 则 $t_3 = f(t_2) \leqslant t_2 = 0$, 这是矛盾!. 如果 $t_2 < 0$, 由 **Step 2** 的特别的, 我们有 $f(t) > t_2, \forall t > t_2$, 则 $t_1 = f(t_0) > t_2$, 于是 $t_2 = f(t_1) > t_2$ 矛盾!. 这就证明了 $t_1, t_2 > 0$, 从而 $0 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$.

Step 4 最终证明.

由 **Step 2**, 我们有

$$\begin{aligned} f(t_1) > 0, f(t_0) \geqslant t_1 &\Rightarrow f(t) > t_1, \forall t > t_0 \\ f(t_2) > 0, f(t_1) \geqslant t_2 &\Rightarrow f(t) > t_2, \forall t > t_1 \end{aligned}.$$

因此

$$f'(t) > f(f(t)) > t_2 > 0, \forall t > t_0,$$

于是 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, 这和 **Step 1** 矛盾!, 即 $f(f(f(t))) \leqslant 0, \forall t \geqslant 0$. 于是我们完成了证明.

命题 13.20 (黎曼型积分的加强结果)

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是单调函数, 证明

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

注本结果 f 去掉单调性是不正确的. 本题结果可以推广为对一切有界变差函数f 都成.

证明 **Method1**

一个证明的工具是所谓的 Riemann-Stieltjes 积分, 一个学习的参考可以见Rudin, Walter Principles of mathematical analysis..

不妨设 f 递增, 注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin nxdx\right|&=\frac{1}{n}\left|\int_a^b f(x)\,d\cos nx\right|=\frac{1}{n}\left|f(b)\cos nb-f(a)\cos na-\int_a^b\cos nxdf(x)\right|\\&\leqslant\frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}+\frac{1}{n}\int_a^b|df(x)|\\&\leqslant\frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}+\frac{1}{n}|f(b)-f(a)|,\end{aligned}$$

这里第二个等号来自分部积分, 最后一个不等号来自递增函数的有界变差小于等于 $|f(b)-f(a)|$.

Method 2

另外一个证明工具是所谓的第二积分中值定理.

不妨设 f 递增, 注意到运用(3), 我们知道存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx=f(a)\int_a^\xi\sin nxdx+f(b)\int_\xi^b\sin nxdx.$$

于是

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nxdx\right|\leqslant\frac{|f(a)|}{n}\cdot|\cos n\xi-\cos na|+\frac{|f(b)|}{n}\cdot|\cos nb-\cos n\xi|\leqslant\frac{2}{n}(|f(a)|+|f(b)|).$$

例题 13.43 设 $g\in C(\mathbb{R})$ 且以 $T>0$ 为周期, 且有

$$f(f(x))=-x^3+g(x). \tag{13.160}$$

证明不存在 $f\in C(\mathbb{R})$, 使得(13.160)成立.

证明 因为 g 是连续周期函数, 所以是有界函数, 其上确界记为 M. 因此

$$\lim_{x\to\infty}f(f(x))=\lim_{x\to\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=\infty. \tag{13.161}$$

设存在 $x_n\to\infty$ 使得 $f(x_n)\to A\in\mathbb{R}$, 则由(13.161)知

$$f(f(x_n))\to f(A)=\infty,$$

这是一个矛盾! 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. 注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都应该是确定符号的 ∞, 否则零点定理会导出一列趋于 ∞ 的零点而矛盾! 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 则和下述事实矛盾

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=-\infty.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

但是这与下述事实矛盾!

$$\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=-\infty=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+g(x)\right)=+\infty.$$

因此这样的连续 f 并不存在.

✍ **练习 13.9** 设 $f\in C[0,1]$, $g(t)=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,dx$, 证明 g 在 0 处连续等价于 $f(0)=0$.

证明 根据定义有 $g(0)=0$. 注意到 $\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}dx=\arctan\frac{1}{t},\forall t>0$, 我们只需证明

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}f(0),$$

即证

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}\left[f(x)-f(0)\right]dx=0. \tag{13.162}$$

事实上, 这仍然是 Laplace 方法9.3的模型. 设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, 然后对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in[0,\delta]$, 成立 $|f(x)-f(0)|<\epsilon$. 然后我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}\left[f(x)-f(0)\right]dx\right|&\leqslant\int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,dx+\int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,dx\\&\leqslant\epsilon\int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}dx+2M\int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2}dx\\&\leqslant\epsilon\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}dx+2Mt\int_\delta^1 \frac{1}{x^2}dx\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\epsilon+2Mt\int_\delta^1 \frac{1}{x^2}dx,\end{aligned}$$

于是

$$\overline{\lim_{t\to0^+}}\left|\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}\left[f(x)-f(0)\right]dx\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\epsilon,$$

由 ϵ 任意性即得(13.162), 我们完成了证明.

命题 13.21 (非空完备集不可数)

$\mathbb{R}^n$ 上的非空完备集不可数.

例题 13.44 设 $f(x)=\int_0^x d(y,E)\,dy, x\in\mathbb{R}$, $E\subset[0,1]$ 为非空完备无处稠密集, 证明

1. 存在 $\eta>0$, 使得 $\{x\in\mathbb{R}:|f'(x)|<\eta\}$ 有界;
2. $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lipschitz 连续函数;
3. $\{f(x):f'(x)=0\}$ 不可数.

证明 显然 $f'(x)=d(x,E),x\in\mathbb{R}$, 注意到对 $x,z\in\mathbb{R}$, 我们有

$$d(x,E)=\inf_{y\in E}|x-y|\leqslant|x-z|+\inf_{y\in E}|z-y|=|x-z|+d(z,E),$$

对称的 $d(z,E)\leqslant|x-z|+d(x,E)$, 于是我们有

$$|d(z,E)-d(x,E)|\leqslant|z-x|.$$

这就证明了第二点.

然后

$$\begin{aligned}\int_0^x d(y,E)\,dy&\geqslant\int_1^2(y-1)\,dy=\frac{1}{2},\forall x\geqslant2\\\int_0^x d(y,E)\,dy&\leqslant-\int_{-2}^{-1}(y+1)\,dy=\frac{1}{2},\forall x\leqslant-2.\end{aligned}$$

于是取 $\eta=\frac{1}{2}$ 可得

$$\{x\in\mathbb{R}:|f'(x)|<\eta\}\subset(-2,2).$$

这就证明了第一点.

最后 $f'(x)\geqslant0,\forall x\in\mathbb{R},f'(x)=0,x\in E$, 此时因为对任何区间 $(a,b)\subset[0,1]$, 我们由 E 无处稠密知必有 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)>0$. 因此由定理12.1知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 严格递增, 所以由非空完备集一定不可数13.21知道第

三点成立.

例题 13.45 设 $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ 满足 $f(0,0)=0, f_y(0,0)\neq 0$. 考虑迭代

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)-\frac{f(x,y_n(x))}{f_y(0,0)}, y_0(x)=0. \tag{13.163}$$

定义 $u_{n+1}(x)=y_{n+1}(x)-y_n(x), n\geqslant 0$, 证明

1. 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $x\in(-\delta,\delta), n\geqslant 0$, 都有 $|y_n(x)|<\epsilon$. 进而当 δ 充分小时, 存在 $\rho\in(0,1)$ 使得对任何 $x\in(-\delta,\delta), n\geqslant 1$ 时有 $|u_{n+1}(x)|\leqslant\rho|u_n(x)|$.
2. $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是 $f(x,y)=0$ 在 $(0,0)$ 附近确定的一个连续隐函数.

证明

1. 显然 $y_n\in C(\mathbb{R}), n=0,1,2,\cdots$. 因为 $f_y\in C\left(\mathbb{R}^2\right)$, 我们知道存在 $\delta_1>0$, 使得对任意 $\forall x,y\in[-\delta_1,\delta_1]$, 都有

$$\left|1-\frac{f_y(x,y)}{f_y(0,0)}\right|<\frac{1}{2}. \tag{13.164}$$

对每个 $\epsilon>0$, 因为 $y_1(0)=0$, 于是我们存在 $\delta\in(0,\delta_1)$, 使得

$$|y_1(x)|<\min\{\epsilon,\delta_1\}, \forall x\in(-\delta,\delta). \tag{13.165}$$

我们归纳证明 $x\in(-\delta,\delta), n\geqslant 0$, 都有

$$|y_n(x)|<\min\{\epsilon,\delta_1\}, \tag{13.166}$$

然后导出对任何 $x\in(-\delta,\delta), n\geqslant 1$ 都有

$$|u_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{2}|u_n(x)|. \tag{13.167}$$

当 $n=0,1$, 显然(13.166)成立, 当 $n=1$ 时, 下述完全一致的不等式也给出了式(13.167)的归纳起点. 然后假设(13.166), (13.167)对小于等于 $n(n\geqslant 1)$ 的全体成立, 当 $n+1$ 时, 由中值定理和式(13.163), 我们有

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)|&=\left|y_n(x)-\frac{f(x,y_n(x))}{f_y(0,0)}-y_{n-1}(x)+\frac{f(x,y_{n-1}(x))}{f_y(0,0)}\right|\\
&=\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)-\frac{f(x,y_n(x))-f(x,y_{n-1}(x))}{f_y(0,0)}\right|\\
&=\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)-\frac{f_y(x,\theta_n(x))}{f_y(0,0)}(y_n(x)-y_{n-1}(x))\right|\\
&=\left|1-\frac{f_y(x,\theta_n(x))}{f_y(0,0)}\right|\cdot|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\\
&\leqslant\frac{1}{2}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|,
\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自归纳假设[34]和式(13.164).

现在我们就对 $n+1$ 得到了式(13.167)并且有

$$|y_{j+1}(x)-y_j(x)|\leqslant\frac{1}{2^j}|y_1(x)-y_0(x)|, j=0,1,2,\cdots,n.$$

然后

$$|y_{n+1}(x)-y_0(x)|\leqslant\sum_{j=0}^{n}|y_{j+1}(x)-y_j(x)|\leqslant|y_1(x)-y_0(x)|\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^j}<|y_1(x)|<\min\{\epsilon,\delta_1\},$$

这就对 $n+1$ 证明了式(13.166). 于是由数学归纳法我们证明式(13.166)和(13.167).

2. 显然 $u_n\in C(\mathbb{R}), n=0,1,2,\cdots$, 由于对任何 $x\in(-\delta,\delta), n\geqslant 1$ 时有 $|u_{n+1}(x)|\leqslant\rho|u_n(x)|$, 我们知道

$$|u_n(x)|\leqslant\rho^{n-1}|u_1(x)|, \forall n\geqslant 1,$$

[34] 导致 θ_n 也落在式(13.164)的适用范围内.

这给出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right| \leqslant \sup_{[-\delta,\delta]}|u_1| \sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1} = \sup_{[-\delta,\delta]}|u_1|\frac{1}{1-\rho} < \infty,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 一致收敛. 现在 $y \in C(-\delta,\delta)$ 且对每个 $x \in (-\delta,\delta)$ 有

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) - y_0(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x).$$

在式(13.163)中令 $n \to \infty$ 得

$$y(x) = y(x) - \frac{f(x,y(x))}{f_y(0,0)} \Rightarrow f(x,y(x)) = 0.$$

我们完成了证明!.

例题 13.46 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$|f(x)|^2 \leqslant a, |f'(x)|^2 + |f''(x)|^2 \leqslant b, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{13.168}$$

证明

$$|f'(x)|^2 + |f(x)|^2 \leqslant \max\{a,b\}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13.169}$$

证明 定义

$$g(x) = |f'(x)|^2 + |f(x)|^2,$$

设

$$g'(x) = \left[|f'(x)|^2 + |f(x)|^2\right]' = 2f'(x)\left[f(x) + f''(x)\right] = 0,$$

我们有 $f'(x) = 0$ 或者 $f(x)+f''(x) = 0$, 分别代入(13.168)即得(13.169), 即对 $g(x)$ 的任何极值点都有式(13.169)成立.

如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得

$$g(x_0) > \max\{a,b\}.$$

取 $\eta > 0$, 使得 $g(x_0) > \max\{a,b\} + \eta$. 则因为 f, f'', f' 有界知 g 一致连续. 从而存在 $\delta > 0$, 使得

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\eta}{2}, \forall |x-y| \leqslant \delta. \tag{13.170}$$

于是运用(13.170)知

$$g(x) > g(x_0) - \frac{\eta}{2} > \max\{a,b\} + \frac{\eta}{2}, \forall |x - x_0| \leqslant \delta.$$

现在 $g(x)$ 在 $|x-x_0| < \delta$ 没有极值点, 因此 $g(x)$ 在 $|x-x_0| \leqslant \delta$ 的最大值点必然在边界取到, 不妨设为 $x_0+\delta$, 于是

$$g(x_0+\delta) > g(x_0) > \max\{a,b\} + \eta. \tag{13.171}$$

又由(13.170)知, 在 $[x_0, x_0+2\delta]$ 上 g 的最值点在边界取到, 由(13.171)我们可得 g 在 $[x_0, x_0+2\delta]$ 的最大值点在 $x_0+2\delta$ 取到, 最小值点在 x_0 取到. 因此

$$g(x_0+2\delta) > g(x_0+\delta) > g(x_0) > \max\{a,b\} + \eta, g(x) \geqslant \max\{a,b\} + \eta, \forall x \in [x_0, x_0+2\delta].$$

这样反复操作我们可得

$$g(x) \geqslant \max\{a,b\} + \eta, \forall x \geqslant x_0. \tag{13.172}$$

现在由(13.172)和题目条件, 我们知道 $f'(x) \neq 0, \forall x \geqslant x_0$, 因此 f 在 $[x_0, +\infty)$ 严格单调, 又 f 有界, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 于是由拉格朗日中值定理我们得到 $\theta(x) \in (x, x+1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\theta(x)).$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|f(\theta(x))|^2 + |f'(\theta(x))|^2\right) = \lim_{x\to+\infty}|f(x)|^2 \geqslant \max\{a,b\} + \eta,$$

这和 $|f(x)|^2 \leqslant a, \forall x \in \mathbb{R}$ 矛盾! 这就证明了不等式(13.169).

我们来看 Thu 期末真题

例题 13.47 设二阶连续可微函数 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 满足

$$f''-f+f^3\equiv 0. \tag{13.173}$$

于是对某个常数 C 有

$$(f')^2-f^2+\frac{1}{2}f^4\equiv C. \tag{13.174}$$

证明 $C\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 且当 $-\frac{1}{2}<C<0$ 时 f 是周期函数.

证明 注意到

$$-x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}=\frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}\geqslant 0. \tag{13.175}$$

我们由(13.174)和(13.175)知

$$-\frac{1}{2}\leqslant -f^2+\frac{1}{2}f^4\leqslant (f')^2-f^2+\frac{1}{2}f^4\equiv C. \tag{13.176}$$

注意到由(13.176)同样的知道 f 是有界函数. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 那么由结论12.1知存在子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim_{n\to\infty}f''(y_n)=0. \tag{13.177}$$

于是由(13.173)知

$$0=\lim_{n\to\infty}\left[f''(y_n)-f(y_n)+f^3(y_n)\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0,\pm 1\overset{\text{注意}f\text{非负}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,1.$$

上式代入(13.174)知

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[(f'(x_n))^2-f^2(x_n)+\frac{1}{2}f^4(x_n)\right]=0,-\frac{1}{2},$$

即 $C\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

下假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

由命题12.4知对任何 $X>0$, 都存在 $x_0>X$ 使得 x_0 是 f 的极值点[35].

若有某个 $t>0$ 使得 $f'(t)=0, f(t)\leqslant\sqrt{2}$, 则由(13.174)知

$$C=(f'(t))^2-f^2(t)+\frac{1}{2}f^4(t)=f^2(t)\left(-1+\frac{1}{2}f^2(t)\right)\leqslant 0.$$

现假设 f 如果对某个 $t>0$ 有 $f'(t)=0$, 则必有 $f(t)>\sqrt{2}$, 于是取定 $x_1>0$ 是 f 的极值点, 若 $f(x)>\sqrt{2},\forall x\in(x_1,+\infty)$, 运用 $x-x^3<0,\forall x>\sqrt{2}$ 和(13.173)我们知道 $f''(x)<0,\forall x>x_1$, 即 f 在 $(x_1,+\infty)$ 是非负上凸函数, 因此 f 在 x 充分大时单调, 这和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在矛盾. 于是存在 $x_2>x_1$ 使得 $f(x_2)\leqslant\sqrt{2}$. 再取 $x_3>x_2$ 使得 $f'(x_3)=0$. 注意到 $f(x_1),f(x_3)>\sqrt{2}$, 于是 $[x_1,x_3]$ 上 f 的最小值点 t_0 在 (x_1,x_3) 取到且最小值小于等于 $\sqrt{2}$, 这就和 $f'(t_0)=0, f(t_0)>\sqrt{2}$ 矛盾! 现在我们知道了必然有 $C\leqslant 0$.

当 $-\frac{1}{2}<C<0$, 我们知道 f 不能单调所以 f 有无穷个点 t 使得 $f'(t)=0$, 由等式(13.174)知满足 $f'(t)=0$ 的 $f(t)$ 是有限集, 故必然存在 $t_1<t_2$ 使得 $f(t_1)=f(t_2), f'(t_1)=f'(t_2)=0$, 于是 $f(t), f(t+t_2-t_1)$ 在 t_1 有相同的初值条件并满足方程(13.173)我们知道 $f(t)\equiv f(t+t_2-t_1)$, 因此由解的唯一性定理13.17得 f 有周期 t_2-t_1.

例题 13.48 设二阶连续可微函数 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 满足

$$f''-f+f^3\equiv 0. \tag{13.178}$$

于是对某个常数 C 有

$$(f')^2-f^2+\frac{1}{2}f^4\equiv C. \tag{13.179}$$

证明当 $-\frac{1}{2}<C<0$ 时 f 是周期函数.

[35] 否则 f 在充分大的区间严格单调, 结合有界性知 f 极限存在而矛盾.

证明 本题最本质的分析和解决方法：由 $C\geqslant \frac{1}{2}f^4-f^2$ 知 f 是个有界函数. 若 f 在充分大的区间单调则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，那么由结论12.1知存在子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim_{n\to\infty}f''(y_n)=0.$$

于是由(13.178)知

$$0=\lim_{n\to\infty}\left[f''(y_n)-f(y_n)+f^3(y_n)\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0,\pm1\overset{\text{注意}f\text{非负}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,1.$$

上式代入(13.179)知

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[(f'(x_n))^2-f^2(x_n)+\frac{1}{2}f^4(x_n)\right]=0,-\frac{1}{2},$$

这和 $-\frac{1}{2}<C<0$ 矛盾.

我们知道 f 不能单调所以 f 有无穷个点 t 使得 $f'(t)=0$，由等式(13.178)知满足 $f'(t)=0$ 的 $f(t)$ 是有限集，故必然存在 $t_1<t_2$ 使得 $f(t_1)=f(t_2),f'(t_1)=f'(t_2)=0$，于是 $f(t),f(t+t_2-t_1)$ 在 t_1 有相同的初值条件并满足方程(13.179)我们知道 $f(t)\equiv f(t+t_2-t_1)$，因此由解的唯一性定理13.17得 f 有周期 t_2-t_1.

我们来看丘赛决赛真题，如果不阅读我们的答案你可能连官方解答都读不懂.

例题 13.49 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$f''+f+f^3\equiv0.\tag{13.180}$$

证明 f 是一个周期函数.

证明 在等式(13.180)两边积分得某个常数 $C\in\mathbb{R}$，使得

$$(f')^2+f^2+\frac{1}{2}f^4\equiv C.\tag{13.181}$$

由(13.181)知 $C\geqslant f^2+\frac{1}{2}f^4$，故 f 是有界函数.

假如 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，由结论12.1我们知道存在子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim_{n\to\infty}f''(y_n)=0.$$

于是由(13.180)可知

$$0=\lim_{n\to\infty}\left[f''(y_n)+f(y_n)+f^3(y_n)\right]\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

由(13.181)知

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[(f'(x_n))^2+f^2(x_n)+\frac{1}{2}f^4(x_n)\right]=0.$$

现在由(13.181)知 $f\equiv0$，故 f 是周期函数.

假如 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，那么对任何 $X>0$，必然 f 在 $(X,+\infty)$ 不单调. 于是对任何 $X>0$，必有一个 $x_1>X$，使得 $f'(x_1)=0$. 我们知道 $t^2+\frac{1}{2}t^4=C$ 的解必然是空集或者有限集 A，因此所有 $f'(t)=0$ 的 t，由(13.181)知必然 $f(t)$ 落入 A，于是 A 非空且必然有无穷多个 t 使得 $f'(t)=0$ 且 $f(t)$ 一致. 现在任取 $t_1<t_2$ 使得 $f(t_1)=f(t_2),f'(t_1)=f'(t_2)=0$. 再记 $M=3\sup\limits_{\mathbb{R}}|f|^2+1$.

令 $g(x)=f(x+t_2-t_1)-f(x),g(t_1)=g'(t_1)=0$，则由(13.180)知

$$\begin{aligned}|g''(x)|&=\left|f^3(x+t_2-t_1)+f(x+t_2-t_1)-f^3(x)-f(x)\right|\\&\leqslant M|f(x+t_2-t_1)-f(x)|=M|g(x)|,\end{aligned}$$

这里不等号来自拉格朗日中值定理. 于是考虑 $h(x)=e^{-(1+M)x}\left[|g(x)|^2+|g'(x)|^2\right]$，我们有

$$\begin{aligned}h'(x)&=e^{-(1+M)x}\left[2g(x)g'(x)+2g'(x)g''(x)-(1+M)|g(x)|^2-(1+M)|g'(x)|^2\right]\\&\leqslant e^{-(1+M)x}\left[2|g(x)g'(x)|+2M|g(x)g'(x)|-(1+M)|g(x)|^2-(1+M)|g'(x)|^2\right]\\&\leqslant e^{-(1+M)x}\left[|g(x)|^2+|g'(x)|^2+M|g(x)|^2+M|g'(x)|^2-(1+M)|g(x)|^2-(1+M)|g'(x)|^2\right]=0.\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$0 \leqslant h(x) \leqslant h(t_1) = 0, \forall x \geqslant t_1,$$

即 $h(x) = 0, \forall x \geqslant t_1$. 类似的考虑 $h_2(x) = e^{(1+M)x}\left[|g(x)|^2 + |g'(x)|^2\right]$, 我们有

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= e^{(1+M)x}\left[2g(x)g'(x) + 2g'(x)g''(x) + (1+M)|g(x)|^2 + (1+M)|g'(x)|^2\right] \\ &\geqslant e^{(1+M)x}\left[-2|g(x)g'(x)| - 2M|g(x)g'(x)| + (1+M)|g(x)|^2 + (1+M)|g'(x)|^2\right] \\ &\geqslant e^{(1+M)x}\left[-|g(x)|^2 - |g'(x)|^2 - M|g(x)|^2 - M|g'(x)|^2 + (1+M)|g(x)|^2 + (1+M)|g'(x)|^2\right] = 0. \end{aligned}$$

因此我们可得

$$0 \leqslant h_2(x) \leqslant h_2(t_1) = 0, \forall x \leqslant t_1,$$

即 $h_2(x) = 0, \forall x \leqslant t_1$. 现在 g 恒为 0 可知 f 有周期 $t_2 - t_1$.

笔记 我们建立 $|g''(x)| \leqslant M|g(x)|$ 并用双绝对值技巧构造函数来证明 g 恒为 0 的技术就可以被解的唯一性定理13.17代替, 他也是解的唯一性定理13.17的证明过程.

例题 13.50 设非负函数 f, h 满足 $f \in C^1[0,+\infty), \int_0^\infty f(x)\,dx < \infty, \int_0^\infty h(x)\,dx < \infty$. 若还存在 $C, p \geqslant 0$, 使得

$$f'(x) \leqslant Cf^p(x) + h(x), \forall x \geqslant 0. \tag{13.182}$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明 **Method 1**

考虑

$$F(x) \triangleq C\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{f(x)} \frac{1}{t^{p-1}+1}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{h(y)}{f^{p-1}(y)+1}\mathrm{d}y,$$

我们有

$$\begin{aligned} F'(x) &= Cf(x) - \frac{f'(x)}{f^{p-1}(x)+1} + \frac{h(x)}{f^{p-1}(x)+1} \\ &\geqslant Cf(x) - \frac{Cf^p(x)+h(x)}{f^{p-1}(x)+1} + \frac{h(x)}{f^{p-1}(x)+1} \\ &\geqslant Cf(x) - \frac{Cf^p(x)}{f^{p-1}(x)} = 0, \end{aligned}$$

即 F 递增. 容易看到

$$F(x) \leqslant C\int_0^\infty f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^\infty h(y)\,\mathrm{d}y < \infty,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在. 因此我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{f(x)} \frac{1}{t^{p-1}+1}\mathrm{d}t$$

存在.

设 $x_n \to +\infty, f(x_n) \to a \in [0,+\infty]$, 此时

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{f(x_n)} \frac{1}{t^{p-1}+1}\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{t^{p-1}+1}\mathrm{d}t.$$

因为连续函数 $\int_0^x \frac{1}{t^{p-1}+1}\mathrm{d}t$ 关于 x 严格递增, 所以 a 唯一. 于是由命题7.4我们知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

因为连续函数积分收敛必有子列趋于 0, 即结论14.3.1, 因此我们有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Method 2

笔记 假若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 必然存在 $a>0$ 和严格递增的无界数列 x_n 使得

$$f(x_n)\geqslant a>0, n=1,2,\cdots. \tag{13.183}$$

证明的想法是直接的, 即找到一个固定的数字 $\epsilon\in(0,a)$ 使得

$$f(x)\geqslant \frac{a}{2}, \forall x\in[x_n-\epsilon, x_n]. \tag{13.184}$$

这里 ϵ 不依赖 n 是关键的, 我们需要通过不等式(13.182)来得到.

事实上, 设 $t_n\in[x_n-\epsilon,x_n]$ 使得

$$f(t_n)=\min_{[x_n-\epsilon,x_n]} f, n=1,2,\cdots.$$

若 $f(t_n)\geqslant\frac{a}{2}$, 则已经有(13.184). 若 $f(t_n)<\frac{a}{2}$, 考虑 t_n 增大时, 一直保持的 $f(t)<a$ 性态能达到什么时候. 因此标准操作构造集合取确界, 即记

$$T_n=\sup\{t: f(s)\leqslant a, \forall s\in[t_n,t]\}.$$

于是

$$t_n<T_n\leqslant x_n, f(T_n)=a.$$

现在

$$\frac{a}{2}\leqslant f(T_n)-f(t_n)=\int_{t_n}^{T_n} f'(y)\,dy\leqslant\int_{t_n}^{T_n}\left[Cf^p(y)+h(y)\right]dy\leqslant a^pC(T_n-t_n)+\int_{t_n}^{T_n}h(y)\,dy\leqslant a^pC\epsilon+\int_{t_n}^{T_n}h(y)\,dy.$$

Cauchy 收敛准则即可控制 $\int_{t_n}^{T_n}h(y)\,dy$.

严格证明: 若 $C=0$, 则运用(13.182), 注意到

$$f(y)=f(x)+\int_x^y f'(z)\,dz\leqslant f(x)+\int_x^y h(z)\,dz, \forall y>x.$$

于是我们有 $\overline{\lim\limits_{y\to+\infty}} f(y)<+\infty$ 且

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} f(y)\leqslant f(x)+\int_x^{+\infty}h(z)\,dz.$$

由 $\int_0^\infty h(x)\,dx<\infty$, 对上式 x 取下极限就有

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} f(y)\leqslant\underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x),$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 结合 $\int_0^\infty f(x)\,dx<\infty$, 由结论[36](12.1)我们知 f 有子列趋于 0, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

若 $C>0$, 假若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$, 必然存在 $a>0$ 和严格递增的无界数列 x_n 使得

$$f(x_n)\geqslant a>0, n=1,2,\cdots. \tag{13.185}$$

取 $\epsilon=\frac{1}{4a^{p-1}C}>0$ 和 $X>0$, 使得

$$\int_X^\infty h(y)\,dy\leqslant\frac{a}{4}. \tag{13.186}$$

再取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n\geqslant X+\epsilon, \forall n\geqslant N$.

当 $n\geqslant N$, 记 $t_n\in[x_n-\epsilon,x_n]$ 使得 $f(t_n)=\min\limits_{[x_n-\epsilon,x_n]}f(x)$. 若 $f(t_n)\geqslant a$, 则

$$f(x)\geqslant\frac{a}{2}, \forall x\in[x_n-\epsilon,x_n].$$

若 $f(t_n)<a$, 则记

$$T_n=\sup\{t: f(s)\leqslant a, \forall s\in[t_n,t]\}.$$

于是

$$t_n<T_n\leqslant x_n, f(T_n)=a.$$

[36]广义积分就是变限积分取极限, 被积函数就是导数.

于是运用(13.182)就有

$$\begin{aligned} a-f\left(t_n\right)=f\left(T_n\right)-f\left(t_n\right) &\leqslant \int_{t_n}^{T_n}\left[Cf^p\left(y\right)+h\left(y\right)\right]dy \leqslant Ca^p\left(T_n-t_n\right)+\int_{t_n}^{\infty}h\left(y\right)dy \\ &\leqslant Ca^p\epsilon+\frac{a}{4}=\frac{a}{2}, \end{aligned}$$

即 $f\left(t_n\right)\geqslant a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$. 故无论如何都有

$$f\left(x\right)\geqslant\frac{a}{2},\forall x\in\left[x_n-\epsilon,x_n\right],\forall n\geqslant N. \tag{13.187}$$

因此运用(13.187)知

$$\int_{x_n-\epsilon}^{x_n}f\left(x\right)dx\geqslant\int_{x_n-\epsilon}^{x_n}\frac{a}{2}dx=\frac{a}{2}\epsilon>0,$$

这和 $\int_0^{\infty}f\left(x\right)dx<\infty$ 矛盾! 我们完成了证明.

练习 13.10 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足

$$\lim_{x\to+\infty}f'\left(x\right)=1,f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=f'\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{13.188}$$

证明存在常数 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $f\left(x\right)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

笔记 本题最困难的版本见课后习题6..

证明 由(13.188)知 f' 连续. 取定 $x_1\in\mathbb{R}$, 记

$$A=\left\{x>x_1:f'\left(x\right)=f'\left(x_1\right)\right\}.$$

我们运用(13.188)和拉格朗日中值定理知

$$f'\left(x_1\right)=f\left(x_1+1\right)-f\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right),x_1<x_2<x_1+1,$$

故 A 非空. 现在考虑 $x_*=\sup A\in\left(x_1,+\infty\right]$. 若 $x_*<+\infty$, 则 $f'\left(x_*\right)=f'\left(x_1\right)$. 进一步对(13.188)代入 x_*, 并运用拉格朗日中值定理我们得

$$f'\left(x_*\right)=f\left(x_*+1\right)-f\left(x_*\right)=f'\left(x_3\right),x_*<x_3<x_*+1.$$

这和 x_* 是上确界矛盾! 故 $x_*=+\infty$, 于是存在趋于正无穷的 $c_n\in A$, 使得 $f'\left(c_n\right)=f'\left(x_1\right)$, 两边取极限并利用(13.188)得 $f'\left(x_1\right)=1$, 由 x_1 任意性得 $f\left(x\right)=x+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

练习 13.11 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 证明 $g\left(x\right)=\sup\limits_{y\in[a,x]}f\left(y\right),h\left(x\right)=\inf\limits_{y\in[a,x]}f\left(y\right)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数.

笔记 证明的想法即用在每个点处函数的振幅不会太大.

证明

我们仅证 $g\in C[a,b]$, h 是类似的. 事实上我们只需证明 g 在 $x_0\in(a,b)$ 连续, 因为端点的情况方法一致. 事实上, 因为 g 递增, 我们只需证明

$$\lim_{x\to x_0^+}g\left(x\right)\leqslant g\left(x_0\right)\leqslant\lim_{x\to x_0^-}g\left(x\right). \tag{13.189}$$

注意到对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任何 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, 都有

$$f\left(x_0\right)-\epsilon\leqslant f\left(x\right)\leqslant f\left(x_0\right)+\epsilon,\forall x\in\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]. \tag{13.190}$$

于是对 $x\in[x_0,x_0+\delta]$, 运用(13.190), 我们有

$$g\left(x\right)=\sup_{y\in[a,x]}f\left(y\right)\leqslant\max\left\{\sup_{y\in[a,x_0]}f\left(y\right),f\left(x_0\right)+\epsilon\right\}\leqslant\sup_{y\in[a,x_0]}f\left(y\right)+\epsilon=g\left(x_0\right)+\epsilon,$$

于是我们证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g\left(x\right)\leqslant g\left(x_0\right)$.

对 $x\in[x_0-\delta,x_0]$, 我们运用(13.190)就有

$$\begin{aligned}g(x)&=\sup_{y\in[a,x]}f(y)=\max\left\{\sup_{y\in[a,x_0-\delta]}f(y),\sup_{[x_0-\delta,x]}f(y)\right\}\\&\geqslant\max\left\{\sup_{y\in[a,x_0-\delta]}f(y),f(x_0)-\epsilon\right\}\\&\geqslant\max\left\{\sup_{y\in[a,x_0-\delta]}f(y)-2\epsilon,\sup_{y\in[x_0-\delta,x_0]}f(y)-2\epsilon\right\}\\&=\max\left\{\sup_{y\in[a,x_0-\delta]}f(y),\sup_{y\in[x_0-\delta,x_0]}f(y)\right\}-2\epsilon\\&=g(x_0)-2\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)\geqslant g(x_0)$.

现在我们证明了(13.189), 于是由夹逼准则就证明了 $g,h\in C[a,b]$.

来看压缩映像定理13.15在数学分析的一个应用.

✍ **练习 13.12** 设连续可微函数 $f(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足对某个 $\lambda\in(0,1)$, 成立

$$x\left|f'(x)\right|\leqslant\lambda f(x),\forall x>0.\tag{13.191}$$

证明存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

注本题借鉴逆神.

证明 在 $(0,+\infty)$ 上定义一个度量 $d(x,y)=|\ln x-\ln y|$, 先证明 $(0,+\infty)$ 是完备度量空间. 设 $\lim\limits_{n,m\to\infty}|\ln x_n-\ln x_m|=0$, 于是 $\{\ln x_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列, 因此存在 $c\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=c=\ln e^c.$$

因此就有

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,e^c)=\lim_{n\to\infty}|\ln x_n-c|=0,$$

故 $(0,+\infty)$ 是完备度量空间.

对于映射

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty),x\to f(x).$$

于是不妨设 $x>y$, 运用(13.191)我们有

$$d(f(x),f(y))=|\ln f(x)-\ln f(y)|=\left|\int_y^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt\right|\leqslant\lambda\int_y^x\frac{1}{t}dt=\lambda|\ln x-\ln y|=\lambda d(x,y),$$

因此 f 是一个压缩映射, 由定理13.15知道存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

✍ **练习 13.13** 假设 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 如果对任何 $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant e^x.\tag{13.192}$$

证明 $f(x)=f(0)e^x,\forall x\in\mathbb{R}$.

注本题借鉴逆神.

证明 考虑 $g(x)=e^x-f(x)$, 显然由(13.192)知对任何 $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$, 都有

$$0\leqslant g^{(n)}(x)\leqslant 2e^x.\tag{13.193}$$

由 Taylor 中值定理得

$$g(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{g^{(j)}(0)}{j!}x^j+\frac{g^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1},\xi_n介于0和x之间.$$

注意到

$$\left|\frac{g^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{2e^{\xi_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant\frac{2e^{\max\{0,x\}}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to0,当n\to\infty,$$

我们可以得到 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty)$. 考虑整函数

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n, z\in\mathbb{C},$$

我们有

$$|g(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(-a)}{n!}(z+a)^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(-a)}{n!}|z+a|^n=g(|z+a|-a).$$

又

$$|z+a|-a=\frac{2ax+x^2+y^2}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}+a}\to x, \text{当} a\to+\infty,$$

我们知

$$|g(z)|\leqslant g(x), z=x+iy.$$

于是由(13.192)知

$$\left|e^{-z}g(z)\right|=e^{-\Re z}|g(z)|\leqslant e^{-x}g(x)\leqslant 2, \forall z\in\mathbb{C}.$$

而有界整函数必为常数, 所以我们知道 $f(x)=f(0)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

练习 13.14 设 $f\in C(0,+\infty)$ 满足对任何 $x>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)$ 存在, 且极限值不依赖 x, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

笔记 把题目条件翻译成集合语言, 记住存在是并, 任意是交.

证明 不妨假设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. 对任何 $\epsilon>0$, 记

$$A_n=\{x:|f(nx)|\leqslant\epsilon\}, \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}A_n=(0,+\infty).$$

注意 A_n 是闭集知 $\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$ 也是闭集. 于是由 Baire 纲定理13.13, 我们知道必然存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得某个 $[a,b]\subset\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$. 注意到

$$\bigcup_{n=\max\left\{N_0,\left[\frac{a}{b-a}\right]+1\right\}}^{\infty}[na,nb]=\left[\max\left\{N_0,\left[\frac{a}{b-a}\right]+1\right\}a,+\infty\right),$$

这是因为

$$(n+1)a\leqslant nb, \forall n\geqslant\left[\frac{a}{b-a}\right]+1.$$

于是当 $x\geqslant\max\left\{N_0,\left[\frac{a}{b-a}\right]+1\right\}a$, 我们有 $n\geqslant\max\left\{N_0,\left[\frac{a}{b-a}\right]+1\right\}$, 使得 $x=nt, t\in[a,b]$. 于是

$$|f(x)|=|f(nt)|\leqslant\epsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

例题 13.51 设连续函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 证明: 存在 $x_0\in[0,+\infty)$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(nx_0)=+\infty$.

证明 若不然, 考虑

$$S_N\triangleq\left\{x\in[0,+\infty):\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)\leqslant N\right\}, N\in\mathbb{N},$$

则 $[0,+\infty)=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}S_N$. 对每一个 $N\in\mathbb{N}$, 设 $x_m\to x, m\to\infty, x_m\in S_N$, 则由级数的法图引理18.18得

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}f(nx_m)\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(nx_m)\leqslant N,$$

故 $x\in S_N$, 从而 S_N 是闭集.

由 Baire 纲定理13.13, 我们有某个 S_{N_0} 包含一个 $(a,b)\subset[0,+\infty)$. 现在

$$\begin{aligned}N(b-a)&\geqslant\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(nx)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi_{[na,nb]}(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sum_{\frac{x}{b}\leqslant n\leqslant\frac{x}{a}}\frac{1}{n}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^{\infty}\sum_{\left[\frac{x}{b}\right]+1\leqslant n\leqslant\left[\frac{x}{a}\right]}\frac{1}{n}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\infty}\sum_{\left[\frac{x}{b}\right]+1\leqslant n\leqslant\left[\frac{x}{a}\right]}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\ln\left(\frac{\left[\frac{x}{a}\right]+1}{\left[\frac{x}{b}\right]+1}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\sim\int_0^{\infty}\ln\frac{b}{a}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x,x\to+\infty,\end{aligned}$$

这就和 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散矛盾! 因此存在 $x_0\in[0,+\infty)$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(nx_0)=+\infty$.

练习 13.15 固定 $a\in\mathbb{R}$, 考微分方程 $f''(x)=\left(x^3+ax\right)f(x)$ 的解 f, 且满足 $f(0)=1,f'(0)=0$. 证明 f 的根有上界而无下界.

笔记 一句话证明本题: 当 x 正充分大时, 本题是极值原理基本模型, 当 x 负充分大时, 本题是凸性分析模型.

证明 用到的方程本身的系数的性质:

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+ax\right)=+\infty,\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+ax\right)=-\infty,$$

容易知道存在 $X>0$ 使得

$$x^3+ax>1,\forall x\geqslant X,x^3+ax\leqslant-1,\forall x\leqslant-X.$$

极值原理部分:

注意到若 f 的根无上界, 则存在 $x_1<x_2\in(X,+\infty)$, 使得 $f(x_n)=0,n=1,2$. 考虑

$$f(x_0)=\max_{x\in[x_1,x_2]}f(x),x_0\in(x_1,x_2),$$

于是

$$0\geqslant f''(x_0)=\left(x_0^3+ax_0\right)f(x_0)\geqslant0\Rightarrow f(x_0)=0.$$

现在 $f(x_0)=0$. 若 x_0 落在 $[x_1,x_2]$ 的端点则也有 f 最大值为 0. 同理可得 f 在 $[x_1,x_2]$ 最小值也是 0. 因此我们得到

$$f(x)=0,\forall x\in[x_1,x_2]\Rightarrow f(x_1)=f'(x_1)=0.$$

由解的唯一性定理13.17[37], 我们知道 f 只能恒为 0, 这是一个矛盾!, 因此 f 的根有上界.

凸性分析部分:

对任何 $X_1>X$, 若 $f<0,\forall x\leqslant-X_1$, 则 $f''(x)=\left(x^3+ax\right)f(x)>0,\forall x<X_1$, 故 f 在 $(-\infty,X_1)$ 是下凸函数, 而下凸函数只可能递减, 先减后增, 递增. 前两种情况 f 都无上界, 因此 f 递增且有极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\alpha\in[-\infty,0)$. 这给出了

$$\lim_{x\to-\infty}f''(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^3+ax\right)f(x)\right]=+\infty,$$

从而导数有正增长率, 故由结论12.1知 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$, 这就是一个矛盾! 当 $f>0,\forall x\leqslant-X_1$, 分析上凸函数可以得到同样的结果. 因此我们就证明了 f 在 $(-\infty,X_1)$ 必有零点. 由 X_1 任意性即可得 f 根无下界. 我们完成了证明.

来看 2023putnam 真题

例题 13.52 求最小的正实数 r 使得存在可微函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

[37]或者用上课的 Gronwall 型不等式代替.

1. $f(0)>0, g(0)=0$;
2. $|f'(x)|\leqslant g(x), |g'(x)|\leqslant f(x), \forall x\in(-\infty,\infty)$;
3. $f(r)=0$.

证明 设存在 f,g 满足题目条件, r 是 f 在 $(0,+\infty)$ 的零点下确界, 容易知道 $f(r)=0$. 对 $x\in[0,r)$ 定义 $h(x)=\arctan\frac{g(x)}{f(x)}$, 我们有

$$\begin{aligned}|h'(x)|&=\left|\frac{1}{1+(\frac{g(x)}{f(x)})^2}\cdot\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}\right|\\&=\frac{|g'(x)f(x)-g(x)f'(x)|}{|f(x)|^2+|g(x)|^2}\\&\leqslant\frac{|g'(x)||f(x)|+|g(x)||f'(x)|}{|f(x)|^2+|g(x)|^2}\\&\leqslant 1.\end{aligned}$$

断言 $g(r)\neq 0$. 考虑 $k(x)\triangleq[f(x)]^2+[g(x)]^2$, 则

$$|k'(x)|=|2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)|\leqslant 4|f(x)||g(x)|\leqslant 2|k(x)|.$$

若 $g(r)=0$, 双绝对值技巧12.33表明 $k\equiv 0$, 从而 $f\equiv 0$ 而矛盾!.

$h(0)=0$ 知

$$|h(r)|=\lim_{x\to r^-}|h(x)|\leqslant\lim_{x\to r^-}|x|=r,$$

故

$$\lim_{x\to r^-}|h(x)|=\lim_{x\to r^-}\left|\arctan\frac{g(x)}{f(x)}\right|=\frac{\pi}{2},$$

于是 $r\geqslant\frac{\pi}{2}$.

又取 $f(x)=\cos x, g(x)=\sin x$ 知最小的 r 是 $\frac{\pi}{2}$.

我们来看竞赛的真题

例题 13.53 设 f 在 $[0,+\infty)$ 任意闭区间上黎曼可积, 对 $x\geqslant 0$, 定义

$$F(x)=\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt.$$

1. 若 $\alpha\in(-1,0)$ 且 $f(x)$ 有界, 证明 F 在 $[0,+\infty)$ 一致连续;
2. 若 $\alpha\in(0,1)$ 且以周期 $T>0$. 若 $\int_0^3 f(x)\,dx=2022$, 证明 F 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

笔记 回忆推论13.12和命题13.10, 积累想法: 证明不一致连续除了走定义外, 还可以通过验证其阶超过线性函数来说明. 此外还要注意分部积分改善阶的效果.

证明

1. 记 M 为 f 的上确界, 则对 $y>x\geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)|&=\left|\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt-\int_0^y t^\alpha f(t+y)\,dt\right|=\left|\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt-\int_y^{2y}(t-y)^\alpha f(t)\,dt\right|\\&\leqslant\left|\int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt-\int_y^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt\right|+\left|\int_y^{2y}(t-x)^\alpha f(t)\,dt-\int_y^{2y}(t-y)^\alpha f(t)\,dt\right|\\&\leqslant M\int_{2x}^{2y}(t-x)^\alpha\,dt+M\int_x^y(t-x)^\alpha\,dt+M\int_y^{2y}|(t-x)^\alpha-(t-y)^\alpha|\,dt\\&=M\int_x^{2y-x}t^\alpha dt+M\int_0^{y-x}t^\alpha dt+M\int_0^y t^\alpha dt-M\int_{y-x}^{2y-x}t^\alpha dt\\&=M\int_x^{y-x}t^\alpha dt+M\int_0^{y-x}t^\alpha dt+M\int_0^x t^\alpha dt+M\int_x^y t^\alpha dt\\&=2M\int_0^{y-x}t^\alpha dt+M\int_x^y t^\alpha dt,\end{aligned}$$

容易知道类似的有 $x>y$ 的不等式, 于是我们有

$$|F(x)-F(y)| \leqslant 2M\int_0^{|y-x|} t^\alpha dt + M\left|\int_x^y t^\alpha dt\right|. \tag{13.194}$$

于是由(13.194)知 F 在 $[0,+\infty)$ 连续. 当 $x,y\geqslant 1$, 我们由(13.194)还有

$$|F(x)-F(y)| \leqslant 2M\int_0^{|y-x|} t^\alpha dt + M\left|\int_x^y 1dt\right| = \frac{2M}{1+\alpha}|y-x|^{\alpha+1} + M|y-x|,$$

容易知道 F 在 $[1,+\infty)$ 一致连续. 由命题13.13知 F 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

2. 若 F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 注意到

$$\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt = \int_x^{2x}(t-x)^\alpha f(t)\,dt = x^{\alpha+1}\int_1^2 (t-1)^\alpha f(xt)\,dt,$$

由黎曼引理9.2和推论13.12知道

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt}{x^{1+\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\int_1^2 (t-1)^\alpha f(xt)\,dt = \frac{1}{T}\int_1^2 (t-1)^\alpha dt\int_0^T f(t)\,dt$$

即 $\int_0^T f(t)\,dt=0$.

考虑 $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, 于是分部积分得

$$F(x)=x^\alpha G(2x)-\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}G(t+x)\,dt,$$

注意到 $G(x)$ 是周期 T 的连续函数, 因此有界. 从而由第一问知 $\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}G(t+x)\,dt$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续. 故 $x^\alpha G(2x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

现在由命题13.10知存在 $M>0$, 使得

$$|x^\alpha G(2x)-y^\alpha G(2y)| \leqslant M|x-y|+1.$$

特别的对每个 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\left(\frac{3+nT}{2}\right)^\alpha G\left(2\frac{3+nT}{2}\right)-\left(\frac{nT}{2}\right)^\alpha G\left(2\cdot\frac{nT}{2}\right)\right| \leqslant M\left|\frac{3+nT}{2}-\frac{nT}{2}\right|+1,$$

于是

$$2022\left|\left(\frac{3+nT}{2}\right)^\alpha\right| \leqslant \frac{3M}{2}+1,$$

这和 $n\to+\infty$ 时矛盾!

例题 13.54 设 $f\in C(0,+\infty)$, 且对每个 $x>0, n\in\mathbb{N}$, 都有

$$f(x)\leqslant f(nx),$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在或者为 $+\infty$.

证明 事实上, 我们断言

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=s\triangleq\sup_{x>0} f(x)\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}.$$

对任何 $\epsilon>0$, 由上确界定义存在 $x_0>0$, 使得

$$s-\epsilon<f(x_0)\leqslant s. \tag{13.195}$$

当 $s<+\infty$, 由函数连续性, 存在 $\delta>0$, 使得对 $x\in[x_0,x_0+\delta]$, 都有(13.195)成立. 取 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $N\delta>x_0$. 因为

$$(n+1)x_0\leqslant nx_0+n\delta, \forall n\geqslant N,$$

所以

$$[Nx_0,+\infty)=\bigcup_{n=N}^{\infty}[nx_0,nx_0+n\delta].$$

于是对每个 $x\geqslant N\delta$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in[nx_0,nx_0+n\delta]$. 于是运用题目条件和 $x_0\leqslant\frac{x}{n}\leqslant x_0+\delta$ 以及(13.195),

我们有

$$s \geqslant f(x)=f\left(\frac{nx}{n}\right) \geqslant f\left(\frac{x}{n}\right)>s-\epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=s$. 当 $s=+\infty$, 我们考虑 $g(x)=\arctan f(x)$, 则 g 也满足题目条件, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\sup_{x>0} g(x)=\frac{\pi}{2},$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

例题 13.55 求全部严格单调函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 使得 $f\in C^1(0,+\infty)$ 且 f 是满射. 此外还满足方程

$$f'(x)=f^{-1}(x). \tag{13.196}$$

证明 注意到 $f(x)=Ax^c, c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, A=c^{1-c}$ 为满足题目条件的一个例子. 我们来证明没有其他例子.

由(13.196)知 $f'>0$, 故只能有

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty. \tag{13.197}$$

继续由(13.196)知 $f\in C^\infty(0,+\infty)$ 且 $f'(f(x))=x$. 于是得

$$f'(x)f''(f(x))=1, f''(x)f''(f(x))+[f'(x)]^2 f'''(f(x))=0.$$

可以看到 $f''>0, f'''<0$, 继续下去我们容易归纳[38]得到

$$(-1)^j f^{(j)}(x)>0, \forall j\in\mathbb{N}, x\in(0,+\infty).$$

通过推论19.2, 我们知道 f 在 $(0,+\infty)$ 实解析. 下面分情况讨论.

(1): 若对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f(x)>x$, 则结合(13.196)和 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$, 我们有 $x>f^{-1}(x)=f'(x)$ 以及

$$f'(f(x))f'(x)=xf'(x)\Rightarrow\int_0^x f'(f(y))f'(y)\,dy=\int_0^x yf'(y)\,dy\Rightarrow f(f(x))=\int_0^x yf'(y)\,dy.$$

于是

$$x<f(x)<f(f(x))<\int_0^x y^2dy=\frac{1}{3}x^3, \forall x>0,$$

这就是一个矛盾!

(2): 若对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f(x)<x$, 类似 **(1)** 的操作知道这不可能. 于是我们证明了 $f(x)$ 至少有一个不动点 $a>0$, 但是

$$[f(x)-x]''=f''>0,$$

故 $f(x)-x$ 是下凸函数且结合 $\lim\limits_{x\to0^+}[f(x)-x]=0$ 和几何意义知[39]

$$f(x)<x, \forall x\in(0,a), f(x)>x, \forall x\in(a,+\infty). \tag{13.198}$$

由(13.196)知

$$f'(x)>x, \forall x\in(0,a), f'(x)<x, \forall x\in(a,+\infty). \tag{13.199}$$

(3): 现在假设 f_1, f_2 是两个满足题意的函数且有上述讨论得到的不动点 a_1, a_2. 不失一般性, 假设 $a_1\geqslant a_2$. 我们考虑 $g=f_1-f_2$. 注意到若 $a_1=a_2$, 则由(13.196)知

$$g(a)=g'(a)=g''(a)=\cdots=0,$$

故 g 在 a 的邻域恒为 0. 由实解析函数零点孤立性19.7, 我们知道 $g\equiv0$, 这就证明了 $f_1\equiv f_2$.

(4): 假设 $a_1>a_2$, 在 $[a_2,a_1)$, 由(13.199)知 $g<0, g'>0$, 于是由连续性和 $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=0$, 我们知道存在 $b\in(0,a_2)$ 使得

$$g'(b)=0, g'(x)>0, \forall x\in(b,a_1), g(x)<0, \forall x\in[b,a_1). \tag{13.200}$$

[38]或者直接用10.1公式.

[39]无非就三种情况, 递增, 递减, 先减后增. 但是 $f(x)-x$ 在 0 和 a 都是 0.

现在由(13.199)知

$$a_2 > b' \triangleq f_1'(b) = f_2'(b) > b.$$

故由(13.200)知 $g(b') < 0$. 但是由(13.196)知

$$f_1(b') = f_1(f_1'(b)) = b = f_2(f_2'(b)) = f_2(b'),$$

于是 $g(b') = 0$. 这就是一个矛盾! 故我们证明了满足题目条件的函数只有 $f(x) = Ax^c, c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, A = c^{1-c}$.

例题 13.56 设 $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 满足 $f \in C[0,1] \bigcap D(0,1)$ 且

$$f(x+1) = f(x), \forall x \geqslant 0. \tag{13.201}$$

若还有 $f(0) = 0, f'(x)$ 在 $(0,1)$ 递减, 证明

$$f(nx) \leqslant nf(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,+\infty). \tag{13.202}$$

笔记 凸性部分要引起注意! 看到凸性应该兴奋, 无非就是走几何意义.

证明 注意 f 在 $(0,1)$ 上凸, 由连续性 f 在 $[0,1]$ 上凸. 而对 $x \geqslant 0$, 利用(13.201), 我们知道

$$f(nx) \leqslant nf(x) \Leftrightarrow f(n\{x\}) \leqslant nf(\{x\}),$$

这里 $\{x\} = x - [x]$.

而 $x = 0$ 时(13.202)显然成立, 因此不妨设 $x \in (0,1), n \in \mathbb{N}$. 由 $nx \geqslant x$, 当 $nx \leqslant 1$, 利用割线斜率不等式我们有

$$\frac{f(nx) - f(0)}{nx - 0} \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

这便是 $f(nx) \leqslant nf(x)$.

当 $nx > 1$, 这 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $nx = N + a, a \in [0,1)$, 由(13.201)知只需证明

$$f(a) \leqslant nf(x). \tag{13.203}$$

若 $a \leqslant x$, 利用割线斜率不等式, 我们有

$$f(x) \geqslant \frac{f(a) - f(1)}{a - 1}(x-1) = \frac{f(a)}{a-1}(x-1).$$

显然此时 f 非负. 而

$$\frac{f(a)}{a-1}(x-1) \geqslant \frac{f(a)}{n} \Leftrightarrow f(a)\left(\frac{x-1}{a-1} - \frac{1}{n}\right) \geqslant 0,$$

因此只需 $\frac{x-1}{a-1} - \frac{1}{n} \geqslant 0$, 因此只需要 $n - nx \geqslant 1 - a$, 即需要 $n - N \geqslant 1$.

注意到 $n > nx = N + a \geqslant N$, 这就证明了(13.203). 对称的, 若 $a > x$, 则由割线斜率不等式继续得

$$f(x) \geqslant \frac{f(a) - f(0)}{a} x = \frac{f(a)}{a} x,$$

即只需 $\frac{x}{a} \geqslant \frac{1}{n}$. 注意到 $nx = N + a \geqslant a \Rightarrow nx \geqslant a$, 故(13.203)成立. 这就证明了本题.

来看数学类真题, 我们这里更换了真题中凹点和凸点的用词.

例题 13.57 设 $f \in C[a,b] \bigcap D(a,b)$,

1. 证明存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 切线的上方或者下方.
2. 若 f 不恒为线性函数, 则存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得在 x_0 去心邻域 f 严格在 x_0 处切线的上方或者下方.

证明

1. 考虑

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),$$

则 $g(a) = g(b) = 0$. 如果 $g(x) \equiv 0$, 那显然.

若存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g(x_0) > 0$, 不妨设 x_0 是最大值点, 于是 $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 且

$$g(x) \leqslant g(x_0) \Rightarrow f(x) - f'(x_0)(x-a) - f(a) \leqslant f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - a) - f(a)$$
$$\Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

若存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g(x_0) < 0$, 同理可得, 这就完成了证明.

2. 考虑

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),$$

则 $g(a) = g(b) = 0$. 不妨设 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $g(x_0) > 0$. 再取 $\epsilon > 0$ 使得

$$g(a) + \epsilon (a-x_0)^2 < g(x_0), g(b) + \epsilon (b-x_0)^2 < g(x_0). \tag{13.204}$$

现在我们考虑

$$h(x) = g(x) + \epsilon (x-x_0)^2.$$

由(13.204)知 $h(b) < h(x_0)$, 故不妨设 x_0 是 h 最大值点[40]. 考虑

$$k(x) = f(x) - h(x).$$

则由 k 为首系数为负的二次函数, 所以会严格在切线下方和

$$f(x) - k(x) \leqslant f(x_0) - k(x_0)$$

知

$$f(x) \leqslant f(x_0) + k(x) - k(x_0) < f(x_0) + k'(x_0)(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

因此

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \forall x \neq x_0.$$

这就完成了证明.

定理 13.58

设 $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

则若 $f \in C[0,1]$ 且

$$\int_0^1 x^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{13.205}$$

必有 $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

♡

笔记 内积空间和最佳逼近元知识点见丘维声.

证明 考虑内积空间

$$L^2[0,1], (f,g) \triangleq \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, ||f|| \triangleq \sqrt{(f,f)}.$$

我们的目标是证明对每一个 $p \in \mathbb{N}_0$ 都有 x^p 到 $\mathrm{span}\{x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_n}\}$ 的距离 d_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0. \tag{13.206}$$

这是因为如果一旦(13.206)成立, 那么设 x^p 在 $\mathrm{span}\{x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_n}\}$ 的最佳逼近元为 f_n, 于是

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - x^p|^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} d_n^2 = 0.$$

现在由 Cauchy 不等式得

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 x^p f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 f(x)[x^p - f_n(x)]\,\mathrm{d}x \right|$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_0^1 |x^p - f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x} \right) = 0.$$

[40] 不妨设之后 $h(x_0) = 0$ 不一定成立了

结合(13.205)得

$$\int_0^1 x^p f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x) f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

由例题13.24知 $f(x)=0, \forall x\in[0,1]$.

为了计算 d_n, 设 x^p 在 $\mathrm{span}\{x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_n}\}$ 的最佳逼近元为 $\sum\limits_{j=1}^n c_j x^{a_j}$, 于是

$$\left(x^p - \sum_{j=1}^n c_j x^{a_j}, x^{a_i}\right) = 0, i = 1, 2, \cdots, n,$$

即得

$$\sum_{j=1}^n c_j \left(x^{a_i}, x^{a_j}\right) = \left(x^p, x^{a_i}\right), i = 1, 2, \cdots, n.$$

视为线性方程组有

$$\begin{pmatrix} \left(x^{a_1}, x^{a_1}\right) & \left(x^{a_1}, x^{a_2}\right) & \cdots & \left(x^{a_1}, x^{a_n}\right) \\ \left(x^{a_2}, x^{a_1}\right) & \left(x^{a_2}, x^{a_2}\right) & \cdots & \left(x^{a_2}, x^{a_n}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(x^{a_n}, x^{a_1}\right) & \left(x^{a_n}, x^{a_2}\right) & \cdots & \left(x^{a_n}, x^{a_n}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(x^p, x^{a_1}\right) \\ \left(x^p, x^{a_2}\right) \\ \vdots \\ \left(x^p, x^{a_n}\right) \end{pmatrix},$$

记作 $Vc=\beta$. 由定理21.12和 $x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_n}$ 线性无关知 V 正定, 所以 $c = V^{-1}\beta$. 现在

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \left(x^p - \sum_{j=1}^n c_j x^{a_j}, x^p - \sum_{j=1}^n c_j x^{a_j}\right) = \left(x^p, x^p - \sum_{j=1}^n c_j x^{a_j}\right) \\ &= ||x^p||^2 - \sum_{j=1}^n c_j \left(x^p, x^{a_j}\right) = ||x^p||^2 - \beta^T c = ||x^p||^2 - \beta^T V^{-1}\beta. \end{aligned}$$

考虑 $x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_n}, x^p$ 的 Gram 矩阵

$$V' = \begin{pmatrix} \left(x^{a_1}, x^{a_1}\right) & \left(x^{a_1}, x^{a_2}\right) & \cdots & \left(x^{a_1}, x^p\right) \\ \left(x^{a_2}, x^{a_1}\right) & \left(x^{a_2}, x^{a_2}\right) & \cdots & \left(x^{a_2}, x^p\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(x^p, x^{a_1}\right) & \left(x^p, x^{a_2}\right) & \cdots & \left(x^p, x^p\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & \beta \\ \beta^T & ||x^p||^2 \end{pmatrix}.$$

初等变换得

$$\begin{pmatrix} V & \beta \\ \beta^T & ||x^p||^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} V & \beta \\ 0 & ||x^p||^2 - \beta^T V^{-1}\beta \end{pmatrix}.$$

显然这种初等变换不改变行列式, 所以

$$\det V' = \det V \cdot \left(||x^p||^2 - \beta^T V^{-1}\beta\right) = \det V \cdot d_n^2.$$

注意到

$$\left(x^s, x^t\right) = \int_0^1 x^{s+t}\mathrm{d}x = \frac{1}{s+t+1}, \forall s, t \geqslant 0,$$

所以由 Cauchy 行列式21.11得

$$|V| = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)^2}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + a_j + 1)}, |V'| = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j - a_i)^2}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}(a_i + a_j + 1)},$$

这里暂时记作 $a_{n+1} = p$. 于是

$$\frac{1}{d_n^2} = \frac{(2a_{n+1}+1)\prod\limits_{j=1}^n (a_{n+1} + a_j + 1)^2}{\prod\limits_{i=1}^n (a_{n+1} - a_i)^2} = \frac{(2p+1)\prod\limits_{j=1}^n (p + a_j + 1)^2}{\prod\limits_{i=1}^n (p - a_i)^2},$$

即

$$\frac{1}{d_n}=\sqrt{2p+1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(p+a_j+1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left|p-a_i\right|}. \tag{13.207}$$

因为 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{2p+1}{a_i-p}=0$, $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=+\infty$, 所以存在 $i_p\in\mathbb{N}$ 使得当 $i\geqslant i_p$ 有

$$a_i>p,\frac{2p+1}{a_i-p}>-1.$$

于是可以由

$$\sum_{i=i_p}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2p+1}{a_i-p}\right)\sim\sum_{i=i_p}^{\infty}\frac{2p+1}{a_i}=+\infty$$

知(13.207)右边的无穷积发散到 $+\infty$, 因此(13.206)成立, 从而我们完成了证明.

例题 13.58

1. 设 $f_n\in C\left[a,b\right]$ 且关于 $[a,b]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=f\left(x\right). \tag{13.208}$$

证明: 对

$$\left\{x_n\right\}\subset\left[a,b\right],\lim_{n\to\infty}x_n=c,$$

有

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_n\right)=f\left(c\right).$$

2. 设 $f_n\left(x\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x_0\in\mathbb{R}$ 和

$$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R},\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,$$

都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_n\right)=f\left(x_0\right),$$

证明 $f\in C(\mathbb{R})$.

证明

1. 因为关于 $[a,b]$ 一致的有(13.208)成立, 所以对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $n\geqslant N\geqslant N_0,x\in[a,b]$ 都有

$$\left|f_n\left(x\right)-f_N\left(x\right)\right|<\epsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(x_n\right)-f\left(c\right)\right|&\leqslant\left|f_n\left(x_n\right)-f_N\left(x_n\right)\right|+\left|f_N\left(x_n\right)-f_N\left(c\right)\right|+\left|f_N\left(c\right)-f\left(c\right)\right|\\&\leqslant\epsilon+\left|f_N\left(x_n\right)-f_N\left(c\right)\right|+\left|f_N\left(c\right)-f\left(c\right)\right|.\end{aligned}$$

结合 $\lim\limits_{N\to\infty}\left|f_N\left(c\right)-f\left(c\right)\right|=0$ 和 f_N 连续性, 我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|f_n\left(x_n\right)-f\left(c\right)\right|\leqslant\epsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(x_n\right)-f\left(c\right)\right|=0.$$

2. 若 f 在某个 $x_0\in\mathbb{R}$ 不连续, 那么存在 $\epsilon_0>0$, 使得对任何 $m\in\mathbb{N}$, 存在 $y_m\in\left(x_0-\frac{1}{m},x_0+\frac{1}{m}\right)$ 满足

$$\left|f\left(y_m\right)-f\left(x_0\right)\right|\geqslant\epsilon_0,m=1,2,\cdots.$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(y_m\right)-f\left(y_m\right)\right|=0,m=1,2,\cdots,$$

然后对 $m\in\mathbb{N}$, 存在严格递增的无界数列 $n_m\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|<\frac{\epsilon_0}{2}.$$

定义

$$x_n=y_m, n_m\leqslant n<n_{m+1}, n=n_1,n_1+1,\cdots,$$

我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 于是

$$|f_{n_m}(x_{n_m})-f(y_m)|=|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|<\frac{\epsilon_0}{2}, m=1,2,\cdots,$$

从而

$$|f_{n_m}(x_{n_m})-f(x_0)|\geqslant|f(y_m)-f(x_0)|-|f_{n_m}(y_m)-f(y_m)|>\epsilon_0-\frac{\epsilon_0}{2}=\frac{\epsilon_0}{2}.$$

这和 $\lim\limits_{m\to\infty}|f_{n_m}(x_{n_m})-f(x_0)|=0$ 矛盾! 故我们证明了 $f\in C(\mathbb{R})$.

例题 13.59

1. 设 $f\in C[0,+\infty)$ 是有界的. 若对任何 $r\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)=r$ 在 $[0,+\infty)$ 只有有限个或者无根, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.
2. 设 $f\in C(\mathbb{R}), n$ 是一个非 0 正偶数, 使得对任何 $y\in\mathbb{R}$, 都有 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)=y\}$ 是 n 元集. 证明: 这样的 f 不存在.
3. 当上一问 n 为奇数时证明存在.
4. 给定函数 $f\in C[0,1]$, 若 f 满足 $f(0)\neq f(1)$ 且对任何 $c\in\mathbb{R}$, 都有 $\{x:f(x)=c\}$ 不是无限集, 证明存在 $c_0\in f([0,1])$, 使得 $\{x:f(x)=c_0\}$ 的元素个数是奇数.
5. 若去掉第四问的 $f(0)\neq f(1)$, 则第三问的结论还成立吗?

证明

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 因为 f 有界, 故设

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}f(x)=A>B=\underline{\lim_{x\to+\infty}}f(x).$$

现在我们取 $C\in(B,A)$, 于是由上下极限定义可取 $x_1\geqslant0$ 使得 $f(x_1)>C$. 再取 $x_2>x_1+1$ 使得 $f(x_2)<C$, 依次下去得

$$f(x_{2n-1})>C, f(x_{2n})<C, x_{n+1}>x_n+1, n=1,2,\cdots.$$

由介值定理可得 $y_n\in(x_{2n-1},x_{2n}), n=1,2,\cdots$ 使得 $f(y_n)=C$, 这就和题目条件矛盾! 因此我们证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

2. 设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 为 f 的全部零点, 并记 $x_0=-\infty, x_{n+1}=+\infty$, 则 f 在 $(x_{i-1},x_i), i=1,2,\cdots,n+1$ 不变号. 这里共有 $n+1$ 个区间, 因此必有 $\frac{n}{2}+1$ 个区间上 f 同号, 不妨设在这 $\frac{n}{2}+1$ 个区间上 $f>0$. 注意到 f 在 (x_0,x_1) 和 x_n,x_{n+1} 符号不同, 否则将导致 f 有上界或者下界.
现在设 f 在扣除掉两个到无穷的区间之后的 $\frac{n}{2}$ 个 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值为 m_i, 由介值定理我们知道存在 $2\left(\frac{n}{2}\right)$ 个 c_j 使得

$$f(c_j)=\frac{1}{2}\min_{2\leqslant i\leqslant n}m_i>0.$$

在 (x_0,x_1) 和 x_n,x_{n+1} 上还至少存在一个 c 使得

$$f(c)=\frac{1}{2}\min_{2\leqslant i\leqslant n}m_i>0. \tag{13.209}$$

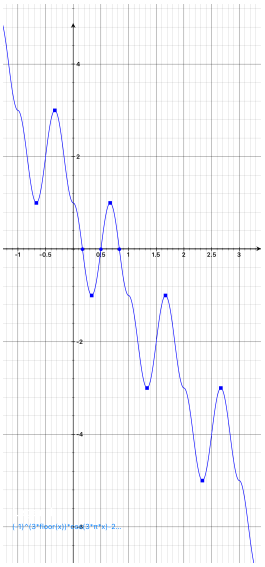
这里合计至少有 $n+1$ 个点使得(13.209)成立, 这就是一个矛盾! 故这样的 f 不存在.

3. 例如构造 $f(x)=(-1)^{n[x]}\cos(n\pi x)-2[x]$, 图像如下

4. 不妨设 $f(0)<f(1)$, 由极值至多可数命题13.5, 我们可取 $c_0\in(f(0),f(1))$ 使得 c_0 不是 f 的极值. 由连续函数介值定理, 我们知道 $\{x\in[0,1]:f(x)=c_0\}$ 非空. 于是设

$$\{x\in[0,1]:f(x)=c_0\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=1.$$

图 13.7.1: $n=3$



由连续函数的介值性, 我们知道在 $(x_{i-1},x_i),i=1,2,\cdots,n+1$ 有 $f-c_0$ 要么恒大于 0, 要么恒小于 0. 因为 c_0 不是极值点, 所以在相邻两个区间内 $f-c_0$ 变号. 注意到 $f(0)-c_0<0,f(1)-c_0>0$, 则 n 必然变号奇数次, 因此 n 是奇数, 这就完成了证明.

5. 错误, 见呆唯的知乎回答.

例题 13.60 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$

1. 若 f 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)-f^4(x)\right]=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
2. 若 f 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(f'(x))^2+f^3(x)\right]=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

注直观上来说, 对于 $f'=0$ 那些点会有 f 趋于 0, 也就是说 f 所有极值趋于 0, f 夹在极值之间, 因此也有 f 趋于 0.

证明

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$, 则存在趋于正无穷的严格递增的 $x_n,n=1,2,\cdots$, 使得

$$|f(x_n)|\geqslant\epsilon_0,n=1,2,\cdots.$$

因为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多项满足 $f(x_n)\geqslant\epsilon_0$ 或者 $f(x_n)\leqslant-\epsilon_0$, 不妨设前者发生. 因此我们不妨设

$$f(x_n)\geqslant\epsilon_0,n=1,2,\cdots. \tag{13.210}$$

设 $N>0$, 使得

$$\left|f'(x)-f^4(x)\right|<\epsilon_0^4,\forall x\geqslant N. \tag{13.211}$$

假如对任何 $X>0$, 都有 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 不单调, 则对充分大的 $n_0\in\mathbb{N}$, 存在 $t_2>x_{n_0}>t_1>N$, 使得 $f'(t_1)=f'(t_2)=0$. 由(13.211)知 $|f(t_i)|<\epsilon_0,i=1,2$. 由(13.210)知 f 在 $[t_1,t_2]$ 取得最大值 $f(s)$, 使得

$$f(s)\geqslant f(x_{n_0})\geqslant\epsilon_0,s\in(t_1,t_2).$$

注意到 $f'(s)=0$ 但是由(13.211)知 $|f(s)|<\epsilon_0$, 因此这是矛盾!

现在我们知道存在 $X>0$, 使得 f 在 $[X,+\infty)$ 单调. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-f^4(x)\right]+\lim_{x\to+\infty}f^4(x)\text{ 存在.}$$

由结论12.1, 我们知道

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f^4(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

这就和(13.210)矛盾!

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$, 则取 $c>0, Y>X$, 使得

$$f'(x)-f^4(x)\geqslant -c, f^4(x)-c>0, \forall x\geqslant Y. \tag{13.212}$$

则由(13.212)知

$$\frac{f'(x)}{f^4(x)-c}\geqslant 1\Rightarrow \int_Y^x \frac{f'(x)}{f^4(x)-c}dx\geqslant x-Y, \forall x\geqslant Y,$$

即

$$\int_{f(Y)}^{f(x)} \frac{1}{t^4-c}dx\geqslant x-Y, \forall x\geqslant Y.$$

但是上式左边在 $x\to+\infty$ 时有限, 右边在 $x\to+\infty$ 时无限, 这就又是一个矛盾! 这样我们就完成了证明.

2. 和第一问完全一样的, 我们只需对单调的函数 f 且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ 考虑.

不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, 此时 f 递减. 取 $c>0, Y>X$, 使得

$$(f'(x))^2+f^3(x)>-c, f^3(x)+c<0, \forall x\geqslant Y, \forall x\geqslant Y. \tag{13.213}$$

于是由(13.213)得

$$f'(x)<-\sqrt{-c-f^3(x)}\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{-c-f^3(x)}}<-1\Rightarrow \int_{f(Y)}^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{-c-t^3}}<Y-x,$$

和第二问完全一样的考虑 $x\to+\infty$ 而导出矛盾! 因此我们完成了证明.

例题 13.61 设 $f\in C^2[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 并且对某个常数 λ, $f''(x)+\lambda f'(x)$ 有上界, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

笔记 显然, 本题将运用反向洛必达的技巧想法. 但是直接放缩会有 f' 干扰, 我们需要把 f', f'' 整体的丢掉.

证明 设 $f''(x)+\lambda f'(x)\leqslant K$. 考虑 $g(x)=f(x)+\lambda\int_0^x f(t)\,dt$, 于是由 Taylor 公式积分余项11.4, 对 $x,y>0$, 我们有

$$g(x+y)=g(x)+g'(x)y+\frac{g''(\theta)}{2}y^2, \theta\in[x,x+y]. \tag{13.214}$$

于是(13.214)代入 g 表达式得

$$f(x+y)+\lambda\int_0^{x+y} f(t)\,dt=f(x)+\lambda\int_0^x f(t)\,dt+(f'(x)+\lambda f(x))y+\frac{g''(\theta)}{2}y^2.$$

于是解出 f' 得

$$f'(x)=\frac{f(x+y)-f(x)}{y}+\frac{\lambda}{y}\int_x^{x+y} f(t)\,dx-\frac{g''(\theta)}{2}y-\lambda f(x).$$

于是我们有

$$\varlimsup_{x\to+\infty} f'(x)\geqslant \frac{\lambda}{y}\varlimsup_{x\to+\infty}\int_x^{x+y} f(t)\,dx-\frac{K}{2}y=\frac{\lambda}{y}\varlimsup_{x\to+\infty} f(\theta_{x,y})\,\dot{y}-\frac{K}{2}y=-\frac{K}{2}y,$$

这里 $x\leqslant\theta_{x,y}\leqslant x+y$ 来自积分中值定理11.3. 由 y 的任意性即得 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f'(x)\geqslant 0$.

反过来对 $y\in(0,1), x>1$, 由 Taylor 公式积分余项11.4, 我们有

$$g(x-y)=g(x)-g'(x)y+\frac{g''(\theta)}{2}y^2, \theta\in[x-y,x]. \tag{13.215}$$

于是(13.215)代入 g 表达式并解出 f' 得

$$f'(x)=\frac{f(x-y)-f(x)}{-y}+\frac{\lambda}{y}\int_{x-y}^x f(t)\,dx+\frac{g''(\theta)}{2}y-\lambda f(x).$$

类似的我们有

$$\varliminf_{x\to+\infty} f'(x)\leqslant \frac{K}{2}y,$$

由 y 任意性可得 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f'(x)\leqslant 0$. 这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

例题 13.62 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right),\forall b\neq a.$$

证明 f 是下凸函数.

证明 回忆11.4, 本题是其反向的结果.

当 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 时, 注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to a^+}\frac{\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{6}(b-a)^3}\\
=&\lim_{b\to a^+}\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{2}(b-a)^2}\\
=&\lim_{b\to a^+}\frac{f'(b)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{4}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\\
=&\lim_{b\to a^+}\left(f''(b)-\frac{3}{4}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{8}f'''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\\
=&\frac{1}{4}f''(a)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此

$$f''(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R},$$

所以 f 是下凸函数.

对一般情况, 取磨光函数如13.14. 注意到对任何 $\delta>0,b>a$, 我们都有

$$\begin{aligned}
f_\delta\left(\frac{a+b}{2}\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{a+b}{2}-z\right)\chi_\delta(z)\,dz\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{a-z+b-z}{2}\right)\chi_\delta(z)\,dz\\
&\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a-z}^{b-z}f(\zeta)\chi_\delta(z)\,d\zeta dz\\
&=\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{b}f(\zeta-z)\chi_\delta(z)\,d\zeta dz\\
&=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta-z)\chi_\delta(z)\,dz\\
&=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f_\delta(\zeta)\,d\zeta.
\end{aligned}$$

相似例题13.2知

$$\lim_{\delta\to0^+}f_\delta(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

于是由光滑情况时的证明, 我们知道 f_δ 下凸, 因此有

$$f_\delta(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f_\delta(x)+(1-\lambda)f_\delta(y),\forall x,y\in\mathbb{R},\lambda\in[0,1].$$

两边令 $\delta\to0^+$, 我们就证明了

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R},\lambda\in[0,1],$$

因此 f 下凸.

例题 13.63 设 $f\in C\left([0,+\infty)\right)$ 且 f 非负递减, 并令

$$F\left(x\right)\triangleq\int_0^x\left(x-2t\right)f\left(t\right)dt,x\geqslant 0.$$

证明: F 是 $[0,+\infty)$ 上的下凸函数.

证明 注意到

$$F'\left(x\right)=-xf\left(x\right)+\int_0^x f\left(t\right)dt.$$

若 $f\in C^1\left([0,+\infty)\right)$, 则

$$F^{'}\left(x\right)=-f\left(x\right)+f\left(x\right)-xf'\left(x\right)=-xf'\left(x\right)\geqslant 0.$$

对一般的 f, 我们定义

$$f\left(x\right)=f\left(0\right),x\leqslant 0.$$

取磨光函数如13.14, 然后考虑

$$f_\delta\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(y\right)\chi_\delta\left(x-y\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-y\right)\chi_\delta\left(y\right)dy,x\in\mathbb{R},\delta>0,$$

就有 $f_\delta\in C^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ 且非负递减且

$$\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{t\in[0,x]}\left|f_\delta\left(t\right)-f\left(t\right)\right|=0,\forall x\geqslant 0.$$

因此 $F_\delta\left(x\right)=\int_0^x\left(x-2t\right)f_\delta\left(t\right)dt$ 是 $[0,+\infty)$ 上的下凸函数, 所以

$$F_\delta\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\leqslant\lambda F_\delta\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)F_\delta\left(y\right),\forall x,y\in\left[0,+\infty\right),\lambda\in\left[0,1\right],\tag{13.216}$$

注意到

$$\left|F_\delta\left(x\right)-F\left(x\right)\right|\leqslant\int_0^x\left|x-2t\right|\cdot\left|f_\delta\left(t\right)-f\left(t\right)\right|dt\leqslant\sup_{t\in[0,x]}\left|f_\delta\left(t\right)-f\left(t\right)\right|\cdot\int_0^x\left|x-2t\right|dt.$$

结合磨光的基本性质, 我们知道

$$\lim_{\delta\to 0^+}F_\delta\left(x\right)=F\left(x\right),\forall x\geqslant 0.$$

在(13.216)中让 $\delta\to 0^+$, 就有

$$F\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\leqslant\lambda F\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)F\left(y\right),\forall x,y\in\left[0,+\infty\right),\lambda\in\left[0,1\right].$$

因此我们证明了 F 是 $[0,+\infty)$ 上的下凸函数.

作为逼近方法的运用, 我们来看:

例题 13.64 测试函数问题 ♡ 记 $S=\left\{\phi\in C^2\left[a,b\right]:\phi\left(a\right)=\phi\left(b\right)=0\right\}$, 则

1. 设 $f\in C\left[a,b\right]$ 满足

$$\int_a^b f\left(x\right)\phi\left(x\right)dx=0,\forall\phi\in S,$$

证明 $f\left(x\right)=0,\forall x\in[a,b]$.

2. 设[41] $f\in C\left[a,b\right]$ 满足

$$\int_a^b f\left(x\right)\phi'\left(x\right)dx=0,\forall\phi\in S,$$

证明存在常数 $c\in\mathbb{R}$, 使得 $f\left(x\right)=c,\forall x\in[a,b]$.

3. 设 $f\in C\left[a,b\right]$ 满足

$$\int_a^b f\left(x\right)\phi''\left(x\right)dx=0,\forall\phi\in S,$$

[41] 这种情况也有经典例题写成

$$\int_a^b f\left(x\right)\phi\left(x\right)dx=0,\forall\phi\in C\left[a,b\right]\text{ 使得 }\int_a^b\phi\left(x\right)\mathrm{d}x=0.$$

证明存在 $c,d\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x)=cx+d,\forall x\in[a,b]$.

我们直接证明最一般的结果, 则

引理 13.8

设 $k\in\mathbb{N}_0$, $f,g\in C[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)\phi^{(k)}(x)\,dx=(-1)^k\int_a^b g(x)\phi(x)\,dx,\forall\phi\in C_c^\infty(a,b),$$

证明 $f\in C^k[a,b]$ 且 $f^{(k)}(x)=g(x),\forall x\in[a,b]$.

♡

证明 取 $h\in C^k[a,b]$ 使得 $h^{(k)}(x)=g(x),\forall x\in[a,b]$. 则

$$\int_a^b[f(x)-h(x)]\phi^{(k)}(x)\,dx=(-1)^k\int_a^b[g(x)-g(x)]\phi(x)\,dx=0,\forall\phi\in C_c^\infty(a,b).$$

故我们不妨设 $g=0$.

考虑卷积磨光13.14, 我们设

$$f_\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[a,b]}(y)f(y)\chi_\delta(x-y)\,dy,x\in\mathbb{R},\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right).$$

当 $x\in(a+\delta,b-\delta)$, 我们有

$$\begin{aligned}f_\delta^{(k)}(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[a,b]}(y)f(y)\chi_\delta^{(k)}(x-y)\,dy\\&=(-1)^k\int_a^b f(y)\frac{d^k[\chi_\delta(x-y)]}{dy^k}dy\\&\overset{\bigstar}{=}0,\end{aligned}$$

这里 ★ 步骤用到了 $x\in(a+\delta,b-\delta)$ 使得 $\chi_\delta(x-\cdot)\in C_c^\infty(a,b)$.

于是 $f_\delta^{(k)}(x)=0,x\in(a+\delta,b-\delta)$, 因此

$$f_\delta(x)=\sum_{j=0}^{k-1}a_j^{(\delta)}x^j,x\in(a+\delta,b-\delta).$$

现在熟知 $\lim\limits_{\delta\to0^+}f_\delta(x)=f(x),x\in[a,b]$, 于是一个标准技巧, 即设 $[a,b]$ 中 k 个不同的点 $x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}$ 使得

$$f_\delta(x_s)=\sum_{j=0}^{k-1}a_j^{(\delta)}x_s^j,s=0,1,\cdots,k-1.$$

然后

$$\begin{pmatrix}a_0^{(\delta)}\\a_1^{(\delta)}\\\vdots\\a_{k-1}^{(\delta)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0^0&x_0^1&\cdots&x_0^{k-1}\\x_1^0&x_1^1&\cdots&x_1^{k-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{k-1}^0&x_{k-1}^1&\cdots&x_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f_\delta(x_0)\\f_\delta(x_1)\\\vdots\\f_\delta(x_{k-1})\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0^+}\begin{pmatrix}a_0^{(\delta)}\\a_1^{(\delta)}\\\vdots\\a_{k-1}^{(\delta)}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}x_0^0&x_0^1&\cdots&x_0^{k-1}\\x_1^0&x_1^1&\cdots&x_1^{k-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{k-1}^0&x_{k-1}^1&\cdots&x_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\lim_{\delta\to0^+}\begin{pmatrix}f_\delta(x_0)\\f_\delta(x_1)\\\vdots\\f_\delta(x_{k-1})\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_0^0&x_0^1&\cdots&x_0^{k-1}\\x_1^0&x_1^1&\cdots&x_1^{k-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{k-1}^0&x_{k-1}^1&\cdots&x_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f(x_0)\\f(x_1)\\\vdots\\f(x_{k-1})\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\delta\to 0^+} a_j^{(\delta)} = a_j, j = 0, 1, 2, \cdots, k-1.$$

现在就知道

$$f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} f_\delta(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j, x \in [a,b].$$

于是我们证明了 $f^{(k)}(x) = 0$, 这就完成了证明.

例题 13.65* 设 $f \in C[a,b], g \in R^1[a,b], k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\int_a^b f(x)\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_a^b g(x)\phi(x)dx, \forall \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

证明 $f \in C^{k-1}[a,b]$

证明 和例题13.64一致, 可取 $h \in C^{k-1}[a,b]$ 使得 $h^{(k-1)}(x) = \int_a^x g(y)dy, \forall x \in [a,b]$. 则

$$\int_a^b [f(x) - h(x)]\phi^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_a^b [g(x) - g(x)]\phi(x)dx = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

故我们不妨设 $g = 0$.

考虑卷积磨光13.14, 我们设

$$f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(y) f(y) \chi_\delta(x-y)dy, x \in \mathbb{R}, \delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right).$$

当 $x \in (a+\delta, b-\delta)$, 我们有

$$\begin{aligned} f_\delta^{(k)}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(y) f(y) \chi_\delta^{(k)}(x-y)dy \\ &= (-1)^k \int_a^b f(y) \frac{d^k[\chi_\delta(x-y)]}{dy^k} dy \\ &\overset{\bigstar}{=} 0, \end{aligned}$$

这里 ★ 步骤用到了 $x \in (a+\delta, b-\delta)$ 使得 $\chi_\delta(x-\cdot) \in C_c^\infty(a,b)$.

于是 $f_\delta^{(k)}(x) = 0, x \in (a+\delta, b-\delta)$, 因此

$$f_\delta(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(\delta)} x^j, x \in (a+\delta, b-\delta).$$

和例题13.64一致, 我们有 f 为 $k-1$ 次多项式, 这就证明了 $f \in C^{k-1}[a,b]$.

来看一个应试版本.

例题 13.66 设 $f \in C[a,b]$ 满足对任何 $g \in C[a,b]$ 且 $g(a) = g(b) = 0$ 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

证明 $f = 0$.

证明 考虑

$$\int_a^b f(x)f(x)(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x = 0,$$

于是

$$f^2(x)(x-a)^2(x-b)^2 = 0,$$

即 $f = 0$.

例题 13.67 设 $f \in C[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \forall g \in C_c^\infty(a,b),$$

证明 $f = 0$.

证明 对 $g\in C_c(a,b)$, 设 $\operatorname{supp}g\subset[c,d]\subset(a,b)$, 在 $[\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}]$ 上用 S-W 定理13.45得多项式 $g_n,n=1,2,\cdots$ 使得 g_n 一致收敛到 g.

取 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$0\leqslant\eta\leqslant1,\eta|_{[c,d]=1},\operatorname{supp}\eta\subset\left[\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right].$$

注意到 $g_n\eta\in S,n=1,2,\cdots$, 于是我们有

$$\int_{\frac{a+c}{2}}^{\frac{b+d}{2}}f(x)g_n(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g_n(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots.$$

现在

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+c}{2}}^{\frac{b+d}{2}}f(x)g(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a+c}{2}}^{\frac{b+d}{2}}f(x)g_n(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0.$$

由引理13.6, 我们知道

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,\forall g\in C[a,b],$$

因此可取 $g=f$ 即得 $f=0$.

例题 13.68 设 f 是 $(a,+\infty)$ 有界连续函数, 证明对任何实数 T, 存在数列 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.\tag{13.217}$$

证明 $T=0$ 显然存在数列 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 使得(13.217)成立. 不妨设 $T>0$. 显然只需要考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]>0$ 或者 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}[f(x+T)-f(x)]<0$ 的情况.

不妨设为前者. 于是存在 $X>0,\delta>0$ 使得

$$f(x+T)-f(x)\geqslant\delta,\forall x\geqslant X.\tag{13.218}$$

固定 $x>X$, 在(13.218)中考虑 $x+nT,n=1,2,\cdots$, 我们有

$$f(x+mT)-f(x)=\sum_{n=0}^{m-1}[f(x+(n+1)T)-f(x+nT)]\geqslant m\delta,$$

这和 f 是有界函数矛盾!

例题 13.69

1. 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f 有周期 $T_1,T_2>0$. 若 $\frac{T_1}{T_2}\notin\mathbb{Q}$, 证明 f 是常值函数. 并说明如果 f 没有连续性则结论不对.
2. 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f,g 分别有最小正周期 $T_1,T_2>0$. 若 $\frac{T_1}{T_2}\notin\mathbb{Q}$, 证明 $f+g$ 不是周期函数.

证明

1. 注意到由命题9.9知 $\left\{m+n\frac{T_1}{T_2}:m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 故对任何 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\{m_k\}_{k=1}^\infty,\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{Z}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\left(m_k+n_k\frac{T_1}{T_2}\right)=\frac{x}{T_2}.$$

这就给出了

$$f(0)=\lim_{k\to\infty}f(n_kT_1+m_kT_2)=f(x).$$

当 f 不连续, 考虑反例

$$f(x)\triangleq\begin{cases}1,&x可以写成rT_1+sT_2,r,s\in\mathbb{Q}\\0,&其他\end{cases}.$$

2. 若 $f+g$ 有周期 $T>0$, 则

$$f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x).$$

注意到 $f(x+T)-f(x)=g(x)-g(x+T)$ 有周期 T_1,T_2, 故由第一问知存在常数 $C\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x+T)-f(x)=g(x)-g(x+T)=C.$$

于是

$$f(nT)-f((n-1)T)=C,n=1,2,\cdots\Rightarrow f(nT)=f(0)+nC.$$

现在 f 有界知 $C=0$, 从而 f 有周期 T,T_1. 注意 $\frac{T}{T_1},\frac{T}{T_2}$ 必有一个不是有理数, 不妨设为前者. 继续由第一问知 f 为常数, 这和 f 有最小正周期矛盾! 于是我们证明了 $f+g$ 不是周期函数.

例题 13.70 设 f 在 $[0,+\infty)$ 可导且 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 若存在 $C,c>0$ 使得

$$f'(x)\leqslant Cf(x)+c,\forall x\in[0,+\infty),\tag{13.219}$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明 由积分中值定理11.3, 对每一个 $n,m\in\mathbb{N}$ 都有 $x_n^{(m)}\in\left(\frac{2n}{m},\frac{2n+1}{m}\right)$ 使得

$$f\left(x_n^{(m)}\right)=m\int_{\frac{2n}{m}}^{\frac{2n+1}{m}}f(x)\,\mathrm{d}x,\forall m\in\mathbb{N}.$$

显然 $x_{n+1}^{(m)}>x_n^{(m)}$. 由 Cauchy 收敛准则有

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n^{(m)}\right)=m\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{2n+1}{m}}^{\frac{2n+2}{m}}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall m\in\mathbb{N}.\tag{13.220}$$

考虑

$$F(x)\triangleq f(x)e^{-Cx}+\frac{c}{C}e^{-Cx}.$$

注意到

$$F'(x)=[f'(x)-Cf(x)-c]e^{-Cx}\leqslant 0,$$

即 F 递减.

固定 $m\in\mathbb{N}$, 对每一个 $x\geqslant x_1^{(m)}$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n^{(m)}\leqslant x<x_{n+1}^{(m)}$, 利用 F 递减, 我们有

$$f\left(x_{n+1}^{(m)}\right)e^{-Cx_{n+1}^{(m)}}+\frac{c}{C}e^{-Cx_{n+1}^{(m)}}\leqslant f(x)e^{-Cx}+\frac{c}{C}e^{-Cx}\leqslant f\left(x_n^{(m)}\right)e^{-Cx_n^{(m)}}+\frac{c}{C}e^{-Cx_n^{(m)}},\forall n\in\mathbb{N},$$

即

$$f\left(x_{n+1}^{(m)}\right)e^{C\left(x-x_{n+1}^{(m)}\right)}+\frac{c}{C}e^{C\left(x-x_{n+1}^{(m)}\right)}-\frac{c}{C}\leqslant f(x)\leqslant f\left(x_n^{(m)}\right)e^{C\left(x-x_n^{(m)}\right)}+\frac{c}{C}e^{C\left(x-x_n^{(m)}\right)}-\frac{c}{C},\forall n\in\mathbb{N}.$$

利用

$$\max\left\{\left|x-x_n^{(m)}\right|,\left|x-x_{n+1}^{(m)}\right|\right\}\leqslant x_{n+1}^{(m)}-x_n^{(m)}\leqslant\frac{2n+3}{m}-\frac{2n}{m}=\frac{3}{m},$$

我们有

$$-\left|f\left(x_{n+1}^{(m)}\right)\right|e^{-\frac{3C}{m}}+\frac{c}{C}e^{-\frac{3C}{m}}-\frac{c}{C}\leqslant f(x)\leqslant\left|f\left(x_n^{(m)}\right)\right|e^{\frac{3C}{m}}+\frac{c}{C}e^{\frac{3C}{m}}-\frac{c}{C},\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$\frac{c}{C}e^{-\frac{3C}{m}}-\frac{c}{C}\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}f(x)\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}f(x)\leqslant\frac{c}{C}e^{\frac{3C}{m}}-\frac{c}{C}.$$

让 $m\to+\infty$ 得

$$\varliminf_{x\to+\infty}f(x)=\varlimsup_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

我们来看一系列关于三角函数的积分的证明题.

例题 13.71

1. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 单调递减, 若 $n\in\mathbb{N}$ 且 $\int_0^\infty f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ 存在, 证明:

$$0\leqslant\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t,\forall n\in\mathbb{N}.\tag{13.221}$$

2. 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的下凸函数, 对 $n\in\mathbb{N}$, 证明:

(a).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x\geqslant 0; \tag{13.222}$$

(b).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0. \tag{13.223}$$

3. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 的函数且对某个 $\alpha\in(0,1]$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^{\alpha},\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{13.224}$$

证明: 存在 $M>0$, 使得

$$n^{\alpha}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M, n^{\alpha}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}. \tag{13.225}$$

4. $*$ 如果 f 是 $[0,+\infty)$ 递增函数, 且 $f(+\infty)=0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0. \tag{13.226}$$

5. 若 F 在 $[0,+\infty)$ 递减且成立

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=0,\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}F(t)\sin\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t=0. \tag{13.227}$$

证明:

(a).

$$\lim_{x\to+\infty}xF(x)=0. \tag{13.228}$$

(b).

$$\lim_{x\to0^{+}}\int_{0}^{\infty}F(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t=0. \tag{13.229}$$

6. 设 F,G 在 $[0,+\infty)$ 非负递减且满足

$$\lim_{x\to+\infty}x[F(x)+G(x)]=0. \tag{13.230}$$

证明:

(a). 对任何 $\epsilon>0$, 都有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\epsilon}^{\infty}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t=0. \tag{13.231}$$

(b). 若

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}[F(t)-G(t)]\cos\frac{t}{n}\mathrm{d}t=0. \tag{13.232}$$

则

$$\lim_{x\to0^{+}}\int_{0}^{\infty}[F(t)-G(t)]\cos(xt)\,\mathrm{d}t=0. \tag{13.233}$$

笔记 把此类积分根据 $\sin,\cos$ 的符号划分区间证明是常见思路. 第 2 问在没有学习逼近方法之前可以只对 $f\in C^{1}[-\pi,\pi]$ 证明.

证明

1. 一方面

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n}\int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{u+\pi}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left[f\left(\frac{u}{n}\right) - f\left(\frac{u+\pi}{n}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left[f\left(\frac{u}{n}\right) - f\left(\frac{u+\pi}{n}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u \geqslant 0,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自习题[42]56..

另外一方面,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\int_{\pi}^{\infty} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+3)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+2)\pi}^{(2k+3)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f\left(\frac{u+\pi}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\left[f\left(\frac{u}{n}\right) - f\left(\frac{u+\pi}{n}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

于是我们完成不等式(13.221)的证明.

2. 不妨设 $f\in C^1[-\pi,\pi]$, 否则我们由定理13.8可改变 f 在端点的定义可以不妨设 $f\in C[-\pi,\pi]$. 再用 Bernstein 多项式[43]一致逼近定理13.47即可得到(13.222)和(13.223)对一般函数的证明.

(a). 当 $f\in C^1[-\pi,\pi]$, 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们由(13.221)得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} f'(x-\pi)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

这就证明了(13.222)

(b). 当 $f\in C^1[-\pi,\pi]$, 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们由(13.221)得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f'(x-\pi)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

这就证明了(13.223).

[42]注意证明并未用上连续性.

[43]注意 Bernstein 多项式保持下凸性.

3. 对 $n\in\mathbb{N}$, 注意到利用周期 2π 函数在区间长度 2π 的积分都一致, 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nx+\pi)\,\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx+\pi)\,\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot|\cos(nx)|\,\mathrm{d}x\overset{(13.224)}{\leqslant}\frac{L\pi^{\alpha}}{2n^{\alpha}}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(nx)|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}}\int_{0}^{\pi}|\cos(nx)|\,\mathrm{d}x=\frac{L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\int_{0}^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=\frac{L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}}\int_{0}^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=\frac{2L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x\overset{(13.224)}{\leqslant}\frac{L\pi^{\alpha}}{2n^{\alpha}}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}}\int_{0}^{\pi}|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x=\frac{L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\int_{0}^{n\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}}\int_{0}^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{2L\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}},\end{aligned}$$

这就证明了(13.225).

4. 注意到不知道是否有 $\int_0^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, 所以无法直接使用黎曼引理9.2.

利用 $R-S$ 积分我们分部积分有

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=-\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{0}^{s}f(x)\,\mathrm{d}\cos(nx)\\&=\lim_{s\to+\infty}\left[-\frac{f(s)\cos(ns)-f(0)\cos(0)}{n}+\frac{1}{n}(R-S)\int_{0}^{s}\cos(nx)\,\mathrm{d}f(x)\right]\\&=\frac{f(0)\cos(0)}{n}+\frac{1}{n}\lim_{s\to+\infty}(R-S)\int_{0}^{s}\cos(nx)\,\mathrm{d}f(x).\end{aligned}$$

又[44]

$$\lim_{s\to+\infty}\left|\int_{0}^{s}\cos(nx)\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\overline{\lim_{s\to+\infty}}\int_{0}^{s}|\mathrm{d}f(x)|=\overline{\lim_{s\to+\infty}}\left[f(s)-f(0)\right]=-f(0),$$

这里

$$\left|\int_{0}^{s}\cos(nx)\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\lim_{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i-x_{i-1}\}\to0^{+}}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f(s)-f(0)|.$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0.$$

[44]即给出与 n 无关的上界.

5. (a). 由(13.227)知 F 非负. 由 A-D 判别法14.4知本题涉及的积分都收敛. 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^{\infty} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left[F\left(\frac{u}{x}\right) - F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\ &\geqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\left[F\left(\frac{u}{x}\right) - F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u \geqslant 0,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^{\infty} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+3)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \int_{(2k+2)\pi}^{(2k+3)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u\right]\\ &= \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\left[F\left(\frac{u}{x}\right) - F\left(\frac{u+\pi}{x}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\pi} F\left(\frac{u}{x}\right)\sin u\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi}\frac{F\left(\frac{t}{x}\right)\sin t}{x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{F\left(\frac{t}{x}\right)\sin t}{x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi}\frac{F\left(\frac{t}{x}\right)\sin t}{x}\mathrm{d}t. \quad (13.234)$$

上式取 $x=\frac{1}{n}$ 并结合

$$\begin{aligned}n\int_0^{2\pi} F(nu)\sin u\mathrm{d}u &\overset{\text{区间再现14.1}}{=} n\int_0^{\pi}\left[F(nu) - F(2\pi n - nu)\right]\sin u\mathrm{d}u\\ &\geqslant n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F(nu) - F(2\pi n - nu)\right]\sin u\mathrm{d}u\\ &\geqslant n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right]\sin u\mathrm{d}u\\ &= n\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right] \geqslant 0,\end{aligned}$$

和(13.227)知

$$\lim_{n\to\infty} n\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right] = 0.$$

现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何 $n\geqslant N$ 都有

$$n\left[F\left(\frac{\pi n}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right] \leqslant \epsilon. \quad (13.235)$$

当正整数 k 充分大, 我们考虑

$$b_n \triangleq k3^{n-1}\left[F\left(\frac{\pi k3^{n-1}}{2}\right) - F\left(\frac{\pi k3^{n}}{2}\right)\right] \leqslant \epsilon,$$

则利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 和(13.235)得

$$0\leqslant kF\left(\frac{k\pi}{2}\right)=k\sum_{n=1}^{\infty}\left[F\left(\frac{\pi k3^{n-1}}{2}\right)-F\left(\frac{\pi k3^{n}}{2}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3^{n-1}}\leqslant\epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}\epsilon.$$

现在我们有 $\lim\limits_{k\to+\infty}kF\left(\frac{k\pi}{2}\right)=0$. 对 $x\in[0,+\infty)$, 存在唯一的 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in\left[\frac{k}{2}\pi,\frac{k+1}{2}\pi\right)$, 于是

$$0\leqslant xF(x)\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2}F\left(\frac{k\pi}{2}\right)\to0,k\to+\infty,$$

因此我们证明了(13.228).

(b). 我们由(13.234)知

$$\int_0^{\infty}F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t\geqslant0\Rightarrow\varliminf_{x\to0^+}\int_0^{\infty}F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t\geqslant0,\tag{13.236}$$

以及对任何 $\eta>0$, 我们有[45]

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x\to0^+}\int_0^{\infty}F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t&\leqslant\varlimsup_{x\to0^+}\int_0^{\pi}\frac{t}{x}F\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\&\leqslant\varlimsup_{x\to0^+}\int_0^{\eta}\frac{t}{x}F\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\varlimsup_{x\to0^+}\int_{\eta}^{\pi}\frac{t}{x}F\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\&\leqslant\sup_{y\in[0,+\infty)}yF(y)\cdot\int_0^{\eta}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\varlimsup_{x\to0^+}\sup_{y\in\left[\frac{\eta}{x},\frac{\pi}{x}\right]}yF(y)\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\&=\sup_{y\in[0,+\infty)}yF(y)\cdot\int_0^{\eta}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这里最后一个等号用到了(13.228). 由 η 任意性得

$$\varlimsup_{x\to0^+}\int_0^{\infty}F(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t\leqslant0.$$

结合(13.236)即得(13.229).

6. (a). 由(13.230)知

$$\lim_{x\to+\infty}xF(x)=\lim_{x\to+\infty}xG(x)=\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0.\tag{13.237}$$

对任何固定的 $\epsilon_2\geqslant\epsilon_1>0$, 由(13.237), 注意到

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{x\to+\infty}\left|\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to+\infty}\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}xF(xt)\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\lim_{x\to+\infty}\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}xF(\epsilon_1x)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1}\epsilon_1xF(\epsilon_1x)=0,\end{aligned}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t=0.\tag{13.238}$$

一方面

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(2k+2)\pi}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+(2k+2)\pi}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi}xF(xt)\cos t\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi}xF(xt+x\pi)\cos t\mathrm{d}t\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi}x\left[F(xt)-F(xt+x\pi)\right]\cos t\mathrm{d}t\leqslant0,\end{aligned}$$

[45]这是拟合法的处理手法.

即

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t\leqslant 0. \tag{13.239}$$

另外一方面,

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\infty}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+(2k+2)\pi}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+(2k+1)\pi}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t+\int_{\frac{3\pi}{2}+(2k+1)\pi}^{\frac{3\pi}{2}+(2k+2)\pi}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t\right]\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+(2k+1)\pi}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t-\int_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+(2k+1)\pi}xF\left(xt+x\pi\right)\cos t\mathrm{d}t\right]\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+(2k+1)\pi}x\left[F\left(xt\right)-F\left(xt+x\pi\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\geqslant 0,
\end{aligned}$$

即

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\infty}xF\left(xt\right)\cos t\mathrm{d}t\geqslant 0. \tag{13.240}$$

结合(13.238),(13.239),(13.240), 我们得到对任何 $\epsilon>0$ 都有(13.231)成立. 显然(13.231)对 G 也成立.

(b). 对任何 $\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 由(13.231), 我们首先有

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\int_{\delta}^{\infty}\left[F\left(\frac{t}{x}\right)-G\left(\frac{t}{x}\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\right)=0. \tag{13.241}$$

于是为了计算

$$\lim_{x\to0^+}\left(\int_0^{\infty}\left[F\left(t\right)-G\left(t\right)\right]\cos\left(tx\right)\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\int_0^{\infty}\left[F\left(\frac{t}{x}\right)-G\left(\frac{t}{x}\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\right),$$

我们只需计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^{\delta}\left[F\left(xt\right)-G\left(xt\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\right).$$

当然, 我们已经由(13.231)得到了子列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\delta}\left[F\left(nt\right)-G\left(nt\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\infty}\left[F\left(nt\right)-G\left(nt\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\right)=0. \tag{13.242}$$

现在对 $x\in\left[n,n+1\right),n\in\mathbb{N}$, 我们利用 F,G 单调性得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_0^{\delta}x\left[F\left(tx\right)-G\left(tx\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_0^{\delta}x\left[F\left(tn\right)-G\left(t\left(n+1\right)\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\\
&=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_0^{\delta}x\left[F\left(tn\right)-G\left(tn\right)+G\left(tn\right)-G\left(t\left(n+1\right)\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\\
&\overset{x\sim n\text{以及(13.242)}}{=}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\delta}n\left[G\left(tn\right)-G\left(t\left(n+1\right)\right)\right]\cos t\mathrm{d}t\\
&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\int_0^{n\delta}G\left(t\right)\cos\frac{t}{n}\mathrm{d}t-\frac{n}{n+1}\int_0^{(n+1)\delta}G\left(t\right)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t\right]\\
&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\int_0^{n\delta}G\left(t\right)\left[\cos\frac{t}{n}-\cos\frac{t}{n+1}\right]\mathrm{d}t-\frac{n}{n+1}\int_0^{(n+1)\delta}G\left(t\right)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t+\int_0^{n\delta}G\left(t\right)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t\right\}\\
&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\int_0^{n\delta}G\left(t\right)\left[\cos\frac{t}{n}-\cos\frac{t}{n+1}\right]\mathrm{d}t+\frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)\delta}G\left(t\right)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t-\int_{n\delta}^{(n+1)\delta}G\left(t\right)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}$$

首先

$$0\leqslant\left|\int_0^{n\delta}G\left(t\right)\left[\cos\frac{t}{n}-\cos\frac{t}{n+1}\right]\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{n\delta}\left[G\left(t\right)\left(\frac{t}{n}-\frac{t}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}t=\frac{\int_0^{n\delta}tG\left(t\right)\mathrm{d}t}{n\left(n+1\right)},$$

以及由(13.237)得

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} tG(t)\,\mathrm{d}t}{2n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{G(n\delta)(n+1)\delta\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} 1\mathrm{d}t}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n\delta)(n+1)\delta^2}{2n+1} = 0. \tag{13.243}$$

于是由 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n\delta} tG(t)\,\mathrm{d}t}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{n\delta} tG(t)\,\mathrm{d}t}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} tG(t)\,\mathrm{d}t}{2n+1} = 0.$$

现在我们知道

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^{n\delta} G(t) \left[\cos\frac{t}{n} - \cos\frac{t}{n+1} \right] \mathrm{d}t \right\} = 0. \tag{13.244}$$

其次, 我们可以由(13.237)得

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \left| \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} G(t)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} G(n\delta)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \delta G(n\delta) = 0.$$

从而由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} G(t)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t = 0. \tag{13.245}$$

然后我们由黎曼引理9.6得

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\delta} G(t)\cos\frac{t}{n+1}\mathrm{d}t \right] = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} G((n+1)t)\cos t\mathrm{d}t = 0, \tag{13.246}$$

这里 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x G(t)\mathrm{d}t}{x} = 0$ 可以如下得到. 对任何 $A>0$, 我们有

$$0 \leqslant \frac{\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \frac{\int_A^x G(t)\,\mathrm{d}t}{x} + \frac{\int_0^A G(t)\,\mathrm{d}t}{x} \leqslant \frac{\sup\limits_{t\geqslant A} G(t)\cdot(x-A)}{x} + \frac{\int_0^A G(t)\,\mathrm{d}t}{x}.$$

于是

$$0 \leqslant \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t}{x} \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\sup\limits_{t\geqslant A} G(t)\cdot(x-A)}{x} + \frac{\int_0^A G(t)\,\mathrm{d}t}{x} \right) = \sup_{t\geqslant A} G(t).$$

由 A 任意性和(13.237)得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t}{x} = 0.$$

于是结合(13.244), (13.245),(13.246)得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \int_0^{\delta} x\left[F(tx) - G(tx)\right]\cos t\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

完全类似的可得

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} \int_0^{\delta} x\left[F(tx) - G(tx)\right]\cos t\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

这就给出了(13.233).

例题 13.72

1. 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \leqslant 1, \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leqslant 1, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{13.247}$$

证明: 对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ 成立

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|^2 \leqslant 2(x_1-x_2)^2 + 2(y_1-y_2)^2. \tag{13.248}$$

2. 设 $f_n\in C^1(\mathbb{R}^2), n=1,2,\cdots$ 满足对任何 $(x,y)\in\mathbb{R}^2, n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y), \left|\frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x}\right| \leqslant 1, \left|\frac{\partial f_n(x,y)}{\partial y}\right| \leqslant 1. \tag{13.249}$$

证明: 对任何有界闭集 $F\subset\mathbb{R}^2$, 在 F 上一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)=f(x,y).$$

注本题是 2025 中山大学数学分析考研压轴题, 本质上是 Arzela-Ascoli 定理13.12的一个中间步骤.

证明

1. 由二元函数的拉格朗日中值定理和 Cauchy 不等式我们有

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|^2&=\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\eta)(x_1-x_2)+\frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\eta)(y_1-y_2)\right|^2\\&\leqslant\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\eta)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\eta)\right)^2\right]\cdot\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]\\&\overset{(13.247)}{\leqslant}2(x_1-x_2)^2+2(y_1-y_2)^2,\end{aligned}$$

   即(13.248)成立.

2. 由第 1 问的(13.248)知

$$|f_n(\mathbf{x})-f_n(\mathbf{y})|\leqslant\sqrt{2}\,||\mathbf{x}-\mathbf{y}||,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2,n\in\mathbb{N}.\tag{13.250}$$

   让 $n\to+\infty$ 得

$$|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|\leqslant\sqrt{2}\,||\mathbf{x}-\mathbf{y}||,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2.\tag{13.251}$$

   对 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ 和 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\epsilon}{3\sqrt{2}}>0$, 再取 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geqslant N$ 成立

$$|f_n(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})|<\frac{\epsilon}{3}.\tag{13.252}$$

   此时对 $||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<\delta,n\geqslant N$ 利用(13.250),(13.252)和(13.251)有

$$|f_n(\mathbf{y})-f(\mathbf{y})|\leqslant|f_n(\mathbf{y})-f_n(\mathbf{x})|+|f_n(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})|+|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.$$

   现在对有界闭集 $F\subset\mathbb{R}^2$, 对 $\mathbf{x}\in F$, 都可以类似上述的过程找到一个 $\delta_{\mathbf{x}}>0,N_{\mathbf{x}}\in\mathbb{N}$ 使得 $||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<\delta_x,n\geqslant N_{\mathbf{x}}$ 时成立

$$|f_n(\mathbf{y})-f(\mathbf{y})|<\epsilon.$$

   因为 F 是紧的且

$$F\subset\bigcup_{\mathbf{x}\in F}\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<\delta_{\mathbf{x}}\right\}.$$

   由有限覆盖定理. 我们知道存在 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n\subset F$ 使得

$$F\subset\bigcup_{i=1}^n\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:||\mathbf{y}-\mathbf{x}_i||<\delta_{\mathbf{x}_i}\right\}.$$

   设 $N\triangleq\max\{N_{\mathbf{x}_1},N_{\mathbf{x}_2},\cdots,N_{\mathbf{x}_n}\}$, 当 $n\geqslant N,\mathbf{y}\in F$, 我们有 $\mathbf{y}$ 属于某个 $\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:||\mathbf{y}-\mathbf{x}_i||<\delta_{\mathbf{x}_i}\right\}$, 从而

$$|f_n(\mathbf{y})-f(\mathbf{y})|<\epsilon.$$

   这就证明了在 F 上一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)=f(x,y).$$

我们来看 2024 中国人民大学数学分析考研压轴题证明, 它是著名的 Bernstein’s inequality, 也是 GTM249 课后习题.

✍ **练习 13.16Bernstein’s inequality** 给定 $n\in\mathbb{N},n\geqslant2,\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ 并定义

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx),n=1,2,\cdots.$$

证明

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T_n'(x)|\leqslant n^2\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T_n(x)|.$$

笔记 证明的想法即把导数用 Fejér 核(18.25)表示.

证明 我们来证明恒等式

$$T_n'(x)=-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sin(ny)\,T_n(x-y)\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2dy\right]. \tag{13.253}$$

事实上由线性性质, 我们只需对 $T_n(x)=1,\cos(kx),\sin(kx),1\leqslant k\leqslant n$ 验证(13.253). 现在由 Fejér 的定义(18.25), 注意到恒等式

$$\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2=\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(1+2\sum_{m=1}^{j}\cos(my)\right)\right)$$

和运用三角函数正交性, 我们即可证明(13.253). 事实上, 我们有

$$-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(ny)\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2dy\right)=-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(ny)\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(1+2\sum_{m=1}^{j}\cos(my)\right)\right)dy\right)=0.$$

以及

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(ny)\cos(kx-ky)\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2dy\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left[\sin(kx+(n-k)y)+\sin(-kx+(n+k)y)\right]\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(1+2\sum_{m=1}^{j}\cos(my)\right)\right)dy\right)\\
&\overset{n+k\text{太高了}}{=}-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(kx+(n-k)y)\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(1+2\sum_{m=1}^{j}\cos(my)\right)\right)dy\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(kx+(n-k)y)\left(n+2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{j}\cos(my)\right)dy\right)\\
&\overset{\text{二重求和换序}}{=}-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(kx+(n-k)y)\left(n+2\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=m}^{n-1}\cos(my)\right)dy\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(kx+(n-k)y)\left(n+2\sum_{m=1}^{n-1}(n-m)\cos(my)\right)dy\right)\\
&=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin(kx)\cos((n-k)y)\left(n+2\sum_{m=1}^{n-1}(n-m)\cos(my)\right)dy\right)\\
&=-k\sin kx,
\end{aligned}$$

类似的可以验证 $\sin(kx)$.

现在运用(13.253)就得到

$$|T_n'(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2dy\cdot\max_{[-\pi,\pi]}|T_n|=2n\max_{[-\pi,\pi]}|T_n|,$$

这里最后一个积分为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(1+2\sum_{m=1}^{j}\cos(my)\right)\right)dy=2n.$$

于是我们证明了 Bernstein’s inequality.

13.7.3 一致连续判断专题

例题 13.73 判断下述函数一致连续性:

1. $f(x)=\ln x, x\in(0,1]$;
2. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}, x\in(0,1]$;
3. $f(x)=\frac{\sin x}{x}, x\in(0,+\infty)$;
4. $f(x)=\sin^2 x, x\in\mathbb{R}$;
5. $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$;
6. $f(x)=\sin x^2, x\in[0,+\infty)$;
7. $f(x)=\sin(x\sin x), x\in[0,+\infty)$;
8. $f(x)=x\cos x, x\in[0,+\infty)$;
9. 设 $a>0$, $f(x)=\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,a)$ 和 $x\in(a,+\infty)$.

证明

1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在, 故 f 不一致连续;
2. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在, 故 f 不一致连续;
3. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 故结合一致连续函数拼接13.13和例题13.14知 f 一致连续;
4. 注意到 $f'(x)=2\sin x\cos x$ 有界, 所以 f 在 $\mathbb{R}$ 是 Lipstchiz 连续的, 所以 f 一致连续;
5. 注意到
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,$$
故由例题13.18知 f 不一致连续;
6. 注意到
$$f\left(\sqrt{2\pi n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-f\left(\sqrt{2\pi n}\right)=\sin\left(2\pi n+\frac{1}{n}+\frac{2\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{1}{n}+2\sqrt{2\pi}\right)\to\sin\left(2\sqrt{2\pi}\right)\neq0,$$
我们有 f 不一致连续.
7. 注意到
$$f\left(2\pi n+\frac{1}{\pi n}\right)-f(2\pi n)=\sin\left(\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{\pi n}\right)\to\sin 2\neq0,$$
我们有 f 不一致连续;
8. 注意到
$$f\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)-f\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$$
$$=-\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}\to-2\pi\neq0,$$
我们知道 f 不一致连续;
9. 注意到
$$\lim_{x\to0^+}f(x)\text{不存在},\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$
我们结合一致连续函数拼接13.13知 f 在 $(a,+\infty)$ 一致连续, 在 $(0,a)$ 不一致连续.

例题 13.74 证明: $f(x)=x^\alpha\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续的充要条件是 $\alpha\in(0,1)$.

证明 若 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续, 则
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x\text{存在},$$
即 $\alpha>0$.

当 $\alpha\geqslant1$, 注意到 f 不被线性函数控制, 由推论13.12知 f 在 $(0,+\infty)$ 不一致连续.

当 $\alpha\in(0,1)$, 注意到
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha x^{\alpha-1}\ln x+x^{\alpha-1}\right)=0.$$

于是 f 在 x 充分大导数有界, 从而 f 在 x 充分大 Lipstchiz 连续. 在有界闭区间上 f 当然一致连续, 因此我们结合一致连续的拼接13.13得 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

于是 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续的充要条件是 $\alpha\in(0,1)$.

例题 13.75 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 求 α 的范围使得 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

证明 当 $\alpha\leqslant 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 不存在, 故 f 不一致连续.

当[46]$\alpha\in(0,1]$, 相似(13.74)求导证明导数在 x 充分大有界知 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

当 $\alpha>1$, 注意到 $f(x)\sim x^{\alpha},x\to+\infty$, 我们有 f 不被线性函数控制, 由推论13.12知 f 在 $(0,+\infty)$ 不一致连续.

例题 13.76 对 $m,n\in\mathbb{N}$, 判断 $f(x)=\frac{x}{1+x^n\sin^m x},x\in[0,+\infty)$ 一致连续性.

证明 首先考虑

$$f(2k\pi+c_k)=\frac{2k\pi+c_k}{1+(2k\pi+c_k)^n\sin^m c_k},f(2k\pi)=2k\pi,k\in\mathbb{N},$$

这里待定 $c_k>0$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=0$. 注意到 $\lim\limits_{k\to\infty}(2k\pi+c_k-2k\pi)=0$, 然后取 $c_k=\frac{1}{k^{\frac{n}{m}}}$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left[f(2k\pi+c_k)-f(2k\pi)\right]&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k\pi+c_k}{1+(2k\pi+c_k)^n\sin^m c_k}-2k\pi\right]\\&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{c_k-2k\pi(2k\pi+c_k)^n\sin^m c_k}{1+(2k\pi+c_k)^n\sin^m c_k}\right]=-\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k\pi(2k\pi)^n\frac{1}{k^n}}{1+(2\pi)^n}\right]=-\infty.\end{aligned}$$

于是我们知道 f 在 $[0,+\infty)$ 不一致连续.

来看北京大学实验班期末题.

定义 13.16 (∗)

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 我们称 $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 是可求长的, 如果存在 $C>0$ 使得对任何 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]^2+(x_k-x_{k-1})^2}\leqslant C.$$

♣

注可以看到如果 $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 是可求长的, 那么 f 是 $[a,b]$ 有界变差函数.

例题 13.77 用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 定义函数

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\{2^nx\},x\in[0,1].$$

判断曲线 $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 是否可求长并证明.

笔记 本答案来自知乎四正君.

证明 **Step 1**

若

$$\frac{2m-1}{2^j}=\frac{2m'-1}{2^{j'}},m',j',m,j\in\mathbb{N},$$

不妨设 $j\geqslant j'$, 我们有

$$(2m'-1)2^{j-j'}=2m-1\text{为奇数}\Rightarrow j=j'\Rightarrow m'=m.$$

[46]注意导数极限可不存在, 需要的是导数有界.

此外, 对 $m, j \in \mathbb{N}$, 我们还有

$$\begin{aligned} T\left(\frac{2m-1}{2^j}\right) &= \sum_{n=1}^{j-1} 2^{-n}\left\{\frac{2m-1}{2^{j-n}}\right\} \\ &\geqslant 2^{-(j-2)}\left\{\frac{2m-1}{2^2}\right\} + 2^{-(j-1)}\left\{\frac{2m-1}{2}\right\} \\ &\geqslant 2^{-(j-2)}\left\{\frac{2m-1}{4}\right\} + 2^{-j}. \end{aligned} \tag{13.254}$$

Step 2 设

$$x_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^{k+1}} \to \frac{1}{2}, N \to \infty,$$

则

$$T\left(x_N\right) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\left\{2^n \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2^{k+1}}\right\} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2^{k+1}} \to \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1, N \to \infty.$$

由 T 周期 1, 对一切 $m \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\lim_{N\to\infty} T\left(x_N + m - 1\right) = 1, \lim_{N\to\infty}\left(x_N + m - 1\right) = \frac{2m-1}{2}.$$

Step 3

注意到

$$2T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)}\left\{2^n x\right\} = \{2x\} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left\{2^{n+1}x\right\} = \{2x\} + T(2x), \forall x \in [0,1]. \tag{13.255}$$

对每个 $j, m \in \mathbb{N}$ 且 $m \leqslant 2^{j-1}$, 我们假设

$$x_N^{(m,j)} < \frac{2m-1}{2^j}, N = 1, 2, \cdots. \tag{13.256}$$

使得

$$\lim_{N\to\infty} x_N^{(m,j)} = \frac{2m-1}{2^j}, \lim_{N\to\infty} T\left(x_N^{(m,j)}\right) = \frac{1}{2^{j-1}}. \tag{13.257}$$

于是取

$$x_N^{(m,j+1)} = \frac{1}{2} x_N^{(m,j)}, N = 1, 2, \cdots$$

就有

$$x_N^{(m,j+1)} = \frac{1}{2} x_N^{(m,j)} < \frac{2m-1}{2^{j+1}}, N = 1, 2, \cdots,$$

以及利用(13.255)得

$$\lim_{N\to\infty} x_N^{(m,j+1)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} x_N^{(m,j)} = \frac{2m-1}{2^{j+1}}, \lim_{N\to\infty} T\left(x_N^{(m,j+1)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty} T\left(x_N^{(m,j)}\right) + \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left\{x_N^{(m,j)}\right\} = \frac{1}{2^j}.$$

现在我们定义

$$x_N^{(m,1)} \triangleq x_N + m - 1, N = 1, 2, \cdots,$$

于是就递推得到了一串 $x_N^{(m,j)}$ 其满足(13.256)和(13.257).

Step 4 现在由有界变差的定义, 对任何 $S \in \mathbb{N}$, 当 N 充分大时由(13.257)知

$$\left\{x_N^{(m,j)}\right\}_{1\leqslant m\leqslant 2^{j-1}, 1\leqslant j\leqslant S}, \left\{\frac{2m-1}{2^j}\right\}_{1\leqslant m\leqslant 2^{j-1}, 1\leqslant j\leqslant S}$$

互不相同, 所以结合

$$\left\{\frac{2m-1}{4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & m\text{为奇数} \\ \frac{3}{4}, & m\text{为偶数} \end{cases},$$

我们有

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1 T &\geqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{S}\sum_{m=1}^{2^{j-1}}\left|T\left(x_N^{(m,j)}\right)-T\left(\frac{2m-1}{2^j}\right)\right| \\ &=\sum_{j=1}^{S}\sum_{m=1}^{2^{j-1}}\lim_{N\to\infty}\left|T\left(x_N^{(m,j)}\right)-T\left(\frac{2m-1}{2^j}\right)\right| \\ &\overset{(13.257),(13.254)}{\geqslant}\sum_{j=1}^{S}\sum_{m=1}^{2^{j-1}}\left(2^{-(j-2)}\left\{\frac{2m-1}{4}\right\}+2^{-j}-\frac{1}{2^{j-1}}\right) \\ &=\sum_{j=1}^{S}\frac{1}{2^j}\sum_{m=1}^{2^{j-1}}\left(4\left\{\frac{2m-1}{4}\right\}-1\right)=\sum_{j=1}^{S}\frac{1}{2^j}\sum_{m=1}^{2^{j-2}}\left(4\left\{\frac{4m-1}{4}\right\}-1\right) \\ &=\sum_{j=1}^{S}\frac{1}{2^j}\sum_{m=1}^{2^{j-2}}2=\sum_{j=1}^{S}\frac{1}{2}=\frac{S}{2},\end{aligned}$$

因此 T 不是有界变差的, 所以曲线 $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 不可求长.

例题 13.78♡ 对 $\alpha\in(0,1)$, 证明

$$|x^\alpha-y^\alpha|\leqslant|x-y|^\alpha,\forall x,y\in[0,+\infty). \tag{13.258}$$

证明 对 $x_0\geqslant 0$, 考虑

$$g(x)\triangleq x^\alpha-x_0^\alpha-(x-x_0)^\alpha,x\geqslant x_0.$$

于是

$$g'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha(x-x_0)^{\alpha-1}\leqslant 0,\forall x\geqslant x_0,$$

即

$$g(x)\leqslant g(x_0)=0,\forall x\geqslant x_0\Rightarrow|x^\alpha-x_0^\alpha|\leqslant|x-x_0|^\alpha,\forall x\geqslant x_0,$$

这就得到了(13.258).

例题 13.79 设 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 满足对某个 $L>0,\alpha\in(0,1)$ 成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^\alpha,\forall x,y\in(0,1).$$

我们称这样的 f 叫做 α 阶 Holder 连续函数.

1. 设 f 是 α 阶 Holder 连续函数, 证明 f 在 $(0,1)$ 一致连续.
2. 对任何 $0<\beta<\alpha<1$, 构造一个 f 使得 f 是 β 阶 Holder 连续函数但 f 不是 α 阶 Holder 连续函数.

证明

1. 对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta\triangleq\left(\frac{\epsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 对 $x,y\in(0,1)$, 只要 $|x-y|<\delta$ 就有
$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^\alpha<L\delta^\alpha=\epsilon,$$
即 f 在 $(0,1)$ 一致连续.
2. 考虑 $f(x)\triangleq x^\beta$, 由例题13.78得 f 是 β 阶 Holder 连续函数.
若 f 也是 α 阶 Holder 连续函数, 则
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{4n}\right)\right|}{\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n}\right|^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(\frac{1}{2n}\right)^\beta-\left(\frac{1}{4n}\right)^\beta\right|}{\left|\frac{1}{4n}\right|^\alpha} \\ &\overset{\text{拉格朗日中值定理}\left(\theta_n\in\left(\frac{1}{4n},\frac{1}{2n}\right)\right)}{=}\lim_{n\to\infty}\left[(4n)^\alpha\cdot\frac{1}{4n}\cdot\beta\theta_n^{\beta-1}\right] \\ &\geqslant\lim_{n\to\infty}\left[(4n)^{\alpha-1}\cdot\beta\left(\frac{1}{2n}\right)^{\beta-1}\right] \\ &=2^{1-\beta}4^{\alpha-1}\beta\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-\beta}=+\infty,\end{aligned}$$

即 f 不是 α 阶 Holder 连续函数.

例题 13.80♡ 证明: $f(x)=x\ln x$ 对任何 $\alpha\in(0,1)$ 都在 $(0,1]$ 是 Holder 连续的.

证明 设

$$f_\alpha(x)\triangleq x^\alpha, f'_\alpha(x)=\alpha x^{\alpha-1}, \alpha\in(0,1).$$

注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{f'_\alpha(x)}=0$, 我们知道存在 $c_\alpha>0$, 使得

$$\left|\frac{f'(x)}{f'_\alpha(x)}\right|\leqslant c_\alpha, \forall x\in(0,1].$$

于是对 $0<x<y\leqslant1$, 我们运用例题13.78有

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|&=\left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^y|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant c_\alpha\int_x^y|f'_\alpha(t)|\,\mathrm{d}t\\&=c_\alpha\int_x^y f'_\alpha(t)\,\mathrm{d}t=c_\alpha|f_\alpha(y)-f_\alpha(x)|\leqslant c_\alpha|y-x|^\alpha,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 13.81 设 $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, n=1,2,\cdots$ 是一致连续函数且 $f_n\rightrightarrows f$, 证明: f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 由 $f_n\rightrightarrows f$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何 $n\geqslant N, x\in(0,+\infty)$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}.$$

由 f_N 在 $(0,+\infty)$ 一致连续, 存在 $\delta>0$ 使得对任何 $x,y\in(0,+\infty),|x-y|<\delta$ 都有

$$|f_N(x)-f_N(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{3}.$$

现在对 $x,y\in(0,+\infty),|x-y|<\delta$ 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f(y)-f_N(y)|+|f_N(x)-f_N(y)|\leqslant\epsilon,$$

即 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

例题 13.82 证明: $f(x)=\sin^2x+\sin x^2$ 不是周期函数.

证明 若 f 是周期函数, 则由连续周期函数必定一致连续13.15得 f 一致连续. 又

$$\left|\left(\sin^2x\right)'\right|=|2\sin x\cos x|\leqslant2,$$

即 $\sin^2x$ 是一致连续的, 故

$$\sin x^2=f(x)-\sin^2x$$

一致连续. 现在

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\sin\left(\left(\sqrt{2n\pi}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)-\sin\left(\left(\sqrt{2n\pi}\right)^2\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{1}{n}+2\sqrt{2\pi}\right)=\sin\left(2\sqrt{2\pi}\right)\neq0,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!. 至此我们证明了 f 不是周期函数.

来看周民强的一个经典难题

例题 13.83 设 $f\in C([0,+\infty))$ 满足对任何 $h\geqslant0$ 都有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+h)-f(x)]=0.$$

证明: 对任何 $[a,b]\subset[0,+\infty)$ 和 $\epsilon>0$, 都有 $X>0$ 使得

$$|f(x+h)-f(x)|<\epsilon, \forall h\in[a,b], x\geqslant X.$$

证明 对 $\eta>0,n\in\mathbb{N}$, 考虑

$$E_n\triangleq\left\{h\in[0,1]:|f(x+h)-f(x)|\leqslant\frac{\eta}{3}, \forall x\geqslant n\right\}.$$

由极限条件, 我们有

$$[0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

注意 E_n 是闭集, 由 Baire 纲定理13.13得 $[c,d]\subset[0,1],N\in\mathbb{N}$ 使得 $[c,d]\subset E_N$. 现在对任何 $t\in[0,d-c],x\geqslant N+c$, 利用 $c,c+t\in E_N$ 我们有

$$\begin{aligned}|f(x+t)-f(x)|&=|f(x-c+c+t)-f(x-c+c)|\\&\leqslant|f(x-c+c+t)-f(x-c)|+|f(x-c+c)-f(x-c)|\\&\leqslant\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}=\frac{2\eta}{3}<\eta.\end{aligned}$$

我们实际上证明了对任何 $\eta>0$, 都存在 $\delta>0,X_0>0$ 使得

$$|f(x+t)-f(x)|<\eta,\forall t\in[0,\delta],x\geqslant X_0.$$

现在对任何 $[a,b]\subset[0,+\infty),\epsilon>0$, 存在 $\delta>0,X_0>0$ 使得

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2},\forall t\in[0,\delta],x\geqslant X_0. \tag{13.259}$$

对 $h\in[a,b]$, 由极限条件得 $X_h>0$ 使得

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2},\forall x\geqslant X_h. \tag{13.260}$$

注意到

$$[a,b]\subset\bigcup_{h\in[a,b]}(h-\delta,h+\delta).$$

由有限覆盖定理得 $h_1,h_2,\cdots,h_m\in[a,b]$ 使得

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}(h_i-\delta,h_i+\delta).$$

取

$$X\triangleq\max\{X_0,X_{h_1},\cdots,X_{h_m}\}>0.$$

于是我们对任何 $h\in[a,b],x\geqslant X$, 都存在 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $|h-h_i|<\delta$. 现在就有

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|&\leqslant|f(x+h)-f(x+h_i)|+|f(x+h_i)-f(x)|\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\end{aligned}$$

这里第一项用了(13.259), 第二项用了(13.260), 因此我们完成了证明.

第 13 章 练习

1. (1.∗) 设

$$B^2\triangleq\left\{\mathbf{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqslant1\right\},S^1\triangleq\left\{\mathbf{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\right\}.$$

   若连续映射 $f:B^2\to B^2$ 满足 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x},\forall\mathbf{x}\in S^1$, 证明 f 是满射.
2. (2.) 设可微函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足 $\int_0^{\infty}f(x)\,dx<\infty$, 证明存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left[|f(x_n)|^2+|f'(x_n)|^2\right]=0.$$

3. (3.) 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 连续可微, $\lambda\in\mathbb{R}$, 证明: 当且仅当 $f'(x)e^{\lambda x}$ 单调不减的时候, $f'(x)+\lambda f(x)$ 单调不减.
4. (4.) 设 $\{f_n\}\subset C[a,b]$ 一致收敛到 $f,g\in C(\mathbb{R})$. 证明: $\{g\circ f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $g\circ f$.
5. (5.,∗) 设 $f,g\in R[0,1]$ 使得 $\int_0^1f(x)\,dx=\int_0^1g(x)\,dx=1$, 证明存在区间 $[a,b]\subset[0,1]$, 使得

$$\int_a^bf(x)\,dx=\int_a^bg(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

6. (6.∗) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数且 $f(x)=\int_x^{x+1} f(y)\,dy, \forall x\in\mathbb{R}$, 证明 f 为常数.
7. (7.) 设 f 是直线上的非常值连续周期函数. 若 $g\in C(\mathbb{R})$ 且 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{|g(x)|}{x}=+\infty$, 证明:$f\circ g$ 不是周期函数.
8. (8.) 设 $a_n>1, n=1,2,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 证明 $\operatorname{span}\left\{\frac{1}{x-a_1},\frac{1}{x-a_2},\cdots,\right\}$ 在 $C[0,1]$ 稠密.
9. (9.) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的图像 $G_f=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 为有界闭集, 证明 $f\in C[a,b]$.
10. (10.) 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 p,q, 使得 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 有两个解 $\phi(x)=\sin x, \psi(x)=xe^x$.
11. (11.) 设 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 连续, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)$, 证明 f 在 $(0,a]$ 一致连续. 若只是 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 存在呢?
12. (12.) 设 $f\in C[a,b]$ 且 $f(a)<f(b)$. 证明存在 $[c,d]\subset[a,b]$ 使得 f 在 $[c,d]$ 最小值为 $f(a)$, 最大值为 $f(b)$.
13. (13.) 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可微且对足够大的 x, 成立不等式

$$|f''(x)|<c|f'(x)|. \tag{13.261}$$

证明: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=1$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x}=1.$$

14. (14.) 设 f 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, α_n 是递增到 ∞ 的正数列, 且满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\leqslant 1$. 若对每个 $x>0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n x)=0,$$

则

(a). 若 f 在 $(0,+\infty)$ 连续, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(b). 若 f 不在 $(0,+\infty)$ 连续, 则不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(c). 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}>1$, 即使 f 在 $(0,+\infty)$ 连续, 也不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

15. (15.) 给定 $n\in\mathbb{N}$ 且 $f\in C^n[a,b)$. 若 f 满足

$$f^{(n)}(x)\leqslant c_n+c_{n-1}\left|f^{(n-1)}(x)\right|+c_{n-2}\left|f^{(n-2)}(x)\right|+\cdots+c_0|f(x)|, x\in[a,b). \tag{13.262}$$

证明 f 在 $[a,b)$ 有上界.

16. (16.) 设 f 在 $(a,+\infty)$ 可导. 如果 f 有界且 xf' 为单调函数, 证明

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x f'(x)=0.$$

17. (17.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta)\,d\theta=0, \forall r\in\mathbb{R}.$$

证明

$$f(x)+f(-x)=2f(0), \forall x\in\mathbb{R}.$$

18. (18.∗) 设 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant 1, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_0\triangleq\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

若 $f'(0)=1$, 证明 $f(x)=\sin x$.

19. (19.) 设 $n\in\mathbb{N}$, p 为 n 次实系数多项式. 证明对任何 $f\in D^n(\mathbb{R})$ 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} p\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=0$ 均蕴含 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的充要条件是 p 的所有零点都有负实部.
20. (20.)♡ 设 f 在闭区间 $[0,1]$ 二阶可导且 $f(0)=0$. 若 f 满足

$$xf''(x)+2f'(x)-f(x)=0,$$

证明 $f(x)=0, \forall x\in[0,1]$.

21. (21.) 设 $f\in C[0,1]$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} x^{4k}\in\mathbb{Q}[x]$ 使得

$$|f(x)-p(x)|\leqslant\epsilon, \forall x\in[0,1].$$

22. (22.) 求所有正整数对 (n,m), 使得存在连续函数 $f:[0,n]\to[0,m]$ 满足 $f(0)=0, f(n)=m$, 且对任何 $0<x<y<n$, 都有 $y-x, f(y)-f(x)$ 不同时为整数.
23. (23.) 设 $\varphi, f\in C(\mathbb{R})$ 满足
    - $\exists x_n\to+\infty$, 使得 $\varphi(x_n)>x_n, n\geqslant 1$,
    - $\{x\in\mathbb{R}:\varphi(x)=x\}$ 是非空有限集,
    - $f(\varphi(x))=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

    证明 : f 是常值函数.
24. (24.$*$) 设 $f\in L^p(\mathbb{R}), 1\leqslant p\leqslant\infty$, 且
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-(x-\mu)^2}dx=0, \forall\mu\in\mathbb{R},$$
    证明 $f=0, a.e.$
25. (25.) 给定 $f,g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 且 f 连续, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. 若有不等式
$$|f(x)-f(y)|\leqslant g(x)\sup_{t\in[x,y]} f(t), \forall 0\leqslant x<y. \tag{13.263}$$
    证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.
26. (26.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有不动点的一一连续映射且 $f(2x-f(x))\equiv x$. 证明 $f(x)\equiv x$.
27. (27.) 设
$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, e^{xy}dy<\infty, \forall x\in\mathbb{R}.$$
    证明 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{xy}dy$ 是连续函数.
28. (28.) 设 f,g 是有正下界的黎曼可积函数且
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx, \delta=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx>0.$$
    若 f,g 分段常值, 证明 $\int_0^1 f(x)\,dx=1, \delta=\frac{3}{2}$ 下, $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{g(x)}dx\geqslant 4$.
29. (29.♡) 设 $f(1)=0$ 且 f 是 $[0,2]$ 上的下凸函数, 证明
$$(1-x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}-x\right)f(x), \forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$
30. (30.) 设不恒为 0 的偶函数 $Q\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. 定义
$$T_1(x)=xQ(x), T_2(x)=x^2Q(x), T_3(x)=\left(1+x^{2024}\right)e^{-x^2},$$
    证明存在 $\epsilon,\delta>0$ 使得对任何 $|c|<\delta$, 存在唯一的 $\lambda>0,\alpha\in\mathbb{R}$ 使得
    (a). $|\lambda-1|+|\alpha|<\epsilon$;
    (b). $\int_{\mathbb{R}} T_1(x)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}Q\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)-Q(x)-cT_3(x)\right]dx=0$;
    (c). $\int_{\mathbb{R}} T_2(x)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}Q\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)-Q(x)-cT_3(x)\right]dx=0$.
31. (31.$*$) 设 $u\in C^2\left(\mathbb{R}^2\times[0,+\infty)\right)$ 满足
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle u=0;\\ u(x,0)=u_0(x)\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right).\end{cases}. \tag{13.264}$$
    证明
$$||u||_{L^2}^2\leqslant||u_0||_{L^2}^2.$$
32. (32.$*$) 对 $f\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, 我们用 $\mathcal{F}(f)$ 表示 f 的傅立叶变换. 定义算子
$$(-\Delta+I)^{-1}f\triangleq\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f)}{1+4\pi^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}\right), \forall f\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right).$$
    然后证明
$$I+(-\Delta+I)^{-1}V:L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\to L^2\left(\mathbb{R}^3\right), f\mapsto f+(-\Delta+I)^{-1}\left(e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}f\right)$$

是可逆的.

33. (33.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且 f 的全体正周期的下确界为 0, 证明 f 为常数.
34. (34.) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x\in[a,b]$, 都有 $\lim\limits_{t\to x}f(t)$ 存在, 记为 $g(x)$, 证明 $g\in C[a,b]$ 且 f 间断点至多可数.
35. (35.) 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个严格下凸连续可微函数, 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, 证明 $\int_0^\infty\sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.
36. (36.) 设 $f\in C^\infty[-1,1]$, $f^{(n)}(0)=0, n\in\mathbb{N}_0$ 且满足

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant n!C^n,$$

证明 $f=0$.

37. (37.) 设 f,g 是 $\mathbb{R}$ 上绝对可积函数, 且

$$\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\mathrm{d}x=0.$$

那么对任何有界且导数也有界函数 $\phi\in C^1(\mathbb{R})$, 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.265}$$

38. (38.) 设 $[a,b]\subset(0,1)$, $f\in C[a,b]$, 证明存在整系数多项式列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 f_n 在 $[a,b]$ 一致收敛到 f.
39. (39.♡) 若 $f(x)\in D^2[a,+\infty)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}f(n)\text{存在},\lim_{x\to+\infty}f''(x)\text{存在},$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{存在且}\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0.$$

40. (40.) 设 $f,g\in C(\mathbb{R})$, 设开集 $D\subset\mathbb{R}$ 且 $f(x)=g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus D$. 如果 $f(x)$ 在 D 上可微, 并且满足 $f'(x)=g(x),x\in D$, 然后 f 在 $\mathbb{R}$ 可微, 并且 $f'(x)=g(x),x\in\mathbb{R}$.
41. (41.) 设交换环 R 和子环 S 满足 :
    - 对每个 $a\in R$, 如果对所有充分大的 $r\in\mathbb{N}$, 有 $a^r\in S$, 则 $a\in S$.

    现在考虑形式幂级数环 $S[[x]]\subset R[[x]]$, 则 $S[[x]],R[[x]]$ 也满足上述性质.
42. (42.∗) 设 m,n 互素正整数, 且 $f^m(x),f^n(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, 证明 $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$.
43. (43.) 设定义在 $\mathbb{R}$ 的函数列 f_n 的每一个函数都是某个 $\mathbb{R}$ 上连续函数列的逐点极限[47], 如果 f_n 一致收敛到 f, 证明 f 是某个 $\mathbb{R}$ 上连续函数列的逐点极限.
44. (44.) 设 $f\in C^1(0,1]$ 满足 $\int_0^1x|f'(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, 证明 $\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$.
45. (45.) 对 $x\in[a,b]$, 证明 $m_x=\{f\in C[a,b]:f(x)=0\}$ 是 $C[a,b]$ 极大理想.
46. (46.) 研究 $f_n(x)=\int_0^x t^4\cos\frac{t}{n}\mathrm{d}t, n\in\mathbb{N}$ 一致收敛性.
47. (47.) 设 f 是周期 2π 的 $\mathbb{R}$ 上的黎曼可积函数, 证明关于 $x\in\mathbb{R}$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x+k-1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

48. (48.)$f,g\in C[0,+\infty)$ 且满足

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\int_0^\infty|g(x)|\,\mathrm{d}x<\infty,$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

49. (49.) 设周期 1 函数 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(2x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

[47]这样的函数被称为第一类 Baire 函数.

证明 $f(x)\equiv 0$.

50. (50.*) 给定 $w>0$, 设 $x\frac{d^2u}{dx^2}+\left(1-w^2x\right)u=0$ 且 u 是非 0 的缓增分布.
   (a). 证明: $u\in C(\mathbb{R})\bigcap L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$;
   (b). 计算: $\frac{\left[\int_{\mathbb{R}}u(x)\mathrm{d}x\right]^2}{\int_{\mathbb{R}}|u(x)|^2\mathrm{d}x}$.
   (c). 设 $w=\frac{1}{2}$, 求 u 表达式.
51. (51.) 设 $\mathcal{F}$ 是单调递增的 Lip-1 函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 全体. 证明: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\tau>0$ 使得对任何 $f\in\mathcal{F}$ 都有 $[a,b]\subset[0,1]$, 满足
$$b-a>\tau,\left|f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right|\leqslant\epsilon(b-a),\forall x\in[a,b].$$
52. (52.) 设 $f\in C^{\infty}[0,\pi]$ 满足
$$(-1)^n f^{(2n)}(x)\geqslant 0,f^{(2n)}(0)=f^{(2n)}(\pi)=0,\forall x\in[0,\pi],n\in\mathbb{N}_0.$$
证明: 存在 $a>0$ 使得 $f(x)=a\sin x$.
53. (53.) 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的下凸函数, 则对任何 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, 存在 $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^n$, 使得
$$f(\mathbf{y})\geqslant f(\mathbf{x})+\mathbf{r}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$
54. (54.) 设 $f\in C(0,1]$ 且对某个 $\mu>1$ 有
$$\lim_{x\to0^+}x\left[f(\mu x)-f(x)\right]=A.$$
证明: $\lim\limits_{x\to0^+}xf(x)$ 存在.
55. (55.) 设 $f\in C^n(\mathbb{R})$ 且对常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ 成立
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{m=0,m\neq k}^{n}(x_k-x_m)}=\sum_{k=0}^{n}a_kf^{(n)}(x_k),\forall x_0,x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}.$$
证明 f 是不超过 $n+1$ 次的多项式.
56. (56.) 是否存在可微函数 $f:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ 使得有反函数 $g:f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, 并且 $f':\mathbb{R}\to f'(\mathbb{R})$ 有反函数 $g':f'(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$.
57. (57.) 设 $a\in(0,1)$ 且 f 在 $\mathbb{R}$ 上非负连续. 若 $f(x)-a\int_x^{x+1}f(y)\,\mathrm{d}y$ 为常数, 求满足条件的全部 f.
58. (58.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有上界或者有下界的函数且满足对某个 $a>0$ 成立
$$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y$$
为常数, 证明 f 为常数.
59. (59.) 设 $f\in C(\mathbb{R}),a,b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 且
$$f(f(x))=af(x)+bx,\forall x\in\mathbb{R}.\tag{13.266}$$
证明: 存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=kx$.
60. (60.) 设 $f\in D^1(0,+\infty)$ 且 $|f'|$ 在 $(0,+\infty)$ 递减. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.
61. (61.) 设 $f\in C[0,n]$ 且 $f(0)=f(n),n\in\mathbb{N}$. 证明: 存在 $x_k,x_k'\in[0,n]$ 使得
$$x_k-x_k'=k\text{或者}x_k'-x_k=n-k,f(x_k)=f(x_k'),k=1,2,\cdots,n-1.$$
62. (62.) 设 $f\in C[0,n]$ 且 $f(0)=f(n),n\in\mathbb{N}$. 证明: 至少有 n 对不同的 $x,y\in[0,n]$ 使得 $f(x)=f(y)$ 且 $y-x\in\mathbb{N}$.
63. (63.) 设 $f\in C[0,+\infty)$ 满足
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+h)-f(x)\right]=0,\forall h\geqslant0.\tag{13.267}$$
证明存在 $g\in C[0,+\infty),h\in C^1[0,+\infty)$ 使得 $f(x)=g(x)+h(x),\forall x\geqslant0$ 且
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h'(x)=0.\tag{13.268}$$

64. (64.) 设 $a,b>1$ 且 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 邻域有界. 若

$$f(ax)=bf(x),\forall x\in\mathbb{R},$$

证明: f 在 $x=0$ 连续.

65. (65.♡) 设 $f\in C^2[0,+\infty),g\in C^1[0,+\infty)$ 且存在 $\lambda>0$ 使得 $g(x)\geqslant\lambda,\forall x\geqslant 0$.
若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x)+g(x)f(x)=0,\forall x\geqslant 0,$$

证明: f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

66. (66.) 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的递增正函数. 若 $g\in C^2[0,+\infty)$ 满足

$$g''(x)+f(x)g(x)=0. \tag{13.269}$$

证明: 存在 $M>0$ 使得

$$|g(x)|\leqslant M,|g'(x)|\leqslant M\sqrt{f(x)},\forall x>0. \tag{13.270}$$

67. (67.) 设连续函数 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足 f 的值域是 $(0,+\infty)$, 证明: 对任何 $a>0$ 都有无穷多个 $x>0$ 使得 $f(x)=a$.

68. (68.) 设 f 在 $[a,b]$ 具有介值性且

$$|f'(x)|\leqslant k,\forall x\in(a,b). \tag{13.271}$$

证明 f 在 $[a,b]$ 连续.

69. (69.) 若

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(-x)}{x}=A,\lim_{x\to0}f(x)=f(0),$$

证明: $f'(0)=\frac{A}{3}$.

70. (70.) 给定 $\mu>0$ 和偶函数 $f\in C^\infty(-\mu,\mu)$. 证明: 存在 $g\in C^\infty\left[0,\mu^2\right)$ 使得

$$f(x)=g\left(x^2\right),\forall x\in(-\mu,\mu).$$

71. (71.) 对任何 $p>1$, 证明存在 $c_p>0$ 使得对任何 $f\in C^1[-1,1]$ 且

$$f(1)>f(-1),|f'(x)|\leqslant 1,\forall x\in[0,1],$$

必有 $x\in[-1,1]$ 使得

$$f'(x)>0,|f(y)-f(x)|\leqslant c_p[f'(x)]^{\frac{1}{p}}|y-x|,\forall y\in[-1,1].$$

72. (72.) 设 $p(x)$ 是首系数为负的 $n\geqslant 1$ 次多项式, $f\in C^m[0,+\infty)$ 满足

$$\sup_{x\geqslant0}\left|f^{(m)}(x)e^{p(x)}\right|<\infty. \tag{13.272}$$

证明:

$$\sup_{x\geqslant0}\left|f(x)[p'(x)]^m e^{p(x)}\right|<\infty. \tag{13.273}$$

73. (73.) 设 $f_n\in R[a,b],n\in\mathbb{N}$ 且有原函数, 若一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in[a,b],$$

证明: f 在 $[a,b]$ 有原函数.

74. (74.) 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 求最大的 $\alpha>0$, 使得

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty.$$

75. (75.) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 可微且 $f'-2f\leqslant 4$, $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 存在数列 $\left\{x_n^{(0)}\right\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 使得

$$1\leqslant x_{n+1}^{(0)}-x_n^{(0)}\leqslant 3, n\in\mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(0)}\right)=0.$$

并证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

76. (76.) 设 $f_0\in R[a,b], A\in\mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x)=A+\int_a^x f_n(y)\,\mathrm{d}y, n\in\mathbb{N}_0.$$

证明: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

77. (77.) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b]$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ 对 $x\in[a,b]$ 一致的成立. 证明: 存在 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b]$ 使得

$$0\leqslant g_{n+1}(x)\leqslant g_n(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x)=0, |f_n(x)|<g_n(x), \forall x\in[a,b], n\in\mathbb{N}. \tag{13.274}$$

78. (78.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$f(a)+f(b)\geqslant\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x, \forall a,b\in\mathbb{R}. \tag{13.275}$$

证明: $f\equiv 0$.

79. (79.) 设 f 是正的二阶可微函数且满足

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{f(x)\left(1+|f'(x)|^2\right)^2}=+\infty.$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sqrt{1+|f'(y)|^2}}{f(y)}\mathrm{d}y\int_x^{+\infty}\sqrt{1+|f'(y)|^2}f(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

80. (80.) 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 满足

$$\left|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)\right|\leqslant\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明: 存在 $C>0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=Ce^x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

81. (81.) 设 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty},\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b]$, 若

$$h_n\geqslant h_{n+1}, g_{n+1}\geqslant g_n, n=1,2,\cdots, \lim_{n\to\infty} h_n=\lim_{n\to\infty} g_n\text{存在}.$$

证明: $\{g_n\}_{n=1}^{\infty},\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛.

82. (82.) 设可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=0$ 且对所有满足 $0<|f(x)|<\frac{1}{2}$ 的 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)\cdot\ln|f(x)||. \tag{13.276}$$

证明:$f\equiv 0$.

83. (83.) 设 $f\in C([0,1]\times[0,1]\times[0,1])$, 证明 $g:(x,y)\mapsto\sup\limits_{z\in[0,1]} f(x,y,z)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续.

84. (84.$*$) 考虑

$$g_n\triangleq\underbrace{\chi_{[0,1]}*\chi_{[0,1]}*\cdots*\chi_{[0,1]}}_{n\text{次卷积}}.$$

证明: 对任何 $n\geqslant 2$, 都有

(a).

$$\mathrm{supp}g_n\subset[0,n]; \tag{13.277}$$

(b).

$$g_n\in C^{n-2}(\mathbb{R}); \tag{13.278}$$

(c).

$$g_n\text{关于}x=\frac{n}{2}\text{轴对称且}g_n\text{在}\left[0,\frac{n}{2}\right]\text{递增},g_n\text{在}\left[\frac{n}{2},n\right]\text{递减}. \tag{13.279}$$

(d). 对任何 $k\in\mathbb{N}_0$ 成立

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n^{(k)}(x)\right|=O\left(\frac{1}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right),n\to\infty. \tag{13.280}$$

(e).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_n(x)\right|\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{\ln n}\right),n\to\infty. \tag{13.281}$$

(f). 对任何 $k\in\mathbb{N}$ 成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_n^{(k)}(x)\right|\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}\right),n\to\infty. \tag{13.282}$$

注读者只需验证(13.282)的 $k=1$ 即可, $k>1$ 过于复杂.

85. (85.∗) 设 $f\in C[0,+\infty)$ 满足

$$f(x)=\int_{x-1}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y,\forall x\geqslant 1.$$

证明:

$$\int_1^{\infty}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x<\infty. \tag{13.283}$$

86. (86.) 设正值递减函数 $f\in C[0,+\infty)$ 满足 $\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$. 若存在 $c>0$ 使得

$$\int_x^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant cf(0)f(x),\forall x\geqslant 0,$$

证明:

$$f(x)\leqslant f(0)\frac{2c}{c+x},\forall x\geqslant 0.$$

87. (87.) 设 $\alpha>0$, 正值函数 $g\in C(0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}=+\infty. \tag{13.284}$$

又设正值函数 $f\in D^2(0,+\infty)$ 满足

$$f''(x)+f'(x)\geqslant g(f(x)),\forall x>0. \tag{13.285}$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0. \tag{13.286}$$

88. (88.∗) 对某个 $p>0$, 设 $\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{a_n}{n^p}\right|<\infty$. 可定义

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n!},x\in\mathbb{R}.$$

证明: 若有估计 $\sup_{x>0}|f(x)e^x|<\infty$, 则

$$f(x)=f(0)e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}.$$

89. (89.) 设 $f\in D(0,+\infty)$ 且单调递减. 若满足

$$0<f(x)<|f'(x)|,\forall x>0,$$

证明:

$$xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),\forall x\in(0,1). \tag{13.287}$$

90. (90.) 设 $h\in C\left([0,1]^2\right)$, 证明: 当 $n\to\infty$ 时 $\int_0^1 h(t,s)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ 关于 $s\in[0,1]$ 一致收敛.

91. (91.) 设

$$f_n, f \in C^1(a,b), g \in C(a,b), \forall n \in \mathbb{N}$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x), \forall x \in (a,b).$$

证明: $f'(x) = g(x)$.

92. (92.) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是具有介值性的函数且对任何 $r \in \mathbb{Q}$ 都有 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集, 证明:$f \in C(\mathbb{R})$.

93. (93.) 记 $B^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, 证明: 不存在非常值连续函数 $g : B^2 \to \mathbb{R}^2$ 使得 $g\left(B^2\right) \subset \partial B^2$ 且成立

$$g(x,y) = g\left(2xy, x^2 - y^2\right).$$

94. (94.) 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $n_x \in \mathbb{N}$ 使得 $f^{(n_x)}(x) = 0$. 证明: f 是多项式.

95. (95.) 设 $\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, n = 1, 2, \cdots, f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界实值连续函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi_n(x-y)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

96. (96.) 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上的实解析函数, $w(f,g) = \det\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$. 证明: f, g 线性相关的充要条件是 $w(f,g) = 0$. 当 $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ 结论还成立吗?

97. (97.) 设 f 是周期 1 的可积和平方可积函数. 对 $\epsilon > 0$, 设

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x+t)\,\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^1 |f(x) - f_\epsilon(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

98. (98.) 设 f 是周期一的黎曼可积[48]函数, $L = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明:

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \left| L - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f\left(x + \frac{n}{N}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{13.288}$$

99. (99.) 设 $f \in C[0,1]$, 我们定义

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\,\mathrm{d}s, \forall \alpha > 0.$$

证明: 当 $\alpha, \beta > 0$ 成立

$$I^\alpha\left(I^\beta f(x)\right) = I^{\alpha+\beta} f(x) = I^\beta\left(I^\alpha f(x)\right). \tag{13.289}$$

100. (100.) 设 $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 满足

$$f(1) = 1, f(x+1) = xf(x), \ln f(x) \text{是下凸函数.}$$

证明:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \forall x \in (0,+\infty). \tag{13.290}$$

101. (101.) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续且对任何 $x > 0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx)$ 存在. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

102. (102.) 设 $m \in \mathbb{N}, f \in C^{m+1}[0,+\infty)$ 且 $f, f', \cdots, f^{(m)} > 0, f^{(m+1)} \leqslant 0$, 证明:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \leqslant 1 - \frac{1}{m}. \tag{13.291}$$

[48] 可以改为平方可积.

103. (103.∗) 设 $u,v\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ 满足存在 $C>0$ 成立

$$(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))^2+(v(\mathbf{x})-v(\mathbf{y}))^2\geqslant C\left\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right\|^2,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2, \tag{13.292}$$

证明:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0. \tag{13.293}$$

104. (104.) 设 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足存在 $a,b>0$ 使得对任何 $x,y\in[1,+\infty)$ 都有

$$a|x-y|\leqslant|f(x)-f(y)|\leqslant b|x-y|. \tag{13.294}$$

证明: 存在 $X>0$ 使得 $\frac{x+e^{-x}}{f(x)}$ 在 $[X,+\infty)$ 一致连续.

105. (105.) 证明: $f\in C(\mathbb{R})$ 的充要条件是对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有

$$g_n(x)=\frac{|n+f(x)|-|n-f(x)|}{2}$$

是连续函数.

106. (106.∗) 设 $f,g:[0,1]\to[0,1]^2$ 连续且满足

$$f(0)=(0,0),f(1)=(1,1),g(0)=(0,1),g(1)=(1,0),$$

证明:f,g 像集交非空.

107. (107.) 设 $f\in C[a,b]$ 满足 $\alpha=f(a),\beta=f(b)$ 且严格递增. 证明:

$$x=f^{-1}(y)\in C[\alpha,\beta].$$

108. (108.) 设 $\alpha>1,f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$f\geqslant 0,\int_{-x}^{x}f^{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)+f(-x),\forall x\in[0,+\infty),$$

证明:$f\equiv 0$.

109. (109.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x),f\left(x^2\right)$ 都是周期函数, 证明:f 为常值函数.

110. (110.) 设非 0 函数 $f\in C^{\infty}[0,1]$ 满足

$$f^{(n)}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

若对某个 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 我们有 $a_nf^{(n)}$ 关于 $x\in[0,1]$ 一致有界, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n=0$.

111. (111.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 连续且对任何满足

$$a_n<0<b_n,n=1,2,\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

的点列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ 存在. 证明: f 在 $x=0$ 可微.

112. (112.∗) 设 f 是有 $k\geqslant 2$ 个不同实根的 k 次实多项式, 对实多项式 g, 记 $d(g)$ 表示 g 不同实根之间的最小距离 (如果少于两个实根, 则为 $+\infty$), 证明

$$d(f+f')\geqslant d(f).$$

113. (113.∗) 设 $f\neq 0$ 是实系数多项式, 令

$$f_0=f,f_1,f_2,\cdots,f_{n+1}=f_n+f_n',\forall n\geqslant 0,$$

证明, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n\geqslant N$, 在 $\mathbb{C}$ 上 f_n 只有实根.

114. (114.) 是否存在 $f\in C[0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(0),\forall g\in C[0,1].$$

115. (115.) 设

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0,f\in C^1[0,+\infty).$$

若 f' 递增, $f(0)=0$, 证明

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(a_k). \tag{13.295}$$

116. (116.∗) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足对任何 $a\in\mathbb{R}$ 都有

$$f(x+a)-f(x)\in D(\mathbb{R}).$$

证明:$f\in D(\mathbb{R})$.

117. (117.) 设 $u\in C^2(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ 满足

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t),\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty).$$

记

$$F(t)=\int_t^{2-t}\left[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right]\mathrm{d}x,$$

证明:$F'(t)\leqslant 0$.

118. (118.) 设

$$n\in\mathbb{N},f\in C^n(-1,1),|f(x)|\leqslant 1,$$

以及

$$m_k(I)\triangleq\inf_{x\in I}\left|f^{(k)}(x)\right|,k=0,1,2,\cdots,n,I\subset(-1,1)\text{是区间}.$$

证明:

(a). 若 I 分成顺次的三个区间 I_1,I_2,I_3 且 μ 是 I_2 长度, 则

$$m_k(I)\leqslant\frac{1}{\mu}\left(m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)\right),k=1,2,\cdots,n.$$

(b). 若 I 长度是 λ, 则

$$m_k(I)\leqslant\frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k}{\lambda^k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

(c). 存在只与 n 有关的数 $\alpha_n>0$ 使得若 $|f'(0)|\geqslant\alpha_n$, 则 $f^{(n)}(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 至少有 $n-1$ 个不同的根.

119. (119.) 连续函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 被称为正定的, 如果对每一个

$$k\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_k\in\mathbb{R}^n,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k\in\mathbb{C}$$

都有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant k}f(x_i-x_j)\xi_i\overline{\xi_j}\geqslant 0.$$

对绝对可积函数 $\phi:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$, 考虑

$$\hat{\phi}(x)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y}\phi(y)\,\mathrm{d}y.$$

证明 $\hat{\phi}$ 是一致连续的正定函数.

120. (120.) 设

$$C=\{a=(a_1,a_2,\cdots):a_i\in\{0,1\}\}$$

称满足以下条件的 $\Phi:C\to[0,1]$ 是正规的, 若对任何 $a\in C$ 和 $\epsilon>0$, 存在正整数 N 使得数列 $b\in C$ 满足 a,b 前 N 个分量相同, 则

$$|\Phi(a)-\Phi(b)|\leqslant\epsilon.$$

设 $f:[0,1]\to[0,1]$, 证明 f 连续等且仅当对任何正规的 Φ 都有 $f\circ\Phi$ 正规.

121. (121.) 设 $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ 满足

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,$$

证明:f 为常值函数.

122. (122.$*$) 设 A,B 是度量空间 (X,d) 的两个不交闭集. 证明存在连续函数 $f:X\to[a,b]$ 使得

$$f(A)=\{a\},f(B)=\{b\}.$$

123. (123.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的下凸函数并满足

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x)\leqslant y^2,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

证明 $f\in D^1(\mathbb{R})$ 且

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

124. (124.) 设 f,g 是区间 I 上的有界函数. 记

$$h(x)\triangleq\sup_{t\in I}[f(t)+xg(t)],x\in I.$$

证明存在 $L\geqslant0$ 使得

$$|h(x_1)-h(x_2)|\leqslant L\cdot|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in I.$$

125. (125.) 设 $f,g\in R[a,b]$ 且

$$P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

是区间 $[a,b]$ 划分. 证明: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对于任意满足的

$$||P||=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})<\delta,$$

都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\sin[g(x_k)\Delta x_k]-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

126. (126.) 设 f 是 $[a,b]$ 上有界函数. 如果存在常数 I 使得对任何 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 对任意 $[a,b]$ 的划分

$$P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

只要

$$||P||=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})<\delta,$$

就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i-I\right|<\epsilon.$$

证明 f 在 $[a,b]$ 黎曼可积且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I$.

127. (127.) 给定 $t>0$, 求最小的 $c>0$ 使得存在 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$f(0)=f(c)=0,f(x)>0,f''(x)+t^2f(x)\geqslant0,\forall x\in(0,c).$$

128. (128.) 设 $f\in C(a,b)$ 且

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\,\mathrm{d}u\right\}=0,\forall x\in(a,b),$$

证明:f 是线性函数.

129. (129.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)$. $g\in C[0,1]$ 是周期 1 的函数. 若 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 或者 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=0.$$

130. (130.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $\epsilon>0$ 使得 $f|_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}$ 是多项式. 证明 f 是多项式.

131. (131.) 设 f 是区间 I 上的连续函数且 I 中每一个点都是 f 的极值点, 证明 f 为常值函数.

132. (132.) 设非负函数 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明存在 $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$ 使得 $f^{(n)}(x)<0$.

133. (133.∗) 设子空间

$$V \subset \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

满足对 $\{f_n\} \subset V$, 只要

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

就有 $f \in V$. 证明 V 是有限维的.

134. (134.) 设 $f \in C[0,1]$ 满足

$$f^{(n)}(0) = f(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a). 若存在 $C > 0$ 使得

$$|xf(x)| \leqslant C \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right|, \forall x \in (0,1),$$

证明 $f = 0$.

(b). 若存在 $\delta, C > 0$ 使得

$$\left|x^{1+\delta} f(x)\right| \leqslant C \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right|, \forall x \in (0,1),$$

是否还有 $f = 0$.

135. (135.) 设 $f \in D^1(0,+\infty)$ 满足

$$f' > 0, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

求 $\{\cos f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点集.

136. (136.) 设 $f \in C^2(-\infty,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to-\infty} e^x f(x) = 0, f''(x) \geqslant f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) \leqslant f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

137. (137.) 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且 $\sin f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 证明:f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

138. (138.) 设 $f \in C[a,b]$ 满足 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 证明存在多项式序列 $p_n \in \mathbb{R}[x]$ 使得

$$\int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, n = 1,2,\cdots, \lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x),$$

这里极限关于 $x \in [a,b]$ 一致.

139. (139.) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 有定义且成立

$$f(x) \geqslant \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

证明:f 没有原函数.

140. (140.) 设 $f \in C[0,+\infty) \bigcap D^1(0,+\infty)$ 满足

$$f(0) \geqslant 0, f'(x) \geqslant f^3(x), \forall x > 0.$$

证明:

$$f(x) = 0, \forall x \geqslant 0.$$

141. (141.∗) 设 $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1} \in C^1(\mathbb{R}^n), \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

142. (142.) 设常数 $\alpha > 1, \beta > 0$. 证明: 不存在定义在 $[x_0, +\infty)$ 上的连续可微函数 f 使得

$$f'(x) \geqslant |f(x)|^\alpha + \beta, \forall x \geqslant x_0.$$

143. (143.) 设 $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 使得 DF 可逆且

$$\lim_{||\mathbf{x}|| \to +\infty} ||F(\mathbf{x})|| = +\infty.$$

证明:

$$F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n.$$

144. (144.) 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得 $f^{(n)}$ 内闭一致收敛到 φ. 证明:

$$\varphi(x) = ke^x, k \in \mathbb{R}.$$

145. (145.) 设非负函数 $f_0 \in C[0,1]$. 考虑递推

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + f_n(t)} \mathrm{d}t, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明:$f_n(x)$ 关于 $x \in [0,1]$ 一致收敛到某个函数 f, 并求出 f.

146. (146.) 设 $f \in C[-1,1]$ 满足对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都有

$$\int_0^1 f(\sin(nx)) \mathrm{d}x = 0.$$

证明:$f \equiv 0$.

147. (147.) 设 f 在 $(0,1]$ 单调且以 $x = 0$ 为奇点, $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$ 收敛. 设

$$\theta \in (0,1), \epsilon_n \in \left(\frac{\theta}{n}, \frac{1}{n}\right),$$

证明:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\epsilon_n + \frac{i}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x.$$

148. (148.∗) 设 $K \subset \mathbb{R}$ 是一个紧集. 考虑

$$f(x) \triangleq \left| K \bigcap (-\infty, x] \right|, x \in \mathbb{R}.$$

证明 $f(K) = [0, |K|]$ 且

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

149. (149.) 若 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$|f(x+y) - f(x) - g(y)| \leqslant M, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明: 存在 Cauchy 方程12.9的解 $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得

$$|g(x) - H(x)| \leqslant M, \forall x \in \mathbb{R}.$$

150. (150.) 设 $f \in C(a,b)$, 证明下面三个条件等价

(a). f 有递增的右导数;

(b). f 有递增的左导数;

(c). 对任何对 $a<x<y<z<b$ 均有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

151. (151.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right)=f\left(x^2+y^2\right)+f^2(xy), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(a). 若 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(1)=1$, 求所有满足条件的 f;

(b). 若 f 一致连续, 求所有满足条件的 f.

152. (152.) 设 f,g 在 $[0,+\infty)$ 可微使得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\in(0,+\infty), \overline{\lim_{x\to+\infty}} g(x)\neq \lim_{x\to+\infty} g(x).$$

证明: 存在 $c_n\to+\infty$ 使得

$$f(c_n)g'(c_n)<-g(c_n)f'(c_n).$$

153. (153.$*$) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 是周期为正无理数的函数. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n}<\infty$, 证明:$f\equiv 0$.

154. (154.) 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上的可微的上凸或者下凸函数且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x)=0.$$

155. (155.)

(a). 证明: 存在 $p_n\in\mathbb{R}[x]$ 使得

$$\int_a^b p_i(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

且对任何 $f\in C[a,b]$, 若

$$\int_a^b f(x)p_i(x)\,\mathrm{d}x=0, i=1,2,\cdots,$$

必有 $f=0$.

(b). 若 g 在 $[a,b]$ 平方可积, 问是否有

$$\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b g(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

156. (156.) 设 $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ 是连续满射且满足对某个 $M>0,\alpha\in(0,1)$ 有

$$|\gamma(s)-\gamma(t)|\leqslant M|s-t|^{\alpha}, \forall s,t\in[0,1].$$

证明:$\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

157. (157.) 设可微函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(1)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, xf'(x)+f(x-1)=0, \forall x\geqslant 1.$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

158. (158.) 设连续函数 $g:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足 g 单调递减. 设

$$x_0>0, x_{n+1}=x_n+g(x_n), n=0,1,2,\cdots,$$

以及 $x\in D^1[0,+\infty)$ 满足

$$x(0)=x_0, x'(t)=g(x(t)), \forall t\geqslant 0.$$

证明

$$x_n=x(n)+O(1), n\to\infty.$$

159. (159.) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt{n})$ 存在且 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

160. (160.) 证明: 存在 $f\in C[0,1]$ 使得
$$f(x)=\int_0^1 \sin\left(x+f^2(t)\right)\mathrm{d}t,\forall x\in[0,1].$$

161. (161.) 设 $\varphi(x)\triangleq\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$, 证明不存在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数 f 使得对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有
$$f(f(x))-|x|f'(x)=\varphi(x).$$

162. (162.) 设 $f\in C^2(a,b)$ 满足
$$f''(x)+f'(x)+f(x)\geqslant 0,\forall x\in(a,b).$$
证明:f 有下界.

163. (163.) 设 $f,f_1\in C[a,b]$ 满足
$$f_{n+1}(x)=f(x)+\int_a^x \sin f_n(t)\,\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$
证明:$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

164. (164.) 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是有限段分段单调的连续函数. 且在每个段上 f 是严格单调的. 我们用 $l(f)$ 表示 f 的极大的严格单调的区间的个数. 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ell\left(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次复合}}\right)}$$
收敛.
例如对
$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases},g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2x-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ \frac{5}{2}(1-x), & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases},$$
我们有 $l(f)=l(g)=2$.

165. (165.) 设 $a<b<c<d$, 若 f 在 $[a,c]$ 下凸以及在 $[b,d]$ 下凸, 证明:f 在 $[a,d]$ 下凸.

166. (166.) 设不恒为 0 函数 $f\in C^1[0,1]$ 满足
$$f(x)\ln^2 x+xf'(x)\leqslant 0,\forall x\in(0,1).$$
证明
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t<\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 0,\forall x\in(0,1).$$

167. (167.) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单射且把紧集映射为紧集, 证明 $f\in C(\mathbb{R})$.

168. (168.) 设
$$\mu\in\left(0,\frac{1}{2}\right),f\in C[0,1]\bigcap D^2(0,1),f(x)\geqslant 0,f''(x)\leqslant 0,\forall x\in(0,1).$$
证明:
$$f(t)\geqslant\mu f(s),\forall t\in[\mu,1-\mu],s\in[0,1].$$

169. (169.) 设 f,g 在 (a,b) 有定义且
$$f(x)-f(x_0)\geqslant g(x_0)(x-x_0),\forall x,x_0\in(a,b).$$
证明 $f'_-(x_0),f'_+(x_0)$ 存在且
$$f'_-(x_0)\leqslant g(x_0)\leqslant f'_+(x_0),\forall x_0\in(a,b).$$

170. (170.∗) 设 f 是上凸函数, 证明对任何非负的 $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ 都有
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g''(x) \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

171. (171.) 若 f 在包含紧凸集 D 的某个开集 U 上是凸函数，证明 f 在 D 上是李普希茨连续的.

172. (172.) 上海交通大学 2026 考研: 设 f 在 $(0,+\infty)$ 一致连续, $\lambda_n > 0$ 满足
$$\lim_{n\to\infty} f(x+\lambda_n) = 0, \forall x > 0.$$
证明: 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致的有
$$\lim_{n\to\infty} f(x+\lambda_n) = 0.$$

173. (173.) 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对每一个 $x \in \mathbb{R}$, 都存在 $\delta_x > 0$ 使得存在
$$f(x_1) > f(x) > f(x_2), \forall x_1 \in (x-\delta_x, x), x_2 \in (x, x+\delta_x).$$
证明:f 在 $\mathbb{R}$ 严格单调递减.

174. (174.) 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续上凸函数. 证明对 $T \in (0, b-a)$ 存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $x_0 + T \in [a,b]$ 且
$$\frac{f(x_0+T) - f(x_0)}{T} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

175. (175.) 设 V 表示次数小于 n 的实系数多项式构成的线性空间. 若 $p \in V$ 满足
$$\int_{-1}^{1} f(x) p(x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \sin(\pi x) \mathrm{d}x, \forall f \in V,$$
证明 p 存在且唯一并计算 $n = 3$ 的 p.

176. (176.) 设 $f \in C(B_2)$ 这里
$$B_R \triangleq \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\right\}, R > 0.$$
若 f 满足
$$\frac{f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})}{2} \geqslant f\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_2.$$

(a). 证明对任何 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_2$ 和 $\lambda \in (0,1)$ 都有
$$\lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) \geqslant f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}).$$

(b). 证明存在常数 $C > 0$ 使得
$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant C ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_1,$$
这里 $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ 表示 $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ 之间的距离 $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.

177. (177.) 设 $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. 考虑方程 $f(x) = tg(x)$.

(a). 证明: 存在 $\delta > 0$ 使得 $x(t)$ 是方程在 $t \in (-\delta, \delta)$ 上满足 $x(0) = 0$ 的唯一解;

(b). 求 $x(t)$ 在 $t = 0$ 处的一阶 Taylor 展开式.

178. (178.) 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足
$$f|_{(-\infty, 0]} = 0, f|_{[1,+\infty)} = 1.$$

(a). 若 f 在 $\mathbb{R}$ 可微, 证明:
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f'(x) > 1.$$

(b). 若 $f \in C^k(\mathbb{R}), k \geqslant 2$, 证明:
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| > 2^{k-1} \cdot k!.$$

179. (179.) 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 以 2π 为周期, 以及
$$f_n(x) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n} \mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x}, x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots,$$

证明 f_n 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛到 f.

180. (180.) 对 $n\in\mathbb{N},\epsilon>0,A\neq 0$. 证明存在 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 满足

$$f^{(n)}(0)=A,\left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant\epsilon,f^{(k)}(0)=0,\forall x\in\mathbb{R},k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

181. (181.) 设 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足对某个 $L>0$ 成立

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\geqslant 1.$$

证明存在 $X>1$ 使得 $\frac{f(x)}{x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 在 $[X,+\infty)$ 一致连续.

182. (182.) 设 $f\in C[0,1]$ 满足对任何 $0\leqslant a<b\leqslant 1$ 都有 f 在 $[a,b]$ 上至少有两个不同的最大值点, 证明 f 为常值函数.

183. (183.) 设 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 记

$$\varphi(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t,$$

证明:φ 一致连续.

184. (184.$*$) 设 $a_i,b,i=1,2,\cdots,n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中原点某个邻域 V 上的连续可微函数. 证明: 存在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中原点某个邻域 U 使得只要 $u\in C^1(U)$ 且

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}a_i(t,\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(t,\mathbf{x})u,u|_{t=0}=0,$$

就有

$$u(t,\mathbf{x})=0,\forall(t,\mathbf{x})\in U.$$

185. (185.) 设 $f\in C^{\infty}[0,1]$ 满足 $\left\{f^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 等度连续以及

$$f^{(k)}(0)=0,k=0,1,2,\cdots.$$

证明:

$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

186. (186.) 设 f 是 (a,b) 上平方可积的连续函数且存在 $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|\sum_{k=0}^{n}c_kx^k-f(x)\right|^2\mathrm{d}x=0.$$

证明:f 在 (a,b) 实解析.

187. (187.$*$) 设 a,f 在 $\mathbb{R}^2$ 原点邻域 V 内实解析,φ 在 $\{x\in\mathbb{R}:(0,x)\in V\}$ 实解析,
则存在 $\mathbb{R}^2$ 原点邻域 $U\subset V$ 使得在该邻域上方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)+f(t,x),u(0,x)=\varphi(x)$$

存在唯一的实解析解.

188. (188.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 $T>0$ 的二阶可微非负函数且对某一个 $p\in(1,+\infty)$ 成立

$$\int_0^T|f''(x)|^p\,\mathrm{d}x<\infty.$$

证明

$$|f'(x)|^{\frac{2p-1}{p-1}}\leqslant\frac{2p-1}{p-1}\left(\int_0^T|f''(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p-1}}\cdot f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

189. (189.$*$) 设 $m\in\mathbb{N}$, 记

$$\mathbb{I}_m=\{(\alpha,k):\alpha\in\mathbb{N}_0^n,k\in\mathbb{N}_0,k<m,|\alpha|+k\leqslant m\},$$

这里

$$|\alpha|\triangleq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\mathbf{x}^{\alpha}}\triangleq\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

设 $\varphi_k, k=0,1,2,\cdots,m-1$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的 $\mathbf{x}=0$ 的邻域实解析, f 在

$$\left(0,\mathbf{0},\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi_k}{\partial\mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{0})\right)_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}\right)$$

邻域实解析. 证明方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,\mathbf{x})=f\left(t,\mathbf{x},\left(\frac{\partial^{|\alpha|+k}u}{\partial\mathbf{x}^\alpha\partial t^k}(t,\mathbf{x})\right)_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}\right), & \forall(t,\mathbf{x})\in W\\ \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(0,\mathbf{x})=\varphi_r(\mathbf{x}), & \forall\mathbf{x}\in\{(t,\mathbf{x})\in W:t=0\},r=0,1,2,\cdots,m-1\end{cases}\tag{13.296}$$

在原点某邻域 $W\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 存在唯一的实解析解.

190. (190.$*$) 设 $m\in\mathbb{N}$ 记

$$\mathbb{I}_m=\{(\alpha,k):\alpha\in\mathbb{N}_0^n,k\in\mathbb{N}_0,k<m,|\alpha|+k\leqslant m\},$$

这里

$$|\alpha|\triangleq\sum_{i=1}^n\alpha_i,\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\mathbf{x}^\alpha}\triangleq\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

设对 $(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m$, $a_{k,\alpha}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 原点邻域 W 上的的实解析函数. 若 $u\in C^m(W)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,\mathbf{x})+\sum\limits_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}a_{k,\alpha}(t,\mathbf{x})\frac{\partial^{|\alpha|+k}u}{\partial\mathbf{x}^\alpha\partial t^k}(t,\mathbf{x})=0, & \forall(t,\mathbf{x})\in W\\ \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(0,\mathbf{x})=0, & \forall\mathbf{x}\in\{(t,\mathbf{x})\in W:t=0\},r=0,1,\cdots,m-1.\end{cases}\tag{13.297}$$

证明存在 $(0,\mathbf{0})$ 的邻域 $U\subset W$ 使得

$$u(t,\mathbf{x})=0,\forall(t,\mathbf{x})\in U.$$

191. (191.) 设 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且存在 $p\in(0,1)$ 使得当 $x\to+\infty$ 时有 $x^pf(x)$ 递减趋于 0. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0.$$

192. (192.) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\mathbb{R}$ 上实值连续周期函数. 若 $\sum\limits_{i=1}^n f_i$ 是常值函数且其中任意少于 n 个函数之和都不是常值函数. 证明:$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 有公共周期.

193. (193.) 设 $p>1,x(0)>0,x\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$0\leqslant x(t)\leqslant x(0)+\epsilon x^p(t).$$

证明: 存在 $\epsilon_0>0$, 当 $\epsilon<\epsilon_0$ 时 x 有界.

194. (194.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的非常数递增函数. 证明: 存在 $a\in\mathbb{R},c>0$ 使得

$$f(a+x)-f(a-x)\geqslant cx,\forall x\in[0,1].$$

195. (195.$*$) 设 $u\in C^4(\mathbb{R}^d)$ 且 $\Delta(\Delta u)=0,u\geqslant0$. 证明 u 是 $\mathbb{R}^d$ 不超过 2 次的多项式.

196. (196.) 设 $f,g\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ 且对某个 $c\in(0,1)$ 成立

$$|g'(f(x))f'(x)|<c|g'(x)|,\forall x\in\mathbb{R}.$$

存在存在唯一的 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

197. (197.) 设周期函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 连续. 证明:f 必有最小正周期.

198. (198.$*$) 设

$$f_0(x)=x,f_n(x)=x^{f_{n-1}(x)},n=1,2,\cdots.$$

证明对任何 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $f_n^{(k)}(1)<0$.

199. (199.) 设 $V\subset C^\infty(\mathbb{R})$ 是有限维子空间满足只要 $f\in V$ 就有 $f(2x)\in V$. 证明 $V\subset\mathbb{R}[x]$.

200. (200.) 设 f 在 $(0,1)$ 有定义且满足 $f(x)\tan x$ 递增, $\tan(f(x))$ 递减. 若存在正整数 k 使得 $f(x)\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, 证明:$f$ 在 $(0,1)$ 连续.

201. (201.) 设 $a>0, u \in C^2(\mathbb{R}\times(0,+\infty)) \bigcap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, & x\in\mathbb{R}, t\in(0,+\infty) \\ u(x,0)=0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, & x\in\mathbb{R} \end{cases},$$

这里 b,c 都是有界函数. 证明

$$u(x,t)=0, \forall t\in[0,+\infty), x\in\mathbb{R}.$$

202. (202.) 设 $f\in C[0,+\infty)$. 记

$$M(t)\triangleq \sup_{x\in[0,t]} f(x), m(t)\triangleq \inf_{x\in[0,t]} f(x), t\geqslant 0.$$

证明:$M+m$ 在 $[0,+\infty)$ 严格递增的充要条件是 f 在 $[0,+\infty)$ 严格递增.

203. (203.∗) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $[0,1]$ 上有原函数的 g 都有 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上有原函数, 证明:f 是线性函数.

204. (204.) 求一切实数 α 使得存在 $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 成立

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geqslant |x-y|^\alpha, \forall x,y\in[0,1].$$

205. (205.) 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是同胚. 若

$$\int_0^1 g(f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x, \forall g\in C[0,1],$$

求 f.

206. (206.) 设 $f\in C[a,b]$ 满足 $f(a)<0<f(b)$. 证明: 存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$f(c)=0, f(x)>0, \forall x\in(c,b].$$

207. (207.) 设 $X\subset\mathbb{R}$ 是紧集, T_n 是连续函数空间 $C(X)$ 到另外一个函数空间上的一列线性算子且满足

$$T_n(f)\geqslant 0, \forall f\in C(X) \text{ 满足} f\geqslant 0, n\in\mathbb{N}.$$

若关于 $x\in X$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} T_n(1)=1, \lim_{n\to\infty} T_n(x)=x, \lim_{n\to\infty} T_n(x^2)=x^2,$$

证明对任何 $f\in C(X)$, 都一致的有

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f)=f.$$

208. (208.) 设有界函数 $f\in C(0,+\infty)$. 假设存在实数 $a_0,a_1,\cdots,a_k, k\geqslant 2$ 和 $\alpha\in[0,1)$ 使得

$$\sum_{p=0}^k a_p = 0, \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left|\sum_{p=0}^k a_p f(x+p)\right| = \beta.$$

证明:$\beta=0$.

209. (209.) 是否存在处处不实解析的 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得对任何 $x_0,x\in\mathbb{R}$ 都有

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

收敛.

210. (210.) 设 $\alpha\in(0,1], f\in C^1(\mathbb{R})$, 记有限数

$$M_0\triangleq\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|, M_1\triangleq\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|, M_{1+\alpha}\triangleq \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\ x\neq y}} \frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

证明: 存在 $\lambda(\alpha)\in\mathbb{R}$ 使得

$$M_1\leqslant 2(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}} M_0^{1-\lambda(\alpha)} M_{1+\alpha}^{\lambda(\alpha)}.$$

211. (211.) 设 $f \in C[0,a]$, 考虑

$$f_0(x) \triangleq f(x), f_{n+1}(x) \triangleq \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\,\mathrm{d}t, n = 0,1,2,\cdots.$$

证明:f 在 $[0,a]$ 符号改变次数不小于等于有序集 $f(a), f_1(a), \cdots, f_n(a)$ 符号改变次数. 也不小于

$$f(0), \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t, \cdots, \int_0^a t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

符号改变次数.

212. (212.*) 设 $\mathcal{P}$ 是由 $[0,1]$ 上某些多项式构成的线性空间. 若 $\mathcal{P}$ 对一致收敛封闭, 证明 $\mathcal{P}$ 是有限维空间.

213. (213.*) 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 的调和函数满足对某个 $p \in (0,1)$ 成立

$$C \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x})|^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty,$$

证明:$u \equiv 0$.

214. (214.*) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $f \in C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}_0$. 证明: 对任何正值函数 $\epsilon \in C(\Omega)$, 都存在 $\mathbb{R}^n$ 上的实解析函数 g 使得

$$|D^\alpha f(\mathbf{x}) - D^\alpha g(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega, |\alpha| \leqslant k, \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

这里 D^α 表示求 α 阶偏导数.

215. (215.) 设 $g \in C(\mathbb{R}), F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. 若 dF 在 $\mathbb{R}^n$ 处处可逆且

$$g(||F(\mathbf{x})||) \geqslant ||\mathbf{x}||, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

证明:$F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

216. (216.) 对 $\lambda \in \mathbb{R}$, 考虑

$$L_\lambda : C[0,1] \to C[0,1], f \mapsto f - \lambda\int_0^1 (1+xt) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

求所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 L_λ 是双射. 当 L_λ 不是双射, 计算其对应的像空间.

217. (217.*) 设 $f \in C^3(-\infty,+\infty)$ 且 f, f', f'', f''' 都为正. 若还有

$$f'''(x) \leqslant f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

求最佳的 $c > 0$ 使得

$$f'(x) < cf(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

218. (218.) 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, 对区间 I 上的非负连续函数 f, 证明: 对 $x_1, x_2 \in I$, 必存在 $\xi_1, \xi_2 \in I$ 使得

$$f(\xi_1) = \sqrt{f(x_1) f(x_2)}, f(\xi_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

若总有 $\xi_1 < \xi_2$, 证明 f 在区间 I 单调递增.

第 14 章 非数学类积分计算

内容提要

- 不定积分计算 14.1
- 定积分计算 14.2
- 反常积分收敛性判别 14.3

我们尽可能追求真正的数学, 不在过多无聊的积分计算题上浪费时间, 只关心重要且核心的部分.

14.1 不定积分计算

考试中不定积分不可能太难, 这部分内容应该简化.

14.1.1 带根号不定积分

例题 14.1 计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

笔记 注意积累第一个标红的换元, 此类问题可以类似处理.

证明

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &\overset{y=\frac{x-a}{b-x}}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{d\left(\frac{by+a}{y+1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{by+a}{y+1}-a\right)\left(b-\frac{by+a}{y+1}\right)}} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{y}(y+1)}dy \overset{y=z^2}{=} \int \frac{2}{1+z^2}dz = 2\arctan z + C \\ &= 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C.\end{aligned}$$

14.1.2 一种特殊有理积分算法

例题 14.2 计算 $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$.

证明

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}d\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}d\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+1}{x+\frac{1}{x}-1}\right| + C.\end{aligned}$$

14.1.3 猜原函数法

例题 14.3 计算 $\int \frac{e^{-\sin x}\sin(2x)}{(1-\sin x)^2}dx$.

笔记 顾名思义, 直接猜出原函数

证明 因为要算积分分母有平方，$e^{-\sin x}$ 在求导过程中不会改变，因此我们猜测原函数至少有 $\frac{e^{-\sin x}}{1-\sin x}$ 部分，所以直接求导验算得答案

$$\int \frac{e^{-\sin x}\sin(2x)}{(1-\sin x)^2}dx = \frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x} + C.$$

例题 14.4 计算 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

笔记 由 $(x-\ln x)^2$ 知可待定原函数 $\frac{f(x)}{x-\ln x}$，从而猜出答案.

证明 直接猜出

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x-\ln x} + C.$$

例题 14.5 计算

$$\int \frac{x^2+20}{(x\sin x+5\cos x)^2}\mathrm{d}x.$$

证明 直接猜测得

$$\int \frac{x^2+20}{(x\sin x+5\cos x)^2}\mathrm{d}x = \frac{6\sin x - x\cos x}{x\sin x+5\cos x} + C.$$

14.1.4 杂例

例题 14.6 设 $n\in\mathbb{N}$，计算 $\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\mathrm{d}x$.

证明 我们有

$$\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\mathrm{d}x = n!\int \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\mathrm{d}x$$

$$= n!\int \left[1-\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}}\right]\mathrm{d}x = n!\left[x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\right]+C.$$

例题 14.7

1. 设 $y(x-y)^2 = x$，计算 $\int \frac{dx}{x-3y}$.
2. 设 $y^3(x+y) = x^3$，计算 $\int \frac{dx}{y^3}$.

笔记 此类问题的统一方法，就是寻找 x,y 的参数方程. 一般就是猜一个简单的换元即可.

证明

1. 设 $y=tx$，则

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \\ y = \frac{\sqrt{t}}{1-t} \end{cases}.$$

于是

$$\int \frac{dx}{x-3y} = \int \frac{d\left(\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} - \frac{3\sqrt{t}}{1-t}} = \int \frac{1}{2(t^2-t)}dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C.$$

2. 设 $y=tx$，则

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t^3(1+t)} \\ y = \frac{1}{t^2(1+t)} \end{cases},$$

于是

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{t^3(1+t)}\right)}{\left(\frac{1}{t^2(1+t)}\right)^3}=\int \frac{d\left(\frac{1}{t^3(1+t)}\right)}{\left(\frac{1}{t^2(1+t)}\right)^3}=-\int t^2(t+1)(4t+3)\,dt=-\frac{4}{5}t^5-\frac{7}{4}t^4-t^3+C.$$

来看建立不定积分的递推的题型.

例题 14.8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin(nx)\,dx, n\in\mathbb{N}$.

证明 由

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin(nx)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos x\cdot\sin(nx)\,dx\\
&\overset{\text{积化和差}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\{\sin[(n+1)x]+\sin[(n-1)x]\}\,dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot[\sin(nx)\cos x+\cos(nx)\sin x]\,dx+\frac{I_{n-1}}{2}\\
&=\frac{I_n+I_{n-1}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos(nx)\,d\cos x\\
&=\frac{I_n+I_{n-1}}{2}-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,d\cos^n x\\
&\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{I_n+I_{n-1}}{2}-\frac{-1+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cdot\sin(nx)\,dx}{2n}\\
&=\frac{I_n+I_{n-1}}{2}-\frac{-1+nI_n}{2n}=\frac{I_{n-1}}{2}+\frac{1}{2n},
\end{aligned}$$

我们有

$$2^nI_n=2^{n-1}I_{n-1}+\frac{2^{n-1}}{n},I_0=0,n\in\mathbb{N}.$$

从而

$$I_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k},n\in\mathbb{N}.$$

14.2 定积分计算

14.2.1 积分恒等式

最重要的特殊定积分计算方法就是所谓的区间再现[1]方法. 考试中面对不难的定积分优先采用这个方法.

定理 14.1 (区间再现恒等式)

当下述积分有意义时, 我们有

1.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx&=\int_a^b f(a+b-x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\,dx\\
&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\,dx.
\end{aligned}$$

[1]我实在不喜欢这个工科老师创造的名词, 但无奈已经成为主流.

2.
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left[f(x) + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \right] dx.\end{aligned}$$
♡

笔记 由于显然的恒等式, 我们后续不对此进行引用. 显然, 倒代换有 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 转化的功能.

我们知道反常积分有时候也符合定积分定义, 但并不总是符合, 一个充分条件是

例题 14.9 设 f 在 $(0,1)$ 单调且 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 收敛.

1. 证明:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{14.1}$$

2. ♠,∗ 若 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是正常可积的, 则
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{14.2}$$

证明 证明的想法即积分和式转化. 不妨设 f 递增.

1. 一方面
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
另外一方面
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
于是结合夹逼准则即得(14.1).

2. 因为可积必有界, 设 $c > 0$ 使得 $\varphi \geqslant -c$. 现在考虑 $\varphi + c$ 并使用(14.1)可不妨设 $\varphi \geqslant 0$. 相似第一问的单调性放缩, 我们可得
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\varphi\left(\frac{k}{n}\right) dx.$$
因为 f 单调, 所以 f 在 $0,1$ 附近都是不变号的, 所以 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 不妨设 f, φ 不恒为 0.
对任何 $\epsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 考虑分点 $x_k = \frac{k}{n}, k = 0,1,2,\cdots,n$. 记 $w_k(\varphi)$ 是 φ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 的振幅. 因为 $f \in L^1[0,1]$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得当 $E \subset [0,1], mE < \delta$ 时成立
$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{4 \sup |\varphi|}.$$
因为 φ 黎曼可积, 所以存在 $N > 0$ 使得当 $n \geqslant N$ 就有
$$\frac{\epsilon}{2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x} \sum_{w_k(\varphi) \geqslant \frac{\epsilon}{2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x}} \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} w_k(\varphi)\,\Delta x_k < \frac{\epsilon\delta}{2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x},$$
即
$$\sum_{w_k(\varphi) \geqslant \frac{\epsilon}{2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x}} \Delta x_k < \delta.$$

现在当 $n \geqslant N$ 就有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |f(x)|\cdot\left|\varphi(x)-\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{w_k(\varphi)\geqslant\frac{\epsilon}{2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x}} w_k(\varphi)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{w_k(\varphi)<\frac{\epsilon}{2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x}} w_k(\varphi)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\sup|\varphi| \sum_{w_k(\varphi)\geqslant\frac{\epsilon}{2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{\epsilon}{2\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

这就证明了(14.2).

定理 14.2 (傅汝兰尼积分)

设 $f\in C(0,+\infty)$.

1. 若存在极限

$$\lim_{x\to0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x), \tag{14.3}$$

则对 $a,b>0$ 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \left[\lim_{x\to0^+} f(x) - \lim_{x\to+\infty} f(x)\right]\ln\frac{b}{a}.$$

2. 若存在极限和积分

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\alpha,\ \int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{14.4}$$

则证明对 $a,b>0$, 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \alpha\ln\frac{b}{a}.$$

3. 若存在极限和积分

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha,\ \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{14.5}$$

证明对 $a,b>0$, 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \alpha\ln\frac{a}{b}.$$

4. 若 f 是周期 $T>0$ 函数且 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ 存在, 则对 $a,b>0$ 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \left[\lim_{x\to0^+} f(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right]\ln\frac{b}{a}.$$

5. 若 f 满足 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 存在, 则对 $a,b>0$ 有

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \left[\lim_{x\to0^+} f(x) - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right]\ln\frac{b}{a}.$$

♡

笔记 傅汝兰尼积分有诸多变种, 无需记忆具体表达式, 知道有大概这么一个东西即可.

证明 不妨设 $b>a$.

1. 给定 $A>\delta>0$, 考虑

$$\begin{aligned}\int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \overset{\text{积分中值定理11.3}}{=} f(\theta_1)\int_{bA}^{aA}\frac{1}{x}\mathrm{d}x - f(\theta_2)\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里 $\theta_1\in(aA,bA),\theta_2\in(a\delta,b\delta)$, 于是让 $A\to+\infty,\delta\to0^+$, 由(14.3), 我们知

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \left[\lim_{x\to0^+}f(x)-\lim_{x\to+\infty}f(x)\right]\ln\frac{b}{a}.$$

2. 给定 $A>\delta>0$, 考虑

$$\begin{aligned}\int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \overset{\text{积分中值定理11.3}}{=} \int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - f(\theta)\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里 $\theta\in(a\delta,b\delta)$, 于是让 $A\to+\infty,\delta\to0^+$, 由(14.4), 我们知

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \alpha\ln\frac{b}{a}.$$

3. 给定 $A>\delta>0$, 考虑

$$\begin{aligned}\int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \overset{\text{积分中值定理11.3}}{=} f(\theta)\int_{bA}^{aA}\frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{a\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里 $\theta\in(aA,bA)$, 于是让 $A\to+\infty,\delta\to0^+$, 由(14.5), 我们知

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \alpha\ln\frac{a}{b}.$$

4. 给定 $A>\delta>0$, 考虑

$$\begin{aligned}\int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^A \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^A \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \overset{\text{积分中值定理11.3}}{=} \int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - f(\theta)\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= \int_b^a \frac{f(Ax)}{x}\mathrm{d}x - f(\theta)\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里 $\theta\in(a\delta,b\delta)$. 现在

$$\lim_{\delta\to0^+}\left(-f(\theta)\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = \lim_{x\to0^+}f(x)\ln\frac{b}{a}.$$

由黎曼引理9.2, 我们有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_b^a \frac{f(Ax)}{x}\mathrm{d}x = \int_b^a\frac{1}{x}\mathrm{d}x\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\ln\frac{b}{a},$$

这就证明了

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \left[\lim_{x\to0^+}f(x)-\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right]\ln\frac{b}{a}.$$

5. 上一问证明中把使用的黎曼引理9.2用平均值极限版本的黎曼引理9.6代替即可.

✍ **练习 14.1** 设 $\alpha,\beta>0$, 计算

1.

$$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2\mathrm{d}x;$$

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos(\beta x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

证明

1. 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2\mathrm{d}x=-\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)^2\mathrm{d}\frac{1}{x}\\
&=\int_0^{\infty}\frac{-2\alpha e^{-2\alpha x}-2\beta e^{-2\beta x}+2(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\mathrm{d}x\\
&=-2\alpha\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\alpha x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\mathrm{d}x-2\beta\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\beta x}-e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{傅汝兰尼积分14.2}}{=}-2\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}-2\beta\ln\frac{\alpha+\beta}{2\beta}.
\end{aligned}$$

2. 分部积分得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos(\beta x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2}+\beta\sin(\beta x)}{x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\left(-2\alpha e^{-\alpha x^2}\right)\mathrm{d}x+\beta\int_0^{\infty}\frac{\sin(\beta x)}{x}\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{换元}}{=}-2\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y+\beta\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\\
&=-\sqrt{\pi\alpha}+\frac{\pi}{2}\beta.
\end{aligned}$$

例题 14.10 设 $a>0$, 证明: 只要下面反常积分有意义, 就有

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln a\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx\\
&=\int_0^{a} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx+\int_a^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx\\
&\overset{x=\frac{a^2}{t}}{=}\int_0^{a} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx-\int_0^{a} f\left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt\\
&=0.
\end{aligned}$$

例题 14.11 设 $a,b>0$, 在下述积分有意义时, 必有

$$\int_0^{\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)\mathrm{d}x. \tag{14.6}$$

笔记 ★ 用 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 来分段可以让 $x,\frac{1}{x}$ 前的系数统一, 也正好对应 $ax+\frac{b}{x}$ 单调性的转折点.

证明 这个精彩的证明来自一道引理及其应用.

自然的, 考虑换元

$$ax+\frac{b}{x}=t\Rightarrow x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4ab}}{2a}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x &\overset{\bigstar}{=} \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\,\mathrm{d}\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)+\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)\\ &=\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{t^2-4ab}}{a}\right)=\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\left(\sqrt{t^2-4ab}\right)\\ &\overset{m=\sqrt{t^2-4ab}}{=}\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{m^2+4ab}\right)\mathrm{d}m,\end{aligned}$$

这就证明了(14.6).

例题 14.12 当下述积分有意义时, 证明

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos x\right)\mathrm{d}x. \tag{14.7}$$

证明 注意反复运用第一类曲线积分的参数方程法, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x &= \oint_{x^2+y^2=1} f(ax+by)\,\mathrm{d}s\\ &\overset{\text{Poisson 公式20.1}}{=}\oint_{x^2+y^2=1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}x\right)\mathrm{d}s=\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &=2\int_0^{\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

例题 14.13 设 $a>0$, 下述积分有意义时, 证明

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} &\overset{x^2=t}{=}\int_1^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\\ &=\frac{1}{2}\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\overset{u=\frac{a^2}{t}}{=}\frac{1}{2}\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{1}{2}\int_1^a f\left(\frac{a^2}{u}+u\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

14.2.2 区间再现专题训练 (重要)

例题 14.14 计算

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$.
3. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

证明

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x &\overset{\text{区间再现14.1}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln\sin x+\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]\mathrm{d}x\\ &\overset{2x=y}{=}-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx &\overset{x=\tan\alpha}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\alpha)\,d\alpha \overset{\text{区间再现14.1}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\ln(1+\tan\alpha)+\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\right]d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\ln(1+\tan\alpha)+\ln\left(1+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right)\right]d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln 2 d\alpha = \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

例题 14.15 计算

1. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$.
2. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1}dx$.
3. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$.

证明

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx &\overset{x=ay}{=} a\int_0^{\infty} \frac{\ln a+\ln y}{a^2y^2+a^2}dy = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{\ln a}{y^2+1}dy + \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{\ln y}{y^2+1}dy \\ &\overset{\text{区间再现14.1}}{=} \frac{\pi\ln a}{2a} + \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{\ln\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}\frac{1}{y^2}dy = \frac{\pi\ln a}{2a} - \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{\ln y}{1+y^2}dy \\ &= \frac{\pi\ln a}{2a},\end{aligned}$$

这里仔细观察前后等式的符号可发现 $\int_0^{\infty} \frac{\ln y}{1+y^2}dy = 0$.

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1}dx \overset{\text{区间再现14.1}}{=} \int_0^{\infty} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\frac{1}{x^2}dx = -\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+x+1}dx = 0 \quad .$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x &\overset{x=\sin^2 y}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin^2 y}{\sqrt{\sin^2 y\left(1-\sin^2 y\right)}}\mathrm{d}\sin^2 y \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin y\mathrm{d}y \overset{\text{例题14.14}}{=} 4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = -2\pi\ln 2.\end{aligned}$$

例题 14.16 计算

1. $\lambda\in\mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\lambda}x}dx$.
2. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$.
3. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

证明

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\lambda}x}dx \overset{\text{区间再现}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^{\lambda}x}+\frac{1}{1+\tan^{\lambda}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^{\lambda}x}+\frac{\tan^{\lambda}x}{1+\tan^{\lambda}x}\right)dx = \frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x+x^2}}dx &\overset{\text{区间再现}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x(1-x)}}dx \\ &\overset{\text{求导可得恒等式}}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x(1-x)}}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

3.
$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \overset{\text{区间再现}}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

例题 14.17 计算

1. 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}dx$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$.
3. 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\,dx$.

证明

1.
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}dx &\overset{\text{区间再现}}{=} \int_{-\pi}^{0}\left[\frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x}+\frac{\sin(nx)}{(1+2^{-x})\sin x}\right]dx\\ &= \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{\sin x}dx \overset{\text{偶函数}}{=} \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{\sin x}dx \overset{\text{例题计算过程9.28}}{=} \begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ \pi, & n\text{为奇数}\end{cases}.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx &\overset{\text{区间再现}}{=} \int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\left[\arctan e^x+\arctan e^{-x}\right]}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \overset{\text{区间再现}}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dx = \frac{\pi^3}{8}.\end{aligned}$$

3.
$$\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\,dx \overset{\text{区间再现}}{=} \int_0^{2\pi}\sin(\sin(2\pi-x)+n(2\pi-x))\,dx = -\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\,dx = 0.$$

例题 14.18 计算

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx$.
2. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$, $(a>0)$.

证明

1.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx \overset{\text{区间再现}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx = \frac{\pi}{4}.$$

2.
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} &\overset{\text{区间再现}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)}+\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{-a})}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

14.2.3 含参积分求导 (♠)& 化多元 (累次) 积分换序

一般来说, 累次积分换序和含参数积分求导本质上并无区别. 严格来说含参积分求导方法是超过了非数学类考纲要求, 但是利用累次积分换序却在考纲内.

例题 14.19 计算

1. $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$.
2. $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.
3. $\int_0^{\infty}\sin x^2dx$, $\int_0^{\infty}\cos x^2dx$.

笔记 本结果可以直接使用.

证明

1.
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2}=\sqrt{\iint_{[0,+\infty)^2} e^{-x^2-y^2}dxdy}$$
$$=\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx&=\int_0^{\infty}\sin x\int_0^{\infty}e^{-xy}dydx\\&=\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}\sin xe^{-xy}dx\\&=\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}\Im e^{ix}\cdot e^{-xy}dx\\&=\Im\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}e^{-x(y-i)}dx\\&=\int_0^{\infty}\Im\frac{1}{y-i}dy=\int_0^{\infty}\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. 注意到
$$\int_0^{\infty}\cos x^2dx-i\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\int_0^{\infty}e^{-ix^2}dx\overset{x=\frac{y}{\sqrt{i}}}{=}\frac{1}{\sqrt{i}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy\overset{\text{第二问}}{=}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i),$$
于是我们有
$$\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\int_0^{\infty}\cos x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

例题 14.20 计算 $\int_0^1\sin\ln\frac{1}{x}\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\,(b>a>0)$.

证明
$$\begin{aligned}\int_0^1\sin\ln\frac{1}{x}\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx&=\int_0^1\int_a^b\sin\ln\frac{1}{x}\cdot x^ydy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\ln\frac{1}{x}dx\\&\overset{x=e^{-z}}{=}\int_a^b dy\int_0^{\infty}e^{-z(y+1)}\sin zdz=\Im\int_a^b dy\int_0^{\infty}e^{-z(y+1-i)}dz\\&=\Im\int_a^b\frac{1}{y+1-i}dy=\int_a^b\frac{1}{(y+1)^2+1}dy=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).\end{aligned}$$

例题 14.21 $a,b\geqslant 0$ 且不全为 0, 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x\right)dx$.

证明 不妨设 $a>b$. 设 $F(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x\right)dx$, 则
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}F(a,b)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\sin^2x}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\tan^2x}{a^2+b^2\tan^2x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\tan^2x}{a^2+b^2\tan^2x}\frac{1}{1+\tan^2x}d\tan x\\&=\int_0^{\infty}\frac{2bt^2}{a^2+b^2t^2}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{a+b},\end{aligned}$$
于是
$$\begin{aligned}F(a,b)&=F(a,0)+\int_0^b\frac{\pi}{a+b'}db'=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a\cos x)dx+\pi\ln\frac{a+b}{a}\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx+\pi\ln(a+b)\overset{\text{例14.14}}{=}\pi\ln\frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

例题 14.22♠ 计算
$$\int_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}dx.$$

证明 我们考虑

$$F(a)=\int_0^1 \frac{\ln\left(ax+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}dx, \alpha \geqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^1 \frac{1}{ax+\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{a\ln\left[\left(1-\left(a^2+1\right)x^2\right)\right]+2a\tanh^{-1}\left(\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2\arcsin x}{2a^2+2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{2a\ln a+\pi}{2a^2+2}. \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^1 \frac{\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}dx \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{2n-1}dx = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}dx = F(1) &= F(0)+\int_0^1 F'(a)\,da = -\frac{\pi^2}{24}+\int_0^1 \frac{2a\ln a+\pi}{2a^2+2}da \\ &= \frac{\pi^2}{12}+\int_0^1 \frac{a\ln a}{a^2+1}da = \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 a\ln a\cdot\left(-a^2\right)^n da \\ &= \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 a^{2n+1}\ln a da = \frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

例题 14.23 计算 $\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x, a\in\mathbb{R}$.

笔记 cos 换成 sin 会无初等结果.

证明 由 cos 是偶函数, 我们设 $a>0$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(1+x^2\right)y}\cos(ax)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2y}\cos(ax)\,\mathrm{d}x \\ &= \Re\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2y}e^{iax}\mathrm{d}x\right) = \Re\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y\left(x+\frac{a}{2iy}\right)^2-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}x\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-y-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-yx^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\int_0^{\infty}e^{-t^2-\frac{a^2}{4t^2}}\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{例题14.36}}{=} \frac{\pi}{2}e^{-a}, \end{aligned}$$

这就证明了 $\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$.

例题 14.24 证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+sx)}{x(1+x)}dx+\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{s}x\right)}{x(1+x)}dx=\frac{\pi^2}{3}+\frac{\ln^2 s}{2}, s>0. \tag{14.8}$$

证明 设 $f(s)\triangleq\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+sx)}{x(1+x)}dx$, 则

$$f'(s)\triangleq\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+sx)(1+x)}dx=\frac{\ln s}{s-1}. \tag{14.9}$$

又

$$-\frac{1}{s^2}f'\left(\frac{1}{s}\right)\overset{(14.9)}{=}-\frac{1}{s^2}\frac{\ln\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}-1}=\frac{\ln s}{s-s^2}. \tag{14.10}$$

则

$$\left(f(s)+f\left(\frac{1}{s}\right)\right)' \overset{(14.9),(14.10)}{=} \frac{\ln s}{s}. \tag{14.11}$$

又

$$f(1)=\int_0^1 \frac{\ln s}{s-1}ds=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \ln s\cdot s^n ds=\frac{\pi^2}{6},$$

于是我们积分(14.11)就得到(14.8).

14.2.4 利用特殊函数

来看一个复旦大学英才班填空题.

例题 14.25 计算 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^8)^2}dx$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^8)^2}dx&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}ye^{-(1+x^8)y}dydx=\int_0^{\infty}ye^{-y}dy\int_0^{\infty}e^{-x^8y}dx\\&\overset{x=y^{-\frac{1}{8}}z^{\frac{1}{8}}}{=}\int_0^{\infty}ye^{-y}dy\int_0^{\infty}y^{-\frac{1}{8}}e^{-z}dz^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}\int_0^{\infty}y^{\frac{7}{8}}e^{-y}dy\int_0^{\infty}z^{-\frac{7}{8}}e^{-z}dz\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{8}=\frac{\frac{7}{8}\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{8}\overset{\text{余元公式}}{=}\frac{7\pi}{64\sin\frac{\pi}{8}}=\frac{7\pi}{32\sqrt{2-\sqrt{2}}}.\end{aligned}$$

例题 14.26 证明

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{t}(1+t)}dt=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}},p>1.$$

证明 回忆 β 函数定义

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\overset{x=\frac{1}{t+1}}{=}\int_0^{\infty}\frac{t^{b-1}}{(t+1)^{a+b}}dt\quad,a,b>0,$$

和恒等式 $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. 我们可取 $1-b=\frac{1}{p},a+b=1$, 则

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{t}(1+t)}dt=\beta\left(\frac{1}{p},1-\frac{1}{p}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

例题 14.27 对 $n>m>0$, 计算

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx.$$

证明 注意到 β 函数定义

$$\begin{aligned}\beta(a,b)&=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\overset{x=\frac{1}{1+y^n}}{=}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y^n)^{a-1}}\left(\frac{y^n}{1+y^n}\right)^{b-1}\frac{ny^{n-1}}{(1+y^n)^2}dy\\&=\int_0^{\infty}\frac{ny^{n(b-1)+n-1}}{(1+y^n)^{a+b}}dy.\end{aligned}$$

取 $a+b=1,n(b-1)+n=m$, 即 $a=1-\frac{m}{n},b=\frac{m}{n}$, 我们就有

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\frac{1}{n}\beta\left(1-\frac{m}{n},\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\overset{\text{余元公式}}{=}\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

14.2.5 级数展开方法

级数展开方法往最为深刻, 所以考察的几率较低, 实际考试中如果时间充裕, 需要对换序进行说明, 否则可以略去换序理由.

为了换序 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx$, 我们需要

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx.$$

有限和随意交换, 我们需要

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx,$$

于是需要

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\sum_{n=m+1}^{\infty}f_n(x)\,dx=0. \tag{14.12}$$

例题 14.28 计算

1. $\int_0^{\infty}\frac{x}{1+e^x}dx$.
2. $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$.
3. $\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\,dx$.
4. $\int_0^1\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x}dx$.

笔记 我们仅仅对两个例子进行换序证明, 其余是类似的.

证明

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+e^x}dx&=\int_0^{\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\infty}x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}dx\\&\overset{\text{换序}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty}xe^{-(n+1)x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

为了换序可以过去, 由(14.12)我们需要证明

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\infty}x\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}dx=0. \tag{14.13}$$

注意到交错级数不等式18.4, 我们有

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}\right|\leqslant e^{-(m+1)x},$$

于是

$$\begin{aligned}0=\lim_{m\to\infty}\left|\int_0^{\infty}x\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}dx\right|&\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_0^{\infty}x\left|\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)x}\right|dx\\&\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(m+1)x}dx=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(m+1)^2}=0,\end{aligned}$$

这就证明了(14.13).

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}dx&=\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx+\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{1-x^2}dx\\&\overset{\text{倒代换}}{=}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx+\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx\\&=2\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x dx\\&\overset{x=e^{-y}}{=}-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(2n+1)y}ydy=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\&=-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\,dx&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n\ln x dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}ye^{-(n+1)y}dy\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\\&=2-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

4. 事实上

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+x+x^2)}{x}dx&=\int_0^1\frac{\ln(1-x^3)}{x}dx-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx\\&=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\ln(1-x^3)}{x^3}dx^3-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx\\&=-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=\frac{2}{3}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx\\&=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{9}.\end{aligned}$$

再来看一个换序的例子.

例题 14.29 设 $0<p<1$, 证明:

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}. \tag{14.14}$$

证明 注意到

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+p-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p},$$

于是只需证明上述换序合理, 即验证换序的要求(14.12).

注意到

$$\left|\int_0^1\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\right|\mathrm{d}x\overset{\text{交错级数不等式18.4}}{\leqslant}\int_0^1 x^{m+p}\mathrm{d}x=\frac{1}{m+p+1},$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\mathrm{d}x=0.$$

我们完成了证明.

积分化和是经典方法.

例题 14.30 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left\lfloor\frac{2n}{i}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx&=\int_1^\infty\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_j^{j+\frac12}\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx+\int_{j+\frac12}^{j+1}\frac{[2x]-2[x]}{x^2}dx\right)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_j^{j+\frac12}\frac{2j-2j}{x^2}dx+\int_{j+\frac12}^{j+1}\frac{2j+1-2j}{x^2}dx\right)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{j+\frac12}^{j+1}\frac{1}{x^2}dx\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j+\frac12}-\frac{1}{j+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{2j+1}-\frac{1}{j+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}2\left(H_{2n+1}-1-\frac12H_n\right)-H_n+1\\&\overset{\text{欧拉常数8.6},H_n=\gamma+\ln n+o(1)}{=}2\ln2-1\end{aligned}$$

例题 14.31 对 $a>0$, 计算

$$\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{a}{x}\right\rfloor-a\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)\mathrm{d}x.$$

笔记 为了可以把两个积分分别拆开换元, 我们需要保证拆开之后的收敛性, 所以要换成对应的小数部分.

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{a}{x}\right\rfloor-a\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{a}{x}-\left\{\frac{a}{x}\right\}-\frac{a}{x}+a\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\mathrm{d}x\\&=a\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x-\int_0^1\left\{\frac{a}{x}\right\}\mathrm{d}x=a\int_1^\infty\frac{\{x\}}{x^2}\mathrm{d}x-a\int_a^\infty\frac{\{x\}}{x^2}\mathrm{d}x\\&=a\int_1^a\frac{\{x\}}{x^2}\mathrm{d}x=a\int_1^a\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}a\int_1^a\frac{1}{x}\mathrm{d}x, & a\leqslant1\\ a\sum\limits_{k=1}^{\lfloor a\rfloor-1}\int_k^{k+1}\frac{x-k}{x^2}\mathrm{d}x+a\int_{\lfloor a\rfloor}^a\frac{x-\lfloor a\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x, & a>1\end{cases}\\&=\begin{cases}a\ln a, & a\leqslant1\\ a\sum\limits_{k=1}^{\lfloor a\rfloor-1}\left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}\right)+a\ln\frac{a}{\lfloor a\rfloor}+\lfloor a\rfloor-a, & a>1\end{cases}\\&=\begin{cases}a\ln a, & a\leqslant1\\ -a\sum\limits_{k=1}^{\lfloor a\rfloor-1}\frac{1}{k+1}+a\ln\lfloor a\rfloor+a\ln\frac{a}{\lfloor a\rfloor}+\lfloor a\rfloor-a, & a>1\end{cases}\\&=\begin{cases}a\ln a, & a\leqslant1\\ -a\sum\limits_{k=1}^{\lfloor a\rfloor}\frac{1}{k}+a\ln a+\lfloor a\rfloor, & a>1\end{cases}.\end{aligned}$$

我们来看一个在定理9.4证明中遗留的算积分的例子.

例题 14.32 计算积分

$$\int_1^{\infty} \frac{b_1(x)}{x}dx = \int_1^{\infty} \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x}dx.$$

证明 回忆 $b_1(x) = x-[x]-\frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{b_1(x)}{x}dx &= \int_1^{\infty} \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x}dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{x-k-\frac{1}{2}}{x}dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k+1)\ln\frac{k}{k+1}+2\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(2k+1)\ln k-(2k+1)\ln(k+1)+2\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(2k-1)\ln k-(2k+1)\ln(k+1)+2+2\ln k\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[-(2n+1)\ln(n+1)+2n+2\ln n!\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{(n!)^2 e^{2n}}{(n+1)^{2n+1}}\right] \overset{\text{Stirling9.4}}{=} \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}e^{2n}}{(n+1)^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2\pi n^{2n+1}}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{\ln(2\pi)}{2}-1.
\end{aligned}$$

积累经典求和公式在本章非常重要, 例如

命题 14.1

计算

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n}, |q|\leqslant 1.$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n}, |q|\leqslant 1$[a].
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n!}, |q|\leqslant 1, x\in\mathbb{R}.$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n!}, |q|\leqslant 1, x\in\mathbb{R}.$

[a] 当然级数可能发散.

笔记 在 $\mathbb{C}$ 上,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k\in\mathbb{Z}. \tag{14.15}$$

我们定义主值支

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \tag{14.16}$$

本部分内容无需记忆, 只需要大概有个可以算的感觉即可, 实际做题中可以围绕这种级数给出构造.

证明

1. 利用欧拉公式有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n} &= \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n e^{inx}}{n}\right) = \Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(qe^{ix}\right)^n}{n}\right) = \Im\left(-\ln\left(1-qe^{ix}\right)\right) \\
&= -\Im\left(\ln\left|1-qe^{ix}\right| + i\arctan\frac{-q\sin x}{1-q\cos x}\right) = \arctan\frac{q\sin x}{1-q\cos x}.
\end{aligned}$$

2. 利用欧拉公式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n}=-\Re\left(\ln\left|1-qe^{ix}\right|+i\arctan\frac{-q\sin x}{1-q\cos x}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left[(1-q\cos x)^2+q^2\sin^2 x\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left(1+q^2-2q\cos x\right).$$

3. 利用欧拉公式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos(nx)}{n!}=\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(qe^{ix}\right)^n}{n!}\right)=\Re\left(e^{qe^{ix}}-1\right)=\Re\left(e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1+ie^{q\cos x}\sin(q\sin x)\right)$$
$$=e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1.$$

4. 利用 3 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin(nx)}{n!}=\Im\left(e^{q\cos x}\cos(q\sin x)-1+ie^{q\cos x}\sin(q\sin x)\right)$$
$$=e^{q\cos x}\sin(q\sin x).$$

例题 14.33 计算

1. $\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx$.
2. $\int_0^{\pi}\frac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2}dx,|q|\neq 1$.
3. 计算 $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx,a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$.

证明 运用14.1, 我们都采用级数展开的方法.

1. 事实上

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx=\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n!}dx=2\pi.$$

2. 当 $|q|>1$, 我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2}dx=\frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{q^n}dx=\frac{\pi}{q}.$$

当 $|q|<1$, 我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2}dx=\frac{1}{q}\int_0^{\pi}\frac{1-\frac{1}{q}\cos x}{\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}\cos x+1}dx$$
$$=\frac{1}{q}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\frac{1}{q}\cos x}{\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}\cos x+1}-1+1\right)dx=\frac{1}{q}\int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{1}{q}\cos x-\frac{1}{q^2}}{\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}\cos x+1}+1\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{q}-\frac{1}{q^2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{1}{q}-\cos x}{\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}\cos x+1}\right)dx\overset{\text{第一问结论}}{=}\frac{\pi}{q}-\frac{q\pi}{q^2}=0.$$

3. 当 $a\in(0,1)$, 我们有

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx=\int_0^{\pi}\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos(nx)}{n}\right)dx=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx=0.$$

当 $a\in(1,+\infty)$, 我们有

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx=\pi\ln a^2+\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2\cos x}{a}+1\right)dx\overset{\text{用}a\in(0,1)\text{的结论}}{=}2\pi\ln a.$$

例题 14.34 计算 $\int_0^{\infty}e^{-x}\left|\sin x\right|dx$.

证明

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}e^{-(x+n\pi)}\left|\sin x\right|dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x dx=\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}-2}.$$

我们来看一个相对深刻的例子.

例题 14.35♠ 对 $k>0, w\in\mathbb{R}$, 计算 $\int_0^\infty \frac{\cos wx}{e^{kx}+e^{-kx}}dx$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{e^{kx}+e^{-kx}}dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-kx}\cos wx}{1+e^{-2kx}}dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \left(-e^{-2kx}\right)^n e^{-kx}\cos(wx)\,dx\\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-(2n+1)kx}\cos(wx)\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-(2n+1)kx}\Re e^{iwx}dx\\ &= \Re\left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-[(2n+1)k-iw]x}dx\right) = \Re\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)k-iw}\right)\\ &= \Re\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n[(2n+1)k+iw]}{(2n+1)^2k^2+w^2}\right) = k\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2k^2+w^2}\right),\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}k\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2k^2+w^2}\right) &= k\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(-2n+1)}{(-2n+1)^2k^2+w^2}\right)\\ &= -k\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(2n-1)}{(2n-1)^2k^2+w^2}\right) = k\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2k^2+w^2}\right),\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{e^{kx}+e^{-kx}}dx &= \frac{k}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2k^2+w^2}\right)\\ &\overset{\text{留数计算级数18.3}}{=} -\frac{k\pi}{2}\mathrm{Res}_{z=\frac{wi-k}{2k}}\frac{(2z+1)\csc(\pi z)}{(2z+1)^2k^2+w^2} - \frac{k\pi}{2}\mathrm{Res}_{z=-\frac{wi+k}{2k}}\frac{(2z+1)\csc(\pi z)}{(2z+1)^2k^2+w^2}\\ &= -\frac{k\pi}{2}\lim_{z\to\frac{wi-k}{2k}}\left(z-\frac{wi-k}{2k}\right)\frac{(2z+1)\csc(\pi z)}{(2z+1)^2k^2+w^2} - \frac{k\pi}{2}\lim_{z\to-\frac{wi+k}{2k}}\frac{(2z+1)\csc(\pi z)}{(2z+1)^2k^2+w^2}\\ &= -\frac{k\pi}{2}\lim_{z\to\frac{wi-k}{2k}}\left(z-\frac{wi-k}{2k}\right)\frac{(2z+1)\csc(\pi z)}{4k^2\left(z+\frac{wi+k}{2k}\right)} - \frac{k\pi}{2}\lim_{z\to-\frac{wi+k}{2k}}\frac{(2z+1)\csc(\pi z)}{4k^2\left(z-\frac{wi-k}{2k}\right)}\\ &= \frac{\pi}{4k\operatorname{sech}\frac{\pi w}{2k}}.\end{aligned}$$

定理 14.3 (罗巴切夫斯基积分 ♠)

若 $f\in R[0,\pi]$ 是周期 π 的偶函数. 则对整数 $n\geqslant m\geqslant 1$ 且 m,n 奇偶性相同, 有

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin^n x}{x^m}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^n x g_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

这里

$$g_m(x) = \begin{cases}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{\sin x}\right), & n\text{为奇数}\\ \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{\tan x}\right), & n\text{为偶数}\end{cases}.$$

♡

证明 回忆有理分式展开18.2, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right);\\ \frac{1}{\tan x} &= \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right),\end{aligned}\qquad x\in(0,\pi).$$

于是

$$g_m(x) = \frac{1}{x^m}+\sum_{k=1}^\infty (-1)^{nk}\left(\frac{1}{(x+k\pi)^m}+\frac{1}{(x-k\pi)^m}\right).$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin^n x}{x^m}\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{\sin^n x}{x^m}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{k\pi} f(x)\frac{\sin^n x}{x^m}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+k\pi)\frac{(-1)^{nk}\sin^n x}{(x+k\pi)^m}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+k\pi)\frac{(-1)^{nk}\sin^n x}{(x+k\pi)^m}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{(-1)^{nk}\sin^n x}{(x+k\pi)^m}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\frac{(-1)^{nk}\sin^n x}{(x+k\pi)^m}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{(-1)^{nk}\sin^n x}{(x+k\pi)^m}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\frac{(-1)^{nk+n}\sin^n x}{(-x+k\pi)^m}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{(-1)^{nk}\sin^n x}{(x+k\pi)^m}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\frac{(-1)^{nk+n+m}\sin^n x}{(x-k\pi)^m}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^n x\left[\frac{1}{x^m}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{nk}\left(\frac{1}{(x+k\pi)^m}+\frac{1}{(x-k\pi)^m}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^n x g_m(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

14.2.6 杂例

例题 14.36 计算积分

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx, a, b>0.$$

证明 **Step 1** $a=1$ 的情况, 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-y^2-\frac{b}{y^2}}dy &= e^{-2\sqrt{b}}\int_0^{\infty} e^{-\left(y-\frac{\sqrt{b}}{y}\right)^2}dy \overset{\text{类似倒代换}}{=} e^{-2\sqrt{b}}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{b}}{y^2}e^{-\left(y-\frac{\sqrt{b}}{y}\right)^2}dy\\ &\overset{\text{相加除以 2}}{=} \frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{\sqrt{b}}{y^2}\right)e^{-\left(\frac{\sqrt{b}}{y}-y\right)^2}dy = \frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\sqrt{b}}{y}-y\right)^2}d\left(y-\frac{\sqrt{b}}{y}\right)\\ &= \frac{e^{-2\sqrt{b}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{b}}.\end{aligned}$$

Step 2 一般情况即

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{ab}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

例题 14.37 对 $x>0$, 计算 $\int_0^{\infty} e^{-xt^2}\cos t dt$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-xt^2}\cos t dt &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt^2}\cos t dt = \frac{1}{2}\Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt^2+it}dt\\ &\overset{t=\frac{y}{\sqrt{x}}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}}\Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2+\frac{i}{\sqrt{x}}y}dy = \frac{e^{-\frac{1}{4x}}}{2\sqrt{x}}\Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{i}{2\sqrt{x}}\right)^2}dy\\ &= \frac{e^{-\frac{1}{4x}}}{2\sqrt{x}}\Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{-\frac{1}{4x}}.\end{aligned}$$

例题 14.38 经典积分例子 计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(a^2+b^2x^2\right)}{1+x^2}dx.$$

证明 注意到

$$f(t)=\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+tx^2\right)}{1+x^2}dx,f'(t)=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\left(1+tx^2\right)}dx=\frac{\pi}{2t+2\sqrt{t}},t>0,$$

这里第二个积分是有理函数的积分, 即可以分解为

$$\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\left(1+tx^2\right)}=\frac{1}{(1-t)\left(tx^2+1\right)}+\frac{1}{(t-1)\left(x^2+1\right)}.$$

来自因此我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(a^2+b^2x^2\right)}{1+x^2}dx&=\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(a^2\right)}{1+x^2}dx+\int_0^{\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2x^2\right)}{1+x^2}dx\\&=\pi\ln|a|+f\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\\&=\pi\ln|a|+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{b^2}{a^2}}\frac{1}{t+\sqrt{t}}dt\\&=\pi\ln|a|+\pi\ln\left(1+\frac{|b|}{|a|}\right)\\&=\pi\ln\left(|a|+|b|\right).\end{aligned}$$

例题 14.39

1. 设 $1<s<2,a\geqslant 0$, 计算 $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x^s}dx$.
2. 设 $0<s<1,a\geqslant 0$, 计算 $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^s}dx$.

证明

1. 不妨设 $a>0$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x^s}dx&=a^{s-1}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^s}dx=\frac{a^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\sin xdx\int_0^{\infty}e^{-xy}y^{s-1}dy=\frac{a^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}y^{s-1}\int_0^{\infty}\sin xe^{-xy}dxdy\\&=\frac{a^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{y^{s-1}}{1+y^2}dy=\frac{a^{s-1}}{2\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{z^{\frac{s}{2}-1}}{1+z}dz=\frac{a^{s-1}}{2\Gamma(s)}\beta\left(\frac{s}{2},1-\frac{s}{2}\right)=\frac{a^{s-1}\pi}{2\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}},\end{aligned}$$

   这里最后一个等号可通过如下操作并对比指数得到:

$$\beta(p,q)=\int_0^1t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{z}{z+1}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{q-1}d\frac{z}{z+1}.$$

   现在运用余元公式我们知道

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x^s}dx=a^{s-1}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s),1<s<2,a\geqslant 0.$$

2. 和 sin 一样, 我们有

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^s}dx=\frac{a^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}y^{s-1}\int_0^{\infty}\cos xe^{-xy}dxdy=\frac{a^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{y^s}{1+y^2}dy=\frac{a^{s-1}\pi}{2\Gamma(s)\sin\frac{\pi(s+1)}{2}}.$$

例题 14.40 设 $1<s<3,a,b>0$, 计算 $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cdot\sin bx}{x^s}dx$.

证明 不妨设 $a\geqslant b$, 事实上, 运用积化和差公式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x^s}dx&=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left[(a+b)x\right]-1}{x^s}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\left[(a-b)x\right]}{x^s}dx\\&=-\frac{1}{2(1-s)}\int_0^{\infty}\left(\cos\left[(a+b)x\right]-1\right)dx^{1-s}-\frac{1}{2(1-s)}\int_0^{\infty}\left(1-\cos\left[(a-b)x\right]\right)dx^{1-s}\\&=-\frac{a+b}{2(1-s)}\int_0^{\infty}x^{1-s}\sin\left[(a+b)x\right]dx+\frac{a-b}{2(1-s)}\int_0^{\infty}x^{1-s}\sin\left[(a-b)x\right]dx\\&=\left[\frac{(a+b)^{s-1}}{2(s-1)}-\frac{(a-b)^{s-1}}{2(s-1)}\right]\cos\frac{\pi(s-1)}{2}\Gamma(2-s),\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自例14.39. 因此就有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cdot\sin bx}{x^s}dx=\left[\frac{(a+b)^{s-1}}{2(s-1)}-\frac{|a-b|^{s-1}}{2(s-1)}\right]\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(2-s),1<s<3,a,b>0.$$

例题 14.41 对整数 $1\leqslant m\leqslant n$ 和 $p\in\mathbb{R}$, 证明

$$\sum_{i=m}^{n}C_n^ip^i(1-p)^{n-i}=mC_n^m\int_0^p t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt.$$

证明 注意到要证等式左右都是关于 p 的多项式且 $p=0$ 都是左右的 m 重根. 两边对 p 求导得只需证明

$$\sum_{i=m}^{n}iC_n^ip^{i-1}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=m}^{n}(n-i)C_n^ip^i(1-p)^{n-i-1}=mC_n^mp^{m-1}(1-p)^{n-m}. \tag{14.17}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=m}^{n}iC_n^ip^{i-1}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=m}^{n}(n-i)C_n^ip^i(1-p)^{n-i-1}\\&=\sum_{i=m}^{n}\frac{n!}{(n-i)!(i-1)!}p^{i-1}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=m}^{n-1}\frac{n!}{i!(n-i-1)!}p^i(1-p)^{n-i-1}\\&\overset{\text{裂项求和了}}{=}\frac{n!}{(n-m)!(m-1)!}p^{m-1}(1-p)^{n-m}+\frac{n!}{(n-n)!(n-1)!}p^{n-1}-\frac{n!}{(n-1)!}p^{n-1}\\&=mC_n^mp^{m-1}(1-p)^{n-m},\end{aligned}$$

于是我们就得到了(14.17). 这就完成了证明.

来看我当年考研的数分真题.

例题 14.42 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^5x\arctan e^xdx$.

证明 直接计算有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^5x\arctan e^xdx\overset{\text{区间再现}}{=}\frac12\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^5x\left[\arctan e^x+\arctan e^{-x}\right]dx\\&\overset{\arctan\text{恒等式}}{=}\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^5xdx\overset{\text{偶函数}}{=}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}x\sin^5xdx\overset{\text{区间再现}}{=}\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x+x)\sin^5xdx\\&=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5xdx\overset{\text{课本积分表基本公式}}{=}\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{4!!}{5!!}=\frac{4\pi^2}{15}.\end{aligned}$$

例题 14.43 计算 $\int_0^{\frac12}\frac{\ln x}{1-x}dx$.

证明 定义多重对数函数 $\mathrm{Li}_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},x\in[-1,1]$. 我们断言有恒等式[2]

$$\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\cdot\ln(1-x),x\in(0,1). \tag{14.18}$$

在等式(14.18)中取 $x=\frac12$, 我们有 $\mathrm{Li}_2\left(\frac12\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^22}{2}$. 于是

$$\int_0^{\frac12}\frac{\ln x}{1-x}dx=\int_{\frac12}^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n\int_{\frac12}^1x^{n-1}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nn^2}=-\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^22}{2}.$$

下面求导证明(14.18).

事实上设 $f(x)\triangleq\mathrm{Li}_2(x)$, 并记

$$F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x),$$

则

$$F'(x)=-\frac1x\ln(1-x)+\frac{\ln x}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=0.$$

[2]第一次肯定不知道, 积累.

故

$$F(x)=F(1)=\frac{\pi^2}{6}.$$

例题 14.44 设

$$K_v(x)\triangleq\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^{v-1}\mathrm{d}t,x>0,v>-\frac{1}{2},$$

证明

$$\int_0^{\infty}e^{-\left(at+\frac{b}{t}\right)}t^{v-1}\mathrm{d}t=2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{v}{2}}K_v\left(2\sqrt{ab}\right),\forall a,b>0, \tag{14.19}$$

证明 由

$$\int_0^{\infty}e^{-\left(at+\frac{b}{t}\right)}t^{v-1}\mathrm{d}t\overset{t=\sqrt{\frac{b}{a}}s}{=}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{v}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{ab}\left(s+\frac{1}{s}\right)}s^{v-1}\mathrm{d}s,$$

就得到了恒等式(14.19).

例题 14.45 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足

$$f^3(x)+xf(x)=8.$$

求 $\int_0^7 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

笔记 因为题目条件都关于 f, 所以我们最好转化为积分变量为 f^{-1} 的积分. 为了验证 f 具备可积性, 我们直接验证了 f 具备光滑性喔.

证明 首先对 $x\geqslant 0,t^3+xt$ 关于 t 严格递增, 所以 f 唯一确定. 容易看到 f 严格递减, 从而 f^{-1} 存在.

注意

$$\begin{cases}f^3(0)+0\cdot f(0)=8 & \Rightarrow f(0)=2;\\ f^3(7)+7\cdot f(7)=8 & \Rightarrow f(7)=1,\end{cases}$$

以及

$$\frac{\partial\left(t^3+xt\right)}{\partial t}|=3t^2+x>0,\forall x>0,\frac{\partial\left(t^3+xt\right)}{\partial t}|_{(2,0)}=12>0,$$

即由隐函数定理得 $f\in C^{\infty}[0,+\infty),f^{-1}\in C^{\infty}(0,2]$.

注意到

$$y^3+f^{-1}(y)\cdot y=8\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{8-y^3}{y},$$

我们有

$$\int_0^7 f^2(x)\,\mathrm{d}x\overset{x=f^{-1}(y)}{=}\int_2^1 y^2\mathrm{d}f^{-1}(y)=\int_2^1 y^2\mathrm{d}\frac{8-y^3}{y}=\int_2^1\left(-2y^3-8\right)\mathrm{d}y=\frac{31}{2}.$$

例题 14.46 计算

$$\int_0^{\frac{7}{2}}\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\cdots}}}}}\mathrm{d}x.$$

笔记 要注意验证极限函数的可积性, 否则极限函数都不能做积分喔!

证明 设

$$x_1=\sqrt{x},x_{n+1}=\sqrt{x+\frac{1}{x_n}},n\in\mathbb{N}.$$

注意 $g(a)=a^2-\frac{1}{a}$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增且值域为 $\mathbb{R}$. 又 $g(1)=0$, 所以对每一个 $x\geqslant 0$, 存在唯一的 $a_x\geqslant 1$ 使得 $a^2=x+\frac{1}{a}$. a_x 作为 g 的反函数当然是严格递增的.

注意到

$$t-\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}=\frac{t^2-x-\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}{t+\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}}=\frac{\left(t^2-x\right)^2-\frac{1}{x+\frac{1}{t}}}{\left(t+\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}\right)\left(t^2-x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{t}}}}\right)}$$

$$=\frac{(tx+1)\left(t^2-x\right)^2-t}{\left(t+\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}\right)\left(t^2-x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}\right)(tx+1)}=\frac{\left(t^3-tx-1\right)\left(t^2x+t-x^2\right)}{\left(t+\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}\right)\left(t^2-x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}\right)(tx+1)},$$

我们有

$$t=\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{t}}}}\Leftrightarrow\left(t^3-tx-1\right)\left(t^2x+t-x^2\right)=0,t>\sqrt{x}.$$

又

$$t^2x+t-x^2>\left(\sqrt{x}\right)^2\cdot x+\sqrt{x}-x^2=\sqrt{x}>0,\forall t>\sqrt{x},$$

即我们有 $t^3-xt-1=0\Rightarrow t=a_x$.

现在考虑递减递推函数 $f(y)=\sqrt{x+\frac{1}{y}}$, 注意到 $\left(\sqrt{x}\right)^3-\sqrt{x}x-1=-1<0$, 我们知道 $x_1=\sqrt{x}<a_x$ 且

$$x_3=f\left(f\left(x_1\right)\right)=f\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)>\sqrt{x}=x_1,$$

于是由递减递推数列的结论8.4.1知 $\{x_{2n-1}\}$ 递增有上界 a_x, $\{x_{2n}\}$ 递减有下界 a_x. 因此

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=f\circ f\text{的唯一不动点}=a_x.$$

由命题7.4我们知道

$$\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\cdots}}}}}=\lim_{n\to\infty}x_n=a_x.$$

因为 $a_x^3=xa_x-1$, 我们有

$$\frac{\partial\left(t^3-tx-1\right)}{\partial t}|_{(x,a_x)}=3t^2-x=3a_x^2-x=2a_x^2-\frac{1}{a_x}\geqslant 2-1>0,$$

即由隐函数定理知道

$$a_x\in C^\infty[0,+\infty).$$

现在

$$\int_0^{\frac{7}{2}}\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x+\cdots}}}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{7}{2}}a_x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{7}{2}}a_x\mathrm{d}\left(a_x^2-\frac{1}{a_x}\right)$$

$$=\int_{a_0}^{a_{\frac{7}{2}}}t\mathrm{d}\left(t^2-\frac{1}{t}\right)=\int_1^2t\left(2t+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\ln 2+\frac{14}{3}.$$

来看又一种用复变函数解积分的技巧.

例题 14.47♠ 若实数 a,b 不全为 0, 计算

$$\int_0^\pi\ln\left|a^2+b^2-2ab\cos x\right|\mathrm{d}x.$$

证明 记 $f(z)\triangleq\ln(az-b)$, 首先

$$\int_0^\pi\ln\left|a^2+b^2-2ab\cos x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi\ln\left|a^2+b^2-2ab\cos x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left|a^2+b^2-2ab\cos x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\Re f\left(e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta.$$

当 $b<-|a|$, f 在单位圆内解析, 所以

$$\int_0^{2\pi}\Re f\left(e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta=2\pi f\left(0\right)=2\pi\ln|b|.$$

现在就有

$$\int_0^{\pi}\ln\left|a^2+b^2-2ab\cos x\right|\mathrm{d}x=2\pi\ln|b|. \tag{14.20}$$

注意到若 $b>|a|$, 则把(14.20)的 b 改为 $-b$, a 改为 $-a$, 此时仍有(14.20)成立. 于是(14.20)对 $|b|>|a|$ 都成立. 对称的, 我们有

$$\int_0^{\pi}\ln\left|a^2+b^2-2ab\cos x\right|\mathrm{d}x=2\pi\ln\max\left\{|a|,|b|\right\}.$$

例题 14.48 对 $a\in[0,1]$, 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left|\sin^2x-a^2\right|\mathrm{d}x.$$

证明 设 $\theta\triangleq\arcsin a$, 我们利用式(9.61)有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left|\sin^2x-a^2\right|\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left|\sin^2x-\sin^2\theta\right|\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\left|\sin\left(x-\theta\right)\cdot\sin\left(x+\theta\right)\right|\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\ln\left|\sin\left(x-\theta\right)\right|+\ln\left|\sin\left(x+\theta\right)\right|\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\ln\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=-\pi\ln2,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自例题14.14, 消去 θ 的步骤来自于周期函数在一个周期内积分都相等.

例题 14.49 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},n=1,2,\cdots.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}C_n^k\int_0^1x^{k-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}C_n^kx^{k-1}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1-\left(1-x\right)^n}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-x\right)^j\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1x^j\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1},\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 14.50 设 f 为 n 次多项式且

$$\int_0^1x^kf\left(x\right)\mathrm{d}x=0,k=1,2,\cdots,n.$$

证明:

$$\int_0^1\left|f\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x=\left(\left(n+1\right)\int_0^1f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明 设

$$f\left(x\right)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j,a_n\neq0,$$

则

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{j=0}^n a_j x^j f(x) \mathrm{d}x = a_0 \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x;$$

$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{j=0}^n a_j x^j \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1}.$$

于是题目等式等价于

$$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} = \frac{a_0}{(n+1)^2}.$$

我们还有

$$0 = \int_0^1 x^k f(x) \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^n a_j \int_0^1 x^{k+j} \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{k+j+1}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

注意到

$$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{x+j+1} = \frac{p(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)},$$

这里 p 是不超过 n 次多项式且有 n 个根 $1, 2, \cdots, n$. 于是我们知道

$$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{x+j+1} = \frac{c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}.$$

现在

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x\to -1}(x+1)\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{x+j+1} = \lim_{x\to -1} \frac{c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+2)\cdots(x+n+1)} \\ &= c\frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} = c(-1)^n (n+1), \end{aligned}$$

我们有

$$c = \frac{a_0 (-1)^n}{n+1}.$$

从而

$$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j+1} = \frac{a_0(-1)^n}{n+1} \frac{(0-1)(0-2)\cdots(0-n)}{(0+1)(0+2)\cdots(0+n+1)} = \frac{a_0}{(n+1)^2}.$$

这就完成了证明.

14.3 反常积分收敛性判别

14.3.1 抽象结果

结论 [积分收敛必有子列趋于 0] 设连续函数满足 $\int_0^\infty f(x)\,dx$ 收敛, 则

1. 存在趋于 $+\infty$ 的 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, +\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
2. 若 f 不一定连续, 但有 $\int_0^\infty |f(x)|\,dx < \infty$, 则存在严格递增的 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ln x_n f(x_n) = 0.$$

笔记 连续性是否可以去掉构成一个有趣的话题. 第一问结论可以直接用, 第二问主要告诉我们积分绝对收敛性, 我们总能找到很好的子列极限.

证明

1. 运用积分中值定理, 我们知道
$$\int_A^{A+1} f(x)\,dx = f(\theta(A)), A+1>\theta(A)>A.$$
由 Cauchy 收敛准则, 我们知道
$$0=\lim_{A\to+\infty}\int_A^{A+1} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty} f(\theta(A)),\lim_{A\to+\infty}\theta(A)=+\infty.$$
这就完成了证明.
2. 若 $|f(x)|>\frac{1}{x\ln x},\forall x>e$, 则因为 $\int_e^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=+\infty$, 我们知道这不可能. 故存在 $x_1>e$ 使得 $|f(x_1)|\leqslant\frac{1}{x_1\ln x_1}$.
同样的, 如果 $|f(x)|>\frac{1}{2x\ln x},\forall x>x_1+1$, 仍然有会有矛盾! 因此必然存在 $x_2>x_1+1$ 使得 $|f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2x_2\ln x_2}$. 依次下去我们得到
$$|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{nx_n\ln x_n},n=1,2,\cdots,$$
即
$$\lim_{n\to\infty} x_n\ln x_n\cdot|f(x_n)|=0.$$

例题 14.51 结论14.3.1的第 1 条去掉连续则命题不正确.

证明 例如考虑
$$f(x)=(-1)^k, x\in\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j},\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}\right).$$
对 $y\in[1,+\infty)$, 存在唯一的 $k\in\mathbb{N}$ 使得
$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\leqslant y<\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}.$$
于是
$$\begin{aligned}\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{i=2}^{k}\int_{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j}}^{\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=2}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}+(-1)^k\left(y-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right).\end{aligned}$$
注意到
$$\left|(-1)^k\left(y-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right)\right|\leqslant\frac{1}{k+1},$$
当 $y\to+\infty$, 我们有 $k\to+\infty$, 因此
$$\lim_{y\to+\infty}\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$
显然, f 没有收敛于 0 的子列.

例题 14.52

1. 已知无穷积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛且 f 单调, 证明
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$
2. 已知无穷积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛且 xf 单调, 证明
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0.$$

证明

- 不妨设 f 递减, 否则用 $-f$ 代替 f. 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 故 $f\geqslant 0$. 现在证明的想法就是利用 Cauchy 收敛准则来控制. 即

$$0\leqslant Af(A)\leqslant 2\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)\,dx, \forall A>0.$$

这给出了 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

- 不妨设 xf 递减, 否则用 $-f$ 代替 f. 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$, 现在

$$0\leqslant Af(A)\ln A=2Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{1}{x}dx\leqslant 2\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{xf(x)}{x}dx=2\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,dx, \forall A>1,$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0.$$

定理 14.4 (A-D 判别法)

若 f 满足下述两条件之一, 则有 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.

1. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛, g 在 $[a,+\infty)$ 单调有界;
2. $\int_a^{A} f(x)\,dx$ 在 $A\in[a,+\infty)$ 有界, g 在 $[a,+\infty)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

♡

笔记 只需记忆结论, 无需掌握证明.

证明 对于条件一: 设 $M=\sup g$, 对任何 $\epsilon>0$, 因为 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛, 所以存在 $A>0$, 使得对任何 $A_2>A_1>A$, 我们都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\epsilon.$$

由积分第二中值定理11.3, 对任何 $A_2>A_1>A$, 我们有

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx=g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx+g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx,$$

于是

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant\left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx\right|+\left|g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right|\leqslant 2M\epsilon,$$

故 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.

对于条件二: 记

$$M=\sup_{A\geqslant a}\left|\int_a^{A} f(x)\,dx\right|.$$

由积分第二中值定理, 对任何 $A_2>A_1>a$, 我们有

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx=g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx+g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx,$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right|&\leqslant\left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx+g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right|\\&\leqslant\left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx\right|+\left|g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right|\\&\leqslant\left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx\right|+\left|g(A_2)\int_{a}^{A_2} f(x)\,dx\right|+\left|g(A_2)\int_{a}^{\xi} f(x)\,dx\right|\\&\leqslant M|g(A_1)|+2M|g(A_2)|,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{A_1,A_2\to+\infty}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right|=0,$$

故 $\int_a^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ 收敛. 我们完成了证明.

显然有下述结论

命题 14.2

1. 绝对 + 绝对 = 绝对.
2. 绝对 + 条件 = 条件
3. 条件 + 条件 = 无法判断.

♠

例题 14.53 假设

$$f\in C[0,+\infty),f(x)>0,\int_0^{\infty}\frac{1}{f(x)}dx<\infty,$$

证明

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx=+\infty.$$

证明 由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\int_0^X f(x)\,dx\int_0^X\frac{1}{f(x)}dx\geqslant\left(\int_0^X\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2=X^2.$$

故

$$\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx\geqslant\frac{X}{\int_0^X\frac{1}{f(x)}dx},$$

这就给出了

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f(x)\,dx=+\infty.$$

例题 14.54 假设递增函数 $f:[1,+\infty)\to(e,+\infty)$ 满足

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{f(x)}dx=+\infty,\int_1^{\infty}\frac{1}{x\ln f(x)}dx=+\infty.\tag{14.21}$$

但可能有

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)}dx<\infty.$$

笔记 此类构造容易被考察, 需掌握. 本质上构造分段函数就转化成求和的情况.

证明 取 $f(x)=e^{e^{e^n}},e^{e^{e^{n-1}}}\leqslant x<e^{e^{e^n}},n\in\mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}\int_{e^e}^{\infty}\frac{1}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)}dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e^{e^{e^{n-1}}}}^{e^{e^{e^n}}}\frac{1}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e^{e^{e^{n-1}}}}^{e^{e^{e^n}}}\frac{1}{x\ln e^{e^{e^n}}\ln\ln e^{e^{e^n}}}dx,\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e^{e^{e^{n-1}}}}^{e^{e^{e^n}}}\frac{1}{xe^{e^n}\cdot e^n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln e^{e^{e^n}}-\ln e^{e^{e^{n-1}}}}{e^{n+e^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{e^n}-e^{e^{n-1}}}{e^{n+e^n}}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{e^n}}{e^{n+e^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}<\infty.\end{aligned}$$

例题 14.55♠ 设

$$f\in D[a,+\infty),\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty\text{且}f'\text{严格递增},$$

证明 $\int_0^{\infty}\sin f(x)\,dx$ 收敛.

证明 因为导函数没有第一类间断点[3]且单调函数没有第二类间断点[4] 于是我们知道 $f'\in C[a,+\infty)$.

由结论12.1, 我们知道 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 我们知道存在 $X>0$, 使得 f' 在 $[X,+\infty)$ 恒正且 f 在 $[X,+\infty)$ 上存在严格递增反函数 $g:[f(X),+\infty)\to[X,+\infty)$. 现在

$$\int_X^{\infty}\sin f(x)\,dx\overset{x=g(y)}{=}\int_{f(X)}^{\infty}g'(y)\cdot\sin f(g(y))\,dy=\int_{f(X)}^{\infty}\frac{1}{f'(g(y))}\cdot\sin y dy.$$

注意到

$$\left|\int_{f(X)}^{A}\sin y dy\right|\leqslant 2,\ \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{f'(g(y))}\text{递减到}0,$$

我们就由 A-D 判别法14.4证明了 $\int_0^{\infty}\sin f(x)\,dx$ 收敛.

例题 14.56 设 f 内闭可积且 $f(x)>0,x_0>0$. 若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+x_0)}{f(x)}=\ell\in[0,+\infty)\bigcup\{+\infty\},$$

我们就有

$$\int_a^{\infty}f(x)\,dx\text{是}\begin{cases}\text{收敛}, & \ell<1\\ \text{发散}, & \ell>1\end{cases}.$$

证明 非负积分无脑化和, 我们有

$$\int_a^{\infty}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

这里

$$a_n=\int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0}f(x)\,dx,n\in\mathbb{N}.$$

对任何 $\epsilon>0$, 当 n 充分大就有

$$\ell-\epsilon\leqslant\frac{f(x_0+x)}{f(x)}\leqslant\ell+\epsilon.$$

注意到

$$a_{n+1}=\int_{a+nx_0}^{a+(n+1)x_0}f(x)\,dx=\int_{a+(n-1)x_0}^{a+nx_0}f(x+x_0)\,dx\in[(\ell-\epsilon)a_n,(\ell+\epsilon)a_n],$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, 由级数的比值判别法即证.

例题 14.57 设 $f>0$ 内闭可积, 若有常数 $k>1$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(kx)}{f(x)}=\ell\in[0,+\infty)\bigcup\{+\infty\},$$

则

$$\int_a^{\infty}f(x)\,dx\text{是}\begin{cases}\text{收敛}, & \ell<\frac{1}{k}\\ \text{发散}, & \ell>\frac{1}{k}\end{cases}.$$

证明 注意到 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx=\int_{\ln a}^{\infty}f(e^t)e^tdt$, 因此

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f\left(e^{t+\ln k}\right)e^{t+\ln k}}{f(e^t)e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{kf(ke^t)e^t}{f(e^t)e^t}=k\ell,$$

[3]如果有的话, 会和导数介值定理矛盾!

[4]因为单调有界必有极限.

于是由例题14.56得证.

例题 14.58 设 $f>0$ 内闭可积, 若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p,$$

则

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx\begin{cases}\text{收敛}, & -\infty\leqslant p<-1\\ \text{发散} & -1<p\leqslant+\infty,\end{cases}. \tag{14.22}$$

证明 不妨设 $p\in\mathbb{R}$, 其余情况是类似的. 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $X>0$, 使得对任何 $x>X$ 都有

$$p-\epsilon\leqslant\frac{\ln f(x)}{\ln x}\leqslant p+\epsilon\Leftrightarrow x^{p-\epsilon}\leqslant f(x)\leqslant x^{p+\epsilon},$$

容易得到(14.22)成立.

笔记 若 $f>0$ 可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=p$, 那么从洛必达法则可知(14.22)成立.

例题 14.59 若 $f\in C^1[0,+\infty)$ 且 $f(0)>0, f'(x)>0$. 若 $\int_0^{\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}dx<\infty$, 证明 $\int_0^{\infty}\frac{1}{f(x)}dx<\infty$.

证明

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}dx-\int_0^{\infty}\frac{1}{f(x)}dx\right|\leqslant\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{f(x)+f'(x)}-\frac{1}{f(x)}\right|dx\\ &=\int_0^{\infty}\frac{f'(x)}{[f(x)+f'(x)]f(x)}dx\leqslant\int_0^{\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\frac{1}{f(x)}|_0^{\infty}=\frac{1}{f(0)}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)},\end{aligned}$$

这里最后极限存在来自于 f 单调递增. 我们完成了证明.

例题 14.60 设非负函数 $f\in C(\mathbb{R})$ 使得对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,dx\leqslant M$, 证明 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\leqslant M$.

笔记 **Method 2** 中限制到有界闭区间的目的是保证 $\int_a^b|x|f(x)\,dx$ 有意义.

证明 **Method 1** ♠ 由法图引理, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{k\to\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,dx\\ &\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,dx\leqslant M,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

Method 2 注意到

$$\int_a^b\left(1-\frac{|x|}{k}\right)f(x)\,dx\leqslant\int_a^b e^{-\frac{|x|}{k}}f(x)\,dx\leqslant M,\forall(a,b)\subset\mathbb{R},k\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M+\frac{1}{k}\int_a^b|x|f(x)\,dx,\forall(a,b)\subset\mathbb{R},k\in\mathbb{N}.$$

于是让 $k\to+\infty$, 我们有 $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M,\forall(a,b)\subset\mathbb{R}$, 由 a,b 任意性即可得 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\leqslant M$.

例题 14.61 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f'(x)|\leqslant M,\forall x\geqslant0,\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

证明 注意到

$$\int_0^{\infty}\left|f^2(x)f'(x)\right|dx\leqslant M\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty,$$

故

$$\int_0^{\infty} f^2(x) f'(x)\,dx = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} f^3(x) - \frac{1}{3}f^3(0) \text{ 存在.}$$

于是结合结论14.3.1知存在 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f^3(x_n) = 0$. 于是这就证明了

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} f^3(x) - \frac{1}{3}f^3(0) = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty} f^3(x_n) - \frac{1}{3}f^3(0) = -\frac{1}{3}f^3(0).$$

因此这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

例题 14.62 设 $f \in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \alpha > -1, \int_0^{\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt \text{收敛.}$$

证明:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t)\,dt = -\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt.$$

证明 自然的, 分部积分得

$$\int_0^{x} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt = f(x)\,x^{\alpha+1} - (\alpha+1)\int_0^{x} f(t)\,t^{\alpha}dt. \tag{14.23}$$

记 $F(x) = \int_0^x t^{\alpha} f(t)\,dt, G(x) = \int_0^x t^{\alpha+1} f'(t)\,dt$, 我们的目标是用 G 表示 F. 由(14.23), 我们知道

$$G(x) = x^{\alpha+1} f(x) - (\alpha+1)F(x) = xF'(x) - (\alpha+1)F(x),$$

即

$$\frac{G(x)}{x^{\alpha+2}} = \frac{xF'(x) - (\alpha+1)F(x)}{x^{\alpha+2}} = \left(\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\right)'.$$

注意到

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{F(z)}{z^{\alpha+1}} = \lim_{z\to+\infty}\frac{\int_0^z t^{\alpha} f(t)\,dt}{z^{\alpha+1}} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{z\to+\infty}\frac{z^{\alpha} f(z)}{(\alpha+1)z^{\alpha}} = 0,$$

由牛顿莱布尼兹公式即得

$$F(x) = -x^{\alpha+1}\int_x^{\infty}\frac{G(y)}{y^{\alpha+2}}dy, x \geqslant 0.$$

记

$$\ell = \int_0^{\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} G(x),$$

自然猜测

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}\int_x^{\infty}\frac{\ell}{y^{\alpha+2}}dy = -\frac{1}{\alpha+1}\ell. \tag{14.24}$$

于是对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $|G(y) - \ell| < \epsilon, \forall y > x_0$. 从而当 $x > x_0$, 我们有

$$\left|F(x) + \frac{\ell}{\alpha+1}\right| = \left|x^{\alpha+1}\int_x^{\infty}\frac{G(y)-\ell}{y^{\alpha+2}}dy\right| \leqslant x^{\alpha+1}\int_x^{\infty}\frac{\epsilon}{y^{\alpha+2}}dy = \frac{\epsilon}{\alpha+1},$$

这就证明了(14.24), 即

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt.$$

例题 14.63 设 $f \in D^2[0,+\infty)$ 且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty, \int_0^{\infty} |f''(x)|^2\,dx < \infty.$$

证明 $\int_0^{\infty} |f'(x)|^2\,dx < \infty$.

证明 **Method 1**

由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\int_0^{\infty}|f(x)f''(x)|\,dx\leqslant\sqrt{\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx\int_0^{\infty}|f''(x)|^2\,dx}<\infty.$$

于是 $\int_0^{\infty}f(x)f''(x)\,dx$ 收敛, 故

$$\int_0^{x}f(y)f''(y)\,dy=f(x)f'(x)-f(0)f'(0)-\int_0^{x}|f'(y)|^2\,dy$$

左右在 $x\to+\infty$ 存在.

要证明 $\int_0^{\infty}|f'(x)|^2\,dx<\infty$, 只需证明存在 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{x_n}|f'(x)|^2\,dx$ 存在. 这又等价于存在 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)f'(x_n)$ 存在.

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)f'(x)=\infty$, 则由零点定理, $f(y)f'(y)$ 不能存在又有趋于正无穷, 又有趋于负无穷的子列[5], 因此不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)f'(x)=+\infty$. 但是

$$2\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x}f(y)f'(y)\,dy=\lim_{x\to+\infty}\left[f^2(x)-f^2(0)\right]=+\infty,$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$. 这和结论14.3.1以及 $\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty$ 矛盾! 因此我们证明了存在 $x_n\to+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{x_n}|f'(x)|^2\,dx$ 存在, 从而给出了 $\int_0^{\infty}|f'(x)|^2\,dx<\infty$.

Method 2

首先 Cauchy 不等式16.1表明

$$\int_0^{\infty}|f(x)f''(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_0^{\infty}|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}<\infty.$$

分部积分得

$$\int_0^{x}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y=f(x)f'(x)-f(0)f'(0)-\int_0^{x}f(y)f''(y)\,\mathrm{d}y.$$

于是为了证明 f' 在 $[0,+\infty)$ 平方可积, 只需证明存在 $x_n\to+\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)f'(x_n)=0.\tag{14.25}$$

因为 $\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$, 所以由结论14.3.1知

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|^2\neq+\infty.$$

再由结论12.1知必有子列 $x_n\to+\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d\left[f^2(x)\right]}{dx}|_{x=x_n}=0,$$

这就得到了(14.25). 因此我们证明了 f' 在 $[0,+\infty)$ 平方可积.

14.3.2 具体积分判断

例题 14.64 判断如下积分收敛性.

1. $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$;
2. $\int_0^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,m,n\in\mathbb{N}$;
3. $\int_2^{\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^p\ln\frac{x+1}{x-1}dx$.

证明

1. (a). $x=0$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx\sim\frac{1}{\sqrt[3]{-2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx,$$

[5]否则有无穷多个零点而矛盾!

故收敛.

(b). $x=1$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)}}dx\sim\frac{1}{\sqrt[3]{-1}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left|1-x\right|^{\frac{2}{3}}}dx,$$

故收敛.

(c). $x=2$

$$\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)}}dx\sim\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{2}^{3}\frac{1}{\left(x-2\right)^{\frac{1}{3}}}dx,$$

故收敛.

(d). $x=+\infty$:

$$\int_{3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)}}dx\sim\int_{3}^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx,$$

故收敛.

综上所述, $\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛.

2. (a). $x=0$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}dx\sim\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{x^2}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}dx,\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<\frac{1}{n}\leqslant1,$$

收敛

(b). $x=1$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}dx\sim\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}dx,$$

熟知 ln 的积分应该是收敛的, 故收敛.

合起来自然原积分收敛.

3. 注意到

$$\int_2^\infty\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^p\ln\frac{x+1}{x-1}dx\sim\int_2^\infty\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^p\left(\frac{2}{x}\right)dx=C\int_2^\infty\frac{1}{x^{\frac{p}{2}+1}}dx,$$

故原积分收敛当且仅当 $p>0$.

例题 14.65 对 $a,b\in\mathbb{R}$, 判断 $\int_0^\infty\frac{\sin x^b}{x^a}dx$ 的收敛性和绝对收敛性.

证明 **Step 1** 收敛性:

1. $b=0$: 此时 $\int_0^\infty\frac{\sin x^b}{x^a}dx=\int_0^\infty\frac{\sin1}{x^a}dx$ 发散.
2. $b\neq0$: 换元得

$$\int_0^\infty\frac{\sin x^b}{x^a}dx\overset{\text{我们更喜欢 sin 里面是一次的}}{=}\frac{1}{|b|}\int_0^\infty\frac{\sin y}{y^{\frac{a}{b}}}y^{\frac{1}{b}-1}dy=\frac{1}{|b|}\int_0^\infty\frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}dy.\tag{14.26}$$

(a). $x=0$: 注意到 $\frac{\sin y}{y^{\frac{a-1}{b}+1}}\sim\frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}}}$, 故对 0 这个瑕点来说, 原积分收敛当且仅当 $\frac{a-1}{b}<1$.

(b). $x=+\infty$: 显然, 当 $\frac{a-1}{b}+1\leqslant0$ 时积分会发散, 其实现的手段是 Cauchy 收敛准则[6].

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}x^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\sin xdx\right|=\int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}x^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\sin xdx\\&\geqslant\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\int_{\frac{\pi}{4}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\sin xdx=\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)^{-\left(\frac{a-1}{b}+1\right)}\to\begin{cases}\infty, & \frac{a-1}{b}+1<0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{a-1}{b}+1=0\end{cases},n\to\infty.\end{aligned}$$

[6]对这里来说几乎是显然的, 只是第一次还是操作一下.

当 $\frac{a-1}{b}+1>0$ 时, 注意到

$$\left|\int_0^x \sin y dy\right| = |1-\cos x| \leqslant 2, \forall x \geqslant 0, \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} \text{递减到} 0,$$

由 A-D 判别法14.4, 我们知道原积分收敛.

综上所述, 积分收敛当且仅当 $-1<\frac{a-1}{b}<1, b\neq 0$.

Step 2 绝对收敛性: 显然, 主要在 ∞ 处讨论. 在 $-1<\frac{a-1}{b}<1, b\neq 0$ 情况下, 当 $\frac{a-1}{b}>0$, 注意到由(14.26)知道

$$\frac{1}{|b|}\int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \leqslant \frac{1}{|b|}\int_1^\infty \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} < \infty,$$

故原积分绝对收敛.

当 $\frac{a-1}{b}\leqslant 0$, 我们展示标准技巧

$$\begin{aligned}\frac{1}{|b|}\int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy &\geqslant \frac{1}{|b|}\int_1^\infty \frac{|\sin y|^2}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy = \frac{1}{2|b|}\int_1^\infty \frac{1-\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \\ &= \frac{1}{2|b|}\int_1^\infty \frac{1}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy - \frac{1}{2|b|}\int_1^\infty \frac{\cos(2y)}{y^{\frac{a-1}{b}+1}} dy \\ &\overset{\text{第二个积分可类似 sin 用 A-D}}{=} \text{发散} - \text{收敛} = \text{发散}.\end{aligned}$$

这就证明了原积分在 $-1<\frac{a-1}{b}\leqslant 0, b\neq 0$ 情况下条件收敛, $0<\frac{a-1}{b}<1, b\neq 0$ 情况下绝对收敛.

例题 14.66 设 $p,q>0$, 判断 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛性.

笔记 一个经验上的小结论. 在幂函数次数不为 1 时, 趋于无穷或者趋于 0 时 ln 可忽略.

证明

1. $x=1$: $\frac{1}{x^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(1-x)^q}, x\to 1$, 故当且仅当 $q<1$ 收敛.
2. $x=+\infty$: 当 $p>1$,

$$\int_5^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{x^p \ln^q 5} dx < \infty.$$

$0<p<1$, 注意到

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1-p}{2}}}{\ln^q x} = +\infty,$$

故 $\int_5^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 发散.

当 $p=1$, 此时

$$\int_5^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx = \int_5^\infty \frac{1}{x \ln^q x} dx = \int_{\ln 5}^\infty \frac{1}{y^q} dy,$$

故当且仅当 $q>1$ 收敛.

综上所述, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$ 收敛当且仅当 $p>1>q$.

来看一个 ln 切换的题型.

例题 14.67 判断收敛性 $\int_{e^2}^\infty \frac{1}{\ln^{\ln x} x} dx$.

笔记 注意运用 $x^\square = e^{\square \ln x} = \left(e^\square\right)^{\ln x}$.

证明

$$\int_{e^3}^\infty \frac{1}{\ln^{\ln x} x} dx = \int_{e^3}^\infty \frac{1}{e^{\ln x \cdot \ln\ln x}} dx = \int_{e^3}^\infty \frac{1}{x^{\ln\ln x}} dx \leqslant \int_{e^3}^\infty \frac{1}{x^{\ln\ln e^3}} dx = \int_{e^3}^\infty \frac{1}{x^{\ln 3}} dx < \infty.$$

来看 Taylor 公式法.

例题 14.68 判断收敛性和绝对收敛性:

1. $\int_1^\infty \tan\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$,
2. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p+\sin x} dx, p>0$,
3. $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x^p(x^p+\sin x)} dx, p>0$.

笔记 经验上, Taylor 公式应该展开到余项里面的函数绝对收敛为止.

证明

1. 由 Taylor 公式
$$\int_1^{\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx=\int_1^{\infty}\left[\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)\right]dx=\text{条件}+\text{绝对}=\text{条件}.$$
但是如果仅仅用
$$\int_1^{\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx=\int_1^{\infty}\left[\frac{\sin x}{x}+o\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]dx,$$
虽然 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛, 但是并不能推出 $\int_1^{\infty}o\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx$ 收敛.
2. 显然 $x=0$ 不是瑕点, 对于 $x=\infty$, 取 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $m>\frac{1}{p}$, 我们有
$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx=\int_1^{\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{1+\frac{\sin x}{x^p}}dx=\int_1^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}+\cdots+o\left(\frac{\sin^m x}{x^{mp}}\right)\right)dx. \tag{14.27}$$
由例题14.65, 当 $p>1$, (14.27)每一项都绝对收敛, 故原积分绝对收敛. 当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$, (14.27)右边第一项条件收敛, 其余项绝对收敛, 故此时积分条件收敛. 当 $0<p<\frac{1}{2}$, 后面的项降次后[7]始终不能影响前面的项, 第一项收敛, 第二项发散, 故此时积分发散.

笔记 当 $0<p<\frac{1}{2}$, 我们还可以使用强行替换的思想, 即
$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right)dx=\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p\left(x^p+\sin x\right)}dx\geqslant\int_1^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2x^p\left(x^p+1\right)}dx$$
$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^p\left(x^p+1\right)}dx-\int_1^{\infty}\frac{\cos(2x)}{2x^p\left(x^p+1\right)}dx=+\infty.$$
由
$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\underbrace{\frac{\sin x}{x^p}}_{\text{积分收敛}}-\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right)}_{\text{积分发散}}$$
得此时积分发散.

3. 取 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $m>\frac{1}{p}-1$, 我们有
$$\int_2^{\infty}\frac{\sin x}{x^p\left(x^p+\sin x\right)}dx=\int_2^{\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{x^p\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)}dx$$
$$=\int_2^{\infty}\left[\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin^2 x}{x^{3p}}+\cdots+O\left(\frac{\sin^m x}{x^{(m+1)p}}\right)\right]dx$$
和上一问类似, 我们有 $p\leqslant\frac{1}{3}$ 发散, $\frac{1}{3}<p\leqslant\frac{1}{2}$ 条件收敛, $p>\frac{1}{2}$ 绝对收敛.

笔记 当 $\frac{1}{3}<p\leqslant\frac{1}{2}$, 我们还可以使用强行替换的思想, 即
$$\int_2^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin x}{x^p\left(x^p+\sin x\right)}\right|dx=\int_2^{\infty}\left|\frac{\sin^2 x}{x^{2p}\left(x^p+\sin x\right)}\right|dx\leqslant\int_2^{\infty}\frac{1}{x^{2p}\left(x^p-1\right)}dx<\infty.$$
由
$$\frac{\sin x}{x^p\left(x^p+\sin x\right)}=\underbrace{\frac{\sin x}{x^{2p}}}_{\text{积分条件收敛}}-\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x^{2p}}-\frac{\sin x}{x^p\left(x^p+\sin x\right)}\right)}_{\text{积分绝对收敛}}$$
得此时积分条件收敛.

来看经典的级数法

例题 14.69 判断 $\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^{\alpha}\sin^2 x}dx$ 收敛性.

[7] 主要由分母的幂次决定.

证明 注意到被积函数是非负函数, 所以子列极限可以决定积分收敛性, 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x}{\cos^2 x+x^a\sin^2 x}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{x+(n-1)\pi}{\cos^2 x+\left[(x+(n-1)\pi)^a\right]\sin^2 x}dx\overset{✠}{\sim}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\pi}{\cos^2 x+(n\pi)^a\sin^2 x}dx\\&\overset{\text{注意周期性}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{n\pi}{\cos^2 x+(n\pi)^a\sin^2 x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{n\pi}{1+(n\pi)^a\tan^2 x}d\tan x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n\pi}{1+(n\pi)^a t^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C(a)}{n^{\frac{a}{2}-1}},\end{aligned}$$

于是原积分收敛等价于 $\frac{a}{2}-1>1\Leftrightarrow a>4$.

✠ 部分证明需要大家水平提升到直接过得去, 但因是第一次, 我们给出详细的夹逼. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{x+(n-1)\pi}{\cos^2 x+\left[(x+(n-1)\pi)^a\right]\sin^2 x}dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\pi+(n-1)\pi}{\cos^2 x+\left[(0+(n-1)\pi)^a\right]\sin^2 x}dx,$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{x+(n-1)\pi}{\cos^2 x+\left[(x+(n-1)\pi)^a\right]\sin^2 x}dx\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{0+(n-1)\pi}{\cos^2 x+\left[(\pi+(n-1)\pi)^a\right]\sin^2 x}dx.$$

上面两个式都能算出积分值, 最后发现从阶的角度, 都转化成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}$ 的收敛性.

例题 14.70 举一个非负函数 $f\in C[0,+\infty)$, 使得 $\int_1^{\infty}f(x)\,dx<\infty$ 但是 $\int_1^{\infty}f^2(x)\,dx=\infty$.

证明 注意到

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{x+n\pi}{1+(x+n\pi)^6\sin^2 x}dx,$$

于是把 x 放大放小为 $\pi,0$ 可实现夹逼, 我们略去过程直接等价为:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{x+n\pi}{1+(x+n\pi)^6\sin^2 x}dx\sim\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^6}}<\infty.$$

而

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\right)^2dx\sim\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{n\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\right)^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi(n\pi)^2\left((n\pi)^6+2\right)}{2\left(1+(n\pi)^6\right)^{\frac{3}{2}}}=\infty.$$

故 $f=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ 为所求.

例题 14.71 对 $p\in\mathbb{R}$, 判断积分 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛性和绝对收敛性.

证明 **Case 1** 当 $p\leqslant 0$, 考虑 n 充分大时, 必有

$$\left|\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}x^{-p}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi,$$

这就证明了 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

Case 2 当 $p\in(0,1]$, 注意到

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cdot\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\cdot\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^p}\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{p+1}}\mathrm{d}x<\infty,$$

以及

$$\left|\int_0^x\sin y\,dy\right|\leqslant 2,\ \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}\text{递减到}0,$$

和 A-D 判别法14.4, 我们知道 $\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

但是

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|^2}{x^p}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\frac{1-\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^p}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos\left(2x+2\frac{1}{x}\right)}{2x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\frac{\cos\frac{2}{x}}{2x^p}\cdot\cos\left(2x\right)\mathrm{d}x-\int_1^{\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{2x^p}\cdot\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x,$$

类似 sin 的情况得到 $\int_1^{\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 于是由 $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^p}\mathrm{d}x=+\infty$ 得积分 $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 发散, 这就证明了原积分条件收敛.

Case 3 当 $p>1$, 由

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty$$

知原积分绝对收敛.

来看经典分部积分法例子.

例题 14.72 判断收敛性:$\int_0^{\infty}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x$.

证明 证明的想法是分部积分改善阶, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x\cdot\sin x^4\cdot\sin x\mathrm{d}x&=\frac{1}{4}\int_1^{\infty}y^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}}\sin y\sin y^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y=-\frac{1}{4}\int_1^{\infty}y^{-\frac{1}{2}}\sin y^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}\cos y\\&=c_1-c_2\int_1^{\infty}\left[\cos y\cdot\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\sin y^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}y^{-\frac{5}{4}}\cos y^{\frac{1}{4}}\right)\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

又

$$\int_1^{\infty}\left|\cos y\cdot\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\sin y^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}y^{-\frac{5}{4}}\cos y^{\frac{1}{4}}\right)\right|\mathrm{d}y\leqslant\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}y^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}y<\infty,$$

我们知道 $\int_0^{\infty}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 注意, 这并没有导出 $\int_0^{\infty}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 因为我们加绝对值之后并不容易这么分部积分.

例题 14.73 对 $p\in\mathbb{R}$, 判断积分 $\int_0^1\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

证明 倒代换得

$$\int_0^1\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot\cos x\mathrm{d}x.$$

于是当 $p<2$ 我们有

$$\int_1^{\infty}\left|x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot\cos x\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{3-p}}\mathrm{d}x<\infty,$$

即原积分绝对收敛.

当 $p\geqslant3$, 我们有

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot\cos x\mathrm{d}x\right)&\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\\&\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(2n\pi)^{p-2}\sin\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(2n\pi)^{p-3}\right)>0,\end{aligned}$$

即原积分发散.

当 $2\leqslant p<3$, 当 x 充分大, 我们有

$$x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\downarrow0,\left|\int_1^{A}\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant2,\forall A\geqslant1,$$

即由 A-D 判别法14.4得原积分收敛. 但是

$$\begin{aligned}&\int_1^{\infty} x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot|\cos x|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{\infty} x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot|\cos x|^2\,\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{p-2}\sin\frac{1}{x}\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x\\ \overset{\text{第二个积分继续 A-D 判别法得收敛14.4}}{=}&+\infty+\text{数字}=+\infty,\end{aligned}$$

即原积分条件收敛.

例题 14.74 对 $x>0$, 判断积分 $\int_0^{\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt$ 收敛性.

证明 假定积分收敛, 则

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt=&\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt\\ =&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{k-t+a}{t+x}dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(a+k+x)\ln(t+x)-t\right]\Big|_k^{k+1}\\ =&\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a+k+x)\ln\frac{k+x+1}{k+x}-1\right]\\ \overset{\text{Taylor 展开}}{=}&\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a-\frac{1}{2}}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],\end{aligned}$$

故 $a=\frac{1}{2}$. 现在对每一个 $y>0$, 取唯一的正整数 n 使得 $n\leqslant y<n+1$. 于是

$$\int_0^{y}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt=\int_0^{n}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt+\int_n^{y}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt,$$

现在

$$\left|\int_n^{y}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt\right|\leqslant\int_n^{y}\frac{1+\frac{1}{2}}{t+x}dt\leqslant\frac{3}{2}\int_n^{n+1}\frac{1}{t+x}dt=\frac{3}{2}\ln\frac{n+1+x}{n+x},$$

故

$$\lim_{y\to+\infty}\left|\int_n^{y}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt\right|=0.$$

又从刚才的 Taylor 展开式得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}dt$ 存在, 这就证明了积分 $\int_0^{\infty}\frac{[t]-t+a}{t+x}dt$ 当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 收敛.

例题 14.75♠ 设 $n\in\mathbb{N}_0$, 判别 $\int_0^{\infty}x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}dx$ 的敛散性.

证明 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}dx=&\sum_{m=0}^{\infty}\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}x^n e^{-x^{12}\sin^2 x}dx\\ =&\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\pi}(x+m\pi)^n e^{-(x+m\pi)^{12}\sin^2 x}dx\\ \leqslant&\pi^n\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^n\int_0^{\pi}e^{-m^{12}\pi^{12}\sin^2 x}dx.\end{aligned}$$

接下来运用 Laplace 方法9.3. 我们知道

$$\sin^2 x=x^2+o\left(x^2\right),\sin^2 x=(x-\pi)^2+o\left((x-\pi)^2\right).$$

于是

$$\int_0^{\pi}e^{-m\sin^2 x}dx\sim 2\int_0^{\infty}e^{-mx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{m}},$$

因此

$$\int_0^{\pi} e^{-\pi^{12}m^{12}\sin^2 x}dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{\pi^{12}m^{12}}} = \frac{C}{m^6}.$$

所以级数 $6-n>1$ 时收敛. 另外一半的不等式是类似的[8], 于是积分 $n<5$ 收敛, 其余情况发散.

例题 14.76♠ 设 $p,q\in\mathbb{R}$, 判断 $\int_0^{\infty}\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx$ 的绝对敛散性.

证明 **Step 1** 分析 0 处的情况.

在瑕点 $x=0$, 注意到

$$\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p(1+x^q)} \sim 2\frac{e^{\sin x}}{x^{p-1}(1+x^q)} \sim \begin{cases} \frac{2}{x^{p-1}}, & q\geqslant 0 \\ \frac{2}{x^{p+q-1}}, & q<0 \end{cases}.$$

于是 $q\geqslant 0, p<2$ 或 $p+q<2, q<0$ 时才有原积分可能收敛和绝对收敛.

Step 2 $p+q<2, q<0$ 时分析 ∞ 处收敛和发散的情况.

注意到

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}\right|dx \leqslant e\int_0^{\infty}\frac{1}{x^p}dx,$$

我们知道当 $p>1$ 时原积分绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$, 我们有

$$\left|\int_{n\pi+\frac{\pi}{8}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2e}\int_{n\pi+\frac{\pi}{8}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x^{-p}}{1+\left(n\pi+\frac{\pi}{8}\right)^q}dx \geqslant \frac{\pi\sqrt{2}\left(n\pi+\frac{\pi}{8}\right)^{-p}}{16e\left(1+\left(n\pi+\frac{\pi}{8}\right)^q\right)} \nrightarrow 0.$$

此时积分发散.

当 $0<p\leqslant 1$, 我们知道

$$\int_0^A e^{\sin x}\sin(2x)\,dx = 2\int_0^A e^{\sin x}\sin x d\sin x = 2\int_0^{\sin A} te^t dt,$$

于是

$$\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin(2x)\,dx\right| \leqslant \int_{-1}^1 |t|\,e^t dt < \infty, \forall A>0.$$

又 $\frac{1}{x^p(1+x^q)}$ 当 x 充分大时递减到 0, 因此由A-D 判别法, 我们知道 $\int_1^{\infty}\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx$ 收敛.

但是当 $0<p\leqslant 1$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{e^{\sin x}|\sin(2x)|}{x^p(1+x^q)}dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{e^{\sin x}|\sin(2x)|}{x^p(1+x^q)}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}\sin(2x)}{\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)^p\left(1+\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)^q\right)}dx \\ &\geqslant \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)^p\left(1+\left(\frac{n\pi}{2}\right)^q\right)}dx \sim \frac{1}{e}\left(\frac{2}{\pi}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx = \infty,\end{aligned}$$

因此 $\int_0^{\infty}\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx$ 条件收敛.

Step 3 $q\geqslant 0, p<2$ 时分析 ∞ 处收敛和发散的情况.

注意到

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}\right|dx \leqslant e\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{p+q}}dx,$$

我们知道当 $p+q>1$ 时原积分绝对收敛.

当 $p+q\leqslant 0$, 我们有

$$\left|\int_{n\pi+\frac{\pi}{8}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx\right| \geqslant \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2e}\int_{n\pi+\frac{\pi}{8}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)^p\left[1+\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)^q\right]}dx, & p\geqslant 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2e}\int_{n\pi+\frac{\pi}{8}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{8}\right)^p\left[1+\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)^q\right]}dx, & p<0 \end{cases} \nrightarrow 0.$$

此时积分发散.

[8]希望读者自己给出, 因为 x 部分的放大放小从阶的角度都不会影响.

当 $0<p+q\leqslant 1$, 注意到

$$\int_0^A e^{\sin x}\sin(2x)\,dx=2\int_0^A e^{\sin x}\sin x d\sin x=2\int_0^{\sin A}te^t dt,$$

于是

$$\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin(2x)\,dx\right|\leqslant\int_{-1}^1|t|\,e^t dt<\infty,\forall A>0.$$

又 $\frac{1}{x^p(1+x^q)}$ 当 x 充分大时递减到 0, 因此由A-D 判别法, 我们知道 $\int_1^\infty\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx$ 收敛.

再注意到

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{e^{\sin x}|\sin(2x)|}{x^p(1+x^q)}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{e^{\sin x}|\sin(2x)|}{x^p(1+x^q)}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}\sin(2x)}{\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)^p\left(1+\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)^q\right)}dx$$

$$\geqslant\begin{cases}\frac{1}{e}\sum\limits_{n=1}^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)^p\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)^q\right)}dx, & p\geqslant 0\\ \frac{1}{e}\sum\limits_{n=1}^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^p\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)^q\right)}dx, & p<0\end{cases}\sim\begin{cases}\frac{1}{e}\left(\frac{2}{\pi}\right)^p\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{p+q}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx, & p\geqslant 0\\ \frac{1}{e}\left(\frac{2}{\pi}\right)^p\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{p+q}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx, & p<0\end{cases}=+\infty.$$

因此 $\int_0^\infty\frac{e^{\sin x}\sin(2x)}{x^p(1+x^q)}dx$ 条件收敛.

Step 4 总结

从 **Step 1** 到 **Step 3** 可以看到: 原积分在 $q\geqslant 0,p<2,p+q>1$ 或 $p+q<2,q<0,p>1$ 时绝对收敛, 在 $q\geqslant 0,p<2,0<p+q\leqslant 1$ 或 $q<0,0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. 其余情况发散.

例题 14.77 判断收敛性 $\int_0^\infty x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)dx$.

证明

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)dx&=\int_0^\infty x^2\left[\frac{\cos x^3}{1+x}-\frac{\cos^3 x^3}{6(1+x)^3}+O\left(\frac{1}{(1+x)^5}\right)\right]dx\\&=\frac{1}{3}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x}-\frac{\cos^2 x^3}{6(1+x)^3}\right)d\sin x^3+\int_0^\infty O\left(\frac{1}{x^3}\right)dx\\&\overset{\text{分部积分}}{=}-\frac{1}{3}\int_0^\infty\sin x^3 d\left(\frac{1}{1+x}-\frac{\cos^2 x^3}{6(1+x)^3}\right)+\int_0^\infty O\left(\frac{1}{x^3}\right)dx\\&=-\frac{1}{3}\int_0^\infty\sin x^3\cdot\left[-\frac{1}{(1+x)^2}-\left(\frac{1}{6(1+x)^3}\right)'+\left(\frac{\sin^2 x^3}{6(1+x)^3}\right)'\right]dx+\int_0^\infty O\left(\frac{1}{x^3}\right)dx,\end{aligned}$$

于是只需判断

$$\int_0^\infty\sin x^3\cdot\left(\frac{\sin^2 x^3}{6(1+x)^3}\right)'dx=\int_0^\infty\frac{\sin^2 x^3\left(2x^2(1+x)\cos x^3-\sin x^3\right)}{2(1+x)^4}dx$$

收敛性. 进一步, 只需判断

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 x^3\left(2x^2(1+x)\cos x^3\right)}{2(1+x)^4}dx=\int_0^\infty\frac{x^2\cos x^3\sin^2 x^3}{(1+x)^3}dx=\frac{1}{9}\int_0^\infty\frac{1}{(1+x)^3}d\sin^3 x^3.$$

而这分部积分之后显然收敛. 因此我们证明了原积分收敛.

来看一个真题答案也未曾做对的例子.

例题 14.78♠ 设 $f(x)=\int_0^x\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du$, 讨论 $\int_1^\infty\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx,p>0$ 的收敛性和绝对收敛性.

证明 **Step 1** 分段求和得

$$f(x)=\int_0^x\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du=x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k.$$

运用 EM 公式9.9, 我们有

$$f(x)=x-[x]\ln x+\frac{\ln[x]}{2}+[x]\ln[x]-[x]+O(1)=\frac{\ln x}{2}+O(1).\tag{14.28}$$

于是

$$e^{f(x)}=e^{\frac{\ln x}{2}+O(1)}=\sqrt{x}e^{O(1)},$$

即存在 $c_2>c_1>0$, 使得

$$c_1\sqrt{x}\leqslant e^{f(x)}\leqslant c_2\sqrt{x}. \tag{14.29}$$

注意到

$$\left|\int_1^A\left(2x+\frac{2}{x^3}\right)\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx\right|\leqslant 2,\forall A>1,$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{f(x)}}{x^p\left(2x+\frac{2}{x^3}\right)}&=\frac{e^{x-[x]\ln x+\sum\limits_{k=1}^{[x]}\ln k}}{x}\frac{x^4}{2x^{p+4}+2x^p}\\&=e^{\int_0^1\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du+\int_1^x\left(1-\frac{[u]+1}{u}\right)du}\cdot\frac{x^4}{2x^{p+4}+2x^p},\end{aligned}$$

两个递减非负函数之积也递减. 以及

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-[x]\ln x+\sum\limits_{k=1}^{[x]}\ln k}}{x}\frac{x^4}{2x^{p+4}+2x^p}\overset{(14.29)}{\leqslant}\lim_{x\to+\infty}\frac{c_2\sqrt{x}}{x}\frac{x^4}{2x^{p+4}+2x^p}=0,$$

我们由 A-D 判别法14.4知 $\int_1^\infty\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx,p>0$ 收敛.

Step 2 注意到 $e^{f(\sqrt{x})}$ 同阶于 $x^{\frac{1}{4}}$. 我们变形得

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx&=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{e^{f(\sqrt{x})}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{e^{f(\sqrt{x})}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}dx+\int_1^\infty\frac{e^{f(\sqrt{x})}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}dx.\end{aligned}$$

上式后者由于

$$\int_1^\infty\left|\frac{e^{f(\sqrt{x})}}{x^{\frac{p+1}{2}}}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|dx\leqslant c_2\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{2p+5}{4}}}dx<\infty,$$

我们知道绝对收敛.

因此原积分是否绝对收敛由 $\int_1^\infty\frac{e^{f(\sqrt{x})}}{x^{\frac{p+1}{2}}}|\cos x|\cos\frac{1}{x}dx\sim\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{2p+1}{4}}}|\cos x|\,dx$ 决定, 故原积分绝对收敛等价于

$$\frac{2p+1}{4}>1\Leftrightarrow p>\frac{3}{2}.$$

例题 14.79 判断 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛性和绝对收敛性.

证明 **Case 1**

当 $p,q\leqslant 0$, 显然 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

Case 2 当 $p=q>0$, 则 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^q}\mathrm{d}x$, 于是由例题14.65得此时原积分在 $0<q\leqslant 1$ 条件收敛, $1<q<2$ 绝对收敛.

Case 3

当 $p\leqslant 0<q$, 我们有

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{x^{-p}\sin x}{1+x^{q-p}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{-p}\sin x}{1+x^{q-p}}\mathrm{d}x+\int_1^\infty\frac{x^{-p}\sin x}{1+x^{q-p}}\mathrm{d}x.$$

一方面

$$\int_0^1\frac{x^{-p}\sin x}{1+x^{q-p}}\mathrm{d}x\sim\int_0^1x^{1-p}\mathrm{d}x<\infty.$$

另外一方面 $\int_1^\infty\frac{x^{-p}\sin x}{1+x^{q-p}}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛性可以采用相同的办法判断. 由例题14.65得此时原积分在 $q>1$ 绝对收敛, 在 $q\leqslant 1$ 条件收敛.

Case 4 当 $0<p<q$, 我们有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x.$$

一方面

$$\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\frac{1}{1+x^{q-p}}\mathrm{d}x.$$

另外一方面 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^q}\mathrm{d}x$ 采用相同办法判断. 由例题14.65得此时原积分在 $q\leqslant 1,p<2$ 条件收敛, $q>1,p<2$ 绝对收敛.

对称的可以讨论 $p>q$ 的情况, 综上所述, 我们得到了 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 在 $0<\max\{p,q\}\leqslant 1$ 条件收敛, 在 $1<\max\{p,q\}$ 且 $\min\{p,q\}<2$ 绝对收敛, 而在其余情况发散.

例题 14.80 判断 $\int_0^{\infty}\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 收敛性和绝对收敛性.

证明 首先

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{\infty}\left|\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\right|\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\left|\frac{1}{x}e^{\cos x}\sin(\sin x)\right|\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos x}|\sin(\sin x)|}{x+2n\pi}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos x}|\sin(\sin x)|}{2\pi+2n\pi}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi+2n\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos x}|\sin(\sin x)|\,\mathrm{d}x=+\infty.\end{aligned}$$

然后注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi}e^{\cos x}\Im\left(e^{i\sin x}\right)\mathrm{d}x=\Im\left(\int_0^{2\pi}e^{e^{ix}}\mathrm{d}x\right)\\&=\Im\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\left(e^{ix}\right)^n}{n!}\mathrm{d}x\right)=\Im\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}}{n!}\mathrm{d}x\right)=\Im\left(\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}x\right)=0,\end{aligned}$$

我们知道 $\int_0^x e^{\cos y}\sin(\sin y)\,\mathrm{d}y$ 是周期 2π 的连续函数, 因此有界. 又 $\frac{1}{x}$ 递减到 0, 所以由 A-D 判别法14.4知原积分条件收敛.

例题 14.81 设 f 在 $[0,+\infty)$ 递减到 0 且 $\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

证明 由 f 在 $[0,+\infty)$ 递减到 0 知 f 非负, 不妨设 f 不为 0, 否则问题是显然的. 先来证明

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0. \tag{14.30}$$

注意到对 $A>0$ 有

$$0\leqslant\sqrt{Af(A)}=\sqrt{f(A)}\int_{\frac{A}{4}}^{A}\sqrt{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{A}{4}}^{A}\sqrt{\frac{f(x)}{x}}\mathrm{d}x,$$

由 Cauchy 收敛准则我们有(14.30)成立. 现在由(14.30)得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{\frac{f(x)}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{xf(x)}=0.$$

从而由比较判别法得 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

例题 14.82 设 $f\in C^1(1,+\infty)$ 满足

$$f(x)\leqslant x^2\ln x,f'(x)>0,\forall x\in(1,+\infty).$$

证明:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x=+\infty.$$

证明 由 Cauchy 不等式16.1得

$$\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x\right)^2=\ln^2 2,\forall B>0.$$

现在

$$\begin{aligned}\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x&\geqslant\frac{\ln^2 2}{\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x}=\frac{\ln^2 2}{\frac{f(e^B)}{e^{2B}B^2}-\frac{f\left(e^{\frac{B}{2}}\right)}{e^B\left(\frac{B}{2}\right)^2}+\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{f(x)[2x\ln^2 x+2x\ln x]}{x^4\ln^4 x}\mathrm{d}x}\\&\geqslant\frac{\ln^2 2}{\frac{f(e^B)}{e^{2B}B^2}-\frac{f\left(e^{\frac{B}{2}}\right)}{e^B\left(\frac{B}{2}\right)^2}+\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{x^2\ln x[2x\ln^2 x+2x\ln x]}{x^4\ln^4 x}\mathrm{d}x}\\&=\frac{\ln^2 2}{\frac{f(e^B)}{e^{2B}B^2}-4\frac{f\left(e^{\frac{B}{2}}\right)}{B^2e^B}+2\int_{e^{\frac{B}{2}}}^{e^B}\frac{x+1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x}=\frac{\ln^2 2}{\frac{f(e^B)}{e^{2B}B^2}-4\frac{f\left(e^{\frac{B}{2}}\right)}{B^2e^B}+2\int_{\frac{B}{2}}^{B}\frac{t+1}{t^2}\mathrm{d}t}\\&=\frac{\ln^2 2}{\frac{f(e^B)}{e^{2B}B^2}-4\frac{f\left(e^{\frac{B}{2}}\right)}{B^2e^B}+2\left(\ln 2+\frac{1}{B}\right)}\geqslant\frac{\ln^2 2}{\frac{e^{2B}B}{e^{2B}B^2}+2\left(\ln 2+\frac{1}{B}\right)}\\&=\frac{\ln^2 2}{\frac{1}{B}+2\left(\ln 2+\frac{1}{B}\right)}\to\frac{\ln 2}{2}\neq 0,B\to+\infty,\end{aligned}$$

我们知道原积分发散!.

第 14 章 练习

1. (1.) 计算
$$\int_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}dx.$$
2. (2.) 用两种方法计算积分
$$\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,dx.$$
3. (3.) 对 $x>0$, 计算
$$\int\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}dx.$$
4. (4.) 记 $[\cdot]$ 为向下取整函数, 证明
$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2^n x]}{3^n}\right)^2dx=\frac{27}{32}.$$
5. (5.) 记 $I_n=\int_0^{\infty}\left(1-x^2\sin^2\frac{1}{x}\right)^n dx$, 证明 $\frac{1}{\pi}I_n\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}$.
6. (6.) 设 $0<a<b$, 证明
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{ab\sin^2 x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2 x}}.$$
7. (7.) 计算
$$\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{\pi}dx.$$
8. (8.) 设实数 $|a|\neq|b|$, 建立不定积分 $I_n=\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$ 的递推.
9. (9.$*$, ♠) 设 $\alpha\in(0,1)$, 证明
$$(1-\alpha)\int_0^1\left(x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+(1-x)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{1-\alpha}dx=\alpha\int_0^1\left(x^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}+(1-x)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^{\alpha}dx.$$

10. (10.♠) 设 $b\in(0,1)$, 计算
$$\lim_{a\to+\infty}a^{1-b}\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\cos x}{x^b}dx.$$
11. (11.♠) 判断收敛性
$$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^q\left|\sin x\right|^r}dx.$$
12. (12.♠) 判断反常积分敛散性
$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos\left(2\sin x\right)}{x}dx.$$
13. (13.) 计算
$$\int_{-1}^{1}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-x^{2^k}+x^{2^{k+1}}\right)dx..$$
14. (14.) 设 f 内闭可积且
$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A,\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=B.$$
对任何 $a>0$, 证明
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x+a\right)-f\left(x\right)\right]dx=\left(A-B\right)a.$$
15. (15.) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 $T>0$ 的可积函数, 证明
$$\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T}f\left(t\right)e^{-st}dt.$$
16. (16.) 证明
$$\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{v}-\ln n\right).$$
17. (17.) 假设
$$A_n=\int_0^1x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdots\left(x-\left(n-1\right)\right)\mathrm{d}x,B_n=\int_0^1x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\cdots\left(x+\left(n-1\right)\right)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots,$$
用 A_n 表示 B_n.
18. (18.♠) 设 f,g 都是 $[1,+\infty)$ 上的单调递减函数, 且反常积分
$$\int_1^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x,\int_1^{\infty}g\left(x\right)\mathrm{d}x$$
都发散, 问是否 $\int_1^{\infty}\min\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}\mathrm{d}x$ 一定发散, 如果是, 请给出理由, 如果否, 请给出反例.
19. (19.♠) 计算 $\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2-x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
20. (20.) 计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x+\left|\cos x\right|}\mathrm{d}x$.
21. (21.) 设 $f\in C\left(0,1\right]$ 且 $\lim\limits_{x\to0+}f\left(x\right)=+\infty$, 证明 $\int_0^1f\left(x\right)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\min\left\{f\left(x\right),n\right\}\mathrm{d}x$ 存在.
22. (22.) 设 $f\in C\left(\mathbb{R}\right)$ 且
$$f\left(t\right)=\int_{-t}^{0}\mathrm{d}y\int_{-y}^{t}f\left(x+y\right)\mathrm{d}x+e^t.$$
求全部 f.
23. (23.♠) 证明
$$\int_0^{\pi}\ln\left(1+s\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-s^2}}{2}\right),\forall\left|s\right|<1.$$
24. (24.♠, $*$) 设 $a,b\in\mathbb{R}$, 证明
$$\int_0^{\pi}\arctan\left(a+b\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi\arg\left(1+ia+\sqrt{b^2+\left(1+ia\right)^2}\right),$$

这里 $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

25. (25.) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x \sin y) \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
26. (26.) 计算 $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin(x+y)}{x(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
27. (27.♠) 计算 $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)}{xy(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
28. (28.) 计算 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(x \ln x + \frac{1}{4x}\right) e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} \mathrm{d}x$.
29. (29.) 设 $f \in C^1[0,+\infty)$ 是有界下凸函数, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在并判断 $\int_0^{\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 是否收敛?
30. (30.) 设
$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \left[\ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) \ln\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)\right] \mathrm{d}x,$$
计算 $I(a,b)$.
31. (31.) 设 $||u||$ 表示实数 u 到最近整数的距离, 计算
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^n \left|\left|\frac{n}{x}\right|\right| \mathrm{d}x.$$
32. (32.) 计算
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x.$$
33. (33.♠) 设 f, g 都是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减连续正函数, 且反常积分
$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$
都发散, 问是否 $\int_0^{\infty} \min\{f(x), g(x)\}\,\mathrm{d}x$ 一定发散, 如果是, 请给出理由, 如果否, 请给出反例.
34. (34.) 设 f, xf 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明:$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积. 并证明
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14.31}$$
35. (35.) 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 满足
$$f'(x) > 0, |f(x)| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R},$$
证明: 对 $0 < \alpha < \beta$ 有
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f'\left(nx - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 0.. \tag{14.32}$$
36. (36.) 计算
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan \frac{2^{\sin x} + 2^{-\cos x}}{1 - 2^{\sin x} 2^{-\cos x}} \mathrm{d}x.$$
37. (37.) 计算
$$\int_0^1 \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right\rfloor\right) \mathrm{d}x.$$
38. (38.) 计算
$$\int_{\frac{25}{4}\pi}^{\frac{53}{4}\pi} \frac{1}{(1+2^{\cos x})(1+2^{\sin x})} \mathrm{d}x.$$
39. (39.) 判断 $\int_0^{\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛性.
40. (40.) 设 $\alpha, k \in \mathbb{R}$, 讨论 $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{\alpha-1} x}{|1+k\cos x|^{\alpha}} \mathrm{d}x$ 收敛性.
41. (41.) 计算
$$\int_1^2 \frac{\ln\left(x^4+4\right) - \ln\left(x^2+4\right)}{x} \mathrm{d}x.$$
42. (42.) 设
$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} \mathrm{d}x\right)^2, g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2\left(1+x^2\right)}}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

证明

$$f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4},\forall t\in\mathbb{R},$$

并以此计算 $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

43. (43.) 设 $f\in C^1[1,+\infty)$, 证明

$$\int_1^{\infty}\frac{f'(x)}{[1+f^2(x)]\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

收敛.

44. (44.) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 单调递减但不可积, 证明 $\int_0^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x$ 发散.

45. (45.♠) 存在 $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 使得

$$\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty,\int_0^{\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x=+\infty,\forall p\in(0,1)\bigcup(1,+\infty).$$

46. (46.) 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nt)\tan t\mathrm{d}t.$$

47. (47.) 设 $f\in C(\mathbb{R}),T>0$. 证明:f 以 T 为周期的充要条件是 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $a\in\mathbb{R}$ 为常数.

48. (48.) 计算

$$\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(nx)}{1-\cos x}\mathrm{d}x,n\in\mathbb{N}.$$

49. (49.) 设 $\sinh x\cdot\sinh y=1$, 计算 $\int_0^{\infty}y(x)\,\mathrm{d}x$.

50. (50.) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\mathrm{d}\alpha$.

51. (51.) 设 $a\in(0,\pi)$,

(a). 对

$$F_n=\int\left(\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}\right)^n\mathrm{d}x.$$

证明:

$$F_n=2\cos a\cdot F_{n-1}-F_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}\right)^{n-1},n=2,3,\cdots.$$

(b). 对

$$F_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}\right)^n\mathrm{d}x.$$

证明:

$$F_n=2\cos a\cdot F_{n-1}-F_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}\left(1-(-1)^{n-1}\right),n=2,3,\cdots.$$

(c). 对

$$F_n=\int_a^{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}\right)^n\mathrm{d}x.$$

证明:

$$F_n=2\cos a\cdot F_{n-1}-F_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1},n=2,3,\cdots.$$

52. (52.) 设

$$F_1(t)=\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-x^2}\mathrm{d}x,F_2(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(tx)}{x}e^{-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x,$$

证明:

$$F_1(t)=F_2(t),\forall t\in\mathbb{R}.$$

53. (53.) 设 $a>0, f\in C[1,+\infty)\bigcap C^1(1,+\infty)$ 满足
$$\int_1^\infty |f(x)|^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty, \int_1^\infty |f'(x)|^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty.$$
证明
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\right)=0;\\ \int_1^\infty x^2|f(x)|^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty;\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}|f(x)|e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\right)=0.\end{cases}$$

54. (54.) 计算
$$F(y)=\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{x}y)}{x(1+x)}\mathrm{d}x.$$

55. (55.) 判断积分 $\int_0^\infty \sin\left(x\left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor\right)\mathrm{d}x$ 敛散性.

56. (56.) 设
$$H_n(x)=\sum_{k=1}^n\left|x-\frac{k}{n+1}\right|, x\in[0,1],$$
计算
$$\int_0^1 |H_n'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

57. (57.) 计算 $\int_0^\infty \frac{\ln x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

58. (58.) 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是严格递减的连续函数. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 证明 $\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

第 15 章 数学类含参变量积分一致收敛性

开始本章之前, 我们先证明含参积分的 Dini 定理.

定理 15.1 (含参变量积分一致收敛的 Dini 定理)

设非负函数 $f\in C\left([a,+\infty)\times[c,d]\right)$ 且

$$I(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\in C[c,d].$$

则 $I(y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

♡

注 要学会自己类比出瑕点或者多个瑕点的版本.

证明 由函数项级数的 Dini 定理13.39, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{\alpha+n}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 $y\in[c,d]$ 一致收敛. 现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何 $n\geqslant N,y\in[c,d]$ 都有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\int_{a+n-1}^{\alpha+n}f(x,y)\,\mathrm{d}x<\epsilon.$$

取 $A_0\triangleq a+N-1$, 当 $A\geqslant A_0,y\in[c,d]$, 我们有

$$0\leqslant\int_A^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{a+N-1}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=N}^{\infty}\int_{a+n-1}^{\alpha+n}f(x,y)\,\mathrm{d}x<\epsilon,$$

即 $I(y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

注意仔细体会和函数项级数一致收敛性判断的异同.

例题 15.1 判断 $\int_0^{\infty}xe^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛性.

笔记 读者容易观察到 $\int_0^{\infty}xe^{-x\cdot0}\mathrm{d}x=+\infty$, 因此猜想 $\int_0^{\infty}xe^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛, 那么这种证明方法其实往往也是严格的, 即在一个区间上一致收敛, 会导致在区间的端点也收敛.

证明 若 $\int_0^{\infty}xe^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $A>0$ 使得对任何 $A_2>A_1>A$ 都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}xe^{-xy}\mathrm{d}x\right|\leqslant\epsilon,\forall y\in(0,+\infty).$$

现在让 $y\to0^+$, 由被积函数在

$$(x,y)\in[A_1,A_2]\times[0,1]$$

连续, 我们有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}x\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{A_1}^{A_2}\lim_{y\to0^+}\left(xe^{-xy}\right)\mathrm{d}x\right|=\lim_{y\to0^+}\left|\int_{A_1}^{A_2}xe^{-xy}\mathrm{d}x\right|\leqslant\epsilon.$$

即由 Cauchy 收敛准则得 $\int_0^{\infty}x\mathrm{d}x$ 收敛, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $\int_0^{\infty}xe^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 15.2 证明 $\int_0^{\infty}\sqrt{u}e^{-ux^2}\mathrm{d}x$ 在 $u\in(0,+\infty)$ 不一致收敛.

笔记 通过一致收敛的性质反推不一致收敛是一个比较简单的方法.

证明 注意到

$$\int_0^{\infty}\sqrt{u}e^{-ux^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, & u>0\\ 0, & u=0\end{cases},$$

于是若积分在 $u\in(0,+\infty)$ 一致收敛, 则相似例题15.1知积分在 $u\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 因此积分定义的函数应该

在 $u=0$ 连续, 这就是一个矛盾!. 于是我们证明了 $\int_0^{\infty}\sqrt{u}e^{-ux^2}\mathrm{d}x$ 在 $u\in(0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 15.3 判断 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 注意到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{x}\mathrm{d}x\overset{y=\frac{t}{x}}{=}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

若积分在 $(0,+\infty)$ 一致收敛, 则相似例题15.1知积分在 $[0,+\infty)$ 一致收敛. 由一致收敛积分定义的函数连续知

$$\lim_{y\to0+}\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\left[\lim_{y\to0+}\frac{\sin(yx)}{x}\right]\mathrm{d}x=0.$$

但是

$$\lim_{y\to0+}\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\neq0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 15.4 证明: 含参变量积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{y(1+x)}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛, 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

证明 注意到对 $\delta>0$, $\frac{1}{y(1+x)}$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 单调递减且

$$\lim_{x\to+\infty}\sup_{y\in[\delta,+\infty)}\left|\frac{1}{y(1+x)}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{\delta(1+x)}\right|=0.$$

结合

$$\left|\int_0^{x}\sin(yt)\,\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{y}\left|\cos(yx)-1\right|\leqslant\frac{2}{\delta},\forall x\in[0,+\infty),y\in[\delta,+\infty),$$

我们知道 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{y(1+x)}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛.

如果在 $(0,+\infty)$ 一致收敛, 则相似例题15.1知原积分在 $[0,+\infty)$ 一致收敛. 但是

$$\lim_{y\to0+}\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{y(1+x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\lim_{y\to0+}\frac{\sin(yx)}{y(1+x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=+\infty,$$

这就是一个矛盾! 因此 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(yx)}{y(1+x)}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 15.5 证明 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x^2}{x^y}\mathrm{d}x$ 在 $y\in(-1,1]$ 内闭一致收敛.

证明 对 $y\in[a,b]\subset(-1,1]$, 我们注意到 $\frac{1}{x^{\frac{y+1}{2}}}$ 在 $[1,+\infty)$ 递减且

$$\left|\int_1^{A}\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant2,\forall A\geqslant1,\frac{1}{x^{\frac{y+1}{2}}}\leqslant\frac{1}{x^{\frac{a+1}{2}}}\rightrightarrows0,x\to+\infty.$$

于是由一致收敛的 A-D 判别法我们知道 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\frac{y+1}{2}}}\mathrm{d}y$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛.

对任何 $\epsilon>0$, 存在 $A>0$ 使得对任何 $x\geqslant A$ 都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\cos x}{x^{\frac{y+1}{2}}}\mathrm{d}x\right|\leqslant2\epsilon,\forall A_2\geqslant A_1\geqslant A.\tag{15.1}$$

现在当 $A_2,A_1\geqslant\sqrt{A}$, 我们有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\cos x^2}{x^y}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{A_1^2}^{A_2^2}\frac{\cos x}{x^{\frac{y+1}{2}}}\mathrm{d}x\right|\overset{(15.1)}{\leqslant}\epsilon.$$

于是我们就有 $\int_0^{\infty}\frac{\cos x^2}{x^y}\mathrm{d}x$ 在 $y\in(-1,1]$ 内闭一致收敛.

例题 15.6 设 $a\in\mathbb{R}$, 判断 $\int_1^{\infty}\frac{x\sin(tx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 的一致收敛性.

笔记 例题15.4告诉我们 $\int_1^{\infty}\frac{x\sin(tx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 大概率不一致收敛, 且问题出现在 $t=0$ 处.

证明 我们有

$$\left|\int_A^{\frac{3}{2}A}\frac{x\sin\left(\frac{\pi}{2A}x\right)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\int_A^{\frac{3}{2}A}\frac{x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{a^2+\frac{9}{4}A^2}{a^2+A^2}\right)\to\frac{\sqrt{2}}{4},A\to+\infty,$$

于是 $\int_1^{\infty}\frac{x\sin(tx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 15.7 证明 $\int_0^{\infty}\sin te^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(0,+\infty)$ 一致收敛.

证明 对 $A_2 \geqslant A_1 \geqslant 0$, 注意到

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} \sin t e^{-tx^2} \mathrm{d}x\right| \leqslant t\int_{A_1}^{A_2} e^{-tx^2}\mathrm{d}x = \sqrt{t}\int_{\sqrt{t}A_1}^{\sqrt{t}A_2} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sqrt{t}\int_{\sqrt{t}A_1}^{\infty} e^{-\sqrt{t}A_1 x}\mathrm{d}x = \frac{e^{-tA_1^2}}{A_1} \leqslant \frac{1}{A_1},$$

于是显然 $\int_0^\infty \sin t e^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t \in (0,+\infty)$ 一致收敛.

例题 15.8

1. 求 $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 的连续区间.
2. 求 $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的连续区间.
3. 求 $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的连续区间.

笔记 注意连续是逐点的概念, 我们往往不需要在整个区间一致收敛, 而只需要内闭一致收敛.

证明

1. 首先为了保证积分收敛, 我们考虑

$$\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\alpha+3}}, x\to+\infty, \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\alpha-1}}, x\to 0^+,$$

即积分在 $\alpha \in (-2,2)$ 收敛.

对 $[c,d] \subset (-2,2)$, 我们有

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^d(2+x^3)}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^c(2+x^3)}\mathrm{d}x < \infty,$$

即原积分在 $[c,d]$ 一致收敛, 因此 $I(\alpha)$ 的连续区间为 $(-2,2)$.

2. 首先

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{2x^\alpha}\mathrm{d}x,$$

我们由例题14.65知 I 在 $(0,2)$ 有定义.

注意到

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{2x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(2x)}{2x^\alpha}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{2x^\alpha}\mathrm{d}x. \tag{15.2}$$

对任何 $[c,d] \subset (0,2)$, 我们知道

$$\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{2x^\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\sin(2x)}{2x^d}\mathrm{d}x < \infty,$$

即式(15.2)第一个积分关于 $\alpha \in [c,d]$ 一致收敛. 注意到 $\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 $x \in [1,+\infty)$ 递减且由

$$\frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^c}, \forall x \in [1,+\infty)$$

知其关于 $\alpha \in [c,d]$ 一致收敛到 0. 结合 $\sin(2x)$ 的变限积分有界知式(15.2)第二个积分关于 $\alpha \in [c,d]$ 一致收敛. 现在我们知道 $I(\alpha)$ 的连续区间为 $(0,2)$.

3.

例题 15.9 讨论下述积分一致收敛性.

1.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right)\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right]\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}.$$

2.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right)\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right]\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}.$$

证明 首先我们有

$$1+x+\cdots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, x\in[0,1), n\in\mathbb{N}.$$

1. 注意到
$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right|\mathrm{d}x<\infty,$$
我们有原积分关于 $n\in\mathbb{N}$ 一致收敛.
2. 因为 $\ln\frac{1}{x}\sim 1-x, x\to 1^-$, 注意到
$$\int_{\frac{1}{2}}^1\left|\frac{1-x^n}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}x<\infty,$$
我们有原积分关于 $n\in\mathbb{N}$ 一致收敛.

例题 15.10 证明: $\int_1^\infty te^{-\frac{t}{2x^2}}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(0,+\infty)$ 不一致收敛.

证明 我们有
$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_A^\infty A^2e^{-\frac{A^2}{2x^2}}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_1^\infty A^3e^{-\frac{1}{2x^2}}\frac{1}{A^3x^3}\mathrm{d}x\right)=\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2x^2}}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x>0,$$
即原积分关于 $t\in(0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 15.11 讨论 $\int_0^\infty e^{-x^2\left(1+y^2\right)}\sin x\mathrm{d}y$ 在 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的一致收敛性.

证明 注意到
$$\lim_{A\to+\infty}\int_A^\infty e^{-\frac{1}{A^2}\left(1+y^2\right)}\sin\frac{1}{A}\mathrm{d}y=\lim_{A\to+\infty}\left(Ae^{-\frac{1}{A^2}}\sin\frac{1}{A}\cdot\int_1^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)=\int_1^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y>0,$$
这就证明了 $\int_0^\infty e^{-x^2\left(1+y^2\right)}\sin x\mathrm{d}y$ 在 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 不一致收敛.

例题 15.12 证明: $\int_1^\infty e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in(0,1)$ 一致收敛.

笔记 通过换元
$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x=y\int_{\frac{y-1}{y^2}}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
之后再判断后面一个积分的一致收敛性是错误的, 这是因为改变了一致收敛性的含义!.

下面我们给的证明的换元是正确的, 因为只是在做一致收敛的定义的不等式的数值上的估计.

证明 对 $A_2\geqslant A_1>2$, 我们有
$$\int_{A_1}^{A_2}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x\overset{t=\frac{x-\frac{1}{y}}{y}}{=}y\int_{\frac{A_1-\frac{1}{y}}{y}}^{\frac{A_2-\frac{1}{y}}{y}}e^{-t^2}\mathrm{d}t\leqslant y\int_{\frac{A_1-\frac{1}{y}}{y}}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
又
$$y\int_{\frac{A_1-\frac{1}{y}}{y}}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t\leqslant\begin{cases}\frac{1}{A_1}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t, & y\in\left(0,\frac{1}{A_1}\right)\\ \frac{2}{A_1}\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t, & y\in\left[\frac{1}{A_1},\frac{2}{A_1}\right)\\ \int_{\frac{A_1-\frac{A_1}{2}}{1}}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t, & y\in\left[\frac{2}{A_1},1\right)\end{cases},$$
即
$$\lim_{A_1\to+\infty}\sup_{y\in(0,1)}\left(y\int_{\frac{A_1-\frac{1}{y}}{y}}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=0,$$
这就证明了原积分关于 $y\in(0,1)$ 一致收敛.

例题 15.13 讨论下述积分一致收敛性.

1.
$$\int_0^\infty\frac{\sin x\mathrm{d}x}{x\left(1+\alpha x^2\right)}\mathrm{d}x,\alpha\in[0,+\infty).$$

2.
$$\int_0^\infty\left[\frac{\sin(2x)}{x+\alpha}e^{-\alpha x}\right]\mathrm{d}x,\alpha\in(0,1).$$

3.
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x, y \in [a,+\infty), a>0; y \in (0,+\infty).$$

证明

1. 首先 $\left|\int_1^A \sin y\mathrm{d}y\right| \leqslant 2, \forall A>0$, 然后由
$$\frac{1}{x(1+\alpha x^2)} \leqslant \frac{1}{x}$$
我们知道 $\frac{1}{x(1+\alpha x^2)}$ 关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致递减到 0, 因此我们由一致收敛的 A-D 判别法证明了原积分关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致收敛.
2.
3.

例题 15.14 讨论下述积分一致收敛性.

1.
$$\int_0^2 \frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\mathrm{d}x, \alpha \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$
2.
$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}, \alpha \in (0,2).$$
3.
$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x, p \geqslant p_0 > 0.$$
4.
$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x, p>0, q>-1.$$

证明

1. 注意到
$$\int_0^2 \left|\frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\mathrm{d}x < \infty,$$
我们有原积分在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 一致收敛.
2. 首先
$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)|_0^1,$$
这是法发散的. 如果原积分在 $\alpha \in (0,2)$ 一致收敛, 那么类似例题15.1知 $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛, 这就是一个矛盾!, 至此我们证明了原积分在 $\alpha \in (0,2)$ 不一致收敛.
3. 由
$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{p_0-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x < \infty$$
得原积分在 $p \geqslant p_0 > 0$ 一致收敛.
4.

例题 15.15 判断 $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in (0,2)$ 连续性.

证明 首先
$$\sin x \sim x, x \to 0^+, \sin x \sim \pi - x, x \to \pi^-,$$
于是
$$\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}} \sim \frac{1}{\pi^{\alpha}}\frac{1}{x^{\alpha-1}}, x \to 0^+, \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}} \sim \frac{1}{\pi^{\alpha}}\frac{1}{(\pi-x)^{\alpha-1}}, x \to \pi^-.$$

因此 F 在 $\alpha<2$ 都是有定义的.

我们有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x+\int_1^{\pi-1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x.$$

对任何 $[a,b]\subset(0,2)$, 我们有

$$\int_0^{1}\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{b}(\pi-x)^{a}}\mathrm{d}x<\infty;$$
$$\int_{\pi-1}^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{a}(\pi-x)^{b}}\mathrm{d}x<\infty,$$

即两个含参变量反常积分都在 $[a,b]$ 一致收敛, 所以定义的函数在 $[a,b]$ 连续. 中间常义积分显然在 $[a,b]$ 连续, 至此我们证明了 F 在 $\alpha\in(0,2)$ 连续.

引理 15.1

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R[a,b]$ 且在 $x\in[a,b]$ 上一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

则 $f\in R[a,b]$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

证明 对任何 $\epsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{3(b-a)},\forall x\in[a,b],n\geqslant N.$$

因为 $f_N\in R[a,b]$, 存在 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f_N-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f_N\right)(x_i-x_{i-1})\right]\leqslant\frac{\epsilon}{3}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f\right)(x_i-x_{i-1})\right]\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f_N+\frac{\epsilon}{3(b-a)}-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f_N+\frac{\epsilon}{3(b-a)}\right)(x_i-x_{i-1})\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}f_N-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f_N\right)(x_i-x_{i-1})\right]+\frac{2\epsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\\&\leqslant\frac{\epsilon}{3}+\frac{2\epsilon}{3}=\epsilon,\end{aligned}$$

即 $f\in R[a,b]$.

现在对自然数 $n\geqslant N$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b\frac{\epsilon}{3(b-a)}\mathrm{d}x=\frac{\epsilon}{3},\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们完成了证明.

例题 15.16 设 $\int_0^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛于 $F(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)=\varphi(t)$ 对于一切 $t\in(0,+\infty)$

内闭一致收敛, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

注 本题要非常谨慎, 因为题目条件没有连续之类的性质. 做积分的意义要仔细考虑, 比如反常积分收敛定义的前提条件是函数内闭黎曼可积.

证明 先说明 φ 在 $(0,+\infty)$ 内闭黎曼可积. 对任何 $x\in(0,+\infty),[a,b]\subset(0,+\infty)$, 我们知道 $f(x,\cdot)$ 在 $[a,b]$ 黎曼可积. 考虑

$$f_n(t)\triangleq f(n,t),n=1,2,\cdots,$$

则 $f_n(t)$ 也在 $[a,b]$ 一致收敛到 φ, 因此由引理15.1得 $\varphi\in R[a,b]$.

相似引理15.1的换序证明, 我们知道

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t,\forall[a,b]\subset(0,+\infty).$$

因为 $\int_0^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛. 所以对任何 $\epsilon>0$ 都有 $A_0>0$ 使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon,\forall A_2\geqslant A_1\geqslant A_0,x>0.$$

于是让 $x\to+\infty$ 得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon,\forall A_2\geqslant A_1\geqslant A_0.$$

由 Cauchy 收敛准则知道 $\int_1^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 类似的考虑 0 附近, 我们知道 $\int_0^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛.

现在取 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 使得对一切 $x>0$ 都有

$$\left|\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\epsilon}{4},\left|\int_b^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\epsilon}{4};$$
$$\left|\int_0^a f(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\epsilon}{4},\left|\int_b^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\epsilon}{4}.$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|&\leqslant\left|\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&+\left|\int_b^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_b^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^a f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_0^a\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\left|\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|+\frac{\epsilon}{4}\cdot4,\end{aligned}$$

即

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_0^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon.$$

现在我们证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

✍ **练习 15.1** 我们为了计算 $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$, 那么有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin t dt\int_0^{\infty}e^{-ty^2}dy\\&\overset{*}{=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}e^{-ty^2}\sin t dt.\end{aligned}$$

问 $*$ 的换序成立的理由.

注我们先来分析一下问题有何困难, 首先被积函数不是非负的, 加绝对值之后也有

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}\left|e^{-ty^2}\sin t\right|dt=\int_0^{\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}dt=\infty.$$

因此难以使用一致收敛或者定理7.9进行换序.

证明 事实上只需证明

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\sin tdt\int_0^{\infty}e^{-ty^2}dy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}e^{-ty^2}\sin tdt. \tag{15.3}$$

注意到对 t 的积分变成了有限区间, 而之前不能用换序定理的原因就是 $|\sin t|$ 积分区间到 ∞ 的困难. 因此此时定理7.9或者一致收敛定理可以使用了, 我们就有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\sin tdt\int_0^{\infty}e^{-ty^2}dy=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\infty}\int_0^A\sin t\cdot e^{-ty^2}dtdy. \tag{15.4}$$

为了证明式(15.3), 通过式(15.4), 我们只需证明

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\infty}\int_A^{\infty}\sin t\cdot e^{-ty^2}dtdy=0.$$

注意到内层积分可以分部积分计算, 因此

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\infty}\int_A^{\infty}\sin t\cdot e^{-ty^2}dtdy=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-Ay^2}\left(y^2\sin A+\cos A\right)}{1+y^4}dy.$$

我们注意到显然的控制

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{e^{-Ay^2}\left(y^2\sin A+\cos A\right)}{1+y^4}\right|dy\leqslant\int_0^{\infty}\frac{1+y^2}{1+y^4}e^{-y^2}dy<\infty,\forall A\geqslant 1.$$

因此

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-Ay^2}\left(y^2\sin A+\cos A\right)}{1+y^4}dy=\int_0^{\infty}\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-Ay^2}\left(y^2\sin A+\cos A\right)}{1+y^4}dy=0.$$

这就证明了 $*$ 的换序成立.

笔记 可以看到换序是计算困难且繁琐的, 那么这题有无更好的方法呢, 事实上, 有的. 即标准的引入收敛因子即可.

考虑 $F(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-xt}dt, x\geqslant 0$, 容易由A-D 判别法看到 F 的定义积分在 $[0,1]$ 一致收敛, 因此

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-xt}dt=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

因为收敛因子的存在, 我们将极其容易换序计算 $F(x)$. 事实上

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-xt}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin tdt\int_0^{\infty}e^{-\left(y^2+x\right)t}dy\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin t\cdot e^{-\left(y^2+x\right)t}dtdy\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(y^2+x\right)^2}dy.\end{aligned}$$

此时上式最后的积分显然关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 因此直接换序就有

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(y^2+x\right)^2}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^4}dy=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

现在来看数学类竞赛真题.

例题 15.17 设 $\alpha>1$, 证明

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}x}\sin x\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}x}\sin x\mathrm{d}x.$$

证明 注意到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}x}\sin x\mathrm{d}t=\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}\mathrm{d}x.$$

由 A-D 判别法14.4, 我们知道 $\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-sx}\mathrm{d}x, s\geqslant 0$ 一致收敛. 于

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}\mathrm{d}x=\lim_{s\to 0^+}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-sx}\mathrm{d}x.$$

现在

$$\begin{aligned}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-sx}\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}\sin xe^{-sx}\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-t^{a}x}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}\sin xe^{-(s+t^{\alpha})x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(s+t^{\alpha})^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-sx}\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^{2\alpha}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}x}\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

来看武汉大学 2022 的数学分析考研真题.

例题 15.18 证明 $\int_{e^3}^{\infty}\frac{\sin(xy)}{\ln\ln y}\mathrm{d}y$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 非一致收敛.

证明 当 n 充分大, 我们有

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4}n}^{\frac{\pi}{2}n}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}y\right)}{\ln\ln y}\mathrm{d}y\right|\geqslant\int_{\frac{\pi}{4}n}^{\frac{\pi}{2}n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\ln\ln\left(\frac{\pi}{2}n\right)}\mathrm{d}y=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{n}{\ln\ln\left(\frac{\pi}{2}n\right)},$$

结合

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{n}{\ln\ln\left(\frac{\pi}{2}n\right)}\right)=+\infty$$

我们得 $\int_{e^3}^{\infty}\frac{\sin(xy)}{\ln\ln y}\mathrm{d}y$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 非一致收敛.

第 15 章 练习

1. (1.) 设 $f(\lambda)=\int_0^{\infty}x\sin\left(x^3-\lambda x\right)\mathrm{d}x$, 证明 $f\in C(\mathbb{R})$.
2. (2.) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 可积且在 $x=0,+\infty$ 为奇点, 证明:
$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$
3. (3.) 证明:$f(t)=\int_1^{\infty}\frac{\cos(xt)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[0,\pi]$ 至少有一个零点.
4. (4.) 讨论
$$f(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\mathrm{d}t$$
在 $(0,1)$ 连续性.
5. (5.) 设 $f\in R[0,1]$, 讨论
$$g(\alpha)=\int_0^1\frac{f(t)}{\sqrt{|t-\alpha|}}\mathrm{d}t$$
在 $(0,1)$ 连续性.

第 16 章 非数学类积分不等式

内容提要

- 可直接使用的著名积分不等式 16.1
- 重积分方法 16.2
- Cauchy 不等式相关题型 16.4
- 直接求导法 16.3
- 凸性相关题型 16.5
- 中值相关题型 16.6
- 数值比较类 16.7
- 杂题 16.8

16.1 可直接使用的著名积分不等式

引理 16.1 (Young 不等式初等形式)

设 $(x_i)_{i=1}^n \subset [0,+\infty), (p_i)_{i=1}^n \subset (1,+\infty)$, $\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}. \tag{16.1}$$

且等号成立条件为所有 $x_i, i = 1,2,\cdots,n$ 相等.

证明 不妨设 $x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$. 本结果可以取对数用初等 Jensen 不等式13.1证明, 即

$$(16.1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \ln x_i^{p_i} \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}\right),$$

而最后一个等价之后就是 ln 的上凸性本身给出.

注意, 我们在本部分可能书写为对测度 $d\mu$ 的积分. 对于非数学或者数学基础暂时不够的同学我们有如下看待:

定义 16.1

(a): $d\mu = g(x)\,dx$, 这里 g 是一个在区间上内闭[a]黎曼可积的函数.

(b): 若 $E \subset \mathbb{Z}$, 则 $\int_E f(x)\,d\mu = \sum\limits_{n\in E} f(n)$.

[a]所谓内闭, 即任何闭区间上.

在初等数学中, 我们知道如下Holder 不等式, 我们来看积分版本.

定理 16.1 (Holder 不等式积分形式)

设 $\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1, p_i > 1, i = 1,2,\cdots,n$, 在积分有意义下, 必有

$$\int_E \prod_{i=1}^n |f_i|\,d\mu \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{16.2}$$

注我们并没有对 f_i 做过多准确的描述, 是因为读者只需熟知, holder 不等式16.1对任何种类的积分[1]都是成立的.

证明 若某个 $\int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu$, 则[2] $f_i = 0, a.e.$, 则 $\prod\limits_{i=1}^n |f_i|\,d\mu = 0, a.e.$, 故不等式(16.2)成立.

[1]第二类曲线和第二类曲面积分除外.

[2]非数学类一般处理连续的情况, 理解为 $f_i \equiv 0$.

现在假定对每一个 i 都有 $\int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu \neq 0$, 我们利用 Young 不等式16.1, 我们有

$$\int_E \prod_{i=1}^n \frac{|f_i|}{\left(\int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_i}}} d\mu \leqslant \int_E \sum_{i=1}^n \frac{|f_i|^{p_i}}{p_i \int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu} d\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \int_E \frac{|f_i|^{p_i}}{\int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu} d\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1,$$

这就证明了(16.2).

特别的, 我们有非常非常重要的

推论 16.1 (Cauchy 不等式)

$$\left(\int_E f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2\,\mathrm{d}\mu \int_E |g(x)|^2\,\mathrm{d}\mu. \tag{16.3}$$

♡

注

1. 式(16.3)左边不含绝对值可以如此得到
$$\left|\int_E f(x)\,g(x)\,d\mu\right|^2 \leqslant \left(\int_E |f(x)\,g(x)|\,d\mu\right)^2.$$
2. 当 f, g 连续且 $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}x$ 时, 等号成立条件是 f, g 线性相关, 即存在不全为 0 的常数 c_1, c_2 使得 $c_1 f + c_2 g = 0$.

♠ 当 f, g 只是可积, $\mathrm{d}\mu$ 是一般测度, 等号成立条件是 f, g 几乎处处线性相关, 即存在不全为 0 的常数 c_1, c_2 使得 $c_1 f + c_2 g = 0$ 依测度 μ 对几乎所有 $x \in E$ 成立.

引理 16.2 (拉格朗日恒等式)

设 $a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \tag{16.4}$$

♡

注这个可以直接使用的初等数学结果证明可见百度百科.

定理 16.2 (反向 Holder 不等式 ♠)

设

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1, 0 < p_1 < 1, p_1 + p_i < 0, i = 2, 3, \cdots, n. \tag{16.5}$$

在积分有意义下, 必有

$$\int_E \prod_{i=1}^n |f_i|\,d\mu \geqslant \prod_{i=1}^n \left(\int_E |f_i|^{p_i}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{16.6}$$

♡

笔记 当 $n = 2$, 条件(16.5)可以改为 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, 0 < p_1 < 1$, 这是因为

$$\frac{1}{p_2} = 1 - \frac{1}{p_1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} > 0 \Rightarrow p_1 + p_2 < 0.$$

也可以改为 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, p_1 < 0$, 因为此时有

$$\frac{1}{p_2} = 1 - \frac{1}{p_1} > 1 \Rightarrow 0 < p_2 < 1.$$

证明 由

$$\left(\int_E |f_1|^{p_1}\,d\mu\right) = \left(\int_E |f_1 f_2 \cdots f_n|^{p_1} |f_2|^{-p_1} |f_3|^{-p_1} \cdots |f_n|^{-p_1}\,d\mu\right)$$

$$\overset{\text{Holder 不等式16.1}}{\leqslant} \left(\int_E |f_1 f_2 \cdots f_n|\,d\mu\right)^{p_1} \left(\int_E |f_2|^{p_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{-\frac{p_1}{p_2}} \cdots \left(\int_E |f_n|^{p_n}\,\mathrm{d}\mu\right)^{-\frac{p_1}{p_n}},$$

我们有(16.6)成立.

定理 16.3 (闵可夫斯基不等式 ♠)

记 $\|f\|_p=\left(\int_F|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, $p\geqslant 1$, 那么我们有

$$\left\|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right\|_p\leqslant\int_E\|f(x,y)\|_p\,d\nu(y). \tag{16.7}$$

♡

笔记

1. 式(16.7)可以类比积分的绝对值不等式记忆;
2. 式(16.7)写的更初等, 即

$$\left(\int_F\left|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_E\left(\int_F|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y). \tag{16.8}$$

   从(16.8)看到闵可夫斯基积分不等式还有交换积分次序的作用.
3. 取 $d\nu(y)$ 是计数测度, 即定义16.1中的 (b), 这样就把积分看成了求和并有

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_i\right\|_p\leqslant\sum_{i=1}^n\|f_i\|_p.$$

   特别的 $n=2$ 就有

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{16.9}$$

证明 记 $h(x)=\left|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right|^{p-1}$, 运用 Holder 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_F\left|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)&=\int_F h(x)\cdot\left|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right|d\mu(x)\\
&\leqslant\int_F h(x)\cdot\int_E|f(x,y)|\,d\nu(y)\,d\mu(x)=\int_E\int_F|f(x,y)|\cdot h(x)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\\
&\leqslant\int_E\left[\left(\int_F|h(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_F|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right]d\nu(y)\\
&=\left(\int_F|h(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\int_E\left(\int_F|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y),
\end{aligned}$$

将 h 代回并两边约去即得不等式

$$\left(\int_F\left|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{q}}\leqslant\int_E\left(\int_F|f(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y),$$

这恰好就是不等式(16.8).

式(16.9)取通常积分的情况是经典积分不等式习题, 即

例题 16.1 对自己要求很低的同学记忆的最初等的闵可夫斯基不等式 对 $f,h\in C[a,b]$, $p>1$, 证明

$$\left(\int_a^b|f(x)+h(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|h(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 16.4 (反向闵可夫斯基不等式 ♠)

记 $\|f\|_p\triangleq\left(\int_F|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, $p\in(-\infty,1)\setminus\{0\}$, 若 f 非负, 我们有

$$\left\|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right\|_p\geqslant\int_E\|f(x,y)\|_p\,d\nu(y). \tag{16.10}$$

♡

笔记 自然的, 之前讨论的初等形式或者离散形式都有对应的版本.

证明

$$\begin{aligned}
\left\|\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right\|_p^p &= \int_F\left(\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\\
&= \int_F\left[\left(\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right)^{p-1}\cdot\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x)\\
&= \int_E\left\{\int_F\left[\left(\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right)^{p-1}\cdot f(x,y)\right]d\mu(x)\right\}d\nu(y)\\
&\overset{\text{反向 Holder16.2}}{\geqslant} \int_E\left\{\left[\int_F\left(\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1-\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_F f^p(x,y)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right\}d\nu(y)\\
&= \left[\int_F\left(\int_E f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1-\frac{1}{p}}\int_E\left(\int_F f^p(x,y)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y),
\end{aligned}$$

这就给出了(16.10).

定理 16.5 (Jensen 不等式积分形式)

设 φ 是下凸函数且 $p(x)\geqslant 0,\int_a^b p(x)\,dx>0$, 则在有意义时, 必有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}. \tag{16.11}$$

♡

笔记

1. 类似的对上凸函数, 不等式(16.11)反号.
2. 非数学类只掌握 $\varphi\in C^2$ 时的情形.

证明 为书写简便, 我们记 $d\mu=\frac{p(x)}{\int_a^b p(y)dy}dx$, 那么有 $\int_a^b 1d\mu=1$. 于是我们记 $x_0=\int_a^b f(x)\,d\mu$ 并利用下凸函数恒在切线上方

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0),$$

就有

$$\int_a^b\varphi(f(x))\,d\mu\geqslant\int_a^b\left[\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(f(x)-x_0)\right]d\mu=\varphi(x_0)=\varphi\left(\int_a^b f(x)\,d\mu\right),$$

这就完成了证明. 一般情况可利用下凸函数可以被 C^2 的下凸函数逼近得到[3], 例如定理 Bernstein 多项式保凸性一致逼近13.47.

我们列举直接套用 Jensen 不等式的真题.

例题 16.2

1. 对连续正值函数 f, 我们有
$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,dx.$$
2. 对连续函数 f, 我们有
$$\sqrt{1+\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\sqrt{1+f^2(x)}dx.$$

例题 16.3 卷积不等式 ♠ 对 $\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-1, 1\leqslant r,p,q\leqslant\infty$, 当下面式子有意义时, 成立不等式

$$||g*f||_{L^q}\leqslant||g||_{L^r}\cdot||f||_{L^p}. \tag{16.12}$$

注本结果非数学无需掌握. 这里

$$||f||_{L^p}\triangleq\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},||f||_{L^q}\triangleq\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},||f||_{L^r}\triangleq\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}},(g*f)(x)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}g(y)f(x-y)\,dy.$$

[3]这里逼近步骤说的比较模糊, 是因为具体情况具体分析, 把内容表述的太仔细, 使用 Jensen 不等式时会处处担心.

注意 $\|f\|_{L^\infty}$ 表示其本性上确界, 对于连续函数的情况, 就是上确界.

笔记 证明其实并不困难, 但是过于经典. 最重要的情况就是

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f*g|(x)\,dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx.$$

证明 证明参考Grafakos, Loukas Classical Fourier analysis. Third edition. p.22 Theorem 1.2.12.

16.2 重积分方法

定理 16.6 (切比雪夫不等式积分版本)

设 $p\in R[a,b]$ 且非负, f,g 在 $[a,b]$ 上是单调函数, 则

$$\begin{cases}\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right)\leqslant\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right), & f,g\text{单调性相同},\\ \left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right)\geqslant\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right), & f,g\text{单调性相反}.\end{cases}\tag{16.13}$$

笔记 本不等式要牢记于心, 它是很多不等式的基本模型, 其特征就是出现单调性.

证明 事实上

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\,dx\right)-\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\right)\\=&\left(\int_a^b p(x)f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(y)g(y)\,dy\right)-\left(\int_a^b p(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(y)f(y)g(y)\,dy\right)\\=&\iint_{[a,b]^2}p(x)p(y)g(y)[f(x)-f(y)]\,dxdy\\\overset{\text{对称的}}{=}&\iint_{[a,b]^2}p(y)p(x)g(x)[f(y)-f(x)]\,dxdy\\=&\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2}p(x)p(y)[g(y)-g(x)][f(x)-f(y)]\,dxdy,\end{aligned}$$

这就证明了不等式(16.13).

例题 16.4 设 $f\in C[0,1]$ 递减恒正, 证明

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}\geqslant\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx}.\tag{16.14}$$

证明 在不等式16.6中取 $p(x)=f(x)$ 并对相反单调性的 $x,f(x)$ 运用即可.

例题 16.5 反向切比雪夫不等式 设 $f,g\in R[a,b]$ 且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx\right|\leqslant\frac{(M_2-m_2)(M_1-m_1)}{4}.\tag{16.15}$$

证明 不妨设 $a=0,b=1$, 则记 $A=\int_0^1 f(x)\,dx, B=\int_0^1 g(x)\,dx$. 于是[4]

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\right|^2=\left|\int_0^1(f(x)-A)(g(x)-B)\,dx\right|^2\\\overset{\text{Cauchy 不等式16.1}}{\leqslant}&\int_0^1|f(x)-A|^2\,dx\cdot\int_0^1|g(x)-B|^2\,dx\\=&\left(\int_0^1|f(x)|^2\,dx-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\right)\cdot\left(\int_0^1|g(x)|^2\,dx-\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2\right).\end{aligned}$$

[4]关键恒等式.

注意到

$$\int_0^1 (M_1 - f)(f - m_1)\,dx = M_1 A + m_1 A - M_1 m_1 - \int_0^1 |f(x)|^2\,dx,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 &= (M_1 - A)(A - m_1) - \int_0^1 (M_1 - f)(f - m_1)\,dx \\ &\leqslant (M_1 - A)(A - m_1) \leqslant \frac{(M_1 - m_1)^2}{4}.\end{aligned}$$

类似的有

$$\int_0^1 |g(x)|^2\,dx - \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{(M_2 - m_2)^2}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx\right|^2 \leqslant \frac{(M_1 - m_1)^2}{4}\frac{(M_2 - m_2)^2}{4},$$

即不等式(16.14)成立.

例题 16.6 设 $f \in C[a,b]$, 证明

$$\int_a^b e^{f(x)}dx \int_a^b e^{-f(x)}dx \geqslant (b-a)^2. \tag{16.16}$$

证明 注意到

$$\int_a^b e^{f(x)}dx \int_a^b e^{-f(x)}dx = \iint_{[a,b]^2} e^{f(x)-f(y)}dxdy = \iint_{[a,b]^2} e^{f(y)-f(x)}dxdy,$$

于是运用均值不等式就有

$$\int_a^b e^{f(x)}dx \int_a^b e^{-f(x)}dx = \frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2}\left[e^{f(x)-f(y)} + e^{f(y)-f(x)}\right]dxdy \geqslant \iint_{[a,b]^2} 1dxdy = (b-a)^2,$$

这就完成了证明.

例题 16.7 设 $f \in C[0,1]$ 使得

$$0 \leqslant f(x) < 1, \forall x \in [0,1]. \tag{16.17}$$

证明

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1 - f(x)}dx \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{1 - \int_0^1 f(x)\,dx}. \tag{16.18}$$

证明 **Method 1** 由 Jensen 不等式积分形式16.5和 $\frac{x}{1-x}, x \in [0,1)$ 下凸性即得(16.18).

Method 2 读者自行尝试重积分方法.

例题 16.8 设 $f \in C[a,b]$ 且

$$0 \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]. \tag{16.19}$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geqslant \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.20}$$

证明 一方面

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 &= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\left[\cos x\cos y + \sin x\sin y\right]dxdy \\ &= \iint_{[a,b]^2} f(x)f(y)\cos(x-y)\,dxdy.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2=\iint_{[a,b]^2} f(x)\,f(y)\,dxdy.$$

于是不等式(16.20)变为

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)\,f(y)\,[1-\cos(x-y)]\,dxdy\leqslant\frac{M^2(b-a)^4}{12}. \tag{16.21}$$

事实上

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)\,f(y)\,[1-\cos(x-y)]\,dxdy\leqslant M^2\iint_{[a,b]^2}\frac{(x-y)^2}{2}dxdy=\frac{M^2(b-a)^4}{12},$$

这里运用了不等式

$$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

这就得到了不等式(16.21).

例题 16.9 设正值函数 $f,g\in C[a,b]$, 证明

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx\int_a^b\frac{f(x)\,g(x)}{f(x)+g(x)}dx\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx. \tag{16.22}$$

证明 一方面

$$\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx=\iint_{[a,b]^2} f(x)\,g(y)\,dxdy.$$

另外一方面

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx\int_a^b\frac{f(x)\,g(x)}{f(x)+g(x)}dx=\iint_{[a,b]^2}\frac{f(x)\,g(x)\,[f(y)+g(y)]}{f(x)+g(x)}dxdy.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx\int_a^b\frac{f(x)\,g(x)}{f(x)+g(x)}dx-\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx\\
=&\iint_{[a,b]^2}\frac{f(x)\,g(x)\,[f(y)+g(y)]-f(x)\,g(y)\,[f(x)+g(x)]}{f(x)+g(x)}dxdy\\
=&\iint_{[a,b]^2}\frac{f(x)\,[g(x)\,f(y)-g(y)\,f(x)]}{f(x)+g(x)}dxdy\\
\overset{\text{交换}f,g}{=}&\iint_{[a,b]^2}\frac{g(x)\,[f(x)\,g(y)-f(y)\,g(x)]}{g(x)+f(x)}dxdy\\
=&\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2}\frac{[f(x)-g(x)]\,[g(x)\,f(y)-g(y)\,f(x)]}{f(x)+g(x)}dxdy\\
\overset{\text{交换}x,y}{=}&\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2}\frac{[f(y)-g(y)]\,[g(y)\,f(x)-g(x)\,f(y)]}{f(y)+g(y)}dxdy\\
=&\frac{1}{4}\iint_{[a,b]^2}\left[\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}-\frac{f(y)-g(y)}{f(y)+g(y)}\right][g(x)\,f(y)-g(y)\,f(x)]\,dxdy\\
=&-\frac{1}{2}\iint_{[a,b]^2}\frac{[g(x)\,f(y)-g(y)\,f(x)]^2}{[f(x)+g(x)]\,[f(y)+g(y)]}dxdy\leqslant 0.
\end{aligned}$$

16.3 直接求导法

例题 16.10 设 $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=0,0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, 证明

$$\left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\,dx, \tag{16.23}$$

并判断取等条件.

我们不证明本题, 证明更一般的

例题 16.11 设 $m\in\mathbb{N}$, f 在 $[0,a]$ 可导且 $f(0)=0, 0\leqslant f'(x)\leqslant\lambda, \lambda>0$ 为常数, 证明

$$\left[\int_0^a f(x)\,dx\right]^m\geqslant\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^a f^{2m-1}(x)\,dx, \tag{16.24}$$

并判断取等条件.

证明 定义

$$g(x)=\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^m-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}\int_0^x f^{2m-1}(t)\,dt.$$

求导得

$$\begin{aligned}g'(x)&=mf(x)\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^{m-1}-\frac{m}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-1}(x)\\&=mf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^{m-1}-\frac{1}{(2\lambda)^{m-1}}f^{2m-2}(x)\right].\end{aligned}$$

又

$$\left[\int_0^x f(t)\,dt-\frac{f^2(x)}{2\lambda}\right]'=f(x)-\frac{f(x)f'(x)}{\lambda}=\frac{f(x)}{\lambda}\left[\lambda-f'(x)\right]\geqslant 0,$$

于是我们有

$$g'(x)\geqslant g'(0)=0,$$

从而 g 递增且

$$g(a)\geqslant g(0)=0,$$

这就是不等式(16.24).

要使得等号成立, 我们需要 g 为常数, 故需要 $f\equiv 0$ 或者

$$\int_0^x f(t)\,dt-\frac{f^2(x)}{2\lambda}\equiv 0,$$

即取等条件是

$$f(x)=0\text{或者}f(x)=\lambda x.$$

例题 16.12 设 $f,g\in C[a,b]$ 使得 f 递增且 $0\leqslant g\leqslant 1$, 证明

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant\int_{b-\int_a^b g(t)dt}^b f(x)\,dx. \tag{16.25}$$

证明 考虑

$$h(y)=\int_a^{a+\int_a^y g(t)dt}f(x)\,dx-\int_a^y f(x)g(x)\,dx.$$

则利用

$$a+\int_a^y g(x)\,dx\leqslant a+\int_a^y 1dx=y,$$

我们有

$$h'(y)=g(y)f\left(a+\int_a^y g(t)\,dt\right)-f(y)g(y)\leqslant 0\to h(b)\leqslant h(a)=0,$$

故不等式(16.56)左侧得证. 另一侧不等式同理可得, 这就证明了不等式(16.25).

例题 16.13 设非负函数 f 在 $[0,+\infty)$ 连续可微且 $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$, 证明对任何 $\alpha>1, t\geqslant 0$, 成立

$$\int_0^t f^\alpha(x)\,dx\leqslant\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \tag{16.26}$$

证明 考虑 $g(y)=\left(\int_0^y f(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}-\int_0^y f^{\alpha}(x)\,dx$, 则

$$\begin{aligned}g'(y)&=\frac{\alpha+1}{2}\left(\int_0^y f(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(y)-f^{\alpha}(y)\\&=f(y)\left[\frac{\alpha+1}{2}\left(\int_0^y f(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}-f^{\alpha-1}(y)\right].\end{aligned}$$

现在

$$h(y)=\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}}\int_0^y f(x)\,dx-f^2(y),h'(y)=\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}}f(y)-2f(y)f'(y),$$

我们有

$$h'(y)\geqslant\left(\frac{1+1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}}f(y)-2f(y)f'(y)=f(y)[1-2f'(y)]\geqslant 0,$$

这就证明了

$$h(y)\geqslant h(0)=0\Rightarrow g'(y)\geqslant 0\Rightarrow g(y)\geqslant g(0)=0,$$

故不等式(16.26)成立.

例题 16.14 设 f 在 $[0,b]$ 连续且递增, 当 $a\in[0,b)$, 证明

$$\int_a^b xf(x)\,dx\geqslant\frac{b}{2}\int_0^b f(x)\,dx-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx.\tag{16.27}$$

证明 考虑

$$F(y)=\int_a^y xf(x)\,dx-\frac{y}{2}\int_0^y f(x)\,dx+\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx,$$

则

$$F'(y)=\frac{1}{2}\int_0^y[f(y)-f(x)]\,dx\geqslant 0\Rightarrow F(b)\geqslant F(a)=0,$$

这就给出了不等式(16.27).

16.4 Cauchy 不等式相关题型

例题 16.15 设 $f\in C^1[0,1]$, 解决下列问题.

1. 若 $f(0)=0$, 证明:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\tag{16.28}$$

2. 若 $f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\tag{16.29}$$

笔记 本题积分不等式最佳系数见定理16.7.

证明

1. 由牛顿莱布尼兹公式得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y.$$

于是由 Cauchy 不等式16.1得

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left|\int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left(\int_0^x 1^2\mathrm{d}y\cdot\int_0^x|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

2. 靠近谁插谁, 所以我们要在 $x=\frac{1}{2}$ 断开, 即由 Cauchy 不等式16.1得

$$|f(x)|^2=\left|\int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\leqslant x\int_0^x|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant x\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y,\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right];$$

$$|f(x)|^2=\left|\int_x^1 f'(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\leqslant(1-x)\int_x^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant(1-x)\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y,\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\cdot\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y+\frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^1|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

例题 16.16 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.\tag{16.30}$$

笔记 从条件 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 来看, 我们待定 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

然后利用 Cauchy 不等式16.1得

$$\left(\int_0^1(x-a)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1(x-a)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

为了使得不等式最精确, 我们自然希望 $\int_0^1(x-a)^2\,\mathrm{d}x$ 达到最小值. 读者也可以直接根据对称性猜测出 $a=\frac{1}{2}$ 就是达到最小值的 a.

证明 利用 Cauchy 不等式16.1得

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\left(\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,\end{aligned}$$

这就证明了(16.30).

例题 16.17 设

$$f\in C^2[0,1],f(0)=f(1)=0,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明:

$$\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant2540160\left(\int_0^1 x(1-x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\tag{16.31}$$

注本题计算较大, 但方法比较重要, 实现不想算积分不妨借助软件完成初等计算.

笔记

1. 待定 $g\in\mathbb{R}[x]$, 然后由 Cauchy 不等式16.1得

$$\int_0^1 g^2(x)\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

为了分部积分转移导数成立且注意到 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 我们希望[5] $g''(x)=x(1-x)+c$. 为了不出现边界项,

[5]不等式两边乘以常数倍不影响, 因此首系数随意假定.

我们需要 $g(1)=g(0)=0$. 于是猜想

$$g(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4-\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{12}\right)x+\frac{c}{2}x^2.$$

为了使得

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{756c^2+306c+31}{90720}$$

达到最小, 我们可取 $c=-\frac{17}{84}$.

2. 我们指出系数 2540160 是最佳的. 事实上, 考虑

$$f''(x)=\left(-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-\frac{17x^2}{168}+\frac{x}{56}\right),$$

可解出一个满足条件的取等函数

$$f(x)=-\frac{x^6}{360}+\frac{x^5}{120}-\frac{17}{2016}x^4+\frac{x^3}{336}-\frac{x}{10080}.$$

证明 令

$$g(x)\triangleq-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-\frac{17x^2}{168}+\frac{x}{56},x\in[0,1],$$

我们有

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2540160}.$$

于是由 Cauchy 不等式16.1得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_0^1 g''(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left[\int_0^1\left(-x^2+x-\frac{17}{84}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\&=\left[\int_0^1 x(1-x)f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2,\end{aligned}$$

即(16.31)成立.

例题 16.18 设 $f\in C^1[0,1]$, $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\,dx=0$, 证明

$$\int_0^1|f'(x)|^2\,dx\geqslant 27\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.\tag{16.32}$$

笔记 证明的思想参考两道大学生数学竞赛题题目的深刻剖析.

证明 为了分部积分提供 0 边界且求导之后不留下东西, 设 $g(0)=g(1)=0$ 且 g 是一次函数, 这不可能, 于是只能是分段函数 $g(x)=\begin{cases}x-1, & c\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 0\leqslant x\leqslant c\end{cases}$. 为了让 g 连续会发现 $c=c-1$, 这不可能. 结合 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f(x)\,dx=0$, 所以我们插入一段来使得连续, 因此真正构造的函数为

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 1-2x, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\end{cases}.$$

于是由 Cauchy 不等式16.1, 我们有[6]

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx\int_0^1 |g(x)|^2\,dx &\geqslant \left(\int_0^1 f'(x)\,g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx\right)^2\\ &= \left(\int_0^{\frac13} f(x)\,dx - 2\int_{\frac13}^{\frac23} f(x)\,dx + \int_{\frac23}^1 f(x)\,dx\right)^2\\ &= \left(\int_0^{\frac13} f(x)\,dx + \int_{\frac13}^{\frac23} f(x)\,dx + \int_{\frac23}^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2,\end{aligned}$$

结合 $\int_0^1 |g(x)|^2\,dx = \frac{1}{27}$, 这就给出了不等式(16.32).

例题 16.19 设 $f\in C[0,1]$ 满足

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -2\int_{\frac12}^1 g(x)\,dx, g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, x\in[0,1]. \tag{16.33}$$

证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \geqslant \frac{849}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.34}$$

笔记 由(16.35)可待定 $C\in\mathbb{R}$ 构造

$$h(x) = \begin{cases} x^2+C-2x, & x\in\left[\frac12,1\right]\\ x^2+C-1, & x\in\left[0,\frac12\right]\end{cases}.$$

于是利用 Cauchy 不等式16.1就有

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\int_0^1 |h(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx\right)^2 = \left((C-2)\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

为了使得不等式最精确从而解出[7]C.

证明 注意到

$$\begin{aligned}-2\int_{\frac12}^1 g(x)\,dx &= -2\int_{\frac12}^1\left(\int_0^x f(y)\,dy\right)dx\\ &= -2\int_0^{\frac12} f(y)\,dy\int_{\frac12}^1 dx - 2\int_{\frac12}^1 f(y)\,dy\int_y^1 dx\\ &= -\int_0^{\frac12} f(y)\,dy - 2\int_{\frac12}^1 (1-y)\,f(y)\,dy,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \int_{\frac12}^1 (1-2x)\,f(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{16.35}$$

现在取 $h(x) = \begin{cases} x^2+\frac{237}{260}-2x, & x\in\left[\frac12,1\right]\\ x^2-\frac{23}{260}, & x\in\left[0,\frac12\right]\end{cases}$, 利用 Cauchy 不等式16.1就有

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\int_0^1 |h(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx\right)^2 = \left(-\frac{283}{260}\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

注意到

$$\int_0^1 |h(x)|^2\,dx = \frac{283}{50700},$$

[6]虽然 g 不是处处可导的, 但只要导数除去至多可数集外存在且导数可积, 就可以直接分部积分或者用牛顿莱布尼兹公式.

[7]如果你觉得计算较大, 不妨借助软件完成.

于是(16.34)成立, 这就完成了证明.

例题 16.20 设 $f\in C^1[0,\pi]$ 且满足 $\int_0^\pi f(x)\,dx=0$, 证明

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\,dt},\forall x\in[0,\pi].$$

证明 事实上取

$$g(t)=\begin{cases}t-\pi, & t\in[x,\pi]\\ t, & t\in[0,x]\end{cases},$$

则利用 Cauchy 不等式16.1就有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi g^2(t)\,dt\int_0^\pi |f'(t)|^2\,dt&\geqslant\left[\int_0^\pi g(t)f'(t)\,dt\right]^2\\ &=\left[\int_x^\pi (t-\pi)f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt\right]^2\\ &=\left[-(x-\pi)f(x)-\int_x^\pi f(t)\,dt+xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt\right]^2\\ &=\left[\pi f(x)-\int_0^\pi f(t)\,dt\right]^2\\ &=\pi^2|f(x)|^2,\end{aligned}$$

以及

$$\int_0^\pi |g(t)|^2\,dt=\int_x^\pi (t-\pi)^2\,dt+\int_0^x t^2dt=\frac{\pi}{3}\left(3x^2-3x\pi+\pi^2\right).$$

因此

$$|f(x)|^2\leqslant\frac{1}{3\pi}\left(3x^2-3x\pi+\pi^2\right)\int_0^\pi |f'(t)|^2\,dt\leqslant\frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\,dt,$$

这恰好就是

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{3}\int_0^\pi |f'(t)|^2\,dt},\forall x\in[0,\pi].$$

例题 16.21 设 $f,g\in R[a,b]$ 满足

$$0<m\leqslant f(x)\leqslant M,\int_a^b g(x)\,dx=0.$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

笔记 待定 $k\in\mathbb{R}$ 用 Cauchy 不等式16.1有

$$\int_a^b[f(x)-k]^2\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_a^b[f(x)-k]g(x)\,dx\right)^2.$$

你的目标是寻求 $k\in\mathbb{R}$ 使得右边达到最小, 从而得到的不等式最精确. 实际做题中可以无需展示试探出 k 的过程.

证明 事实上利用 Cauchy 不等式16.1就有

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 &= \left(\int_a^b \left[f(x)-\frac{2mM}{m+M}\right]g(x)\,dx\right)^2\\ &\leqslant \int_a^b \left[f(x)-\frac{2mM}{m+M}\right]^2 dx\int_a^b g^2(x)\,dx\\ &\leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自

$$\left[f(x)-\frac{2mM}{m+M}\right]^2-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f^2(x)=\frac{4mM\left[f(x)-M\right]\left[f(x)-m\right]}{(M+m)^2}\leqslant 0.$$

我们完成了证明.

练习 16.1 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)=f'(0)=0, f'(1)=1$. 证明

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\geqslant 4.$$

证明 对任何 $a,c\in\mathbb{R}$, 注意到由 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\int_0^1 (ax+c)^2\,dx &\geqslant \left(\int_0^1 f''(x)(ax+c)\,dx\right)^2\\ &= \left(a+c-a\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2\\ &= (a+c)^2.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\geqslant \frac{3(a+c)^2}{a^2+3c^2+3ac}=\frac{3\left(\frac{a}{c}+1\right)^2}{\frac{a^2}{c^2}+3+3\frac{a}{c}}.$$

由 a,c 任意性我们有

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\geqslant \sup_{a,c\in\mathbb{R}}\frac{3\left(\frac{a}{c}+1\right)^2}{\frac{a^2}{c^2}+3+3\frac{a}{c}}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{3(t+1)^2}{t^2+3t+3}=4.$$

笔记 注意到 $\frac{3(t+1)^2}{t^2+3t+3}$ 在 $t=-3$ 取最大值, 因此在考场上, 我们可以这么书写

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\int_0^1 (3x-1)^2\,dx\geqslant\left(\int_0^1 f''(x)(3x-1)\,dx\right)^2=4,\int_0^1(3x-1)^2\,dx=1,$$

这就完成了证明.

例题 16.22 反向 Cauchy 不等式 设 $f,g\in R[a,b], g\geqslant 0, 0<m\leqslant f\leqslant M$, 证明

$$\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}dx\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]^2.\tag{16.36}$$

证明 左边就是 Cauchy 不等式16.1本身. 右边注意到[8]

$$\frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}g(x)\geqslant 0\Rightarrow (M+m)\,g(x)-mM\frac{g(x)}{f(x)}-f(x)\,g(x)\geqslant 0.$$

于是利用初等均值不等式, 我们有

$$\int_a^b (M+m)\,g(x)\,dx\geqslant\int_a^b mM\frac{g(x)}{f(x)}dx+\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\geqslant 2\sqrt{mM}\sqrt{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\cdot\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}dx},$$

[8]第一次见一定是积累.

整理一下即得(16.36).

例题 16.23 设 $f\in C^2[0,2]$, 证明

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,dx \geqslant \frac{3}{2}[f(0)+f(2)-2f(1)]^2. \tag{16.37}$$

证明 不妨设 $f(0)=f(2)=0, f(1)=1$, 这是因为 $f(0)+f(2)-2f(1)=0$ 时, 显然有(16.37)成立. 当 $f(0)+f(2)-2f(1)\neq 0$, 此时待定 $cf-ax-b$ 使得有给定参数且不影响积分值. 因此需要

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & f(2) \\ 0 & -1 & f(0) \\ -1 & -1 & f(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注意到系数矩阵行列式不为 0, 因此就存在满足要求的 a,b,c, 从而可以不妨设了.

现在考虑 $g(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$, 则由 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\int_0^2 |f''(x)|^2\,dx\int_0^2 |g(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^2 f''(x)g(x)\,dx\right)^2=[f(0)+f(2)-2f(1)]^2=4,$$

于是结合 $\int_0^1 |g(x)|^2\,dx=\frac{1}{3}$. 我们就得到了不等式(16.37).

例题 16.24 设 $f\in C^1[0,1], f(0)=f(1)=-\frac{1}{6}$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{4}. \tag{16.38}$$

笔记 注意到不等式左右不是齐次的, 不是自然的不等式, 但我们一定可以得到一个自然的不等式.

证明 待定 $c\in\mathbb{R}$, 于是由 Cauchy 不等式16.1得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx\int_0^1 (x+c)^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 f'(x)(x+c)\,dx\right)^2=\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

于是我们有

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant \frac{\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 (x+c)^2\,dx}=\frac{\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}{\frac{3c^2+3c+1}{3}}.$$

现在期望有一个恒成立的不等式

$$s\left(\frac{1}{6}+t\right)^2\geqslant 2t+\frac{1}{4}\Leftrightarrow \text{二次函数判别式}\Delta=\frac{12-s}{3}\leqslant 0.$$

于是代入 s 表达式得

$$\frac{12-s}{3}=\frac{3(2c+1)^2}{3c^2+3c+1}\leqslant 0,$$

即取 $c=-\frac{1}{2}$ 即可. 这就证明了不等式(16.38).

例题 16.25opial 不等式

1. 设 $f\in C^1[a,b], p\geqslant 0, q\geqslant 1$ 且 $f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)|^p\,|f'(x)|^q\,dx\leqslant \frac{q(b-a)^p}{p+q}\int_a^b |f'(x)|^{p+q}\,dx. \tag{16.39}$$

2. 若还有 $f(b)=0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)|^p\,|f'(x)|^q\,dx\leqslant \frac{q(b-a)^p}{(q+p)2^p}\int_a^b |f'(x)|^{p+q}\,dx. \tag{16.40}$$

笔记 说白了证明的想法就是注意变限积分视为整体凑微分.

证明

1. 对自己要求不高的读者只掌握 $p=q=1$ 的情况, 即

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,dx \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx. \tag{16.41}$$

此时直接凑微分得

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,dx = \int_a^b \left|\int_a^x f'(y)\,dy\cdot f'(x)\right| dx \leqslant \int_a^b \left(\int_a^x |f'(y)|\,dy\right) d\int_a^x |f'(y)|\,dy = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(y)|\,dy\right)^2.$$

由 cauchy 不等式16.1知不等式(16.41)成立.

本题的真正证明: 只证 $q>1$, $q=1$ 可类似得到. 考虑

$$f(x)=\int_a^x f'(y)\,dy, F(x)=\int_a^x |f'(y)|^q\,dy.$$

则由 Holder 不等式16.1, 我们知道

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_a^x |f'(y)|\,dy\right)^p \leqslant \left(\int_a^x |f'(y)|^q\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_a^x 1^{q'}\,dy\right)^{\frac{p}{q'}} = F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p}{q'}},$$

这里 $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$.

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^p|f'(x)|^q\,dx &\leqslant \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p}{q'}}|f'(x)|^q\,dx = \int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)(x-a)^{\frac{p}{q'}}\,dF(x)\\ &\leqslant (b-a)^{\frac{p}{q'}}\int_a^b F^{\frac{p}{q}}(x)\,dF(x) = \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p}{q'}}F^{\frac{p}{q}+1}(b)\\ &= \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p}{q'}}\left(\int_a^b |f'(y)|^q\,dy\right)^{\frac{p}{q}+1}\\ &\overset{16.1}{\leqslant} \frac{q}{q+p}(b-a)^{\frac{p}{q'}}\left(\int_a^b |f'(y)|^{q\left(\frac{p}{q}+1\right)}\,dy\right)\left(\int_a^b 1^{\left(\frac{p}{q}+1\right)'}\,dy\right)^{\frac{\frac{p}{q}+1}{\left(\frac{p}{q}+1\right)'}}\\ &= \frac{q(b-a)^p}{q+p}\int_a^b |f'(y)|^{p+q}\,dy,\end{aligned}$$

这就证明了不等式(16.39).

2. 由第一问得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|^p|f'(x)|^q\,dx \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(q+p)2^p}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^{p+q}\,dx,$$

对称得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|^p|f'(x)|^q\,dx \leqslant \frac{q(b-a)^p}{(q+p)2^p}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^{p+q}\,dx.$$

故两式相加得(16.40).

16.5 凸性相关题型

例题 16.26 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负上凸函数, 证明对任何 $x\in[a,b]$, 都有

$$f(x) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy. \tag{16.42}$$

笔记 非数学类可以直接默认 $f\in C[a,b]$. 看到凸性应该兴奋, 往往就是和其几何性质有关.

证明 **Method 1**

由推论13.2, 开集上的上凸函数连续且有限个点不影响积分值. 又由定理上凸函数单调性的刻画13.8, 我们知道

$$\lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to b^-} f(x)$$

是存在的. 因此不妨设 $f\in C[a,b]$.

Step 1 当

$$f(a)=f(b)=0, x_0是f(x)最大值点, x_0\in(a,b),$$

我们利用上凸函数一定在割线上方得不等式

$$\begin{cases} f(x)\geqslant f(a)+\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x-a), & x\in[a,x_0] \\ f(x)\geqslant f(b)+\frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}(x-b), & x\in[x_0,b] \end{cases}.$$

运用得到的不等式就有

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^{x_0}\frac{f(x_0)}{x_0-a}(x-a)\,dx+\int_{x_0}^b\frac{f(x_0)}{x_0-b}(x-b)\,dx=\frac{b-a}{2}f(x_0),$$

这就得到了不等式(16.42).

Step 2 一般情况可设

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

于是 g 就满足 **Step 1** 中的条件, 因此由(16.42)知

$$g(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b g(y)\,dy,\forall x\in[a,b]. \tag{16.43}$$

于是利用(16.43)知

$$\begin{aligned} f(x)&\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)+\frac{2}{b-a}\int_a^b g(y)\,dy \\ &=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)+\frac{2}{b-a}\int_a^b\left[f(y)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-a)-f(a)\right]dy \\ &=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)+\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy-[f(b)-f(a)]-2f(a) \\ &=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(b)+\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy, \end{aligned}$$

这里最后一个不等号可以通过直线在两个端点小于等于 0 则在端点之间恒小于等于 0 得到. 我们完成了证明.

Method 2

上面的方法可以统一写为对 $x\in[a,b]$, 运用割线不等式我们有

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\geqslant\int_a^x\left[\frac{x-y}{x-a}f(a)+\frac{y-a}{x-a}f(x)\right]\mathrm{d}y+\int_x^b\left[\frac{b-y}{b-x}f(x)+\frac{y-x}{b-x}f(b)\right]\mathrm{d}y \\ &=(x-a)\frac{f(x)+f(a)}{2}+(b-x)\frac{f(x)+f(b)}{2} \\ &=\frac{b-a}{2}f(x)+\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{2}\geqslant\frac{b-a}{2}f(x), \end{aligned}$$

即得(16.42)成立.

例题 16.27 设 $f\in C[0,a]\bigcap D^2(0,a]$ 且 $f(x)>0, f''(x)>0,\forall x\in(0,a], f(0)=0$, 证明:

$$\frac{\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}>\frac{2}{3}a.$$

证明 我们只需证明

$$\frac{\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}>\frac{\int_0^a x^2\mathrm{d}x}{\int_0^a x\mathrm{d}x}.$$

事实上, 这等价于

$$\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x\int_0^a x\mathrm{d}x-\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant0.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x\int_0^a x\mathrm{d}x-\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^a\int_0^a x\left[yf(x)-xf(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\int_0^a y\left[xf(y)-yf(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^a xy(y-x)\left[\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 $A=B=\frac{A+B}{2}$, 最后一个不等号来自下凸的割线斜率单调性.

例题 16.28 设 $f\in C[0,1]$ 是下凸函数且满足 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 证明

$$|f(x)|\leqslant\max\{f(0),f(1)\},\forall x\in[0,1]. \tag{16.44}$$

笔记 非数学类可以对 $f\in C^2[0,1]$ 证明. 此时无需引用定理13.8.

证明 因为 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 我们知道 f 一定有一个点非负, 一个点非正, 且这两个点不同.

对于 f 的最大值点 $c\in[0,1]$, 注意到由下凸函数单调性的刻画13.8, f 最大值一定在 $f(0),f(1)$ 之一取到, 且最大值非负. 于是

$$0\leqslant f(c)\leqslant\max\{f(0),f(1)\}.$$

对于 f 的最小值点 $d\in[0,1]$, 利用例题16.26, 我们知道

$$f(c)-f(x)\leqslant 2\int_0^1\left[f(c)-f(y)\right]dy\Rightarrow -f(c)\leqslant f(x),\forall x\in[0,1],$$

从而

$$-\max\{f(0),f(1)\}\leqslant -f(c)\leqslant f(d),$$

即得不等式(16.44).

以下两题虽然是经典的, 但我们选取自八一的 « 积分不等式葵花宝典 ».

例题 16.29 设 $b>a\geqslant 0$, f 是 $[a,b]$ 上下凸函数, 证明

$$\int_a^b tf(t)\,dt\leqslant\frac{b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]. \tag{16.45}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b tf(t)\,dt&=(b-a)\int_0^1\left[tb+(1-t)a\right]f\left(tb+(1-t)a\right)dt\\&\leqslant(b-a)\int_0^1\left[tb+(1-t)a\right]\cdot\left[tf(b)+(1-t)f(a)\right]dt\\&=\frac{b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right],\end{aligned}$$

这就证明了不等式(16.45).

例题 16.30 设 $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ 是一个上凸函数且 $f(0)=1$, 证明

$$\int_0^1 xf(x)\,dx\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.46}$$

证明 注意到利用割线斜率递减, 我们有

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x},\forall t\in(0,x],$$

于是记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, 就有

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 x\,dF(x)=F(1)-\int_0^1 F(x)\,dx.$$

现在

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\int_0^x f(t)\,dtdx\geqslant\int_0^1\int_0^x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)dtdx=\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,dx+\frac{1}{4}.$$

故

$$\int_0^1 xf(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,dx-\frac{1}{4}\Rightarrow\int_0^1 xf(x)\,dx\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{4}\right),$$

利用 $\frac{2}{3}\left(t-\frac{1}{4}\right)\leqslant\frac{2}{3}t^2,\forall t\in\mathbb{R}$, 我们有不等式(16.46)成立.

16.6 中值相关题型

中值定理和积分不等式其实有很强的关联性和互相转化性, 他们即可以视为中值定理题, 也可以视为积分不等式题.

例题 16.31 设 $f\in C^2[a,b]$ 满足 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b|f''(x)|\,dx.\tag{16.47}$$

笔记 注意到右端是导数积分, 因此走积分余项模型, 题目只有单点条件, 因此敲定单点的积分余项模型, 即经典 Taylor 公式积分余项.

证明 运用 Taylor 公式的积分余项11.4, 我们有

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\int_{\frac{a+b}{2}}^x(x-t)f''(t)\,dt.$$

注意到

$$\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=0,\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0,$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|&=\left|\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^x(x-t)f''(t)\,dtdx\right|\\&=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_x^{\frac{a+b}{2}}(t-x)f''(t)\,dtdx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\int_{\frac{a+b}{2}}^x(x-t)f''(t)\,dtdx\right|\\&=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f''(t)\,dt\int_a^t(t-x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(t)\,dt\int_t^b(x-t)\,dx\right|\\&=\left|\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^2f''(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-t)^2f''(t)\,dt\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{b+a}{2}-a\right)^2|f''(t)|\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2|f''(t)|\,dt\\&=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f''(t)|\,dt+\frac{(b-a)^2}{8}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f''(t)|\,dt\\&=\frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b|f''(t)|\,dt.\end{aligned}$$

这就证明了(16.47).

例题 16.32 $f\in C^2[a,b]$ 使得 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.\tag{16.48}$$

证明 由 Taylor 公式的拉格朗日余项, 我们有

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\theta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx&=\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b\frac{f''(\theta)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\\&\leqslant 0+\frac{\max\limits_{[a,b]}|f''|}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\\&=\frac{(b-a)^3}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.\end{aligned}$$

例题 16.33 设 $f\in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)$, 证明

$$\int_0^1|f'(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{3}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

证明 不妨设 $f(0)=f(1)=0$, 由拉格朗日插值积分余项11.2, 我们知道

$$f(x)=\int_0^1 f''(y)\,k(x,y)\,dy,$$

从而

$$f'(x)=\int_0^1 f''(y)\,\frac{d}{dx}k(x,y)\,dy.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1|f'(x)|\,dx&\leqslant\max|f''|\cdot\int_0^1\int_0^1\left|\frac{dk(x,y)}{dx}\right|dydx\\&=\max|f''|\left(\int_0^1\int_x^1(1-y)\,dydx+\int_0^1\int_0^x y\,dydx\right)=\frac{1}{3}\max|f''|,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 16.34 设 $f\in C^1[0,1]$, 证明

$$\int_0^1|f(x)|\,dx\leqslant\max\left\{\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|,\int_0^1|f'(x)|\,dx\right\}.\tag{16.49}$$

证明 若 f 没有零点, 则 f 不变号, 从而不等式(16.49)中的关于 f 的积分的绝对值可以去掉. 因此不等式显然成立.

设 $f(c)=0, c\in[0,1]$, 则

$$|f(x)|=\left|\int_c^x f'(y)\,dy\right|\leqslant\int_0^1|f'(y)|\,dy\Rightarrow\int_0^1|f(x)|\,dx\leqslant\int_0^1|f'(x)|\,dx,$$

这同样给出了不等式(16.49).

例题 16.35 设 $a>0$ 且 $f\in C^1[0,a]$, 证明

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(y)|\,dy+\int_0^a|f'(y)|\,dy.\tag{16.50}$$

笔记 想法即压缩区间.

证明 注意到

$$\int_0^a|f'(y)|\,dy\geqslant\int_{\theta_1}^{\theta_2}|f'(y)|\,dy\geqslant\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}f'(y)\,dy\right|=|f(\theta_2)-f(\theta_1)|\geqslant|f(\theta_2)|-|f(\theta_1)|,$$

取

$$\theta_2=x,|f(\theta_1)|\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=}\frac{\int_0^a|f(y)|\,dy}{a},$$

不妨设[9]$\theta_2>\theta_1$, 因此就有不等式(16.50)成立.

例题 16.36 设 $f\in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)$, 证明

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx\leqslant (b-a)\int_a^b |f''(x)|\,dx. \tag{16.51}$$

笔记 压缩区间的思想.

证明 因为 $f(a)=f(b)$, 由罗尔中值定理, 存在 $\theta\in(a,b)$ 使得 $f'(\theta)=0$. 因此对 $x\in[\theta,b]$, 我们有

$$|f'(x)|\leqslant\int_\theta^x |f''(y)|\,dy\leqslant\int_a^b |f''(y)|\,dy.$$

对 $x\in[a,\theta]$, 我们有

$$|f'(x)|\leqslant\int_x^\theta |f''(y)|\,dy\leqslant\int_a^b |f''(y)|\,dy,$$

这就给出了不等式(16.51).

例题 16.37Grüss 不等式 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b)$ 且满足 $m\leqslant f'(x)\leqslant M$, 记 $\mu=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{(M-\mu)(\mu-m)}{2(M-m)}. \tag{16.52}$$

笔记 如果我们对 $a=0,b=1$ 证明了(16.52), 那么对一般的 a,b, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\\=&\left|\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx-\frac{f((a+(b-a)x)|_{x=0})+f((a+(b-a)x)|_{x=1})}{2}\right|\\\leqslant&\frac{((b-a)M-(f(b)-f(a)))(f(b)-f(a)-(b-a)m)}{2((b-a)M-(b-a)m)}\\=&\frac{(M-\mu)(\mu-m)}{2(M-m)}.\end{aligned}$$

证明 为计算方便, 考虑 $f(x)-\mu(x-a)-f(a)$ 代替 f, 简单计算可以不妨设 $f(a)=f(b)=0$, 考虑 $x=a+(b-a)y$ 可不妨设 $[a,b]=[0,1]$.

只需证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{-Mm}{2(M-m)}. \tag{16.53}$$

事实上容易由中值定理得到

$$mx\leqslant f(x)\leqslant Mx,-M(1-x)\leqslant f(x)\leqslant -m(1-x),\forall x\in[0,1],$$

于是

$$\frac{Mm}{2(M-m)}=\int_0^1\max\{mx,M(x-1)\}\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\int_0^1\min\{Mx,m(x-1)\}\,dx=\frac{-Mm}{2(M-m)},$$

这就证明了不等式(16.53), 从而证明了(16.52).

例题 16.38 设 $f\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b)$ 且满足 $|f'(x)|\leqslant M$ 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{M}{4}-\frac{(f(b)-f(a))^2}{4(b-a)^2M}. \tag{16.54}$$

证明 在 Grüss 不等式16.37中取 $m=-M$, 则有

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{M^2-\mu^2}{4M}=\frac{M}{4}-\frac{(f(b)-f(a))^2}{4(b-a)^2M},$$

[9]我们更喜欢上限大于下限.

这就完成了不等式(16.54)的证明.

例题 16.39 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$,

1. 证明
$$|f(x)|\leqslant\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\int_a^b|f''(y)|\,dy,\ x\in[a,b].$$
2. 证明
$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f''(x)|\,dx.$$

证明

1. 注意到
$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)+\int_a^b f''(y)K_1(x,y)\,dy,$$
这里
$$K_1(x,y)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}(y-b) & b\geqslant y\geqslant x\\ \frac{b-x}{b-a}(a-y) & x\geqslant y\geqslant a\end{cases}.$$
显然
$$|f(x)-\frac{b-x}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)|\leqslant\int_a^b|f''(y)K_1(x,y)|dy\leqslant\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\int_a^b|f''(y)|\,dy.$$
2. 利用 $(x-a)(b-x)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)$, 我们顺便得到：即当 $f(a)=f(b)=0$, 有
$$|f(x)|\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f''(y)|\,dy.$$

16.7 数值比较类

例题 16.40 证明如下积分不等式.

1. $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx>0$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$.
3. $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx>\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

笔记 此类问题都是考虑分母更小的时候正的更多, 通过换元把负的区间转化到正的同一个区间来完成.

证明

1. 我们有
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx&\overset{x=\sqrt{y}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(y+\pi)}{\sqrt{y+\pi}}dy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y+\pi}}dy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin y\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right)dy>0.\end{aligned}$$

2. 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+x^2}dx$$

$$\overset{x=\frac{\pi}{4}-y,x=\frac{\pi}{4}+y}{=}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2}dy+\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(-y)}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}dy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin y\cdot\left[\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)^2}\right]dy>0.$$

3. 本题稍有不同, 注意到

$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin y}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin y)\,dy,\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\cos y}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos y)\,dy.$$

现在利用 $\sin x<x,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 可得不等式链

$$\cos\sin x>\cos x>\sin\cos x,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

于是

$$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx>\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

PS. 作者青涩的贴吧回忆.

例题 16.41 证明如下积分不等式

1. $\frac{\pi}{6}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.
2. $\int_0^{\pi}e^{\sin^2 x}dx\geqslant\sqrt{e}\pi$.
3. $\frac{\pi}{2}e^{-R}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi\left(1-e^{-R}\right)}{2R},R>0$.

证明

1.

$$\frac{\pi}{6}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^2}}dx=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2.

$$\int_0^{\pi}e^{\sin^2 x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\pi}\sin^{2n}x dx=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\,(2n)!!}\overset{(2n-1)!!\geqslant n!}{=}\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\sqrt{e}\pi.$$

3.

$$\frac{\pi}{2}e^{-R}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx\overset{Jordan不等式}{<}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R}{\pi}x}dx=\frac{\pi\left(1-e^{-R}\right)}{2R},R>0.$$

例题 16.42 证明

$$\left|\int_x^{x+1}\sin t^2dt\right|<\frac{1}{x},x>0.$$

证明 分部积分改善阶, 我们有

$$\left|\int_x^{x+1}\sin t^2dt\right|\overset{t=\sqrt{y}}{=}\frac{1}{2}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{d\cos y}{\sqrt{y}}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\cos\left[(x+1)^2\right]}{x+1}-\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}+\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos y}{y^{\frac{3}{2}}}dy\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}.$$

例题 16.43 证明

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx>\frac{2}{\pi}\ln(n+1),\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant 2.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx&=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\overset{x=(k-1)\pi+y}{=}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{|\sin y|}{y+(k-1)\pi}dx\\&>\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{|\sin y|}{\pi+(k-1)\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\overset{x>\ln(1+x)}{>}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k\right)=\frac{2}{\pi}\ln(n+1).\end{aligned}$$

例题 16.44 证明:

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<\frac{2}{a},\forall 0<a<b. \tag{16.55}$$

证明 由第二积分中值定理11.3得 $\zeta\in(a,b)$ 使得

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{a}\int_a^{\zeta}\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{a}\left|\cos\zeta-\cos a\right|\leqslant\frac{2}{a},\forall b>a>0.$$

若(16.55)等号成立, 则

$$|\cos\zeta-\cos a|=2\Rightarrow\cos\zeta=1,\cos a=-1\text{或者}\cos\zeta=-1,\cos a=1.$$

此时 $a=n\pi,n\in\mathbb{N}$, 从而

$$\left|\int_{n\pi}^b\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{n\pi}.$$

此时 $\int_{n\pi}^b\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 b 达到极值点, 所以

$$\sin b=0\Rightarrow b=m\pi,m>n.$$

由交错级数不等式18.4得

$$\begin{aligned}\left|\int_{n\pi}^{m\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{k=n}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{k=n}^{m-1}(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+k\pi}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}\mathrm{d}x<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{n\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi},\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 于是不等式(16.55)成立.

16.8 杂题

16.8.1 young 不等式

例题 16.45young 不等式 对 $[0,+\infty)$ 上的严格递增函数且满足 $f(0)=0$ 的函数 f, 证明

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx\geqslant ab. \tag{16.56}$$

并证明当 f 连续时等号成立条件是 $f(a)=b$.

笔记 非数学类的同学只在 f 连续时理解, 数学专业的同学要知道下述换序过程实则依赖了勒贝格积分.

证明 注意到

$$\int_0^b f^{-1}(x)\,dx=\int_0^b\int_0^{f^{-1}(x)}1dydx=\int_0^{f^{-1}(b)}dy\int_{f(y)}^b1dx=\int_0^{f^{-1}(b)}[b-f(y)]\,dy.$$

不妨设[10]

$$b \geqslant f(a) \Rightarrow b \geqslant f(y), \forall y \in \left[0, f^{-1}(b)\right],$$

于是

$$\int_0^{f^{-1}(b)} [b - f(y)]\, dy \geqslant \int_0^a [b - f(y)]\, dy = ab - \int_0^a f(y)\, dy,$$

这就证明了不等式(16.56). 此外等号成立条件是上述唯一一个放缩没有放缩, 此时必有 $b = f(a)$.

例题 16.46 设双射 $f : [0, a] \to [0, b]$ 且 f 是递增连续的, 证明

$$\frac{1}{b}\int_0^a |f(x)|^2\, dx + \frac{1}{a}\int_0^b \left|f^{-1}(x)\right|^2 dx \leqslant ab. \tag{16.57}$$

证明 因为 f 是双射, 所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b}\int_0^a |f(x)|^2\, dx + \frac{1}{a}\int_0^b \left|f^{-1}(x)\right|^2 dx \leqslant \frac{1}{b}\int_0^a f(x)\cdot b dx + \frac{1}{a}\int_0^b f^{-1}(x)\cdot a dx \\
&= \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b \int_0^{f^{-1}(x)} 1 dy dx \\
&= \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a dy \int_{f(y)}^b 1 dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a (b - f(y))\, dy = ab,
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

16.8.2 变分法

我们当然不会严格处理变分法, 而是作为一种猜答案的方法来叙述. 大题中不可视为严格证明.

例题 16.47 设 $f(0) = f(1) = 0, f \in C^1[0,1]$, 若

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\, dx - 8\int_0^1 f(x)\, dx + \frac{4}{3} = 0. \tag{16.58}$$

求 f.

笔记 积分等式让你计算 f 表达式的, 本质上都是积分不等式. 只不过积分不等式恰好等号成立的函数就是所求.

证明 变分法猜答案: 对任何 $v \in C_c^\infty(0,1)$. 由极值的必要条件, 必有

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 [f' + tv']^2\, dx - 8\int_0^1 [f + tv]\, dx + \frac{4}{3}\right]|_{t=0} = 0.$$

展开计算得

$$\int_0^1 2f'v' dx - 8\int_0^1 v dx = 0.$$

分部积分得

$$-\int_0^1 2f'' v dx = 8\int_0^1 v dx,$$

故

$$\int_0^1 (4 + f'')\, v dx = 0, \forall v \in C_c^\infty(0,1).$$

于是

$$f'' = -4 \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 2x.$$

[10]否则你把 f^{-1} 看成 f, f 看成 f^{-1}.

严格证明: 从猜出的答案, 自然想到

$$\int_0^1 \left[f'(x)+4x-2\right]^2 dx = \int_0^1 \left[|f'(x)|^2 + 2(4x-2)f'(x) + (4x-2)^2\right] dx$$
$$\overset{\text{分部积分}}{=} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx - 8\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{4}{3} = 0,$$

故严格证明了 $f(x) \equiv -2x^2 + 2x$.

16.8.3 傅立叶型积分不等式

定理 16.7 (傅立叶型积分不等式)

$f(x) \in C^1[a,b]$, 则

- $$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

  等号成立条件为

  $$f(x) = c_1 + c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- 若 $f(a) = f(b)$, 则

  $$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

  等号成立条件是

  $$f(x) = c_1 + c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right) + c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

- 若 $f(a) = f(b) = 0$, 则

  $$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

  等号成立条件是

  $$f(x) = c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right), c \in \mathbb{R}.$$

♡

证明

- 把 $f(x)$ 延拓到 $[2a-b, b]$, 使得 $f(x) = f(2a-x), x \in [a,b)$, 则 $f(b) = f(2a-b), f \in C[2a-b,b]$ 且分段可微, 因此设 $f(x)$ 有傅立叶级数

  $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$
  $$f'(x) \sim -\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}[n a_n \sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)],$$

  这里

  $$a_n = \frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^{b} f(x)\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right) dx, n \in \mathbb{N}_0.$$

  我们有帕塞瓦尔恒等式

  $$\int_{2a-b}^{b} |f(x)|^2 dx = (b-a)[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2],$$
  $$\int_{2a-b}^{b} |f'(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\,dx-\frac{1}{2(b-a)}\left(\int_{2a-b}^{b}f(x)\,dx\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\,dx.$$

利用对称, 就有

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\,dx-\frac{1}{(b-a)}\left(\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\,dx,$$

等号成立条件为

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

- 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right),$$

$$f'(x)\sim\frac{2\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)+nb_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right),$$

这里

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx,$$
$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx.$$

由帕塞瓦尔恒等式, 我们有

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\,dx=\frac{b-a}{2}[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)],$$

$$\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\,dx=\frac{2\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

因此

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\,dx-\frac{1}{b-a}\left(\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\,dx,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right)+c_3\sin\left(\frac{2\pi x}{b-a}\right).$$

- 令

$$f(x)=-f(2a-x),x\in[2a-b,a),$$

则 $f(x)\in C^1[2a-b,b]$.
设 $f(x)$ 有傅立叶级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

$$f'(x)\sim\frac{\pi}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right),$$

这里

$$b_n=\frac{1}{b-a}\int_{2a-b}^{b}f(x)\sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)dx,n\in\mathbb{N}_0.$$

我们有帕塞瓦尔恒等式

$$\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\,dx=(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,$$

$$\int_{2a-b}^{b}|f'(x)|^2\,dx=\frac{\pi^2}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_n^2.$$

从而有

$$\int_{2a-b}^{b}|f(x)|^2\,dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{2b-a}^{b}|f'(x)|^2\,dx.$$

利用对称, 我们有

$$\int_{a}^{b}|f(x)|^2\,dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^2\,dx,$$

等号成立条件是

$$f(x)=c\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

16.8.4 逼近取等

例题 16.48 给定 $M>0$, 设

$$S\triangleq\left\{f\in R[0,1]:|f(x)|\leqslant M,\int_0^1xf(x)\,\mathrm{d}x=0\right\},$$

求

$$\max_{f\in S}\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\sqrt{2}-1\right)M.$$

笔记 待定 $\lambda\in\mathbb{R}$, 考虑

$$\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-\lambda x)f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1|1-\lambda x|\,\mathrm{d}x.$$

为了式上式放缩最精确, 我们只需要求 λ 使得 $\int_0^1|1-\lambda x|\,\mathrm{d}x$ 达到最小值. 注意到

$$\int_0^1|1-\lambda x|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\frac{\lambda}{2}, & \lambda\leqslant1\\ \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda}-1, & \lambda>1\end{cases},$$

即

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\int_0^1|1-\lambda x|\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left|1-\sqrt{2}x\right|\mathrm{d}x.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(1-\sqrt{2}x\right)f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1\left|1-\sqrt{2}x\right|\mathrm{d}x\\&=M\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-\sqrt{2}x\right)\mathrm{d}x+M\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left(\sqrt{2}x-1\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\sqrt{2}-1\right)M.\end{aligned}$$

考虑

$$f(x)=\begin{cases}M, & x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\\ -M, & x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\end{cases},$$

我们有 $f\in S$ 以及

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\sqrt{2}-1\right)M,$$

这就证明了

例题 16.49 设 $S=\left\{f\in C^1[0,1]:f(0)=0,f(1)=1\right\}$, 计算

$$\inf_{f\in S}\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,dx.$$

笔记 注意蒲和平的取等条件不能达到, 因此是错误的. 此外本题属于典型的取等条件只能逼近的情况. 对 $y'-y=0$ 视为一阶构造类来得到构造函数.

证明 一方面

$$\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,dx=\int_0^1 e^x\left|\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'\right|dx\geqslant\int_0^1\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'dx=\frac{1}{e}.$$

为了 $\frac{1}{e}$ 是最佳的且 f 有满足要求的光滑性, 我们期望 $f=e^{x-1}$, 但 $f(0)=0$, 只能摄动和光滑连接, 即构造

$$f_a(x)=\begin{cases}\frac{(a-1)x^2-\left(a^2-2a\right)x}{a^2}e^{a-1}, & 0\leqslant x<a\\ e^{x-1}, & a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

此时 $f_a'(x)-f_a(x)$ 不变号且

$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^1 |f_a'(x)-f_a(x)|\,dx=\frac{1}{e}.$$

例题 16.50 求最小实数 C, 使得对一切满足 $\int_0^1|f(x)|\,dx=1$ 的连续函数 f, 都有

$$\int_0^1\left|f\left(\sqrt{x}\right)\right|dx\leqslant C.$$

证明 由于

$$\int_0^1\left|f\left(\sqrt{x}\right)\right|dx=2\int_0^1 x|f(x)|\,dx\leqslant 2\int_0^1|f(x)|\,dx=2,$$

下证 $C=2$.

注意到取等函数是不存在的, 我们需要逼近 C, 此外从放缩可以看到我们希望 f 可以集中在 1. 马上联想到 Laplace 方法集中在 1 和最简单的构造即多项式

$$f_n(x)=(n+1)x^n,n\in\mathbb{N}.$$

则

$$\int_0^1|f_n(x)|\,dx=1,\int_0^1\left|f_n\left(\sqrt{x}\right)\right|dx=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2,n\to\infty,$$

故所求 $C=2$.

16.8.5 杂例

例题 16.51 对任意 $\epsilon>0$, 证明存在 $C_\epsilon>0$, 使得对所有 $f\in C^1[a,b]$, 证明

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|^2\leqslant C_\epsilon\int_a^b|f(x)|^2+\epsilon\int_a^b|f'(x)|^2\,dx.$$

证明 由第一积分中值定理11.3, 存在 $\theta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b|f(x)|^2\,dx=(b-a)|f(\theta)|^2.$$

于是由 Cauchy 不等式16.1, 就有

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &= |f(\theta)|^2 + 2\int_\theta^x f'(y) f(y)\,dy \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2\,dx + 2\int_a^b |f'(y) f(y)|\,dy \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2\,dx + 2\int_a^b \left|\sqrt{\epsilon} f'(y)\,\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} f(y)\right| dy \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2\,dx + \int_a^b \left(\epsilon |f'(y)|^2 + \frac{1}{\epsilon}|f(y)|^2\right) dy \\ &= \left(\frac{1}{b-a}+\epsilon\right)\int_a^b |f(x)|^2\,dx + \epsilon\int_a^b |f'(y)|^2\,dy.\end{aligned}$$

我们完成了证明.

例题 16.52 设 $f' \in R[a,b]$, 证明

$$\int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}dx \geqslant \sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}.$$

笔记 本题即两点之间线段最短, 直接使用这个事实当年也是满分.

证明 利用初等的 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}dx &= \int_a^b \frac{\sqrt{1+|f'(x)|^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}}dx \\ &\geqslant \int_a^b \frac{(x-a)+f'(x)\cdot(f(x)-f(a))}{\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}} d\left[(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2\right] \\ &= \sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}|_a^b \\ &= \sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}.\end{aligned}$$

例题 16.53 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^4 dx \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2, \forall n\in\mathbb{N}. \tag{16.59}$$

证明 分段估计, 待定 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 利用

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|, \sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], n\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^4 dx &= \int_0^{\theta} x\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^4 dx + \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^4 dx \\ &\leqslant \int_0^{\theta} x\left(\frac{n\sin x}{\sin x}\right)^4 dx + \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}x}\right)^4 dx \\ &= \frac{n^4}{2}\theta^2 + \frac{\pi^4}{32\theta^2} - \frac{\pi^2}{8},\end{aligned}$$

为了使得上述不等式右边数字最小, 可取 $0<\theta=\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2}$, 此时就得到不等式(16.59).

例题 16.54 证明

$$\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2n}, n\in\mathbb{N}.$$

证明 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx, n\in\mathbb{N}_0$. 注意到

$$I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xd\tan x=\frac{1}{n-1},n\geqslant 2. \tag{16.60}$$

又

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-1}xdx=I_{n-1},$$

以及

$$\tan^n x+\tan^{n-2}x-2\tan^{n-1}x=\tan^{n-2}x\left(\tan x-1\right)^2>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right).$$

我们知道

$$I_n<I_{n-1},2I_{n-1}<I_n+I_{n-2}.$$

因此利用(16.60), 我们知道

$$2I_{n-1}<I_n+I_{n-2}<2I_{n-2},\forall n\geqslant 2,$$

即 $I_{n-1}<\frac{1}{2(n-1)}<I_{n-2},\forall n\geqslant 2$, 因此

$$\frac{1}{2n+2}<I_n<\frac{1}{2n},\forall n\in\mathbb{N}.$$

这就完成了证明.

例题 16.55 设 f 定义域值域都是区间 $[0,1]$ 的一阶连续可微函数且 f' 单调递减. 若 $f(0)=f(1)=0$, 证明 $y=f(x),(0\leqslant x\leqslant 1)$ 确定的曲线长度不超过 3.

证明 设

$$g(x)=\int_0^x\sqrt{1+|f'(y)|^2}dy-x-f(x),h(x)=\int_x^1\sqrt{1+|f'(y)|^2}dy-1+x-f(x).$$

因为 $f(0)=f(1)=0$, 于是存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $1=f(x_0)=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$. 于是我们知道 $(0,x_0)$ 上 f 递增, $(x_0,1)$ 上 f 递减. 然后

$$g'(x)=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}-1-f'(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,x_0]$$
$$h'(x)=-\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}+1-f'(x)\geqslant 0,\forall x\in[x_0,1].$$

因此我们就有 $g(x_0)\leqslant g(0),h(x_0)\leqslant h(1)$, 即

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1+|f'(y)|^2}dy&=\int_0^{x_0}\sqrt{1+|f'(y)|^2}dy+\int_{x_0}^1\sqrt{1+|f'(y)|^2}dy\\&\leqslant x_0+f(x_0)+1-x_0+f(x_0)=3.\end{aligned}$$

✍ **练习 16.2** 设 $f\in C^1[a,b]$ 满足 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 证明

$$\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|dx. \tag{16.61}$$

证明 由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\theta_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$, 使得

$$|f(\theta_1)|=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx,|f(\theta_2)|=\frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx. \tag{16.62}$$

则

$$|f(\theta_1)|=\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(\theta_1)\right|=\left|\int_{\theta_1}^{\frac{a+b}{2}}f'(x)dx\right|\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(x)|dx$$
$$|f(\theta_2)|=\left|f(\theta_2)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|=\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^{\theta_2}f'(x)dx\right|\leqslant\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(x)|dx$$

.

两式相加并利用式(16.62)得式(16.61). 我们完成了证明.

例题 16.56 设 $f\in C^1[a,b]$ 满足 $f'(x)\geqslant m>0,|f(x)|\leqslant\pi$, 证明

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

证明 显然 f 严格递增. 若 $f(a)\geqslant 0$, 则

$$0\leqslant\int_a^b\sin f(x)\,dx=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{\sin x}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}dx\leqslant\frac{1}{m}\int_{f(a)}^{f(b)}\sin x dx=\frac{\cos f(a)-\cos f(b)}{m}\leqslant\frac{2}{m}.$$

若 $f(b)\leqslant 0$, 则

$$0\geqslant\int_a^b\sin f(x)\,dx=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{\sin x}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}dx\geqslant\frac{1}{m}\int_{f(a)}^{f(b)}\sin x dx=\frac{\cos f(a)-\cos f(b)}{m}\geqslant-\frac{2}{m}.$$

若 $f(b)>0>f(a)$, 则取 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$. 则运用刚才讨论的情况, 我们知道

$$-\frac{2}{m}\leqslant\int_a^{x_0}\sin f(x)\,dx\leqslant\int_a^b\sin f(x)\,dx\leqslant\int_{x_0}^b\sin f(x)\,dx\leqslant\frac{2}{m}.$$

于是无论如何就有

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

练习 16.3 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 且 $|f'(x)|\leqslant M$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{b-a}{4}M. \tag{16.63}$$

证明 我们直接对 F 插, 注意到微分条件不够, 所以属于靠近谁插谁.

于是

$$\int_a^x f(y)\,dy=f(a)(x-a)+\frac{f'(\theta_1)}{2}(x-a)^2,\theta_1\in(a,x),$$
$$\int_a^x f(y)\,dy=\int_a^b f(y)\,dy+f(b)(x-b)+\frac{f'(\theta_2)}{2}(x-b)^2,\theta_2\in(x,b),$$

即

$$\int_a^x f(y)\,dy=f(a)(x-a)+\frac{f'(\theta_1)}{2}(x-a)^2,\theta_1\in(a,x)$$
$$\int_x^b f(y)\,dy=f(b)(b-x)-\frac{f'(\theta_2)}{2}(x-b)^2,\theta_2\in(x,b).$$

两式相加并取 $x=\frac{a+b}{2}$, 则

$$\int_a^b f(y)\,dy=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)+\left[f'(\theta_1)-f'(\theta_2)\right]\frac{(b-a)^2}{8}.$$

从而

$$\left|\int_a^b f(y)\,dy-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M,$$

这恰好是式(16.63).

例题 16.57 设 $f\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 不恒为 0, 证明存在一点 $x\in(a,b)$ 使得

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \tag{16.64}$$

笔记 此时积分条件往往才能逼迫出效果.

证明 假若

$$|f'(x)| \leqslant M \triangleq \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(y)\,dy\right|, \forall x \in (a,b). \tag{16.65}$$

因为 f 不恒为 0, 结合(16.65)可不妨设 $\int_a^b f(y)\,dy > 0$, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 由中值定理有

$$f(x) \leqslant M(x-a), f(x) \leqslant -M(x-b), \forall x \in [a,b].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx \\ &\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\,dx \\ &= \frac{M(b-a)^2}{4} = \int_a^b f(x)\,dx,\end{aligned}$$

故红色不等号没有放缩, 从而必有

$$f(x) = \begin{cases} M(x-a), & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ M(b-x), & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases},$$

但 f 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 不可导, 这就是一个矛盾! 于是存在一点 $x \in (a,b)$ 使得(16.64)成立.

例题 16.58 设 $f:[0,1] \to (0,+\infty)$ 是连续递增函数, 记 $s = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$. 证明

$$\int_0^s f(x)\,dx \leqslant \int_s^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,dx.$$

证明 显然 $s \in [0,1]$. f 的单调递增性意味着 $F(s) = \int_0^s f(x)\,dx$ 的下凸性, 因此看到凸性应该兴奋起来, 往往就是切割线放缩.

注意到 F 应该在切线上方, 于是

$$F(x) \geqslant F(s) + F'(s)(x-s), \forall x \in [0,1].$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)f(x)\,dx &\geqslant \int_0^1 [F(s)f(x) + f(s)f(x)(x-s)]\,dx \\ &= F(s)\int_0^1 f(x)\,dx + f(s)\int_0^1 (xf(x) - sf(x))\,dx \\ &= F(s)\int_0^1 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 F(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}F^2(x)|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2,$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geqslant F(s)\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \int_0^s f(x)\,dx \\ &\Rightarrow \int_0^s f(x)\,dx + \int_s^1 f(x)\,dx \geqslant 2\int_0^s f(x)\,dx \Rightarrow \int_s^1 f(x)\,dx \geqslant \int_0^s f(x)\,dx.\end{aligned}$$

对于右边不等式, 分部积分得

$$s = \frac{\int_0^1 xf(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} = 1 - \frac{\int_0^1 F(x)\,dx}{F(1)},$$

即

$$\int_0^1 F(x)\,dx=(1-s)\,F(1). \tag{16.66}$$

为了放大 F, 注意到 F 应该在割线下方, 于是

$$F(x)\leqslant\begin{cases}\frac{F(1)-F(s)}{1-s}(x-s)+F(s), & x\in[s,1]\\ \frac{F(s)-F(0)}{s-0}(x-0)+F(0), & x\in[0,s]\end{cases},$$

现在运用上述不等式就有

$$\int_0^1 F(x)\,dx\leqslant\frac{1}{2}F(s)+\frac{1-s}{2}F(1).$$

代入(16.66)就有 $(1-s)\,F(1)\leqslant F(s)$, 即

$$\int_s^1 f(x)\,dx=F(1)-F(s)\leqslant\frac{s}{1-s}F(s)=\frac{s}{1-s}\int_0^s f(x)\,dx.$$

例题 16.59 设 f 是 $[0,1]$ 上的可微函数且 $|f'(x)|\leqslant M$. 对 $(a,b)\in(0,1)$, 若有

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_b^1 f(x)\,dx=0. \tag{16.67}$$

证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{b-a}{2}M.$$

证明 考虑 $F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$, 则由(16.67)知 $F(a)=0, F(b)=F(1)$. 于是由拉格朗日插值定理11.1, 我们有

$$F(b)=\frac{b-a}{1-a}F(1)+\frac{f'(\xi)}{2}(b-1)(b-a),$$

即

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|=|F(1)|=\left|\frac{(b-a)(1-a)f'(\xi)}{2}\right|\leqslant\frac{b-a}{2}M,$$

我们完成了证明.

例题 16.60 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 xf(x)\,dx=0$, 证明

$$\int_0^1 x^2f(x)\,dx\leqslant\frac{2-\sqrt{2}}{6}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|. \tag{16.68}$$

证明 本题的难点是系数不可改进部分. 注意到

$$\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)f(x)\,dx\leqslant\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right||f(x)|\,dx,$$

故有

$$\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right||f(x)|\,dx\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right|dx=\frac{2-\sqrt{2}}{6}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|. \tag{16.69}$$

为了得到取等条件, 从而放缩中可以看到[11]取

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1, & \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

可知不等式(16.68)等号成立.

例题 16.61 设 f 是一个 $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数, 证明

$$\int_1^\infty f^{1-\frac{1}{x}}(x)\,dx\leqslant\left(1+\sqrt{\int_1^\infty f(x)\,dx}\right)^2.$$

[11]真正算的积分就是 1 的积分, 所以通过待定 ±1 来满足题目条件, 从而得到构造函数.

笔记 分段估计的想法.

证明 不妨设 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx<\infty$. 固定 $\lambda>1$, 注意到当

$$f(x)>\lambda^{-x}\Rightarrow f^{1-\frac{1}{x}}(x)=f(x)f^{-\frac{1}{x}}(x)<f(x)\left(\lambda^{-x}\right)^{-\frac{1}{x}}=\lambda f(x),$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f^{1-\frac{1}{x}}(x)\,dx&=\int_{\{x\geqslant 1,f(x)\leqslant\lambda^{-x}\}} f^{1-\frac{1}{x}}(x)\,dx+\int_{\{x\geqslant 1,f(x)>\lambda^{-x}\}} f^{1-\frac{1}{x}}(x)\,dx\\&\leqslant\int_{\{x\geqslant 1:f(x)\leqslant\lambda^{-x}\}}\lambda^{1-x}dx+\lambda\int_{\{x\geqslant 1,f(x)>\lambda^{-x}\}} f(x)\,dx\\&\leqslant\int_1^{\infty}\lambda^{1-x}dx+\lambda\int_1^{\infty} f(x)\,dx\\&=\frac{1}{\ln\lambda}+\lambda\int_1^{\infty} f(x)\,dx\\&\overset{\ln x\geqslant\frac{x-1}{x},x>0}{\leqslant}\frac{\lambda}{\lambda-1}+\lambda\int_1^{\infty} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

取 $\lambda=\frac{\sqrt{\int_1^{\infty} f(x)dx}+1}{\sqrt{\int_1^{\infty} f(x)dx}}>1$, 我们就有

$$\int_1^{\infty} f^{1-\frac{1}{x}}(x)\,dx\leqslant\left(1+\sqrt{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}\right)^2.$$

例题 16.62 设 $a,b>0$, f 在 $[0,a]$ 二阶连续可微且 $f(0)=0, f(a)=b$, 且对所有 $x\in[0,a]$ 都有

$$f(x)\geqslant 0, f''(x)\geqslant 0.$$

证明不等式

$$2\int_0^a f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx\leqslant b\sqrt{a^2+b^2}.$$

笔记 无脑变限积分求导即可.

证明 因为 f 在 $[0,a]$ 下凸, 所以 f 只能先减后增, 减或者增, 但 $f(0)=0$ 且 f 非负, 故只能有 f 递增.

考虑函数

$$g(x)=2\int_0^x f(y)\sqrt{1+|f'(y)|^2}dy-f(x)\sqrt{x^2+|f(x)|^2}.$$

注意到 $g(0)=0$, 我们只需证明 $g'(x)\leqslant 0$.

事实上,

$$g'=2f\sqrt{1+(f')^2}-f'\sqrt{x^2+f^2}-\frac{xf+f^2f'}{\sqrt{x^2+f^2}}=\frac{2f\sqrt{1+(f')^2}\sqrt{x^2+f^2}-x^2f'-xf-2f'f^2}{\sqrt{x^2+f^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}&2f\sqrt{1+(f')^2}\sqrt{x^2+f^2}-x^2f'-xf-2f'f^2\leqslant 0\\\Leftrightarrow&\left(2f\sqrt{1+(f')^2}\sqrt{x^2+f^2}\right)^2\leqslant\left(x^2f'+xf+2f'f^2\right)^2\\\Leftrightarrow&4f^3(xf'-f)+x^2[xf'-f][xf'+f]+2x^2f(xf'-f)\geqslant 0.\end{aligned}$$

注意到

$$(xf'-f)'=f'+xf''-f'=xf''\geqslant 0\Rightarrow xf'-f\geqslant 0f'(0)-f(0)=0,$$

于是我们证明了

$$4f^3(xf'-f)+x^2[xf'-f][xf'+f]+2x^2f(xf'-f)\geqslant 0,$$

这就证明了 $g'(x)\leqslant 0$, 从而

$$2\int_0^a f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx\leqslant b\sqrt{a^2+b^2}.$$

例题 16.63 设 f 在 $[a,b]$ 连续, 证明如下两个不等式不能同时成立.

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,dx\leqslant\frac{3}{4},\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,dx\leqslant\frac{3}{4}. \tag{16.70}$$

证明 若不等式(16.70)同时成立, 则由初等 cauchy 不等式得

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\cos x-\sin x)^2\,dx\leqslant\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,dx+\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,dx\leqslant\frac{3}{2},$$

矛盾! 这就证明了不等式(16.70).

例题 16.64 证明

$$\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|<\frac{2}{a}\,(0<a<b)\,.$$

证明 分部积分有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|&=\left|\frac{\cos x}{x}|_a^b+\int_a^b\frac{\cos x}{x^2}dx\right|\\&=\left|\frac{\cos x}{x}|_a^b+\int_a^b\frac{\cos x}{x^2}dx\right|\\&<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\int_a^b\frac{1}{x^2}dx=\frac{2}{a},\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 16.65 当 $0<x<\pi$, 证明

$$\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt>0.$$

证明 令

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt,$$

则

$$f'(x)=\frac{\sin 2nx}{\sin x},f''(x)=\frac{2n\cos 2nx\sin x-\cos x\sin 2nx}{\sin^2 x}.$$

只需证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 极小值点处为正. 对整数 $0<m<n$, 我们有

$$\int_0^{\frac{m\pi}{n}}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt=\frac{1}{n}\int_0^{m\pi}\frac{\sin 2t}{\sin\frac{t}{n}}dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\frac{2k}{2}\pi}^{\frac{2k+1}{2}\pi}\frac{\sin 2t}{\sin\frac{t}{n}}dt+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\frac{2k+1}{2}\pi}^{\frac{2k+2}{2}\pi}\frac{\sin 2t}{\sin\frac{t}{n}}dt,$$

故

$$\int_0^{\frac{m\pi}{n}}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{\frac{2k}{2}\pi}^{\frac{2k+1}{2}\pi}\left(\frac{\sin 2t}{\sin\frac{t}{n}}-\frac{\sin 2t}{\sin\frac{t+\frac{\pi}{2}}{n}}\right)dt>0.$$

例题 16.66 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C[a,b]$ 满足 $\int_a^b|f_n(x)|^2\,dx=1,n=1,2,\cdots$. 证明对任何 $M>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得存在一组 $\{c_k\}_{k=1}^N\subset\mathbb{R}$, 满足

$$\sum_{k=1}^N c_k^2=1,\max_{x\in[a,b]}\left|\sum_{k=1}^N c_kf_k(x)\right|\geqslant M. \tag{16.71}$$

证明 要证(16.71), 联想到 Cauchy 不等式的等号成立条件, 我们断言存在一个 $x\in[a,b]$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^N f_k^2(x)\geqslant M^2$, 证

明的想法是

$$\int_a^b \sum_{k=1}^N f_k^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^N \int_a^b |f_k(x)|^2\,dx = N. \tag{16.72}$$

于是选取 $N = \left[(b-a)M^2\right] + 1 \in \mathbb{N}$, 则(16.72)和积分中值定理11.3表明

$$(b-a)\sum_{k=1}^N f_k^2(\theta) = \int_a^b \sum_{k=1}^N f_k^2(x)\,dx \geqslant (b-a)M^2,$$

即 $\sum\limits_{k=1}^N f_k^2(\theta) \geqslant M^2$. 考虑 Cauchy 不等式取等条件, 我们可取

$$c_k = \frac{f_k(\theta)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^N f_k^2(\theta)}}, k = 1, 2, \cdots, N,$$

则

$$\sum_{k=1}^N c_k f_k(\theta) = \sqrt{\sum_{k=1}^N |f_k(\theta)|^2} \geqslant M,$$

这就证明了(16.71).

来看南京大学考研真题.

例题 16.67 设 $f \in C^1[0,1]$ 且不恒为 0. 若 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x > 2\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{16.73}$$

证明 利用 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 我们有

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x) f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x) f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^x |f(x)|\cdot|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\int_x^1 |f(x)|\cdot|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1 \left(\int_0^x f(x) f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\int_x^1 f(x) f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

若(16.73)等号成立, 则回顾上述放缩过程得

$$\begin{aligned}&|f(x)|\cdot|f'(t)| = f(x) f'(t), \forall x \in [0,1], t \in [0,x];\\ &|f(x)|\cdot|f'(t)| = -f(x) f'(t), \forall x \in [0,1], t \in [x,1].\end{aligned}$$

现在

$$|f(x)|\cdot|f'(x)| = 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f^2(x) = C, \forall x \in [0,1],$$

结合连续性可得 f 是常值函数, 从而由 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 知 f 恒为 0, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了(16.73).

第 16 章 练习

1. (1.) 设 $f \in D^2[0,1]$ 且 $f'' \in R[0,1]$. 若 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx = 0$, 证明

$$4860\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant 11\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx.$$

2. (2.) 设 f 在 $[0,1]$ 上递增, 对任何 $a \in \mathbb{R}$, 证明

$$\int_0^1 |f(x) - a|\,dx \geqslant \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx.$$

3. (3.) 设 f 是周期为 1 的正连续函数, 对 $\alpha \in \mathbb{R}$, 证明
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx \geqslant 1.$$
4. (4.) 设 $f \in C^1[0,4]$, $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$, 证明
$$\left(\int_0^4 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{16}{3}\int_0^4 |f'(x)|^2\,dx.$$
5. (5.) 设 $f \in C^1[0,1]$ 且 $f(0) = 0$. 证明
$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2\,dx.$$
并判断取等条件.
6. (6.) 设 $f \in C^1[0,1]$ 且 $f(0) = 0$. 证明
$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)|f'(x)|^2\,dx.$$
并判断取等条件.
7. (7.♠) 设 $a > 0, p \in (2,4)$, $d\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$, 证明对任何满足 $f(0) = f(1) = 0$ 的 $f \in C^1[-1,1]$, 都有
$$\int_{-1}^1 |f|^p\,d\gamma \leqslant \sqrt{2\pi}a e^{\frac{1}{2a^2}}\frac{p-2}{2}\left(\frac{2}{4-p}\right)^{\frac{p-4}{p-2}}\int_{-1}^1 |f'|^2\,d\gamma + \left(\int_{-1}^1 |f|^2\,d\gamma\right)^{\frac{2}{4-p}}.$$
8. (8.) 设 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 黎曼可积, 且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$ 最大值和最小值.
9. (9.) 设 $f(x) \in R[0,2]$ 满足
$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \int_0^2 f(x)\,dx = 1,$$
求 $\int_0^2 f(x)\,e^x dx$ 的最大值和最小值.
10. (10.) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 可导且满足 $|f'(x)| \leqslant M, \forall x \geqslant 0$, 证明
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{M}{2}|x-y|, \forall x,y > 0. \tag{16.74}$$
11. (11.) 设正值函数 $f \in D^1[0,+\infty)$ 且 $|f'(x)| < L, \forall x \in (0,+\infty), L > 0$, 证明
$$\int_0^\infty f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2L}|f(0)|^2.$$
12. (12.) 设正值函数 $f \in D^2[0,+\infty)$ 且 $|f''(x)| < k, \forall x \in (0,+\infty), k > 0$, 证明存在只依赖 k 的常数 $C > 0$ 使得
$$\int_0^\infty f(x)\,dx \geqslant C[f(0)]^{\frac{3}{2}}.$$
13. (13.) 设 $f \in C^1[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, 证明对每个 $a \in (0,1)$ 都有
$$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{8}\max_{[0,1]}|f'(x)|.$$
14. (14.) 设 $f \in C[-1,1]$, 证明
$$2\int_{-1}^1 |f(x)|^2\,dx - \left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right)^2 \geqslant 3\left(\int_{-1}^1 xf(x)\,dx\right)^2. \tag{16.75}$$
15. (15.) 设 $f \in C^1[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 证明
$$\int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{32}\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx.$$
16. (16.) 设 $f \in C^2[0,1]$, 证明
$$\left|\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n+2}\right) + \frac{f(1)-f(0)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{4(n+1)}\int_0^1 |f''(x)|\,dx. \tag{16.76}$$

17. (17.) 设 $a>0$, 求最佳正常数 C_a, C_a' 使得
$$C_a(n-1)^{a+1} \leqslant \int_0^{n\pi} x^a |\sin x|\, dx \leqslant C_a' (n+1)^{a+1}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{16.77}$$

18. (18.)

(a). 证明
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right| dx \leqslant \frac{1+\ln(2n+1)}{2}, \forall n \geqslant 1. \tag{16.78}$$

(b). ♠, $*$ 证明
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right| dx \leqslant \frac{2+\ln n}{2}, \forall n \geqslant 2. \tag{16.79}$$

19. (19.) 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 2, f(x) \in (0,2)$, 证明
$$8\int_0^1 f^3(x)\,dx + \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3 + 13\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 50.$$

20. (20.) 设 $f \in C^2[a,b], f(a) = f(b) = 0$, 证明
$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|^2 \leqslant \frac{(b-a)^3}{48}\int_a^b |f''(x)|^2\,dx.$$

21. (21.) 设 $f \in C^2[a,b], \int_a^b f(x)\,dx = 0$, 证明
$$\int_a^b |f''(x)|^2\,dx \geqslant 30\frac{[f(a)+f(b)]^2}{(b-a)^3}. \tag{16.80}$$

22. (22.) 设 $f \in C^2[-1,1]$ 且 $f(0) = 0$, 证明
$$\int_{-1}^1 |f''(x)|^2\,dx \geqslant 10\left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.81}$$

23. (23.) 设 $f \in C^2[0,1], \int_0^1 f(x)\,dx = 0, f(1) = f(0) = 0$, 证明
$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx \geqslant 30240\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2. \tag{16.82}$$

24. (24.♠) 设 $f \in C^1[a,b] \bigcap D^2(a,b), m \leqslant f''(x) \leqslant M, \forall x \in (a,b)$, 证明
$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{24}[f'(a) - f'(b)]\right| \leqslant \frac{M-m}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \tag{16.83}$$

25. (25.) 设 $f \in C[a,b] \bigcap D(a,b)$ 且 $|f'(x)| \leqslant M, \forall x \in (a,b)$, 证明
$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M, \forall x \in [a,b]. \tag{16.84}$$

26. (26.) 设 $f \in C^1[a,b]$ 以及 $A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, 证明
$$\int_a^b |f(x) - A|^2\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx. \tag{16.85}$$

27. (27.) 设 $f \in C^1[a,b], f(0) = f(1) = 0$, 证明
$$\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx. \tag{16.86}$$

并判断取等条件.

28. (28.♠) 设 $f \in C^1[0,1]$ 且对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx = 0$, 证明对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 都有
$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant \frac{12n^2}{4n^2-10n+7}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.87}$$

29. (29.) 设 $f \in C^1[0,1]$, 证明
$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\,dx. \tag{16.88}$$

30. (30.) 设 $f\in C^2[0,1]$, 证明对任何 $x_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right),x_2\in\left(\frac{2}{3},1\right)$, 都有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\leqslant 3|f(x_2)-f(x_1)|+\int_0^1|f''(x)|dx. \tag{16.89}$$

31. (31.) 证明

$$\left|\int_{100}^{200}\frac{x^5}{x^4+x-1}dx-\ln 2\right|<\frac{1}{3}\cdot 10^{-6}. \tag{16.90}$$

32. (32.) 证明

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi<\int_0^1\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}}dx<\pi. \tag{16.91}$$

33. (33.) 证明

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}\leqslant\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)},\forall x>0. \tag{16.92}$$

34. (34.) 证明

$$\frac{1}{5}<\int_0^1\frac{xe^x}{\sqrt{x^2-x+25}}dx<\frac{2\sqrt{11}}{33}. \tag{16.93}$$

35. (35.♠) 证明

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{72}. \tag{16.94}$$

36. (36.) 设 $f\in C[0,1]$, 证明

$$\left[\int_0^1\frac{f(x)}{t^2+x^2}dx\right]^2\leqslant\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx,\forall t>0. \tag{16.95}$$

37. (37.) 设 $f\in R[a,b]$ 且

$$\int_a^x f(t)\,dt\geqslant 0,\int_a^b f(x)\,dx=0,\forall x\in[a,b].$$

证明

$$\int_a^b xf(x)\,dx\leqslant 0.$$

38. (38.) 设 $f\in C^2[a,b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|<\int_a^b|f(x)|\,dx. \tag{16.96}$$

证明

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|+\frac{(b-a)^3}{6}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|. \tag{16.97}$$

39. (39.) 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的下凸函数, 且 $f(0)=0,f(1)=1$, 证明

$$2\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\geqslant f\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right).$$

40. (40.) 设 $f(x)\in C^2[0,1]$, 且满足 $f(0)=f(1)$, 证明

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

41. (41.) 设非负可积函数 f 满足

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}x^2f(x)\,dx=1,\int_{\mathbb{R}}xf(x)\,dx=0. \tag{16.98}$$

证明

$$\int_{-\infty}^u f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{1+u^2},\forall u\leqslant 0,\int_{-\infty}^u f(x)\,dx\geqslant\frac{u^2}{1+u^2},\forall u>0.$$

42. (42.) 设

$$f(x) \in C[0,1], \int_0^1 f(x)\,dx = 1, f(x) \geqslant 0,$$

证明

$$\int_0^1 \left(x - \int_0^1 uf(u)\,du\right)^2 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4}.$$

43. (43.) 设 $f \in C(\mathbb{R}), f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = r^2,$$

求

$$\sup\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln f(x)\,dx\right).$$

44. (44.) 设 g 在 $[0,1]$ 可积, 并且有 $\int_0^1 g(x)\,dx = a$, 设 $f \in C[0,1]$ 满足

$$\int_0^x f(t)\,dt \geqslant g(x), \forall x \in [0,1],$$

证明

$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt \geqslant \frac{6a-1}{3}.$$

45. (45.) 设 $f(x) \in R[0,2]$ 满足

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \int_0^2 f(x)\,dx = 1,$$

求 $\int_0^2 f(x)e^x dx$ 的最大值和最小值.

46. (46.) 设 $R > 0, \lambda \in \mathbb{R}, f \in C^1[0,R]$ 且满足边值条件 $f(0) = f(R) = 0$, 证明

$$\int_0^R |f(x)|^2 e^{\lambda x} dx \leqslant \frac{4R^2}{\lambda^2 R^2 + 4\pi^2} \int_0^R |f'(x)|^2 e^{\lambda x} dx.$$

47. (47.) 设

$$f \in C^2[-1,1], f(-1) = -1, f(1) = 1, f'(-1) = f'(1) = 0, p > 1.$$

证明

$$\int_{-1}^1 |f''(x)|^p\,dx \geqslant 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.$$

48. (48.) 设 $f \in C^2[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\int_0^1 \frac{|f''(x) + f'(x)|}{|f(x)|} dx \geqslant \frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1}.$$

49. (49.) 设 $f \in C^2[-1,1]$ 使得

$$2f'(x) + xf''(x) \geqslant 1, \forall x \in [0,1]. \tag{16.99}$$

证明 $\int_{-1}^1 xf(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}$.

50. (50.) 设 $f, g \in C[0,1], 0 \leqslant f, g \leqslant 1$ 且 f 递增, 证明

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx. \tag{16.100}$$

51. (51.) 设 $a, b > 0$ 且 $b \neq a$. 可积函数 $f : [0,1] \to [-a,b]$ 满足 $\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = ab$. 证明

$$0 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{\sqrt{ab}}{|b-a|} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

52. (52.) 设 $f \in C^1[0,1]$ 使得 $f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = 0$, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant 48\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.101}$$

53. (53.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 使得 $f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=0$, 证明
$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx \geqslant 1920\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.102}$$
54. (54.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 使得 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=0$, 证明
$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{16.103}$$
55. (55.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 且递增下凸, 证明
$$\frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3|f'(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^1 |f(x)|^2\,dx-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^3|f'(x)|^2\,dx. \tag{16.104}$$
56. (56.) 设 f 是 $[0,2\pi]$ 上的递减函数, 证明对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 都有
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
57. (57.) 设 $f\in C[0,1]$ 是非负上凸函数且 $f(0)=1$, 证明
$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{12} \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{16.105}$$
58. (58.) 证明
$$\int_0^x e^{-y^2}\sin y\mathrm{d}y>0, \forall x\in(0,+\infty).$$
59. (59.) 设 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 求 $\int_0^1 \left(1+x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 最小值及取等条件.
60. (60.) 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(x)\geqslant 0, \forall x\geqslant 0$, 证明:
$$\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\cdot\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$
61. (61.) 设 $f(0)=f(1), f(x)\in C^3[0,1], k\in\mathbb{N}$, 证明
$$\left|\int_0^1 f'(x)\,x^{k-1}(1-x)^{k-1}\,dx\right| \leqslant \frac{k!\,(k-1)!\,(k-1)}{6\,(2k+1)!}\max_{x\in[0,1]}|f'''(x)|.$$
62. (62.) 设 f,g 在 $[a,b]$ 绝对可积且 $m\leqslant g(x)\leqslant M$, 证明:
$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \frac{M-m}{2}\int_a^b\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{16.106}$$
63. (63.) 设 $f\in C[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, 证明
$$2+\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$
64. (64.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明: 对任何 $\alpha\in(0,1)$, 都有
$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \alpha(1-\alpha)\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{16.107}$$
65. (65.) 设 $f\in C^k[0,1], k\geqslant 2$ 且当 $x\in[0,1]$ 必有
$$f^{(i)}(0)=0, i=0,1,2,\cdots,k-2, f^{(k)}(x)\geqslant 0.$$
证明:
$$\int_0^1 x^{k-1}f(1-x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(k-1)!k!}{(2k-1)!}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
66. (66.) 设 $b>a>0, f\in C[a,b]$ 满足
$$f(x)\geqslant 0, \forall x\in[a,b], \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明:

$$\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant ab\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16.108}$$

67. (67.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{16.109}$$

68. (68.) 设递增函数 $f\in C[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f^2\left(\frac{1}{2}\right). \tag{16.110}$$

69. (69.) 对任何 $x\geqslant 0, n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\int_0^x t(1-t)\sin^{2n}t\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}. \tag{16.111}$$

70. (70.) 设 $b\geqslant a+2, f\in C[a,b]$ 是正值函数. 若 $\int_a^b \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=1$, 证明:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\mathrm{d}x \leqslant 1,$$

并求出取等条件.

71. (71.) 设 $f\in C[a,b]$ 且 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x. \tag{16.112}$$

72. (72.) 设 $f\in C^1[a,b]$, 并记 $A=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 证明:

$$\int_a^b [f(x)-A]^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

73. (73.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足

$$f(0)+f(1)=-\frac{1}{12}, f'\left(\frac{1}{2}\right)=2a>0, \max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=2b.$$

证明:

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2a^2+\frac{b^2}{6}+ab.$$

74. (74.) 对上凸函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 证明: 对任何 $[a,b], h>0$ 都有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{b-a+2h}\int_{a-h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16.113}$$

75. (75.) 设 f 是 $[0,1]$ 上非负递增连续函数且 $0<\alpha<\beta<1$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16.114}$$

并证明 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能替换为更大的数.

76. (76.) 设 f 在 $[0,2]$ 是 4 阶可微的且

$$f(0)=f(1)=f(2)=f'(1)=0,$$

证明:

$$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{90}\max_{x\in[0,2]}|f''(x)|.$$

77. (77.) 设 $T,b,\tau>0$. 对任何 $t\in(0,T)$ 满足 $\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} g(s)\,\mathrm{d}s<b$, 其中 g 为 $\mathbb{R}$ 上非负连续函数. 证明: 对任何

$a>0$, 都有

$$\int_0^t e^{-a(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{b\tau}{1-e^{-a\tau}}, \forall t\in(0,T).$$

78. (78.) 设 $f\in D^1[a,b]$ 且单调, 证明:

(a). 若 f 不变号, 则

$$(f(b)-f(a))^2 \leqslant 2\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{16.115}$$

(b). 若 f 变号, 则(16.115)的系数 2 可以改为 4.

79. (79.) 设 $f\in D^1[a,b]$ 满足

$$f'(x)\geqslant f(x)>0, \forall x\in[a,b].$$

证明:

$$\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}. \tag{16.116}$$

80. (80.) 设 $\alpha\in(0,2]$, 证明:

$$\int_0^1\int_0^1|f(x)-f(y)|^\alpha\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|^\alpha\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall f\in C[0,1]. \tag{16.117}$$

81. (81.) 设 $f\in C^2[-1,1]$ 是下凸函数满足 $f(1),f(-1)\geqslant 0$. 证明:

$$\min_{x\in[-1,1]}f(x)\geqslant-\int_{-1}^1 f''(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16.118}$$

82. (82.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)=0$, 证明

$$\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{16.119}$$

83. (83.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{\ln 2-\frac{2}{3}}\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{16.120}$$

84. (84.) 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续的严格递增函数且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

$$1-\cos(xy)\leqslant\int_0^x f(t)\sin(tf(t))\,\mathrm{d}t+\int_0^y f^{-1}(t)\sin\left(tf^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t, \forall x,y\in[0,1]. \tag{16.121}$$

85. (85.) 设 $f'''\in R[-1,1]$ 且 $f(-1)=f(1)=f''(-1)=0$. 证明:

$$\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{104}{315}\int_{-1}^1|f'''(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{16.122}$$

86. (86.) 设 $f\in C[-1,1]$, 并且满足

$$f(-1)\geqslant f(1),\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\ x+f(x)\text{ 单调递增}.$$

证明

$$\int_{-1}^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}. \tag{16.123}$$

87. (87.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 且 $f'(0)=ef(1)$. 证明: 若 $\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1$, 则

$$\left|\int_0^1 e^x(x+1)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 1.$$

88. (88.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 周期为 1. 若

$$0\leqslant f(x)\leqslant 1,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

证明:

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 11,$$

并给出等号成立条件.

89. (89.) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是黎曼可积函数. 证明:

$$e^{\frac{1}{x}\int_0^x \ln\left[\sum\limits_{j=1}^n f_j(t)\right]\mathrm{d}t}\geqslant\sum_{j=1}^n e^{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f_j(t)\mathrm{d}t},\forall x>0. \tag{16.124}$$

90. (90.) 证明 $f(t)=\int_1^{\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[0,\pi]$ 有零点.

91. (91.) 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$f(x)+\sin f(x)\geqslant x,\forall x\in[0,\pi],$$

证明:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^2}{2}-2.$$

92. (92.) 设 f,g 是 $[a,b]$ 上的正值递增连续可微函数且满足

$$\int_a^x\sqrt{f(t)}\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x\sqrt{g(t)}\mathrm{d}t,\forall x\in[a,b],$$

且等号至少在 $x=a,b$ 成立. 证明

$$\int_a^b\sqrt{1+f(t)}\mathrm{d}t\geqslant\int_a^b\sqrt{1+g(t)}\mathrm{d}t.$$

93. (93.) 设 $f\in C^2[0,a)$ 满足

$$f(0)=f'(0)=0,f''(x)>0.$$

证明:

$$\int_0^x\sqrt{1+[f'(t)]^2\,\mathrm{d}t}<x+\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}+1},\forall x\in(0,a). \tag{16.125}$$

94. (94.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,f(1)=f(-1)=1.$$

证明:

$$\int_{-1}^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 15,$$

并确定所有使等号成立的函数.

95. (95.) 设非负函数 $f\in C[0,1],t\geqslant 1$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{f^2(x)+t}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{t+1}.$$

96. (96.) 设 $f\in C^1[a,b]$ 满足 $f(a)=0$. 证明对 $p\geqslant 1$ 有

$$\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\int_a^b[(b-a)^p-(x-a)^p]\,|f'(x)|^p\,\mathrm{d}x.$$

97. (97.) 设 $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ 严格递增且连续. 设

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant f(x)\right\},$$

以及 x_1 是 R 的形心的 x 坐标, x_2 为 R 绕 x 轴旋转所生成固体的形心的 x 坐标. 证明:$x_1<x_2$.

98. (98.) 设 $f\in C[0,1]$ 满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,|f(x)|\leqslant 1.$$

证明对任何 $[a,b]\subset[0,1]$ 都有

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

99. (99.) 设不恒为 0 的函数 f 有连续导函数且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 若 $|f'(x)|\leqslant 1$, 证明 $\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{8}$.

100. (100.) 设 $a>0$, 非负函数 w 在 $[0,+\infty)$ 严格单调递增且 $w(0)=0$. 定义

$$W(z)\triangleq\int_a^z\frac{1}{w(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

若非负

$$u,f\in C[t_0,T],w\in C([0,+\infty))$$

满足

$$u(t)\leqslant a+\int_{t_0}^t f(s)\,w(u(s))\,\mathrm{d}s,\forall t\in[t_0,T],$$

证明:

$$W(u(t))\leqslant\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s,\forall t\in[t_0,T].$$

101. (101.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 证明

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

102. (102.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)=f(1)=1$, 证明:

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)-1|\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

103. (103.) 设正值函数 $f\in C[0,1]$, 证明:

$$0\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\max_{0\leqslant x,y\leqslant 1}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}\right)^2.$$

104. (104.) 设 $f\in C[-1,1]$ 满足 f 非负下凸. 证明:

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2f^2(0).$$

105. (105.) 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足 $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$. 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{3\sqrt{5}}\sqrt{\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}.$$

并说明不等号不能改进.

106. (106.♠) 证明存在 $C>0$ 使得对任何 n 次多项式 p 都有

$$|p(0)|\leqslant C\int_{-1}^1|p(x)|\,\mathrm{d}x.$$

107. (107.) 设 $f\in C^1[0,1]$ 满足 $f(0)=0$. 证明:

$$\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

第 17 章 数学类积分不等式

数学类积分不等式没有什么好分类归纳的, 以难题为主.

例题 17.1♡ 设 $f,g\in R[a,b],p>1$, 证明对任何 $\epsilon>0$, 存在常数 $C=C(p,\epsilon)>0$, 使得

$$\int_a^b \left||f(x)+g(x)|^p-|f(x)|^p\right|dx\leqslant \epsilon\int_a^b |f(x)|^p\,dx+C(p,\epsilon)\int_a^b |g(x)|^p\,dx.$$

笔记 本题是一个初等不等式, 而不是积分不等式.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{t\to 0}||1+t|^p-1|=0$, 所以存在 $\delta>0$, 使得

$$||1+t|^p-1|<\epsilon,\forall t\in[-\delta,\delta]. \tag{17.1}$$

因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{||1+t|^p-1|}{|t|^p}=1$, 所以存在 $C(p,\delta)>0$, 使得

$$\frac{||1+t|^p-1|}{|t|^p}<C(p,\delta),\forall |t|\geqslant\delta. \tag{17.2}$$

因为 $\delta=\delta(\epsilon)$, 于是我们结合(17.1)和(17.2)就证明了

$$||1+t|^p-1|<\epsilon+C(p,\epsilon)|t|^p,\forall t\in\mathbb{R}.$$

现在我们考虑 $t=\frac{g(x)}{f(x)}$, 就有不等式

$$\left||f(x)+g(x)|^p-|f(x)|^p\right|<\epsilon|f(x)|^p+C(p,\epsilon)|g(x)|^p.$$

两边积分得

$$\int_a^b \left||f(x)+g(x)|^p-|f(x)|^p\right|dx\leqslant \epsilon\int_a^b |f(x)|^p\,dx+C(p,\epsilon)\int_a^b |g(x)|^p\,dx.$$

来看 Gauss-Hardy 不等式.

例题 17.2 设 $p>1,f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0$. 证明:

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|^p e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^p e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

证明 首先对 $x>0$, 由 $|f|^p\in C^1(\mathbb{R})$, 我们有

$$|f(x)|^p\leqslant p\int_0^x |f(t)|^{p-1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

然后

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left|\frac{f(x)}{x}\right|^p e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\leqslant p\int_0^\infty\int_0^x\frac{|f(t)|^{p-1}\cdot|f'(t)|}{x^p}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&=p\int_0^\infty\left[|f(t)|^{p-1}|f'(t)|\left(\int_t^\infty\frac{1}{x^p}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}t\\
&\leqslant p\sup_{t>0}\left(t^{p-1}\left(\int_t^\infty\frac{1}{x^p}e^{-\frac{x^2-t^2}{2}}\mathrm{d}x\right)\right)\cdot\int_0^\infty\left[\left|\frac{f(t)}{t}\right|^{p-1}|f'(t)|e^{-\frac{t^2}{2}}\right]\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{p}{p-1}\cdot\left(\int_0^\infty\left|\frac{f(t)}{t}\right|^p e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^\infty|f'(t)|^p e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 Holder 不等式16.1和

$$t^{p-1}\left(\int_t^\infty\frac{1}{x^p}e^{-\frac{x^2-t^2}{2}}\mathrm{d}x\right)=\int_1^\infty s^{-p}e^{-\frac{t^2\left(s^2-1\right)}{2}}\mathrm{d}s\leqslant\left(\int_1^\infty s^{-p}e^{-\frac{t^2\left(s^2-1\right)}{2}}\mathrm{d}s\right)|_{t=0}=\frac{1}{p-1}.$$

于是我们证明了

$$\int_0^\infty\left|\frac{f(x)}{x}\right|^p e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty|f'(x)|^p e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

对称的考虑 $x<0$ 得

$$\int_{-\infty}^{0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|^{p}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\int_{-\infty}^{0}\left|f'(x)\right|^{p}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

于是我们知道

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|^{p}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\int_{\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|^{p}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

例题 17.3

1. ♡ 设 $f\in C^1[0,1],f'<1$, 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)>-\frac{1}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx.$$

2. ♠♡ 设 $f\in C^2[0,1],n\in\mathbb{N},n\geqslant 2$ 且满足

$$\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=-\frac{f(0)+f(1)}{2}. \tag{17.3}$$

证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\leqslant\frac{1}{120n^4}\int_0^1\left|f''(x)\right|^2dx. \tag{17.4}$$

证明

1. 由 EM 公式9.3, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{f(0)+f(1)}{2}+\int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx+\frac{1}{n}\int_0^n b_1(x)f'\left(\frac{x}{n}\right)dx.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)&=\frac{f(0)+f(1)}{2}+\int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx+\frac{1}{n}\int_0^n b_1(x)f'\left(\frac{x}{n}\right)dx\\&=\frac{f(0)+f(1)}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 b_1(nx)f'(x)\,dx\\&=\frac{f(0)+f(1)}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 b_1(nx)\left[f'(x)-1\right]dx+\int_0^1 b_1(nx)\,dx\\&=\frac{f(0)+f(1)}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 b_1(nx)\left[f'(x)-1\right]dx+\frac{1}{n}\int_0^n b_1(x)\,dx\\&\overset{\text{注意周期函数}}{=}\frac{f(0)+f(1)}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 b_1(nx)\left[f'(x)-1\right]dx\\&>\frac{f(0)+f(1)}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1\frac{1}{2}\left[f'(x)-1\right]dx\\&=\frac{f(0)+f(1)}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{f(1)-f(0)-1}{2},\end{aligned}$$

移项即得

$$\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)>-\frac{1}{2}+n\int_0^1 f(x)\,dx.$$

2. 由 EM 公式9.9, 我们知道

$$\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx+\frac{f(0)+f(1)}{2}+b_2(0)\left[\frac{f'(1)-f'(0)}{n}\right]-\frac{1}{n^2}\int_0^n b_2(x)f''\left(\frac{x}{n}\right)dx. \tag{17.5}$$

当 $x\in[0,1)$, 我们有

$$b_1(x)=x-\frac{1}{2},b_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}.$$

把数据代入(17.5)就有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx + \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(1)-f'(0)}{12n} - \frac{1}{n^2}\int_0^n b_2(x) f''\left(\frac{x}{n}\right)dx \\ &= n\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(1)-f'(0)}{12n} - \frac{1}{n}\int_0^1 b_2(nx) f''(x)\,dx,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = n\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(1)-f'(0)}{12n} - \frac{1}{n}\int_0^1 b_2(nx) f''(x)\,dx. \tag{17.6}$$

结合(17.6)和条件(17.3), 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \frac{1}{n^2}\int_0^1 b_2(nx) f''(x)\,dx - \frac{f'(1)-f'(0)}{12n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\int_0^1 \left[b_2(nx) - \frac{1}{12}\right] f''(x)\,dx\end{aligned}.$$

现在就有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 &= \left(\frac{1}{n^2}\int_0^1 \left[b_2(nx)-\frac{1}{12}\right] f''(x)\,dx\right)^2 \\ &\overset{\text{cauchy 不等式16.1}}{\leqslant} \frac{1}{n^4}\left(\int_0^1 \left[b_2(nx)-\frac{1}{12}\right]^2 dx\right)\left(\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\right) \\ &= \frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{n}\int_0^n \left[b_2(x)-\frac{1}{12}\right]^2 dx\right)\left(\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\right) \\ &\overset{\text{周期1函数}}{=} \frac{1}{n^4}\left(\int_0^1 \left[b_2(x)-\frac{1}{12}\right]^2 dx\right)\left(\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\right) \\ &= \frac{1}{120n^4}\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\end{aligned}.$$

例题 17.4 参考八一: 积分不等式葵花宝典 设正值函数 $f, g \in C[0,1]$ 且 $f, \frac{g}{f}$ 单调递增, 证明

$$\int_0^1 \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\right) \leqslant 2\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}dx. \tag{17.7}$$

笔记 单调性即暗示切比雪夫不等式16.6相关. 围绕已知式构造.

证明 由切比雪夫不等式16.6, 我们有

$$\int_0^x f(t)\,dt \cdot \int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt \leqslant x\int_0^x g(t)\,dt. \tag{17.8}$$

由 Cauchy 不等式16.1我们有

$$\frac{x^4}{4} = \left(\int_0^x \sqrt{\frac{g(t)}{f(t)}}\cdot\sqrt{\frac{t^2 f(t)}{g(t)}}dt\right)^2 \leqslant \int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}dt \cdot \int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt. \tag{17.9}$$

由(16.63),(16.65), 我们有

$$\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \leqslant \frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t^2 f(t)}{g(t)}dt, \forall x > 0.$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\right)dx &\leqslant \int_0^1\int_0^x \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}dt \overset{\text{二重积分换序}}{=} \int_0^1\int_t^1 \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}dxdt \\ &= 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\left(1-t^2\right)dt \leqslant 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt.\end{aligned}$$

例题 17.5 设 $g(x)\in L^1[0,1]$, 那么对一切 $[0,1]$ 上的下凸函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 g(x)f(x)dx\leqslant 0$$

的充分必要条件是

$$\int_0^1 g(y)dy=\int_0^1 yg(y)dy=0,\int_0^1(1-y)g(xy)dy\leqslant 0,\forall x\in[0,1].$$

笔记 注意. 在有界闭区间上, 磨光核方法对凸性的保持在端点附近会出问题, 因此我们选用 Bernstein 多项式方法.

证明 必要性 : 如果对一切 $[0,1]$ 上的下凸函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 g(x)f(x)dx\leqslant 0,$$

取 $f(x)=c,c\in\mathbb{R}$, 那么有

$$c\int_0^1 g(x)dx\leqslant 0,$$

取 $f(x)=cx,c\in\mathbb{R}$, 那么有

$$c\int_0^1 xg(x)dx\leqslant 0,$$

这只能有

$$\int_0^1 g(y)dy=\int_0^1 yg(y)dy=0.$$

设

$$G(x)=\int_0^x\int_0^y g(z)dzdy=\int_0^x(x-z)g(z)dz=x^2\int_0^1(1-z)g(xz)dz,$$

则

$$G''(x)=g(x),G(0)=G(1)=G'(0)=G'(1)=0,$$

如果存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $G(x_0)>0$, 由连续性, 存在 $\delta>0$, 使得 $G(x)>0,\forall x\in[x_0,x_0+\delta]$, 取下凸函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+\delta)(x-x_0)-\frac{1}{2}\delta^2, & x_0+\delta\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{2}(x-x_0)^2+(x-x_0), & x\in[x_0,x_0+\delta]\\ x-x_0, & 0\leqslant x\leqslant x_0\end{cases},\text{ 则}$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+\delta}G(x)dx>0,$$

矛盾!, 因此

$$G(x)\leqslant 0,\forall x\in(0,1),$$

结合连续性就有

$$\int_0^1(1-y)g(xy)dy\leqslant 0,\forall x\in[0,1],$$

我们完成了必要性的证明.

充分性 : 设

$$G(x)=\int_0^x\int_0^y g(z)dz=\int_0^x(x-z)g(z)dz=x^2\int_0^1(1-z)g(xz)dz,$$

则

$$G''(x)=g(x),G(0)=G(1)=G'(0)=G'(1)=0,G(x)\leqslant 0,$$

当 $f\in C^2[0,1]$, $f''(x)\geqslant 0$, 我们有

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=\int_0^1 f''(x)G(x)\,dx\leqslant 0.$$

对一般的下凸函数 f, 注意到由凸函数的性质13.4和13.8, f 仅可能在 $x=0,1$ 不连续, 但我们可以修正 f 在 $x=0,1$ 的值使得 $f\in C[0,1]$. 考虑 f_n 为 f 的 Bernstein 多项式. 由13.47的第三条知 f_n 下凸, 故

$$\int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx\leqslant 0.$$

我们关于 $x\in[0,1]$, 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

于是令 $n\to\infty$, 我们证明了

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\leqslant 0,$$

这就完成了充分性的证明.

例题 17.6Favard 不等式 对上凸函数 $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ 和 $p\geqslant 1$, 证明

$$\int_0^1 f^p(x)\,dx\leqslant\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^p. \tag{17.10}$$

证明 **Step 1** 对 $f\in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$ 的情况我们直接运用插值积分余项11.2, 我们有

$$f(x)=\int_0^1 k(x,y)f''(y)\,dy.$$

于是

$$\begin{aligned}\|f\|_p &\overset{\text{闵可夫斯不等式16.3}}{\leqslant}\int_0^1\|k(x,y)\|_p\left(-f''(y)\right)dy\\ &=\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 y(1-y)\left(-f''(y)\right)dy\\ &\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 f(y)\,dy,\end{aligned}$$

这里 $\|f\|_p\triangleq\left(\int_0^1|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$. 于是我们得到了不等式(17.10).

Step 2 当 $f(x)=kx+b, k,b\in\mathbb{R}$ 且 f 非负. 此时等价于两个端点非负, 即 $b\geqslant 0, k+b\geqslant 0$. 不等式(17.10)变为

$$\left(\int_0^1(kx+b)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1(kx+b)\,dx. \tag{17.11}$$

当 $b=0$, 显然有(17.11)成立. 当 $b\neq 0$, 两边可同除以 b, 从而不妨设 $b=1$, 计算(17.11)两边积分得

$$\frac{(k+1)^{p+1}-1}{(p+1)k}\leqslant\frac{2^p}{p+1}\left(1+\frac{k}{2}\right)^p, k\geqslant -1.$$

为了证明上式, 设 $x=k+1, x\geqslant 0$, 则只需证明

$$\frac{x^{p+1}-1}{x-1}\leqslant(x+1)^p.$$

由倒代换可知不妨设 $x\in(0,1)$. 此时容易通过初等求导证明.

Step 3 对一般的 $f\in C^2[0,1]$. 注意到 $f=q+r$, q 是 f 的拉格朗日插值多项式部分[1], r 是积分余项. 注意到

$$\begin{aligned}\|f\|_1=\|q+r\|_1=\|q\|_1+\|r\|_1&\geqslant\frac{1}{2}(1+p)^{\frac{1}{p}}\|q\|_p+\frac{1}{2}(1+p)^{\frac{1}{p}}\|r\|_p\\ &\overset{\text{闵可夫斯基不等式16.3}}{\geqslant}\frac{1}{2}(1+p)^{\frac{1}{p}}\|q+r\|_p=\frac{1}{2}(1+p)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,\end{aligned}$$

这就给出了不等式(17.10).

[1]插 $f(0), f(1)$.

Step 4 对一般的 f, 和例题17.5一样, 不妨设 $f\in C[0,1]$. 考虑 f 的 Bernstein 多项式13.13f_n, 由 Bernstein 多项式性质13.47容易知道 f_n 非负上凸且在 $[0,1]$ 一致的有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n^p(x)\,dx\leqslant\frac{2^p}{p+1}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)^p$$

给出(17.10).

例题 17.7 设 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 连续严格递减. 若 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=+\infty,\int_0^\infty\varphi(x)\,\mathrm{d}x=a$, 证明

$$\int_0^\infty|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left|\varphi^{-1}(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.\tag{17.12}$$

笔记 本题颇为奇怪, 参考答案难以让人理解, 且看我们如何叙述答案. 本题需结合视频阅读. 我们直接证明最佳版本

$$\int_0^\infty|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left|\varphi^{-1}(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{4\sqrt{2}}{3}a^{\frac{3}{2}}.\tag{17.13}$$

证明 设

$$\Omega\triangleq\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,0<y<\varphi(x)\right\}.$$

显然有

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0,|\Omega|=\int_0^\infty\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\varphi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=a>0.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left|\varphi^{-1}(x)\right|^2\mathrm{d}x=\iint_\Omega 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_\Omega 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\iint_\Omega\left(\int_0^{x+y}1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^\infty\left(\int_{\{(x,y)\in\Omega:x+y>t\}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^\infty\left(a-\int_{\{(x,y)\in\Omega:x+y\leqslant t\}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\
&\geqslant2\int_0^{\sqrt{2a}}\left(a-\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x,y\geqslant0,x+y\leqslant t\}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\sqrt{2a}}\left(a-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

再说明不等式(17.13)是最佳的.[*]

给定 $\epsilon\in(0,1)$, 我们考虑

$$f_\epsilon(x)\triangleq\begin{cases}2-\epsilon-\ln\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & x\in(0,\epsilon)\\ 2-x, & x\in[\epsilon,2-\epsilon)\\ \epsilon e^{2-\epsilon-x}, & x\in[2-\epsilon,+\infty)\end{cases}.$$

我们有 $f_\epsilon^{-1}(x)=f_\epsilon(x)$ 是满足题目条件的函数, 于是

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{\int_0^\infty|f_\epsilon(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left|f_\epsilon^{-1}(x)\right|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_0^\infty f_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{\frac{16}{3}+12\epsilon-7\epsilon^2+\frac{2}{3}\epsilon^3}{(2+2\epsilon-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

这就证明了我们得到的不等式(17.13)是最佳的.

例题 17.8 设 $f\in C^2[0,1]$, 证明:

$$\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\leqslant|f(1)-f(0)|+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 记

$$|f'(a)| = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|, a \in [0,1].$$

由拉格朗日中值定理

$$|f(1) - f(0)| = |f'(c)|, c \in (0,1).$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x + |f(1) - f(0)| &\geqslant \left|\int_c^a f''(x)\,\mathrm{d}x\right| + |f'(c)| \\ &= |f'(a) - f'(c)| + |f'(c)| \geqslant |f'(a)| = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 17.9 设 $f \in C^2[0,1]$, 证明

1.
$$|f'(x)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx. \tag{17.14}$$

2.
$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx. \tag{17.15}$$

3. 若 $f(0)f(1) \geqslant 0$, 则
$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx. \tag{17.16}$$

笔记 对于 $[a,b]$ 的情况, 考虑 $f(a + (b-a)x), x \in [0,1]$, 我们有

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |f''(x)|\,dx,$$

以及

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx + (b-a)\int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

当 $f(a)f(b) \geqslant 0$, 我们有

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx + (b-a)\int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

证明

1. 注意到对任何 $\theta \in [0,1]$, 我们有
$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant |f'(x) - f'(\theta)| + |f'(\theta)| \leqslant \left|\int_\theta^x f''(y)\,dy\right| + |f'(\theta)| \\ &\leqslant \int_0^1 |f''(y)|\,dy + |f'(\theta)|.\end{aligned}$$
于是只需证明存在 $\theta \in [0,1]$ 使得
$$|f'(\theta)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{17.17}$$
如果 f' 有零点则(17.17)显然可得. 下设 f' 没有零点. 不妨设 f 严格递增.
若 f 没有零点, 不妨设 $f > 0$, 则
$$f(x) = f(0) + xf'(\eta) \geqslant xf'(\eta) \geqslant x \cdot \min_{[0,1]} |f'| \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{4}\min_{[0,1]} |f'|, \tag{17.18}$$
这也给出了(17.17).

若 $f(t)=0,t\in[0,1]$, 我们有

$$f(x)=f'(\theta)(x-t)\Rightarrow\int_0^1|f(x)|\,dx\geqslant\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1|x-t|\,dx$$

$$\overset{\text{可以直接分类讨论计算, 也可以用训练题2.}}{\geqslant}\min_{[0,1]}|f'|\cdot\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$$

$$=\frac{1}{4}\min_{[0,1]}|f'|,$$

这也给出了(17.17). 于是我们证明了不等式(17.14).

2. 直接对(17.14)两边积分得(17.15).
3. 不妨设 $f(0)\geqslant0$, 则注意(17.18)的放缩没有到 $\frac{1}{4}$ 而是 $\frac{1}{2}$, 因此读者可以类似的写出过程, 希望自己完成.
   我们仍然给出证明. 首先同样的只需证明存在 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$|f'(\theta)|\leqslant2\int_0^1|f(x)|\,dx.\tag{17.19}$$

不妨假定 f' 没有零点且 $f(0)\geqslant0$, 则当 f 递增, 我们有

$$f(x)=f(0)+xf'(\eta)\geqslant xf'(\eta)\geqslant x\cdot\min|f'|\Rightarrow\int_0^1|f(x)|\,dx\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

当 f 递减, 我们有

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\alpha)\geqslant(1-x)\min|f'|\Rightarrow\int_0^1|f(x)|\,dx\geqslant\frac{1}{2}\min|f'|.$$

于是必有(17.19)成立, 这就给出了(17.16).

例题 17.10 设 $f\in C[a,b],f>0,L>0,|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,a<c<d<b$, 记

$$\alpha=\int_c^d\frac{1}{f(x)}dx,\beta=\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx,$$

证明

$$\int_a^bf(x)\,dx\leqslant\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^df(x)\,dx.\tag{17.20}$$

笔记 相比题目本身, 想法更为重要. 即 Lip 性构成放缩的关键. 即

$$f(y)-L|x-y|\leqslant f(x)\leqslant f(y)+L|x-y|.\tag{17.21}$$

证明 取 $m=f(x_0)=\min_{[a,b]}f$, 则利用(17.21)有

$$\int_a^bf(x)\,dx\leqslant\int_a^b[f(x_0)+L|x-x_0|]\,dx=(b-a)f(x_0)+\frac{L}{2}\left[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2\right].\tag{17.22}$$

又利用(17.21)有

$$\beta=\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geqslant\int_a^b\frac{1}{f(x_0)+L|x_0-x|}dx=\frac{1}{L}\ln\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)\right].\tag{17.23}$$

我们用(17.23)得

$$e^{2L\beta}-1\geqslant\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)^2\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)^2-1.\tag{17.24}$$

又

$$\frac{\int_c^df(x)\,dx}{\int_c^d\frac{1}{f(x)}dx}\geqslant\frac{\int_c^df(x_0)\,dx}{\int_c^d\frac{1}{f(x_0)}dx}=m^2,$$

于是只需证明

$$(b-a)m+\frac{L}{2}\left[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2\right]\leqslant\frac{m^2}{2L}\left[\left(1+\frac{L(x_0-a)}{f(x_0)}\right)^2\left(1+\frac{L(b-x_0)}{f(x_0)}\right)^2-1\right].$$

记

$$x=\frac{L\left(x_0-a\right)}{m}, y=\frac{L\left(b-x_0\right)}{m}, x+y=\frac{L\left(b-a\right)}{m},$$

我们只需证明

$$\left[(1+x)^2(1+y)^2-1\right] m^2 \geqslant 2(x+y) m^2+m^2\left(x^2+y^2\right),$$

做差因式分解得

$$xy(x+2)(y+2) m^2 \geqslant 0,$$

这就证明了不等式(17.20).

例题 17.11 给定 $[0,+\infty)$ 上的递减函数 f, 若 $\int_0^{\infty} x^3 f(x)\,dx$ 收敛, 证明

$$\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{8}{9}\int_0^{\infty} x f(x)\,dx \int_0^{\infty} x^3 f(x)\,dx.$$

证明

首先 f 递减知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在或者为 ∞, $\int_0^{\infty} x^3 f(x)\,dx$ 收敛知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 因此 $f(x)\geqslant 0, \forall x\geqslant 0$.

考虑

$$g(t) \triangleq \left(\int_0^{\infty} x^3 f(x)\,dx\right) t^2-\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)\,dx\right) t+\frac{2}{9}\int_0^{\infty} x f(x)\,dx,$$

则对 $t\leqslant 0$, 显然 $g(t)\geqslant 0$, 对 $t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^{\infty}\left(x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x\right) f(x)\,dx \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{3t}}\left(x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x\right) f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{3t}}^{\frac{2}{3t}}\left(x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x\right) f(x)\,dx \\
&\geqslant f\left(\frac{1}{3t}\right)\int_0^{\frac{1}{3t}}\left(x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x\right) dx+f\left(\frac{1}{3t}\right)\int_{\frac{1}{3t}}^{\frac{2}{3t}}\left(x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x\right) dx \\
&= f\left(\frac{1}{3t}\right)\int_0^{\frac{2}{3t}}\left(x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x\right) dx=0,
\end{aligned}$$

这里用到了 $x^3t^2-tx^2+\frac{2}{9}x=\frac{x(3tx-2)(3tx-1)}{9}$, 由 t 任意性和二次函数判别式我们得到了

$$\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{8}{9}\int_0^{\infty} x f(x)\,dx \int_0^{\infty} x^3 f(x)\,dx.$$

来看一个兴趣问题

例题 17.12* 设

$$f(x)\in C^2[-1,1], f(1)=f(-1)=f'(1)=f'(-1)=0$$

证明

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\left|f''(x)\right|^2 dx. \tag{17.25}$$

笔记 本题最好配合计算器计算.

证明 不妨设[2]

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|=|f(x_0)|, x_0\in[-1,0].$$

条件已有分部积分需要的 0 边界条件, 故可以无脑分部积分.

我们需要 $p''=\delta_{x_0}$, 类似积分插值余项的构造11.2, 我们可待定

$$a\in\mathbb{R}, p(x)=\begin{cases} ax, & x_0\leqslant x\leqslant 1 \\ (a+1)x-x_0, & -1\leqslant x<x_0 \end{cases}.$$

[2]否则用 $f(-x)$ 代替 $f(x)$ 即可.

由 cauchy 不等式16.1直接计算得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}p^2(x)\,dx\int_{-1}^{1}|f''(x)|^2\,dx\geqslant\left(\int_{-1}^{1}p(x)\,f''(x)\,dx\right)^2\\&=\left(\int_{-1}^{1}p'(x)\,f'(x)\,dx\right)^2=\left(\int_{-1}^{x_0}(a+1)\,f'(x)\,dx+\int_{x_0}^{1}af'(x)\,dx\right)^2\\&=\left((a+1)\,f(x_0)-af(x_0)\right)^2=|f(x_0)|^2.\end{aligned}$$

又

$$\int_{-1}^{1}|p(x)|^2\,dx=\int_{-1}^{x_0}\left[(a+1)\,x-x_0\right]^2dx+\int_{x_0}^{1}a^2x^2dx.$$

为使得不等式最好, 希望上式关于 a 的函数尽可能小, 计算出积分值之后对 a 求导得

$$\frac{d\int_{-1}^{1}|p(x)|^2\,dx}{da}=\frac{4a-c^3+3c+2}{3},$$

取极小值点 $a=\frac{c^3-3c-2}{4}$, 我们有

$$\int_{-1}^{1}|p(x)|^2\,dx=\frac{(x_0+1)^3\left(4+3x_0^2-x_0^3\right)}{24}\overset{x_0=0\text{取最大}}{\leqslant}\frac{1}{6},$$

这就得到了不等式(17.25).

例题 17.13 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 下凸函数, 证明:

$$\int_0^1x(1-x)\,f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{6}\int_0^1f(x)\,dx.$$

证明 当 $f(x)$ 二阶连续可微时, 我们有:

$$\int_0^1x(1-x)\,f(x)\,dx-\frac{1}{6}\int_0^1f(x)\,dx=-\frac{1}{12}\int_0^1\left[x(1-x)\right]^2f''(x)\,dx\leqslant0.$$

一般情况可类似例17.5, 用 Bernstein 多项式逼近可得.

例题 17.14 设 $f(x)\in C[-1,1]$, 并且满足

$$f(-1)\geqslant f(1),\ \int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0,\ x+f(x)\text{单调递增}.$$

证明 : $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,dx\leqslant\frac{2}{3}$.

证明 记 $k(x)=x+f(x)$, 首先

$$f(-1)\geqslant f(1),\ x+f(x)\text{递增}\Longrightarrow k(-1)+1\geqslant k(1)-1\Longrightarrow k(y)-k(x)\leqslant k(1)-k(-1)\leqslant2,\ \forall y,x\in[-1,1].$$

运用第二积分中值定理11.3和 $\int_{-1}^{1}k(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}xdx=0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,dx-\frac{2}{3}&=\int_{-1}^{1}(k(x)-2x)\,k(x)\,dx\\&=k(-1)\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,dx-\theta^2+1\right]+k(1)\left[\int_{\theta}^{1}k(x)\,dx-1+\theta^2\right]\\&=k(-1)\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,dx-\theta^2+1\right]-k(1)\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,dx-\theta^2+1\right].\end{aligned}$$

令一方面, 如果

$$-\int_{\theta}^{1}k(x)\,dx-\theta^2+1=\int_{-1}^{\theta}k(x)\,dx-\theta^2+1<0,$$

由第一积分中值定理11.3, 我们有

$$\left[k(\zeta)-\theta-1\right](\theta-1)=\left[k(\eta)-\theta+1\right](\theta+1)<0,\ 1\geqslant\zeta>\theta>\eta\geqslant-1.$$

因此

$$k(\zeta)-k(\eta)>(\theta+1)-(\theta-1)=2,$$

这是一个矛盾!

来看数学类竞赛的真题和推广.

例题 17.15

1. 设 f,g 是递增函数且 $0\leqslant f,g\leqslant 1,\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$, 证明
$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx\leqslant \frac{1}{2}. \tag{17.26}$$
2. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的递增函数, 满足 $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$, 证明
$$\int_0^1 |f(x)-x|\,dx\leqslant \frac{1}{4}.$$

注参考答案使用阶梯函数逼近只是强行数分化, 使得积分始终是在区间上积分, 从而是黎曼积分. 但是阶梯函数逼近本身也属于实分析, 所以我们索性就在勒贝格积分框架下解决[3].

笔记 本题颇为奇淫技巧, 但无奈是竞赛真题.

证明

1. **Method 1**

考虑 $h(x)=f(x)-g(x)$ 且
$$I=\{x\in[0,1]:f(x)>g(x)\},J=\{x\in[0,1]:f(x)\leqslant g(x)\}.$$
由题目条件, 我们有
$$\int_I h dx=\int_J(-h)\,dx,\int_0^1|f-g|\,dx=\int_I h dx+\int_J(-h)\,dx=2\int_I h dx. \tag{17.27}$$
于是只需证明 $4\int_I h dx\leqslant 1$. 其核心步骤是初等 Cauchy 不等式
$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant 4,\forall x,y>0. \tag{17.28}$$
现在
$$\begin{aligned}4\int_I h dx&\overset{(17.28)}{\leqslant}\int_I h dx\cdot\left[\frac{1}{|I|}+\frac{1}{|J|}\right]=\frac{\int_I h dx}{|I|}+\frac{\int_I h dx}{|J|}\\&=\frac{\int_I h dx}{|I|}+\frac{\int_J(-h)\,dx}{|J|}\leqslant\sup h+\sup(-h)\\&=\sup h-\inf h\overset{\text{结合几何直观}}{\leqslant}1,\end{aligned}$$
这就证明了不等式(17.27).

Method 2

注意到对任何 $c,d\in[0,1]$ 都有
$$(1-(2c-1)(2d-1))^2-(2c-2d)^2=16c(1-c)d(1-d)\geqslant 0;$$
$$1-(2c-1)(2d-1)\geqslant 0,$$
即
$$|c-d|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2c-1)(2d-1).$$

[3]当然, 不会实分析直接读不会有本质困难.

由切比雪夫不等式16.6得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (2f(x)-1)(2g(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ \geqslant&\int_0^1 (2f(x)-1)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 (2g(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^1 (2f(x)-1)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 (2f(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ =&\left(\int_0^1 (2f(x)-1)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

现在

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1(2f(x)-1)(2g(x)-1)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}.$$

Method 3

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 (f(x)+g(x)-2\min\{f(x),g(x)\})\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_0^1 (f(x)+g(x)-2f(x)g(x))\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1(2f(x)-1)(2g(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{同Method 2}}{\leqslant}\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. 当 f 是阶梯函数, 考虑

$$I=\{x\in[0,1]:f(x)\geqslant x\},J=\{x\in[0,1]:f(x)<x\}$$

我们把 I,J 尽可能分解为若干区间之并, 使得每个区间如果相连, 则分别属于 I,J, 注意 $|I|+|J|=1$, 我们不妨设 $|I|\leqslant\frac{1}{2}$ 于是由条件

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)-x|\,dx&=2\int_I (f(x)-x)\,dx\\ &=2\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-x)\,dx\\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x_k)-x)\,dx\\ &=2\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,dx\\ &=2\sum_{k=1}^n\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2}\\ &\leqslant|I|^2\leqslant\frac{1}{4},\end{aligned}$$

倒数第三个等号是因为若 $x_k\in(0,1)$, 则有

$$f(x_k^-)-x_k\geqslant 0,f(x_k^+)-x_k\leqslant 0.$$

若 $x_k=0,1$, 由 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 类似可得, 所以由递增性, 必有

$$f(x_k)=f(x_k^-)=f(x_k^+)=x_k.$$

当 f 是一般的满足条件的函数, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在划分

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=1,$$

使得 $\sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$, 这里

$$w_i = M_i - m_i, M_i = \sup_{x\in[y_{i-1},y_i]} f(x), m_i = \inf_{x\in[y_{i-1},y_i]} f(x), i = 1, 2, \cdots, m.$$

取

$$g(x) = \frac{\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,dx}{y_i - y_{i-1}}, x \in [y_{i-1}, y_i],$$

因为端点是有限的, 虽然重复定义, 但不影响积分.

则

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(t)\,dt}{y_i - y_{i-1}} dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2},$$

显然 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ 且递增, 又

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x) - g(x)|\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{m} w_i (y_i - y_{i-1}) \leqslant \varepsilon.$$

因此

$$\int_0^1 |f(x) - x|\,dx \leqslant \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} + \varepsilon.$$

由 ε 任意性, 我们完成了证明.

例题 17.16 海森堡不等式 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 证明不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx. \tag{17.29}$$

注直观上, 直接 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx\right)^2 \overset{\text{分部积分}}{=} 4\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\,dx\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx.$$

但是分部积分部分需要零边界条件. 但是其实专业数学知识告诉我们在 $\mathbb{R}$ 上只要可积其实就可以分部积分的. 且看我们两种操作.

证明 **Method 1** 专业技术: 注意到对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx\right)^2 \overset{\text{分部积分}}{=} 4\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\,dx\right)^2 \leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx,$$

即不等式(17.29)成立.

对一般的 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx < \infty.$$

取紧化序列13.6 $h_n, n \in \mathbb{N}$, 则对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} |h_n(x)f(x)|^2\,dx\right)^2 &\leqslant 4\int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x)f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |(h_n f)'(x)|^2\,dx \\ &= 4\int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x)f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h_n'(x)f(x) + h_n(x)f'(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

右边让 $n \to +\infty$, 就有[4]

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[4\int_{\mathbb{R}} x^2 |h_n(x)f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |h_n'(x)f(x) + h_n(x)f'(x)|^2\,dx\right] \\ &= \left[4\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx\right].\end{aligned}$$

[4]注意运用 h_n', h_n 一致有界性可以知道不等式右边换序是显然的.

但是左边暂时不知道是否有 $\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx\right)^2<\infty$, 因此不能直接换序. 但是法图7.11告诉我们

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx\right)^2&=\left(\int_{\mathbb{R}}\varliminf_{n\to\infty}|h_n(x)f(x)|^2\,dx\right)^2\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}|h_n(x)f(x)|^2\,dx\right)^2\\&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\,dx\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

从而不等式(17.29)成立.

Method 2 正常技术: 对一般的 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 假定

$$4\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\,dx\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\,dx<\infty.$$

从分部积分需要看到, 我们只需证明

$$\lim_{x\to\infty}x|f(x)|^2=0.$$

我们以正无穷为例. 注意到

$$\sqrt{\int_x^\infty y^2f^2(y)\,dy\cdot\int_x^\infty|f'(y)|^2\,dy}\overset{\text{cauchy 不等式16.1}}{\geqslant}\int_x^\infty y|f'(y)f(y)|\,dy\geqslant x\int_x^\infty|f'(y)f(y)|\,dy,\tag{17.30}$$

于是 $\int_x^\infty f(y)f'(y)\,dy$ 收敛. 因此 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac12|f(y)|^2$ 存在. 注意

$$\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2\,dx<\infty\overset{\text{积分收敛必有子列趋于0}14.3.1}{\Rightarrow}\text{存在}x_n\to\infty,\text{使得}\lim_{n\to\infty}x_n|f(x_n)|=0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0\Rightarrow\lim_{y\to+\infty}f(y)=0.$$

现在继续用(17.30), 我们知道

$$\sqrt{\int_x^\infty y^2f^2(y)\,dy\cdot\int_x^\infty|f'(y)|^2\,dy}\geqslant x\int_x^\infty f'(y)f(y)\,dy=\frac{x}{2}|f(x)|^2,$$

由 cauchy 收敛准则即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x|f(x)|^2=0$, 这就完成了证明.

例题 17.17 确定最小常数 $C>0$, 对任何 $[0,1]$ 有根的 3 次多项式 p, 使得

$$\int_0^1|p(x)|\,dx\leqslant C\max_{x\in[0,1]}|p(x)|.\tag{17.31}$$

笔记 本题非常困难, 需要联想三次插值多项式的信息.

证明 不妨设 $\max\limits_{x\in[0,1]}|p(x)|=1$, 设 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_s=1$ 是 p 全部根, 这里 $1\leqslant s\leqslant4$.

对于三次多项式 p, 写成拉格朗日插值多项式11.1的形式, 直接计算有

$$\int_a^bp(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[p(a)+4p\left(\frac{a+b}{2}\right)+p(b)\right].\tag{17.32}$$

于是

$$\int_0^1|p(x)|\,dx=\sum_{i=1}^s\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(x)\,dx\right|\overset{(17.32)}{=}\sum_{i=1}^s\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\left|p(x_{i-1})+4p\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+p(x_i)\right|.$$

因此

$$\int_0^1|p(x)|\,dx\leqslant\frac56\sum_{i=1}^s(x_i-x_{i-1})M=\frac56M.$$

下证明 $C=\frac56$.

事实上可猜想 $p(0)=0,p\left(\frac12\right)=1,p(1)=1$ 且 $\max\limits_{x\in[0,1]}|p(x)|=1$. 故直接待定系数可取出 $p(x)=4x^3-8x^2+5x$ 为一个等号成立的函数.

来看竞赛真题的一般推广.

例题 17.18 设 $g(x)\in C^2[0,1]$ 是递增的下凸函数, 则有

$$\begin{aligned}\inf_{f\in C[0,1],\ \int_{x^2}^{x} f(y)dy\geqslant g(x)-g(x^2)}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&=\int_0^1 |g'(x)|^2\,dx\\ \inf_{f\in C[0,1],\ \int_{x}^{1} f(y)dy\geqslant g(1)-g(x)}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&=\int_0^1 |g'(x)|^2\,dx\end{aligned}.$$

证明 我们可取 $f(y)=g'(y)$, 可以知道上述等号成立, 另外一方面我们令

$$F(x)=\int_x^1 f(y)\,dy+g(x),$$

则 $F\left(x^2\right)\geqslant F(x),\forall x\in[0,1]$, 因此

$$F(x)\geqslant F\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\geqslant F\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\geqslant\cdots\geqslant\lim_{n\to\infty}F\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)=F(1),\forall x\in(0,1],$$

于是由 F 连续性, 我们有 $F(x)\geqslant F(1),\forall x\in[0,1]$, 现在就是

$$\int_x^1 f(y)\,dy\geqslant g(1)-g(x),\forall x\in[0,1],$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g'(x)|^2\,dx\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&\geqslant\left(\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx\right)^2\\&=\left(\int_0^1 g'(x)\,d\int_x^1 f(y)\,dy\right)^2\\&=\left(-g'(0)\int_0^1 f(y)\,dy-\int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\,dy\right)g''(x)\,dx\right)^2\\&=\left(g'(0)\int_0^1 f(y)\,dy+\int_0^1\left(\int_x^1 f(y)\,dy\right)g''(x)\,dx\right)^2\\&\geqslant\left(g'(0)\int_0^1 f(y)\,dy+\int_0^1(g(1)-g(x))g''(x)\,dx\right)^2\\&=\left(g'(0)\int_0^1 f(y)\,dy-g'(0)(g(1)-g(0))+\int_0^1|g'(x)|^2\,dx\right)^2\\&\geqslant\left(\int_0^1|g'(x)|^2\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

因此 $\int_0^1|f(x)|^2\,dx\geqslant\int_0^1|g'(x)|^2\,dx$.

我们证明了

$$\begin{aligned}\inf_{f\in C[0,1],\ \int_{x^2}^{x} f(y)dy\geqslant g(x)-g(x^2)}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&=\int_0^1 |g'(x)|^2\,dx\\ \inf_{f\in C[0,1],\ \int_{x}^{1} f(y)dy\geqslant g(1)-g(x)}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&=\int_0^1 |g'(x)|^2\,dx\end{aligned}.$$

推论:

$$\begin{aligned}\inf_{f(x)\in C[0,1],\ \int_{x^2}^{x} f(y)dy\geqslant\frac{x^2-x^4}{2}}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&=\inf_{f(x)\in C[0,1],\ \int_{x}^{1} f(y)dy\geqslant\frac{1-x^2}{2}}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx=\frac{1}{3}\\ \inf_{f(x)\in C[0,1],\ \int_{x^2}^{x} f(y)dy\geqslant\frac{x^3-x^6}{2}}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx&=\inf_{f(x)\in C[0,1],\ \int_{x}^{1} f(y)dy\geqslant\frac{1-x^3}{2}}\int_0^1 |f(x)|^2\,dx=\frac{9}{20}\end{aligned}.$$

例题 17.19 设 $f\in C^2[1,+\infty)$ 使得 $f(1)=1,f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3},f''(x)>0$ 且递减到 0. 证明

$$-\frac{1}{8}<\int_1^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx<-\frac{1}{18}.$$

笔记 本题的想法是灵活运用切割线放缩.

证明 本题原题虽然未知 f'' 连续性, 但单调函数无第二类间断点, 导函数无第一类间断点知 f'' 仍然是连续的.

如果 $\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx$ 存在, 那么

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{2}{3}+n}^{\frac{5}{6}+n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx=0.$$

由积分中值定理, 存在 $\theta(n)\in\left(\frac{2}{3}+n,\frac{5}{6}+n\right)$, 使得

$$\left(\theta(n)-[\theta(n)]-\frac{1}{2}\right)f(\theta(n))=6\int_{\frac{2}{3}+n}^{\frac{5}{6}+n}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx.$$

取 $f(x)=\frac{5}{3}+\ln\frac{4}{9}+\left(2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)x-\ln x$, 显然 $f''(x)=\frac{1}{x^2}$ 满足题目条件, 但是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

由

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\theta(n)-[\theta(n)]-\frac{1}{2}\right)f(\theta(n))=0,$$

我们知道

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\theta(n)-[\theta(n)]-\frac{1}{2}\right)=0.$$

但是 $\theta(n)-[\theta(n)]\in\left(\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right)$. 矛盾!, 此时 $\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx$ 发散.

如果将问题修改为设 f 是 $[1,+\infty)$ 的下凸函数且 $f(1)=1,f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明

$$-\frac{1}{8}<\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx<-\frac{1}{18}.$$

现在对每个 $k\in\mathbb{N}$, 定义

$$L(x)\triangleq 2\left(f(k+1)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\left(x-k-\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

由 f 的凸性, 我们知道

$$L(x)\geqslant f(x),x\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right],L(x)\leqslant f(x),x\in\left[k,k+\frac{1}{2}\right].$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_k^{k+\frac{1}{2}}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx\right)\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_k^{k+\frac{1}{2}}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)L(x)\,dx+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)L(x)\,dx\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)L(x)\,dx\\
&=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(k+1)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)^2dx\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(k+1)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\leqslant\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f\left(k+\frac{3}{2}\right)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&=-\frac{1}{12}f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{18}
\end{aligned}$$

显然上述不等式成立的充要条件是 $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$, 因此不等号可以改为严格不等号.

同样的对每个 $k\in\mathbb{N}$, 考虑

$$\ell(x)\triangleq 2\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f(k)\right)\left(x-k-\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right),$$

我们有

$$\ell(x) \leqslant f(x), x \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right], \ell(x) \geqslant f(x), x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right].$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f(x)\, dx &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)\ell(x)\, dx \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f(k)\right)\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f(k)\right) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f(k+1)\right)+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}(f(k+1)-f(k)) \\
&\geqslant \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f\left(k+\frac{3}{2}\right)\right)-\frac{1}{6} \\
&= -\frac{1}{9} > -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

例题 17.20 求最大的 c, 使得对所有 $[0,1]$ 上的满足 $f(1)=1$ 的上凸函数 f, 都有

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx \geqslant c\int_0^1 f(x)\, dx.$$

证明 若已经证明了

$$f \in C^{\infty}[0,1], f(1) \geqslant 1, f''(x) \leqslant 0, \forall x \in [0,1]$$

证明

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx \geqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\, dx. \tag{17.33}$$

一般上凸函数 f 的情况:

对 $\epsilon > 0$, 我们让

$$f_\epsilon(x) \triangleq \epsilon x + \begin{cases} f(x), & x \in (0,1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x), & x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x), & x = 1 \end{cases},$$

则 $f_\epsilon(1) > 1$ 且 f_ϵ 是 $[0,1]$ 上连续凹函数, 设 $f_{\epsilon,n}(x)$ 是其 Bernstein 多项式13.13, 那么当 n 充分大, $f_{\epsilon,n}$ 满足积分不等式(17.33)成立的条件, 因此

$$\int_0^1 f_{\epsilon,n}^2(x)\, dx \geqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f_{\epsilon,n}(x)\, dx,$$

令 $n \to \infty$, 由定理13.47, 我们有

$$\int_0^1 f_\epsilon^2(x)\, dx \geqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f_\epsilon(x)\, dx,$$

令 $\epsilon \to 0^+$, 我们有

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx \geqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\, dx.$$

事实上, 网名叫静观的大佬指出最好的 c 确实为 $\frac{2}{3}$, 首先 $f=x$ 代入知等号成立, 我们来证明确实有(17.33).

当 $f(0) \geqslant \frac{1}{3}$, 我们运用 $f(x)$ 为上凸函数知

$$f(x) \geqslant f(0) + \frac{f(1)-f(0)}{1-0}x = f(0) + (1-f(0))x, x \in [0,1],$$

注意到

$$f(0)+(1-f(0))x-\frac{1}{3}\geqslant 0, x\in[0,1],$$

所以

$$\int_0^1\left[f(x)-\frac{1}{3}\right]^2dx\geqslant\int_0^1\left[f(0)-\frac{1}{3}+(1-f(0))x\right]^2dx=\frac{1+3f^2(0)}{9}\geqslant\frac{1}{9}.$$

当 $f(0)<\frac{1}{3}$, 取 $f(t)=\frac{1}{3}, t\in(0,1)$, 利用 f 上凸, 我们有

$$\begin{cases}f(x)\geqslant f(t_0)+\frac{f(1)-f(t_0)}{1-t_0}(x-t_0), & x\in[t_0,1]\\ f(x)\leqslant f(t_0)+\frac{f(1)-f(t_0)}{1-t_0}(x-t_0), & x\in[0,t_0]\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}f(x)-\frac{1}{3}\geqslant\frac{2(x-t_0)}{3(1-t_0)}, & x\in[t_0,1]\\ f(x)-\frac{1}{3}\leqslant\frac{2(x-t_0)}{3(1-t_0)}, & x\in[0,t_0]\end{cases},$$

也即

$$\left[f(x)-\frac{1}{3}\right]^2\geqslant\left[\frac{2(x-t_0)}{3(1-t_0)}\right]^2, x\in[0,1],$$

因此

$$\int_0^1\left[f(x)-\frac{1}{3}\right]^2dx-\frac{1}{9}\geqslant\int_0^1\left[\frac{2(x-t_0)}{3(1-t_0)}\right]^2dx-\frac{1}{9}=\frac{(3t_0-1)^2}{27(1-t_0)^2}\geqslant 0,$$

这恰好证明了(17.33).

例题 17.21 设 $f\in C^2[0,1]$, $f''(x)$ 下凸, 证明

$$\int_0^1 f(x)dx\leqslant\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right].$$

证明 取 f'' 的 Bernstein 多项式 $B_n(f'',x)$, 由定理13.47关于 $x\in[0,1]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}B_n(f'',x)=f''(x),$$

且 $B_n(f'',x)$ 下凸.

令

$$p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\int_0^x B_n(f'',y)(x-y)dy,$$

我们有

$$p_n''(x)=B_n(f'',x),$$

且关于 $x\in[0,1]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=f(0)+f'(0)x+\int_0^x f''(y)(x-y)dy=f(x).$$

因此我们只需要对 $f''''\geqslant 0$ 的多项式证明不等式.

事实上设

$$p(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)}f(0)+\frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}f(1)+ax\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1),$$

这里 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$p'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

我们有

$$\int_0^1 p(x)dx=\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right].$$

注意到由 Hermite 插值11.1, 对 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta(x)\in[0,1]$, 使得

$$f(x)=p(x)+\frac{f''''(\theta(x))}{24}x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-1),$$

因此 $f(x)\leqslant p(x)$, 这给出了

$$\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right].$$

例题 17.22 设 f,xf 是正值内闭可积函数, 则

$$\left(\int_0^\infty f(x)\,dx\right)^4\leqslant\pi\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\int_0^\infty x^2f^2(x)\,dx}.\tag{17.34}$$

证明 假设(17.34)右侧有限, 待定 $g^2(x)=s+tx^2,s,t\in[0,+\infty)$, 则 $\int_0^\infty\frac{1}{g^2(x)}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{st}}$ 以及

$$\int_0^\infty f^2(x)g^2(x)\,dx=s\int_0^\infty f^2(x)\,dx+t\int_0^\infty x^2f^2(x)\,dx.$$

由 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\left(\int_0^\infty f(x)g(x)\frac{1}{g(x)}dx\right)^2\leqslant\left(\int_0^\infty f^2(x)g^2(x)\,dx\right)\left(\int_0^\infty\frac{1}{g^2(x)}dx\right),$$

则可取

$$s=\int_0^\infty x^2f^2(x)\,dx,t=\int_0^\infty f^2(x)\,dx,$$

此时就有等式

$$\left(s\int_0^\infty f^2(x)\,dx+t\int_0^\infty x^2f^2(x)\,dx\right)\frac{\pi}{2\sqrt{st}}=\pi\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\int_0^\infty x^2f^2(x)\,dx},$$

这给出了不等式(17.34).

例题 17.23hardy 不等式积分形式 设 $p>1$ 或者 $p<0$ 且 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 内闭可积. 设 $F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$, 则有

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)\,dx.\tag{17.35}$$

证明 不妨设(17.35)右边有限, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx&=\int_0^\infty\left(\frac{\int_0^x f(y)\,dy}{x}\right)^p dx=\int_0^\infty\left(\int_0^1 f(xy)\,dy\right)^p dx\\&=\left\|\int_0^1 f(xy)\,dy\right\|_p^p\overset{\bigstar}{\leqslant}\left[\int_0^1\|f(xy)\|_p\,dy\right]^p=\left[\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(xy)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\right]^p\\&=\left[\int_0^1\frac{1}{y^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\right]^p=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)\,dx,\end{aligned}$$

这里

$$\bigstar:\begin{cases}\text{闵可夫斯基不等式16.3,} & p>1\\ \text{反向闵可夫斯基不等式16.4,} & p<0\end{cases}.$$

这就证明了不等式(17.35).

例题 17.24Hilbert 不等式积分形式 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1$ 且

$$\|f\|_p\triangleq\left(\int_0^\infty|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\|g\|_q\triangleq\left(\int_0^\infty|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

证明

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy\leqslant\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\|f\|_p\cdot\|g\|_q.\tag{17.36}$$

证明 注意到

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{t}\,(1+t)}dt\overset{14.26}{=}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}},p>1,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{x+y}dxdy&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(yt)\,g(y)}{t+1}dtdy=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{f(yt)\,g(y)}{t+1}dy\right]dt\\&\overset{\text{Holder 积分不等式16.1}}{\leqslant}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{|f(yt)|^p}{(t+1)^p}dy\right]^{\frac{1}{p}}\cdot||g||_q\,dt=||g||_q\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{|f(yt)|^p}{(t+1)^p}dy\right]^{\frac{1}{p}}dt\\&=||g||_q\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{|f(y)|^p}{t\,(t+1)^p}dy\right]^{\frac{1}{p}}dt=||g||_q\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{t}\,(1+t)}\left[\int_0^{\infty}|f(y)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}}dt\\&=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}||f||_p\cdot||g||_q,\end{aligned}$$

这就证明了不等式(17.36)

引理 17.1 (Hilbert 矩阵逆矩阵元素和)

设 $H=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{n}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{n}&\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}$, 这里 H 是 n 阶矩阵. 证明 H^{-1} 所有元素和为 n^2.

笔记 这里涉及经典技巧, 即分解 $J=AH+HB$, 需要积累.

证明 取 n 阶矩阵

$$J=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1\end{pmatrix},$$

则 $AH+HB=J=\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$. 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_n^TH^{-1}\mathbf{1}_n&=\operatorname{tr}\left(\mathbf{1}_n^TH^{-1}\mathbf{1}_n\right)=\operatorname{tr}\left(H^{-1}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right)=\operatorname{tr}\left(H^{-1}J\right)=\operatorname{tr}\left(H^{-1}\left(AH+HB\right)\right)\\&=\operatorname{tr}\left(H^{-1}AH+B\right)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2.\end{aligned}$$

例题 17.25 设 $f\in C[0,1]$ 使得 $\int_0^1x^kf(x)\,dx=1,k=0,1,2,\cdots,n-1.$, 证明

$$\int_0^1|f(x)|^2\,dx\geqslant n^2.$$

证明 显然的 Cauchy 不等式, 待定 $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 我们用 Cauchy 不等式16.1, 就有

$$\int_0^1|f(x)|^2\,dx\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k\right)^2dx\geqslant\left[\int_0^1f(x)\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^kdx\right]^2=\left[\sum_{k=0}^{n-1}a_k\right]^2.\tag{17.37}$$

又

$$\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k\right)^2dx=\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_ja_kx^{k+j}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_ja_k}{k+j+1},\tag{17.38}$$

于是结合(17.37)知, 我们只需求

$$\sup_{\mathbf{a}\neq 0}\frac{\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k\right]^2}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{a_ja_k}{k+j+1}}=\sup_{\mathbf{a}\neq 0}\frac{\mathbf{a}^TJ\mathbf{a}}{\mathbf{a}^TH\mathbf{a}},$$

这里

$$J=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},H=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{n}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{n}&\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}.$$

由(17.38)知 H 是正定矩阵. 而

$$\sup_{\mathbf{a}\neq 0}\frac{\mathbf{a}^TJ\mathbf{a}}{\mathbf{a}^TH\mathbf{a}}\leqslant\lambda\Leftrightarrow\mathbf{a}^T\left(\lambda H-J\right)\mathbf{a}\geqslant 0,\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\Leftrightarrow\lambda H-J\text{半正定},$$

所以只需求 λ 的最小值使得 $\lambda H-J$ 半正定. 注意到如果用 $\mathbf{1}_n\in\mathbb{R}^n$ 表示元素全为 1 的列向量, 那么我们有

$$|\lambda H-J|=|H|\cdot\left|\lambda E-H^{-1}J\right|=|H|\cdot\left|\lambda E-H^{-1}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right|\overset{\text{命题}21.7}{=}|H|\cdot\lambda^{n-1}\cdot\left(\lambda-\mathbf{1}_n^TH^{-1}\mathbf{1}_n\right),$$

于是由引理17.1$\lambda\geqslant\mathbf{1}_n^TH^{-1}\mathbf{1}_n=n^2$. 注意到当 $\lambda>n^2$, 因为 $\lambda H-J$ 的顺序主子式和 $\lambda H-J$ 本身有相同的结构, 所以我们知道这些顺序主子式全部为正, 故 $\lambda H-J$ 正定. 因此由连续性知道 n^2H-J 半正定, 这就证明了

$$\int_0^1|f(x)|^2dx\geqslant n^2.$$

来看一个非常经典的模型题, 他贯穿了 cmc 真题数学类和非数学类, 国际大学生数学竞赛, 中科院夏令营, 阿里巴巴全球数学竞赛决赛题.

引理 17.2

设 $\alpha>0,g\in C^1(\mathbb{R})$. 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $g(a)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$, 如果

$$|g'(x)-g'(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\forall x,y\in\mathbb{R},\tag{17.39}$$

证明

$$|g'(x)|^{\alpha+1}\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha}[g(x)-g(a)]^{\alpha}M,\forall x\in\mathbb{R}.\tag{17.40}$$

♡

证明 不妨设 $g(a)=0$, 否则用 $g(x)-g(a)$ 代替 $g(x)$. 当 $M=0$, 则不等式(17.40)显然成立. 当 $M\neq 0$ 可以不妨设 $M=1$.

现在对非负函数[5]g, 现在我们正式开始我们的证明, 当 $g'(x_0)=0$, 不等式(17.40)显然成立. 当 $g'(x_0)>0$, 则利用[6](17.39)有

$$\begin{aligned}g(x_0)\geqslant g(x_0)-g(h)&=\int_h^{x_0}g'(t)\,\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_h^{x_0}\left[g'(x_0)-|t-x_0|^{\alpha}\right]\mathrm{d}t\\&=g'(x_0)(x_0-h)-\frac{(x_0-h)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\end{aligned}$$

取 $h=x_0-|g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0)>\frac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(17.40)成立. 类似的考虑 $g'(x_0)<0$ 可得(17.40).

[5]不需要条件 $g(a)=0$.

[6]可以看到此类条件一般都是这么用.

当 $g'(x_0)<0$, 则利用(17.39)有

$$\begin{aligned} g(x_0) &\geqslant -g(h)+g(x_0)=-\int_{x_0}^{h} g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant -\int_{x_0}^{h}\left[g'(x_0)+|t-x_0|^{\alpha}\right]\mathrm{d}t \\ &=-g'(x_0)(h-x_0)-\frac{(h-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

取 $h=x_0+|g'(x_0)|^{\frac{1}{\alpha}}$, 就得到了 $g(x_0)>\frac{\alpha}{\alpha+1}|g'(x_0)|^{1+\frac{1}{\alpha}}$, 即不等式(17.40)成立.

例题 17.26 [♠] 设 $\alpha>0, g\in C^1(\mathbb{R}^n)$. 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $g(a)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} g(x)$, 如果

$$|\nabla g(x)-\nabla g(y)|\leqslant M||x-y||^{\alpha}, \forall x,y\in\mathbb{R}^n, \tag{17.41}$$

证明:

$$||\nabla g(x)||^{\alpha+1}\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha}[g(x)-g(a)]^{\alpha}M, \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{17.42}$$

证明 不妨设 $g(a)=0, M=1$. 对固定的 $x\in\mathbb{R}^n, w\in\partial B$, 这里

$$\partial B\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n:||x||=1\}.$$

令 $f(t)=g(x+tw)\in C^1(\mathbb{R})$, 则

$$f'(t)=\sum_{i=1}^{n} w_i g_{x_i}(x+tw).$$

运用引理17.2, 我们有

$$|f'(t)|\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} f^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t)\left[\sup_{z\neq y}\frac{|f'(z)-f'(y)|}{||z-y||^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

故

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i g_{x_i}(x+tw)\right|\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} f^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t)\left[\sup_{z\neq y}\frac{|f'(z)-f'(y)|}{||z-y||^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

令 $t=0$ 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i g_{x_i}(x)\right|\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} f^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t)\left[\sup_{z\neq y}\frac{|f'(z)-f'(y)|}{||z-y||^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} |f'(t_1)-f'(t_2)| &=\left|\sum_{i=1}^{n} w_i\left[g_{x_i}(x+t_1w)-g_{x_i}(x+t_2w)\right]\right| \\ &\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|g_{x_i}(x+t_1w)-g_{x_i}(x+t_2w)\right|^2} \\ &\leqslant|t_1-t_2|^{\alpha}. \end{aligned}$$

在得到的不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i g_{x_i}(x)\right|\leqslant\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} g^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(x)$$

中取 $w_i=\frac{g_{x_i}(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|g_{x_i}(x)\right|^2}}, i=1,2,\cdots,n$, 此时就得到不等式(17.42).

例题 17.27♠ 给定 $L_\rho\in(0,+\infty), L_0\in[0,+\infty), \rho\in(0,1]$, 设 $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty)$ 满足

$$||\nabla f(\mathbf{x})-\nabla f(\mathbf{y})||\leqslant(L_0+L_\rho||\nabla f(\mathbf{x})||^{\rho})||\mathbf{x}-\mathbf{y}||, \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||\leqslant\frac{1}{L_\rho}.$$

证明:

$$|f'(x)|^2 \leqslant \max\left\{2L_0 + 2L_\rho |f'(x)|^\rho, 2L_\rho |f'(x)|\right\} f(x) \tag{17.43}$$

证明 **Step 1** 假设 $d=1$, 已经有(17.43)成立, 于是对一般的

$$d \in \mathbb{N}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^d, ||\mathbf{y}|| = 1,$$

我们考虑

$$g: \mathbb{R} \to [0, +\infty), t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{y}).$$

现在由 Cauchy 不等式, 当 $|t-s| \leqslant \frac{1}{L_\rho}$ 得

$$\begin{aligned}
|g'(t) - g'(s)| &= \left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + s\mathbf{y})\right| \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + s\mathbf{y})\right|^2} \\
&= ||\nabla f(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{x} + s\mathbf{y})|| \\
&\leqslant (L_0 + L_\rho ||\nabla f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})||^\rho) \cdot |t - s| \\
&= \left(L_0 + L_\rho |g'(t)|^\rho\right) \cdot |t - s|.
\end{aligned}$$

于是我们由 $d=1$ 的情况得

$$|g'(t)|^2 \leqslant \max\left\{2L_0 + 2L_\rho |g'(t)|^\rho, 2L_\rho |g'(t)|\right\} g(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

即

$$\left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\right|^2 \leqslant \max\left\{2L_0 + 2L_\rho \left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\right|^\rho, 2L_\rho \left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\right|\right\} f(\mathbf{x} + t\mathbf{y}), \forall t \in \mathbb{R}.$$

令 $t=0$ 得

$$\left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2 \leqslant \max\left\{2L_0 + 2L_\rho \left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^\rho, 2L_\rho \left|\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|\right\} f(\mathbf{x}).$$

上式类似例题17.26的证明, 由 $\mathbf{y}$ 任意性得(17.43)成立.

Step 2 当 $d=1$, 若 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $f'(x) = 0$, 则不等式(17.43)显然成立.

若 $f'(x) > 0$, 则待定 $h \in \left(0, \frac{1}{L_\rho}\right]$, 此时有

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant f(x) - f(x-h) &= \int_{x-h}^x f'(y)\,\mathrm{d}y \\
&\geqslant \int_{x-h}^x \left[f'(x) - \left(L_0 + L_\rho |f'(x)|^\rho\right)|x - y|\right]\mathrm{d}y \\
&= f'(x)h - \left(L_0 + L_\rho |f'(x)|^\rho\right)\frac{1}{2}h^2.
\end{aligned}$$

若 $f'(x) - |f'(x)|^\rho \leqslant \frac{L_0}{L_\rho}$, 取 $h = \frac{f'(x)}{L_0 + L_\rho |f'(x)|^\rho} \in \left(0, \frac{1}{L_\rho}\right]$, 我们有

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}\frac{|f'(x)|^2}{L_0 + L_\rho |f'(x)|^\rho} \Rightarrow |f'(x)|^2 \leqslant \left(2L_0 + 2L_\rho |f'(x)|^\rho\right) f(x).$$

若 $f'(x) - |f'(x)|^\rho > \frac{L_0}{L_\rho}$, 取 $h = \frac{1}{L_\rho}$, 我们有

$$f(x) \geqslant \frac{f'(x)}{L_\rho} - \left(L_0 + L_\rho |f'(x)|^\rho\right)\frac{1}{2L_\rho^2} > \frac{f'(x)}{L_\rho} - (L_0 + L_\rho f'(x) - L_0)\frac{1}{2L_\rho^2} = \frac{f'(x)}{2L_\rho},$$

即(17.43)成立.

若 $f'(x)<0$, 类似可得(17.43)成立. 这就完成了证明.

例题 17.28* 给定 $t>0$, 求 $r>0$ 的最大值使得存在连续函数 $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足

$$\int_0^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u=+\infty, \tag{17.44}$$

以及

$$f(x)\geqslant r\int_0^{x+t} f(u)\,\mathrm{d}u,\forall x>0. \tag{17.45}$$

笔记 本题有较高的难度.

证明 首先考虑 $f(x)=e^{\frac{x}{t}}, r=\frac{1}{et}$, 则(17.44)成立且

$$r\int_0^{x+t} f(u)\,\mathrm{d}u=r\int_0^{x+t} e^{\frac{u}{t}}\mathrm{d}u=rt\left(e^{\frac{x+t}{t}}-1\right)=\frac{1}{e}\left(e^{\frac{x+t}{t}}-1\right)=e^{\frac{x}{t}}-\frac{1}{e}<f(x),\forall x>0,$$

即(17.45)成立. 下证 $r=\frac{1}{et}$ 就是所求最大值.

假设某个 f 满足题目条件且成立17.44和(17.45). 设 $F(x)\triangleq\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, 则由(17.45)得

$$\frac{F'(x)}{F(x)}\geqslant r\frac{F(x+t)}{F(x)},\forall x>0.$$

于是对任何 $x>u>0$ 得

$$\ln\frac{F(x)}{F(u)}=\int_u^x\frac{F'(v)}{F(v)}\mathrm{d}v\geqslant r\int_u^x\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v. \tag{17.46}$$

由 Jensen 不等式积分形式16.5, 我们知道

$$\ln\left[\frac{1}{x-u}\int_u^x\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v\right]\geqslant\frac{1}{x-u}\int_u^x\ln\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v,$$

即

$$\frac{1}{x-u}\int_u^x\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v\geqslant e^{\frac{1}{x-u}\int_u^x\ln\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v}\overset{e^z\geqslant ez}{\geqslant}\frac{e}{x-u}\int_u^x\ln\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v.$$

进一步有

$$\begin{aligned}
&\int_u^x\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v\geqslant e\int_u^x\ln\frac{F(v+t)}{F(v)}\mathrm{d}v\\
&=e\left[\int_{u+t}^{x+t}\ln F(v)\,\mathrm{d}v-\int_u^x\ln F(v)\,\mathrm{d}v\right]\\
&=e\left[\int_x^{x+t}\ln F(v)\,\mathrm{d}v-\int_u^{u+t}\ln F(v)\,\mathrm{d}v\right]\\
&\geqslant e\left[t\ln F(x)-\int_u^{u+t}\ln F(v)\,\mathrm{d}v\right].
\end{aligned}$$

结合(17.46)得

$$\ln F(x)-\ln F(u)\geqslant ert\ln F(x)-er\int_u^{u+t}\ln F(v)\,\mathrm{d}v,$$

即

$$(1-ert)\ln F(x)\geqslant\ln F(u)-er\int_u^{u+t}\ln F(v)\,\mathrm{d}v.$$

固定 u, 让 $x\to+\infty$ 并结合(17.44)得

$$\lim_{x\to+\infty}\ln F(x)=+\infty,1-etr\geqslant 0\Rightarrow r\leqslant\frac{1}{et},$$

这就证明了 $r=\frac{1}{et}$ 就是所求最大值.

例题 17.29* 对 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 且 $f,f''\in L^1(\mathbb{R})$, 证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x)|+|f''(x)|)\,\mathrm{d}x. \tag{17.47}$$

笔记 注意 $\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x)|\,\mathrm{d}x$ 可以看成勒贝格积分, 没有学过实变函数就加一个 f'' 内闭黎曼可积条件, 从而上述积

分都是黎曼积分下进行.

证明 设 $\mathrm{supp}f\subset[a,b]$ 且 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 是有限段的分段单调函数, 设 $x_0=a,x_n=b$ 以及单调性的分段点为

$$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}\leqslant b.$$

我们

$$f'(x_i)=0,i=0,1,2,\cdots,n.$$

设 y_i 是 $|f'|$ 在 $[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$ 的最大值点, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x)|+|f''(x)|)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{y_i}|f''(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{y_i}^{x_i}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\right]\\
&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\left[\left|\int_{x_{i-1}}^{y_i}f''(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_{y_i}^{x_i}f''(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)|\,\mathrm{d}x+2\sum_{i=1}^{n}|f'(y_i)|\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2|f'(y_i)|\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)|\,\mathrm{d}x}\\
&\overset{\text{非数学积分不等式习题78.}}{\geqslant}2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2}=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

这就证明了(17.47).

对一般的 $f\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, 设 $\mathrm{supp}f\subset[a,b]$, 则由 S-W 定理的推论13.46可取多项式 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}[x]$ 使得关于 $x\in[a-1,b+1]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=f(x),\lim_{n\to\infty}p_n'(x)=f'(x),\lim_{n\to\infty}p_n''(x)=f''(x).\tag{17.48}$$

取[7]$\eta\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ 使得

$$\eta|_{[a,b]}=1,\mathrm{supp}\eta\subset\left[a-\frac{1}{2},b+\frac{1}{2}\right].$$

以及 ηp_n 是有限段分段单调的[8]. 于是我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(\eta p_n)'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(|(\eta p_n)(x)|+\left|(\eta p_n)''(x)\right|\right)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\left|(\eta p_n)'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\left(|(\eta p_n)(x)|+\left|(\eta p_n)''(x)\right|\right)\mathrm{d}x.$$

让 $n\to+\infty$ 并利用(17.48)得

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\left|(\eta f)'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\left(\left|(\eta f)'(x)\right|+\left|(\eta f)''(x)\right|\right)\mathrm{d}x,$$

即由 $\eta|_{[a,b]}=1,\mathrm{supp}f\subset[a,b]$ 得(17.47)成立.

由定理13.49, 我们知道(17.47)对任何 $f\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ 成立等价于对 $f\in W^{2,1}(\mathbb{R})$ 成立[9], 于是对题目条件的 f, 我们只需验证 $f'\in L^1(\mathbb{R})$.

事实上利用卷积磨光核13.14, 我们有

$$f_\delta,f_\delta',f_\delta''\in C^{\infty}(\mathbb{R})\bigcap L^1(\mathbb{R}),\delta>0$$

[7]利用 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 构造.

[8]$e^{-\frac{1}{x^2}}$ 型的函数和多项式的积, 当然有限段分段单调.

[9]理解为对所有 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 且 $f,f'',f'\in L^1(\mathbb{R})$ 成立.

于是由(17.47)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\delta}'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|f_{\delta}(x)\right|+\left|f_{\delta}''(x)\right|\right)\mathrm{d}x.$$

显然

$$\lim_{\delta\to0^{+}}\left|f_{\delta}'(x)\right|=\left|f'(x)\right|,\forall x\in\mathbb{R},$$

以及

$$\lim_{\delta\to0^{+}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\delta}(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\delta}''(x)\right|\mathrm{d}x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x.$$

于是我们由法图引理得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\delta\to0^{+}}\left|f_{\delta}'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\lim_{\delta\to0^{+}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\delta}'(x)\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\delta\to0^{+}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\delta}(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{\delta}''(x)\right|\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

即(17.47)成立.

来看一个原创题.

例题 17.30 设 $n\in\mathbb{N},M>0$,

$$S\triangleq\left\{f\in R[a,b]:\int_{a}^{b}f^{2n-1}(x)\mathrm{d}x=0,\left|f(x)\right|\leqslant M,\forall x\in[a,b]\right\}.$$

求

$$\sup_{f\in S}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x,\inf_{f\in S}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

笔记 注意到

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=M\int_{a}^{b}\left[\frac{f(x)}{M}-\lambda\frac{f^{2n-1}(x)}{M^{2n-1}}\right]\mathrm{d}x.\tag{17.49}$$

解决本题的想法是待定 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $g(y)=y-\lambda y^{2n-1}$ 有最小的最大值, 从而(17.49)得到最佳的放缩.

证明 设 $x_0\in(0,1]$ 满足

$$(2n-2)x_0^{2n-1}+(2n-1)x_0^{2n-2}=1.$$

取 $\lambda=\frac{1}{x_0^{2n-2}(2n-1)}$ 并构造

$$g(y)\triangleq y-\lambda y^{2n-1}.$$

则

$$g'(y)=1-\frac{y^{2n-2}}{x_0^{2n-2}}\Rightarrow g(x)\leqslant\max\left\{g(-1),g(x_0)\right\},\forall x\in[-1,1].$$

计算得

$$\begin{aligned}g(-1)&=-1+\frac{1}{x_0^{2n-2}(2n-1)}=\frac{2n-2}{2n-1}x_0;\\g(x_0)&=x_0-\frac{1}{x_0^{2n-2}(2n-1)}x_0^{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}x_0,\end{aligned}$$

我们利用 $\int_a^b f^{2n-1}(x)\mathrm{d}x=0$ 有

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=M\int_{a}^{b}g\left[\frac{f(x)}{M}\right]\mathrm{d}x\leqslant\frac{2n-2}{2n-1}Mx_0(b-a).$$

取

$$f(x) \triangleq \begin{cases} Mx_0, & x \in \left[a, \frac{ax_0^{2n-1}+b}{x_0^{2n-1}+1}\right] \\ -M, & x \in \left(\frac{ax_0^{2n-1}+b}{x_0^{2n-1}+1}, b\right] \end{cases}.$$

直接验证就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n-2}{2n-1} Mx_0 (b-a),$$

即

$$\sup_{f\in S} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n-2}{2n-1} Mx_0 (b-a),$$

对称的

$$\inf_{f\in S} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n-2}{2n-1} Mx_0 (b-a).$$

特别的, 非数学经典习题, 也是首届赛氪大学生数学竞赛压轴题[10]中以压轴题出现.

例题 17.31♡ 设 $M>0, f\in R[a,b], |f(x)|\leqslant M, \int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则我们有

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}(b-a)M \leqslant -\frac{1}{3}(b-a)M \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}(b-a)M \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)M. \tag{17.50}$$

证明 虽然可以直接套用例题17.30的结果, 但是为了非数学类方便我们还是直接书写一波答案.

设 $g(y) \triangleq y - \frac{4}{3}y^3$, 求导易得

$$-\frac{1}{3} \leqslant g(y) \leqslant \frac{1}{3}, y\in[-1,1].$$

于是

$$-\frac{M}{3}(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b \left[\frac{f(x)}{M} - \frac{4f^3(x)}{3M^3}\right]\mathrm{d}x = M\int_a^b g\left[\frac{f(x)}{M}\right]\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{3}(b-a).$$

结合 $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 得(17.50). 此外取

$$f(x) \triangleq \begin{cases} \frac{M}{2}, & x\in\left[a, \frac{a+8b}{9}\right] \\ -M, & x\in\left(\frac{a+8b}{9}, b\right] \end{cases}$$

知(17.50)上界是最佳. 取

$$f(x) \triangleq \begin{cases} -\frac{M}{2}, & x\in\left[a, \frac{a+8b}{9}\right] \\ M, & x\in\left(\frac{a+8b}{9}, b\right] \end{cases}$$

知(17.50)下界是最佳的.

来看两个经典不等式问题, 各种后续课程都有所涉及.

例题 17.32

1. 设列向量 $\{\alpha_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, 则存在一个指标集 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$, 使得
$$\left|\left|\sum_{k\in J}\alpha_k\right|\right| \geqslant \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^m ||\alpha_k||.$$
2. 设列向量 $\{\alpha_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{C}^n$, 则存在一个指标集 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$, 使得
$$\left|\left|\sum_{k\in J}\alpha_k\right|\right| \geqslant \frac{\Gamma(n)}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^m ||\alpha_k||.$$

证明

[10]大概在 2016 年由我命题的竞赛.

1. 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位闭球, $a(n)$ 是其体积, 记 $\alpha_k=\begin{pmatrix}\alpha_k^{(1)}\\ \alpha_k^{(2)}\\ \vdots\\ \alpha_k^{(n)}\end{pmatrix}, k=1,2,\cdots,m$, 函数

$$f(\alpha)\triangleq\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha^{(j)}\alpha_k^{(j)},0\right\},\alpha=\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \alpha^{(2)}\\ \vdots\\ \alpha^{(n)}\end{pmatrix}\in B.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{na(n)}\int_{\partial B}f(\alpha)\,dS(\alpha)\\ =&\frac{1}{na(n)}\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial B}\max\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha^{(j)}\alpha_k^{(j)},0\right\}dS(\alpha)\\ =&\frac{1}{na(n)}\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial B}\max\left\{||\alpha_k||\cdot\alpha^{(n)},0\right\}dS(\alpha)\\ =&\frac{1}{na(n)}\sum_{k=1}^{m}||\alpha_k||\int_{\partial B,\alpha^{(n)}>0}\alpha^{(n)}dS(\alpha)\\ =&\frac{1}{na(n)}\sum_{k=1}^{m}||\alpha_k||\int_{\sum_{j=1}^{n-1}|\alpha^{(j)}|^2<1}\alpha^{(n)}\frac{1}{\alpha^{(n)}}dV\left(\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\cdots,\alpha^{(n-1)}\right)\\ =&\frac{a(n-1)}{na(n)}\sum_{k=1}^{m}||\alpha_k||=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}||\alpha_k||,\end{aligned}$$

从而由积分中值定理, 必有某个 $\alpha\in\partial B$, 使得

$$f(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}||\alpha_k||,$$

则考虑

$$J\triangleq\{k:\alpha_k\cdot\alpha\geqslant 0,k=1,2,\cdots,m\},$$

由 Cauchy 不等式, 我们有

$$f(\alpha)=\sum_{k=1}^{m}\max\{\alpha\cdot\alpha_k,0\}=\alpha\cdot\sum_{k\in J}\alpha_k\leqslant||\alpha||\cdot\left|\left|\sum_{k\in J}\alpha_k\right|\right|,$$

这给出了不等式

$$\left|\left|\sum_{k\in J}\alpha_k\right|\right|\geqslant\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}||\alpha_k||.$$

2. 设 B 是 $\mathbb{C}^n$ 中的单位闭球, $a(2n)$ 是其体积, 记

$$\alpha_k=x_k+\sqrt{-1}y_k,x_k,y_k\in\mathbb{R}^n,k=1,2,\cdots,m,$$

函数

$$f(\alpha)\triangleq\sum_{k=1}^{m}\max\{x\cdot x_k+y\cdot y_k,0\},\alpha=x+\sqrt{-1}y\in B.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2na\left(2n\right)}\int_{\partial B} f\left(\alpha\right) dS\left(\alpha\right)\\
&=\frac{1}{2na\left(2n\right)}\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial B}\max\left\{x\cdot x_k+y\cdot y_k,0\right\} dS\left(\alpha\right)\\
&=\frac{1}{2na\left(2n\right)}\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial B}\max\left\{\sqrt{\left|\left|x_k\right|\right|^2+\left|\left|y_k\right|\right|^2}y_n,0\right\} dS\left(\alpha\right)\\
&=\frac{1}{2na\left(2n\right)}\sum_{k=1}^{m}\left|\left|\alpha_k\right|\right|\int_{\partial B,y_n>0} y_n dS\left(\alpha\right)\\
&=\frac{a\left(2n-1\right)}{2na\left(2n\right)}\sum_{k=1}^{m}\left|\left|\alpha_k\right|\right|\\
&=\frac{\Gamma\left(n\right)}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}\left|\left|\alpha_k\right|\right|,
\end{aligned}$$

从而由积分中值定理, 必有某个 $\alpha=x+\sqrt{-1}y\in\partial B, x,y\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$f(\alpha)=\frac{\Gamma\left(n\right)}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}\left|\left|\alpha_k\right|\right|.$$

则考虑

$$J\triangleq\left\{k:x_k\cdot x+y_k\cdot y\geqslant 0, k=1,2,\cdots,m\right\},$$

由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
&f\left(\alpha\right)=\sum_{k=1}^{m}\max\left\{x_k\cdot x+y_k\cdot y,0\right\}=\sum_{k\in J}\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&\leqslant\left|\left|\sum_{k\in J}\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}\right|\right|=\left|\left|\begin{pmatrix}\sum\limits_{k\in J}x_k\\\sum\limits_{k\in J}y_k\end{pmatrix}\right|\right|=\sqrt{\left|\left|\sum_{k\in J}x_k\right|\right|^2+\left|\left|\sum_{k\in J}y_k\right|\right|^2}\\
&=\left|\left|\sum_{k\in J}\alpha_k\right|\right|,
\end{aligned}$$

这给出了不等式

$$\left|\left|\sum_{k\in J}\alpha_k\right|\right|\geqslant\frac{\Gamma\left(n\right)}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{m}\left|\left|\alpha_k\right|\right|.$$

例题 17.33 设

$$P\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是 n 次实系数多项式. 再设

$$Q\left(x\right)=\frac{a_n}{n!}x^n+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{1!}x+a_0,$$

证明:

$$\int_0^1 P^2\left(t\right)\mathrm{d}t\leqslant\pi\int_0^\infty Q^2\left(t\right)e^{-2t}\mathrm{d}t.$$

证明 断言

$$P\left(t\right)=\frac{1}{t}\int_0^\infty Q\left(x\right)e^{-\frac{x}{t}}\mathrm{d}x, t\in\left(0,1\right].$$

事实上

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^{\infty}Q(x)e^{-\frac{x}{t}}\mathrm{d}x&=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i!}\int_0^{\infty}x^ie^{-\frac{x}{t}}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i!}t^i\int_0^{\infty}x^ie^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}a_it^i=P(t).\end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1P^2(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^1\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{Q(x)Q(y)}{t^2}e^{-\frac{(x+y)}{t}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}Q(x)Q(y)\left(\int_0^1\frac{1}{t^2}e^{-\frac{(x+y)}{t}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}Q(x)Q(y)\frac{e^{-(x+y)}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\overset{\text{Hilbert 不等式17.24}}{\leqslant}\pi\int_0^{\infty}Q^2(t)e^{-2t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

来看湖南师范大学的考研真题, 其背景是泛函分析的里斯表示定理.

例题 17.34 设

$$A(f)=\int_{-1}^0f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x,\forall f\in C[-1,1].$$

计算

$$\sup\left\{A(f):\max_{x\in[-1,1]}|f(x)|\leqslant1,f\in C[-1,1]\right\}.$$

证明 首先

$$A(f)\leqslant\int_{-1}^01\mathrm{d}x-\int_0^1(-1)\,\mathrm{d}x=2,\forall f\in C[0,1].$$

然后令

$$f_n(x)\triangleq\begin{cases}1, & x\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right]\\-nx, & x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\\-1, & x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\end{cases},n=1,2,\cdots,$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}A(f_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2.$$

因此

$$\sup\left\{A(f):\max_{x\in[-1,1]}|f(x)|\leqslant1,f\in C[-1,1]\right\}=2.$$

笔记 我们通过自然放缩得到了不等式, 然后显然期望取等条件函数为

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0]\\-1, & x\in(0,1]\end{cases},$$

但这并不连续, 于是我们做一点扰动再线性连接得到构造.

注[*] 本题实际上是泛函分析中的里斯表示定理, 即若 A 是 $C[0,1]$ 上的连续线性泛函, 则存在正则广义 Borel 测度 μ 使得

$$A(f)=\int_{-1}^1f(x)\,\mathrm{d}\mu(x),\forall f\in C[-1,1],$$

且算子范数就是测度 μ 的全变差. 原题的 A 可以写为

$$A(f)=\int_{-1}^{1} f(x)\left[\chi_{[-1,0]}(x)-\chi_{[0,1]}(x)\right]\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\mathrm{d}\mu(x)=\left[\chi_{[-1,0]}(x)-\chi_{[0,1]}(x)\right]\mathrm{d}x,$$

从而

$$|\mu|([-1,1])=\int_{-1}^{1}\left[\chi_{[-1,0]}(x)+\chi_{[0,1]}(x)\right]\mathrm{d}x=2.$$

结合 $A(-f)=-A(f)$ 也知所求上确界为 2.

我们有如下经典结论

定理 17.1 (∗)

设 $n,k\in\mathbb{N}$ 满足 $0<k<n$. 记

$$S\triangleq\left\{f\in C^{n-1}(\mathbb{R}):f\text{在}\mathbb{R}\text{除去至多可数个点外}n\text{阶可微}\right\}.$$

1. 求最佳的 $C_{k,n}>0$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant C_{k,n}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|^{1-\frac{k}{n}}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right|^{\frac{k}{n}}\right),\forall f\in S. \tag{17.51}$$

2. 对实数 $p\in[1,+\infty)$ 证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(k)}(x)\right|^{p}\mathrm{d}x\leqslant C_{k,n}^{\frac{1}{n}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{k}{n}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(n)}(x)\right|^{p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{k}{n}},\forall f\in S. \tag{17.52}$$

♡

证明

1. 记

$$K_n\triangleq\begin{cases}\frac{4}{\pi}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{n+1}}, & n\text{为奇数}\\ \frac{4}{\pi}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^{n+1}}, & n\text{为偶数}\end{cases},n=0,1,2,\cdots.$$

首先考虑级数

$$n\in\mathbb{N}_0,g_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin((2i+1)x-\frac{n\pi}{2})}{(2i+1)^{n+1}}.$$

显然 $g_n\in C^{n-1}(\mathbb{R})\bigcap C^{n}(\mathbb{R}\setminus\{i\pi:i\in\mathbb{Z}\})$, 我们直接计算得[11]

$$|g_n(x)|\leqslant|g_n(\pi)|=\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{n+1}},n\text{为奇数};$$

$$|g_n(x)|\leqslant|g_n(\pi/2)|=\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^{n+1}},n\text{为偶数}.$$

对 $0<k\leqslant n$, 我们有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n^{(k)}(x)\right|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_{n-k}(x)|=K_{n-k}.$$

记

$$C_{k,n}\triangleq\frac{K_{n-k}}{K_n^{1-\frac{k}{n}}K_0^{\frac{k}{n}}}=\frac{K_{n-k}}{K_n^{1-\frac{k}{n}}},0<k<n,$$

我们断言 $C_{k,n}$ 为所求最佳常数. 首先有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n^{(k)}(x)\right|=C_{k,n}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)|^{1-\frac{k}{n}}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n^{(n)}(x)\right|^{\frac{k}{n}}\right).$$

[11] 第二个不等式可见非数学级数习题56..

然后对一般

2. 我们用 $\|\cdot\|_p$ 表示 L^p 范数, p' 表示 p 的共轭指标. 不妨设 $f^{(k)}$ 不恒为 0, 于是可以考虑

$$h(x) \triangleq \begin{cases} \operatorname{sgn} f^{(k)}(x) \cdot \dfrac{\left|f^{(k)}(x)\right|^{p-1}}{\left\|\left|f^{(k)}(x)\right|^{p-1}\right\|_{p'}}, & p \in (1,+\infty) \\ \operatorname{sgn} f^{(k)}(x), & p=1 \end{cases}.$$

下面的题目虽然是用概率语言叙述的, 但本质上仍然是积分不等式.

引理 17.3 (∗)

设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_N$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ 一列独立随机变量且满足

$$\mathbb{P}(\epsilon_j = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_j = -1) = \frac{1}{2}, j = 1, 2, \cdots, N.$$

证明:

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\right|\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall x_1, x_2, \cdots, x_N \in \mathbb{C}.$$

♡

证明 由 Holder 不等式16.1, 我们有

$$\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}P = \int_\Omega |f|^{\frac{2}{3}} \cdot |f|^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}P \leqslant \left(\int_\Omega |f| \mathrm{d}P\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_\Omega |f|^4 \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{17.53}$$

对 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in \mathbb{C}$, 记

$$f \triangleq \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j.$$

直接计算得

$$\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}P = \sum_{j,k=1}^{N} x_j \overline{x_k} \int_\Omega \epsilon_j \epsilon_k \mathrm{d}P = \sum_{j=1}^{N} |x_j|^2,$$

以及

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^4 \mathrm{d}P &= \sum_{i,j,k,t=1}^{N} x_i \overline{x_t} x_j \overline{x_k} \int_\Omega \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k \epsilon_t \mathrm{d}P \\ &= \left|\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{N} |x_i|^4 \\ &\leqslant 3\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^2. \end{aligned}$$

由(17.53)我们知道

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}P \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们完成了证明.

第 17 章 练习

1. (1.,∗) 设 $f \in C^3[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, |f'''(x)| \leqslant 1, \forall x \in [0,1]$, 证明

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{x} |f(x)| dx \geqslant 9 \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 dx.$$

2. (2.) 设 $a > 0$,f 是 $(0,+\infty)$ 上的一个单调递减的非负函数, 满足

$$\int_0^\infty t^a f(t) dt < \infty,$$

证明

$$\int_x^{\infty} f(t)\,dt \leqslant \left(\frac{a}{(a+1)\,x}\right)^a \int_0^{\infty} t^a f(t)\,dt, \forall x>0.$$

3. (3.) 设 $a>0$ 并记 $\mathcal{F}=\left\{f\in C^1[-1,1]: f(1)=f(-1)=0\right\}, d\gamma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$, 求 $q>p>2$ 的范围使得存在 $C_{p,q}>0$, 满足对任何 $f\in\mathcal{F}$ 有不等式

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,d\gamma \leqslant C_{p,q}\int_{-1}^{1}|f'(x)|^2\,d\gamma+\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q}{2}}. \tag{17.54}$$

4. (4.) 设 $-\infty<\alpha<\frac{n}{2}<\beta<+\infty$, 证明存在 $C>0$, 使得对任何 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 g, 成立不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\alpha}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{\beta-\frac{n}{2}}{2(\beta-\alpha)}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\beta}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{\frac{n}{2}-\alpha}{2(\beta-\alpha)}}. \tag{17.55}$$

5. (5.∗) 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 求一组 $q>p>2, m\in\mathbb{N}$, 使得存在 $C=C(p,q,n,m,V)>0$, 满足对任何 $f\in C_c^{\infty}(V)$, 有不等式

$$\int_V|f(x)|^p\,dx \leqslant C\sum_{|\alpha|=m}\int_V|D_\alpha f(x)|^2\,dx+\left(\int_V|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{q}{2}}, \forall f\in C_c^{\infty}(V). \tag{17.56}$$

6. (6.∗) 设 $f\in C[0,1]$ 且 $\int_0^1 f^3(x)\,dx=0$, 证明

$$\int_0^1 f^4(x)\,dx \geqslant \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^4. \tag{17.57}$$

7. (7.∗) 设非负函数 $f\in C[0,+\infty), f(f(x))=x^a, a\in\mathbb{N}$, 证明

$$\int_0^1|f(x)|^2\,dx \geqslant \frac{2a-1}{a^2+6a-3}. \tag{17.58}$$

8. (8.) 设可积函数 $f:[0,a]\to[0,+\infty)$ 满足

$$\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x, \forall t\in[0,a]. \tag{17.59}$$

证明:

(a).

$$\int_0^a|f(x)-x|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{a^3}{3}. \tag{17.60}$$

(b).

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{t^2}{2}, \forall t\in[0,a]. \tag{17.61}$$

(c). ∗

$$\int_0^a\left|f(x)-\frac{x}{2}\right|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{a^3}{12}. \tag{17.62}$$

(d). ∗

$$\int_0^a|f(x)-x|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{a^3}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{17.63}$$

9. (9.) 设 $S=\left\{f(x)\in C^1[0,1]: f(0)=f(1)=0\right\}$, 证明

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1[f(y)+f'(y)]^2\,dy, \forall f\in S.$$

并说明是最佳的系数.

10. (10.) 设正值函数 $f(x)\in C[1,+\infty)$, 对 $a\in(0,1)$, 若 $\int_1^x f(t)\,dt \leqslant x^{1+a}, \forall x\geqslant 1$, 证明

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt}{x^{1-a}} \geqslant \frac{1}{1-a^2}.$$

11. (11.) 求最小的 C, 使得对任何 $f \in C^1[0,1]$, 都有
$$C\int_0^1 f^2(x)\,dx\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)\,dx\right)^4.$$
12. (12.) 设 $f \in C^1[0,1], f(1)=0$, 证明
$$4\int_0^1 x^2|f'(x)|^2\,dx \geqslant \int_0^1 |f(x)|^2\,dx + \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx\right)^2.$$
13. (13.) 设 $f \in R[0,1]$ 满足
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0, -\infty < m \leqslant f(x) \leqslant M < +\infty.$$
设 $F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$, 证明
$$\int_0^1 |F(x)|^2\,dx \leqslant \frac{m^2M^2}{3(M-m)^2}.$$
14. (14.) 设 $f \in C^3[0,1]$ 且
$$f'''(x) \geqslant 0, \forall x \in [0,1], \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
证明:
$$10\int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 15\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.64}$$
15. (15.) 证明
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right|dt < 8\pi^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$
16. (16.∗) 一个可测函数 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 被叫做正定的, 如果对全部 $k \in \mathbb{N}, y_j \in \mathbb{R}^n, c_j \in \mathbb{C}, j=1,2,\cdots,k$, 都有
$$\sum_{i,j=1}^{k} c_i\overline{c_j}\varphi(y_i-y_j) \geqslant 0.$$
证明
- $\varphi(-y)=\overline{\varphi(y)}, |\varphi(y)| \leqslant \varphi(0), \forall y \in \mathbb{R}^n$;
- 对于每一个 $\mathbb{R}^n$ 上勒贝格可积的非负函数 f, 都有
$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(x)f(y)\,dxdy \geqslant 0;$$
- 如果 f 还是偶函数, 证明
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(f\star f)(x)\,dx \geqslant 0;$$
- 对任何 $\alpha > 0$, 证明
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-\alpha|x|^2}dx \geqslant 0.$$

17. (17.∗) 设 $b > a \geqslant 0$,ϕ 在 $[0,+\infty)$ 非负递减, 则
$$\left(\int_0^\infty x^{a+b}\phi dx\right)^2 \leqslant \left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right)\int_0^\infty x^{2a}\phi dx\int_0^\infty x^{2b}\phi dx,$$

且在右边有限时等号成立条件存在 $C \geqslant 0$, 使得 $\phi(x)=\begin{cases} C, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$, 或者存在 $C_3 \geqslant C_2 \geqslant C_1 \geqslant 0$, 使得

$$\phi(x)=\begin{cases} C_3, & x=0 \\ C_2, & x \in (0,x_0) \\ C_1, & x=x_0 \\ 0, & x>x_0 \end{cases}.$$

18. (18.) 给定 $n \in \mathbb{N}$, 证明

$$\min_{a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^2 e^{-x}dx = \frac{1}{n+1}.$$

19. (19.) 设非负函数 $f \in C[0,1]$, 证明

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \geqslant \frac{4}{9}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3. \tag{17.65}$$

20. (20.) 设 $p>0$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负上凸函数且 $f(0)=1$. 证明

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx + \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)} \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2. \tag{17.66}$$

21. (21.$*$) 设

$$B \triangleq \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) : f\text{周期}2\pi, f>0, \int_0^{2\pi} |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \right\},$$

以及

$$S(k) \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \sup_{f\in B} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^{\alpha}}\mathrm{d}x < \infty \right\}, k>0.$$

证明

(a). $S(4)$ 是闭区间且求 $S(4)$ 最大值;

(b). 存在 $C>0$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant C|f(x)|^{\frac{1}{3}}, \forall x \in \mathbb{R};$$

(c). $S(2024)$ 是闭区间且求 $S(2024)$ 最大值.

22. (22.) 设 f,g 是非负凹函数 (即上凸函数), 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

23. (23.) 求最佳常数 $k \in \mathbb{R}$ 使得对非负函数 $f \in L^1[0,+\infty)$ 成立

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant k\left(\int_0^{\infty} \sqrt{x}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{17.67}$$

24. (24.) 设下凸函数 $g \in C[0,+\infty)\bigcap D^1(0,+\infty)$ 满足 $g(0)=0$. 对 $p>-1$, 证明:

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-\frac{g(x)}{x}}\mathrm{d}x \leqslant e^{p+1}\int_0^{\infty} x^p e^{-g'(x)}\mathrm{d}x. \tag{17.68}$$

25. (25.) 设 f 是 $[-1,1]$ 上的递增偶函数且 g 为 $[-1,1]$ 上的下凸函数, 证明:

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.69}$$

26. (26.) 设 $f(x) \in C^3[0,1]$, 满足 $f(0)=f'(0)=f(1)=0$, 证明

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2}dx \leqslant \frac{1}{720}\int_0^1 |f'''(x)|^2\,dx.$$

27. (27.) 设

$$f(x) \in C^3[0,1], f(0)=f'(0)=f(1)=0, |f'''(x)| \leqslant 1,$$

证明:

$$\left|\int_0^1 x(1-x) f(x) f'(x) dx\right| \leqslant \frac{1}{30240},$$

并给出取等条件.

28. (28.$*$) 设 $f \in R[-\pi,\pi], f(x) \geqslant 0, a \geqslant 1$, 证明

$$\begin{cases} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx\right)^a + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx\right)^a \leqslant \frac{\pi^{\frac{a-1}{2}}}{2^{a-2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^a(x)dx, & a\in[1,2] \\ \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx\right)^a + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx\right)^a \leqslant \pi^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^a(x)dx, & a\in[2,+\infty) \end{cases}.$$

29. (29.) 设 $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f \in C[0,1]$ 满足 $f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{4}{3-4a}\int_0^1 x^{2a+1}|f'(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{17.70}$$

30. (30.) 设 $f:[0,+\infty)\to(0,1)$ 是内闭黎曼可积函数. 若 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x, \int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{17.71}$$

31. (31.) 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\int_0^1 \prod_{i=0}^{n-1}(z_i x-1)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}, \forall (z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

32. (32.) 设 $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, k = 0,1,2,\cdots,n-1$, 证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}\int_0^1 \left|f^{(n)}(x)\right|^2 \mathrm{d}x. \tag{17.72}$$

33. (33.) 设 $\epsilon\in(0,1)$ 且连续函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足

$$f(x)f(y) \leqslant \epsilon^{|x-y|}, \forall x,y\in[0,+\infty). \tag{17.73}$$

求最佳的 $C>0$ 使得 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \leqslant C$.

34. (34.) 设 $m>1, a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}, a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$. 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+|x-a_j|^m}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant n^a.$$

证明: 存在常数 $C(m)>0$, 使得

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n [1+|a_i-a_j|^m] \geqslant C(m) n^{(2-a)(m+2)}.$$

35. (35.) 设 $p\geqslant 0, \varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是下凸函数且 $\varphi(0)=0$. $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是递减函数且成立

$$\int_0^\infty g(\varphi(x))x^p\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x)x^p\mathrm{d}x < +\infty. \tag{17.74}$$

证明: 对任何 $t\geqslant 0$ 都有

$$\int_t^\infty g(\varphi(x))x^p\mathrm{d}x \leqslant \int_t^\infty g(x)x^p\mathrm{d}x. \tag{17.75}$$

36. (36.) 设 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是递减函数或者正值函数且 ln 上凸, 即

$$f^\lambda(x)f^{1-\lambda}(y) \leqslant f(\lambda x+(1-\lambda)y), \forall x,y\geqslant 0, \lambda\in[0,1].$$

证明: 对 $0\leqslant p<q<\infty$ 有不等式

$$f^q(0)\Gamma^{q+1}(p+1)\left[\int_0^\infty f(x)x^q\mathrm{d}x\right]^{p+1} \leqslant f^p(0)\Gamma^{p+1}(q+1)\left[\int_0^\infty f(x)x^p\mathrm{d}x\right]^{q+1}. \tag{17.76}$$

37. (37.) 设 $f:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足 ln 上凸且为偶函数, 证明:
$$2f^2(0)\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^3. \tag{17.77}$$

38. (38.♡) 设 $f\in C^2[a,b]$ 满足 $f'(a)=f'(b)=0$, 证明:
$$\int_a^b|f'(x)|^6\,\mathrm{d}x\leqslant 25\cdot\max_{x\in[a,b]}|f(x)|^2\cdot\int_a^b|f'(x)f''(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{17.78}$$

39. (39.) 设 $C\in\mathbb{R}$, 记
$$S=\left\{f\in R[a,b]:|f(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\text{且}\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x=C\right\},$$
计算
$$\sup_{f\in S}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

40. (40.♡) 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数, 证明:
$$6\left(\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1+8\int_0^1f^3(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.79}$$

41. (41.)[12]设 $m\in\mathbb{N}$, 求最佳常数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 得对任何 $f\in R[0,1]$ 都有
$$\int_0^1f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1x^mf(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.80}$$

42. (42.) 设 $0<a<b<\infty$ 以及
$$K_{a,b}\triangleq\left\{f\in R[a,b]:f\geqslant 0,\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x=1,af(a)=bf(b),f\text{在}[a,b]\text{递减}\right\}.$$
求
$$\sup_{f,g\in K_{a,b}}\int_a^b\max\{f(t),g(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

43. (43.) 设 $f\in C^1[0,1]\bigcap D^2(0,1)$ 且 f'' 在 $(0,1)$ 可积且 $f(0)=f(1)=0$, $f''(x)\leqslant 1$, 证明:
$$\int_0^1\left(x^2-x^4\right)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x+2\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{42}. \tag{17.81}$$

44. (44.∗) 求最佳常数 $c>0$, 使得对所有 $f\in C^3[0,1]$ 且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, 都有
$$\int_0^1|f(x)f'''(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant c\int_0^1|f'''(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{17.82}$$

45. (45.) 设
$$S=\left\{f\in C[0,1]:\left|\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant 1,\forall x\in(0,1]\right\},$$
证明
$$\sup_{f\in S}\left|\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{\pi}.$$

46. (46.) 设
$$a<0<b,S=\left\{f\in R[0,1]:\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=0,a\leqslant f(x)\leqslant b\right\},$$
$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是严格递增的函数. 计算 $\sup\limits_{f\in S}\int_0^1f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

47. (47.) 设
$$|a,b|\triangleq\sqrt{a^2+b^2},\forall a,b\in\mathbb{R}.$$

[12]这个计算是复杂的, 建议采用Deepseek完成.

证明对任何 $\lambda>0$, 存在 $C(\lambda)>0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\eta}{|a,\eta|^{1+\lambda}|b,z-\eta|^{1+\lambda}}\leqslant\frac{C(\lambda)}{|ab|^{\lambda}}\cdot\frac{|a+b|^{\lambda}}{|a+b,z|^{1+\lambda}},\forall a,b>0,z\in\mathbb{R}.$$

48. (48.) 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负上凸函数且满足 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant-\frac{1}{4}.$$

49. (49.) 设 $n\geqslant 2$ 且 f 是 x,y 的关于每个分量都不超过 $n-1$ 次的实系数多项式. 证明

$$n\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\left(\int_0^1 f(x,x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

并指出等号成立条件.

50. (50.) 对局部可积函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 证明:

$$\begin{aligned}&\varliminf_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right]\leqslant\varliminf_{\lambda\to0^+}\left[\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to0^+}\left[\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\leqslant\varlimsup_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

51. (51.) 证明: 存在只依赖 n 的常数 $c>0$ 使得对任何 n 次的多项式 p 都有

$$|p(0)|\leqslant c\int_{-1}^1|p(x)|\,\mathrm{d}x.$$

52. (52.♡) 设 $f\in D^2[0,1]$ 且

$$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0,|f''(x)|\leqslant1,\forall x\in[0,1].$$

证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{32},\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{384},\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{3}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{192}.$$

53. (53.∗) 证明存在常数 $C>0$ 使得对任何 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 都有

$$\int_0^{\infty}\left\|\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}u_0(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\|_{L^{\infty}}^2\mathrm{d}t\leqslant C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

54. (54.) 对 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 证明

$$\int_{\mathbb{R}}|f|^2\ln|f|\,e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f'|^2e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|f|^2e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f|^2e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right).$$

55. (55.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 证明

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant16\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

56. (56.) 设 $0\leqslant f(x)\leqslant1$ 是一个单调不减的函数且满足

$$0\leqslant f(x)\leqslant1,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

证明:

$$\int_0^1\min\{x,f(x)\}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{8}.$$

57. (57.) 设 $f\in R[0,1]$, 并且对 $[0,1]$ 任意有限个两两不交的闭区间 $[a_i,b_i],1\leqslant i\leqslant n$ 都有

$$\left|\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant1,$$

证明:

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant2.$$

58. (58.) 考虑可微函数 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 满足 $|f'|\leqslant 1$. 记

$$m\triangleq\min_{x\in[0,1]}f(x),M\triangleq\max_{x\in[0,1]}f(x),\beta\triangleq\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x,$$

证明: 对 $\alpha>-1$ 有

$$\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(e^{(\alpha+1)\beta}-1\right).$$

59. (59.) 给定 $a_i,c_i>0,i=1,2,\cdots$, 证明: 对任何

$$n\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}$$

都有

$$\sum_{i=1}^n\left|\int_{\sum\limits_{i=1}^n\frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\frac{y_i}{a_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^n\frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}\right|^2\leqslant 1.$$

60. (60.) 设 $f\in C^1[0,2\pi]$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|<\infty.$$

61. (61.) 设 $N\in\mathbb{N},\mathcal{S}$ 是包含 N 个整数的集合, 满足如下的加性唯一性条件:
若 $n_k\in\mathcal{S},k=1,2,3,4$ 且 $n_1+n_2=n_3+n_4$, 则必有 $n_1=n_3$ 或者 $n_1=n_4$.
对 $f(x)=\sum\limits_{n\in\mathcal{S}}e^{2\pi inx}$, 计算

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x,\int_0^1|f(x)|^4\,\mathrm{d}x$$

并证明

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{\frac{N}{2}}.$$

62. (62.) 证明存在常数 $C>0$ 使得

$$\left|\int_0^1\cos\left(\lambda x^2\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{C}{\sqrt{\lambda}},\forall\lambda\geqslant 1.$$

63. (63.) 设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n,\mathrm{d}P=\prod\limits_{i=1}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}a_i}e^{-\frac{x_i^2}{2a_i^2}}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$. 对 $f\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|x_i|^2|f(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}P\leqslant 2\sum_{i=1}^n a_i^2\int_{\mathbb{R}^n}|f(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}P+4\sum_{i=1}^n a_i^4\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}P.$$

64. (64.) 对任何 $f\in C[-1,1]\bigcap C^1(-1,1)$, 证明:

$$f^2(1)+f^2(-1)\leqslant\coth 1\cdot\int_{-1}^1\left(|f'(x)|^2+|f(x)|^2\right)\mathrm{d}x.$$

并说明系数不能改进.

65. (65.) 固定 $a>0$, 证明对任何 $f\in C^1(-1,1)\bigcap C[-1,1]$ 都有

$$|f(1)|^2+|f(-1)|^2\leqslant e^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^1\left(|f(x)|^2+a^2|f'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x.$$

并说明系数不可改进.

66. (66.) 给定 $a,c>0$, 求最好的 $C>0$ 使对一切满足 $f(1)=c$ 的 $f\in C[1,+\infty)\bigcap C^1(1,+\infty)$ 都有

$$\int_1^{\infty}\left[|f(x)|^2+a^2|f'(x)|^2\right]e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\geqslant C.$$

67. (67.) 给定 $c>0$, 求最好的 $C>0$ 使对一切满足 $f(1)=c$ 的 $f\in C[1,+\infty)\bigcap C^1(1,+\infty)$ 都有

$$\int_1^{\infty}|f(x)|^2+|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant C.$$

68. (68.) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 对 $h>0$, 证明:
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\,\mathrm{d}x\leqslant h^2\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

69. (69.*) 设 $p\geqslant 1$, 求最好的 $C(p)>0$ 使得对任何满足
$$f(x)\geqslant 0, f^{(4)}(x)\geqslant 0, f'(0)\geqslant 0, f'(1)\leqslant 0$$
的 $f\in C^4[0,1]$ 成立
$$\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant C(p)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^p.$$

70. (70.) 设 $a_i>0, i=1,2,\cdots,n$, Ω 是有分段光滑边界的开集. 对 $f\in C^1(\overline{\Omega})$, 证明:
$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^n a_i^2\int_{\partial\Omega}x_i\cdot f^2\cdot n_i\cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^n\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\,\mathrm{d}S+\sum_{i=1}^n\int_\Omega x_i^2|f|^2e^{-\sum\limits_{j=1}^n\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant 2\sum_{i=1}^n a_i^2\int_\Omega|f|^2e^{-\sum\limits_{j=1}^n\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}+4\sum_{i=1}^n a_i^4\int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2e^{-\sum\limits_{j=1}^n\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}$$
这里 $\mathbf{n}\triangleq(n_1,n_2,\cdots,n_n)$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

71. (71.) 设 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0$. 证明: 存在与 $n\in\mathbb{N}$ 无关的 c 使得
$$\left|\int_0^1\frac{\sin(nx)}{x}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{c}{n}.$$
若把 $f\in D^2(\mathbb{R})$ 改成 $f\in C(\mathbb{R})$, 结论是否还成立?

72. (72.*) 设 $f\in C^2[0,1]$ 满足
$$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0.$$
求 $a>0$ 最大值使得
$$\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant a^4\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$
注 解决此题允许使用计算器辅助研究函数性质.

73. (73.) 对任何 $f\in C^2[0,+\infty)$, 证明:
$$\int_0^\infty|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant 2\left(\int_0^\infty|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}.$$
并说明系数不可改进.

74. (74.) 对 $s\in(0,2]$ 和
$$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbb{R}.$$
证明:
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_je^{-|b_i-b_j|^s}\geqslant 0.$$

75. (75.) 对任何 $n\in\mathbb{N}, f\in C^n[0,1]$, 证明: 对 $x\in[0,1]$ 有
$$\left|f^{(n-1)}(x)\right|\leqslant\int_0^1\left|f^{(n)}(y)\right|\mathrm{d}y+4^{n-1}(n-1)!\int_0^1|f(y)|\,\mathrm{d}y.$$
并说明系数不可改进.

76. (76.) 给定 $p>1$, 求最大常数 $C_p>0$ 使得对任何非负 $f\in C[0,1]$ 都成立
$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1}\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\geqslant C_p\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2p-1}.$$

77. (77.) 对 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 成立
$$\int_{-\infty}^\infty x^2|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty,\int_{-\infty}^\infty|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty.$$

证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^2 .$$

78. (78.) 设整数 $m \geqslant 2$ 且 $f \in C^m [0, +\infty)$ 满足 f 在 0 处的奇数阶导数为 0 且

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty, \int_0^{\infty} \left| f^{(m)}(x) \right|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

证明:

$$\int_0^{\infty} \left| f^{(j)}(x) \right|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{m-j}{m}} \left(\int_0^{\infty} \left| f^{(m)}(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{j}{m}}, 1 \leqslant j < m.$$

第 18 章 非数学类级数

内容提要

- 级数计算 18.1
- 级数结论 18.2
- 具体级数收敛性判断 18.3
- 傅立叶级数 18.4
- 级数证明 18.5
- 特殊多项式♠ 18.6

18.1 级数计算

18.1.1 裂项方法

例题 18.1 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)}$.

笔记 继续采用强行裂项的想法, 猜出裂项之后的模样之后还原看看差什么.

证明 注意到

$$\frac{1}{2^{n-1}\left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1\right)}-\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}=-\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)},$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}\right)-1=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

例题 18.2 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+1)!}.$$

笔记 想法的关键是强行裂项.

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+1)!}&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\,(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)\,(k+1)!}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\,(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)\,(k+2)!}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)\,(k+2)!}-\frac{1}{(k+1)\,(k+1)!}\right)\\&=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}-\left(e-2-\frac{1}{2}\right)=3-e.\end{aligned}$$

例题 18.3 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}.$$

笔记 此类问题化部分和之后估阶.

证明 事实上, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}-\frac{\ln(2n)}{2n}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln(2n)}{2n}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{2m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}\right).$$

利用例题8.6, 我们知道

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln 2}{n}=\ln 2\cdot\ln m+\ln 2\cdot\gamma+o(1),m\to\infty.$$

由9.3知道

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln m}{2m}+\int_1^m\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'dx.$$

注意到 $\int_1^m\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 m$ 以及

$$\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'dx\right|=\left|\int_1^m\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{1-\ln x}{x^2}dx\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{|1-\ln x|}{x^2}dx<\infty,$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln^2 m+C+o(1),m\to\infty,$$

这里 $C=\int_1^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)'dx$. 现在结合上述渐近估计式就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln^2(2m)-\frac{1}{2}\ln^2 m-\ln 2\cdot\ln m-\ln 2\cdot\gamma+o(1)\right]$$
$$=\frac{\ln^2 2}{2}-\ln 2\cdot\gamma.$$

例题 18.4

1. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}.$$
2. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}.$$

笔记 证明的想法即强行裂项.

证明

1. 记 $H_n\triangleq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_{n+1}}{n+2}\right)+\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{H_{n+1}}{n+2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_1}{2}-\frac{H_{m+1}}{m+2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=1.$$

2. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_n}{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n+1}}{n+1}-\frac{H_n}{n+1}\right)\\&=H_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

例题 18.5 计算 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

证明 事实上, 我们有

$$\prod_{n=2}^{m}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\prod_{n=2}^{m}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}=\frac{1\cdot2}{(m+1)m}\cdot\frac{m(m+1)+1}{3},$$

从而

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1\cdot2}{(m+1)m}\cdot\frac{m(m+1)+1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

例题 18.6 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}$.

笔记 本题计算需要极其耐心.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!\left(n^6-1\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n^2-1}{n^3-1}-\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{n(n+1)+1}-\frac{n-1}{(n-1)n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{n+1}{n(n+1)+1}-\frac{1}{(n-1)!}\frac{n}{(n-1)n+1}+\frac{1}{n!}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-1\right)=\frac{e-2}{2}.\end{aligned}$$

例题 18.7 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$.

笔记 证明的想法即利用合适范围[1]内都成立的恒等式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$$

来裂项.

证明 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

18.1.2 凑已知函数

例题 18.8 对 $|x|<1$, 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}.$$

[1]明确的范围见A.0.2

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}\\&=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})'+\frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}y^{2n}dy\\&=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-y^2}dy\\&=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned}$$

例题 18.9 计算

$$1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(3k-4)\,(3k-7)\cdot\cdots\cdot5\cdot2}{6^k k!}.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(3k-4)\,(3k-7)\cdot\cdots\cdot5\cdot2}{6^k k!}\\&=1-\frac{1}{6}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^{k-1}\prod_{j=2}^{k}\left(j-\frac{4}{3}\right)}{6^k k!}\\&=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^{k-1}\,3\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{3}-j+1\right)}{6^k k!}\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_{\frac{1}{3}}^{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

例题 18.10 对 $|x|<1$, 计算

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}.$$

证明 相似例题8.29的计算, 我们有恒等式

$$\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}.$$

于是

$$\ln\sin x-n\ln2-\ln\sin\frac{x}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}.$$

两边求导有

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

于是就有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=-\frac{\cos x}{\sin x}+\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\begin{cases}-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{x}, & 0<|x|<1\\0, & x=0\end{cases}.$$

18.1.3 生成函数和幂级数计算方法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是通项非负的级数, 非数学类应该修正根值判别法记忆的内容为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} >1, & \text{级数发散} \\ =1, & \text{级数收敛性无法判断} \\ <1, & \text{级数收敛} \end{cases}.$$

于是设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 $R\in[0,+\infty]$, 非数学专业的同学应当修正直接背诵的根值求收敛半径公式为

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

先来看一个 2026 考研数学一真题的例子:

例题 18.11 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 收敛域.

证明 **Method 1**

如果运用非数学教材没提到的 Cauchy-Hadamard 公式, 即

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n}=1,$$

因此幂级数收敛半径为 1. 此外

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n(\pm1)^{2n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^{2n}}{4}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}1=+\infty, \tag{18.1}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 收敛域是 $(-1,1)$.

Method 2

那如果非要限制在同济高数怎么办呢?, 由(18.1)和第一 Abel 定理得幂级数收敛域 $\subset(-1,1)$. 反之对 $x\in(-1,1)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x|^{2n}<\infty,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 收敛域是 $(-1,1)$.

来看 Cauchy 积理论: 定义参考19.1.

例题 18.12 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

笔记 使用 Cauchy 积计算幂级数有一个特点, 即系数往往出现求和结构.

证明 考虑 $a_n=1, n\in\mathbb{N}_0, b_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\in\mathbb{N}\\ 0 & n=0\end{cases}$. 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\frac{1}{1-x}, \sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=-\ln(1-x),$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x|<1.$$

收敛域可以直接注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)1^n=\infty,\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n=\infty$$

来得到.

为了介绍一种强大的判断收敛半径的工具[2], 我们举下例子:

例题 18.13 设

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2},a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},n=0,1,2,\cdots,$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}.$$

笔记 注意到形式幂级数法我们不需要担心考虑的 f 的幂级数是否收敛的问题, 因为这个方法最后往往可以算出来一个 f, 对这个 f 来说直接计算验证会发现其 Taylor 多项式的系数恰好就是条件中的数列, 从而整个逻辑严谨. 因此这又是一个从逻辑上来说属于先猜后证的方法.

证明 考虑 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则我们有

$$\begin{aligned}1&=\left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n\\&=a_0+a_1x-a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}-a_{n-2}\right)x^n,\end{aligned}$$

于是对比系数得

$$a_0=1,a_1=a_0=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},n=2,3,\cdots.$$

显然有

$$a_n\in\mathbb{N}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=\frac{3}{2}.$$

为了求出 f 收敛半径, 可以展开点为中心作圆并一直扩大直到接触到和函数在 $\mathbb{C}$ 上第一个奇点为止. 对于 $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$, 第一个奇点即使得 $\frac{1}{1-x-x^2}$ 分母为 0 且模更小的点 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 于是 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 于是我们得到一个极限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

生成函数方法是竞赛中的的热点题型.

例题 18.14 设 $a_0=0,a_1=\frac{2}{3},(n+1)a_{n+1}=2a_n+(n-1)a_{n-1},n\in\mathbb{N}$, 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^n$ 收敛域和和函数.

证明 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 形式的, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-1}.$$

[2]依赖复分析, 无需证明, 直接背住使用.

于是

$$\frac{1}{x}\left[f'(x)-a_1\right]=\frac{2}{x}\left[f(x)-a_0\right]+xf'(x)\Rightarrow\frac{1}{x}\left[f'(x)-\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{x}f(x)+xf'(x).$$

故解微分方程得 $f(x)=\frac{2x}{3-3x},x\in(-1,1)$. 这给出了 $a_n=\frac{2}{3},n\in\mathbb{N}$. 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{2}{3}x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\frac{2}{3}x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{2x}{3(1-x)^2},x\in(-1,1).$$

构造微分方程求解方法是最为困难的常规级数计算方法.

例题 18.15

1. 计算
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$
2. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\right].$$

注第 2 问是第十届大学生数学竞赛非数学类决赛得分率非常低的一个题. 可以看到如果我们平时记忆 $\arcsin^2x$ 展开, 就能快速解题而规避掉最容易考到的构造微分方程求解幂级数的技巧. 这一点我们在推论10.1中也提到过.

证明

1. 考虑
$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n},$$
我们有
$$\begin{aligned}g'(x)&=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right)'\\&=1+x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\right)'=1+x\left[xg(x)\right]',\end{aligned}$$
即
$$g'(x)-\frac{x}{1-x^2}g(x)=\frac{1}{1-x^2},g(0)=0.$$
由常数变易法得 $g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 于是收敛区间为 $|x|<1$. 由
$$\lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty,\lim_{x\to-1^+}g(x)=-\infty$$
知幂级数在 $x=\pm1$ 不收敛, 故收敛域为 $|x|<1$.
2. 首先把级数写成
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{n+1}\right].$$
然后利用等式(9.27)可考虑
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{(2n+1)!!}\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}}{n+1}\right].$$
现在所求级数为 $2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
我们利用第 1 问有
$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\right).$$

于是我们有

$$2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2f\left(0\right)=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[2\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}-1.$$

例题 18.16 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}$.

证明 注意到

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!},f'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},f''\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},f'''\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}.$$

于是我们有

$$f+f'+f''+f'''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

注意到 $f\left(0\right)=1,f'\left(0\right)=f''\left(0\right)=f'''\left(0\right)=0$, 求解微分方程[3]得解 $f\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(e^{-x}+e^x+2\cos x\right)$.

例题 18.17 设 $f\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ 的 Taylor 展开是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 若 $f\left(0\right)=18,f'\left(0\right)=3$ 且

$$f''\left(x\right)=xf\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{18.2}$$

计算 $\left\lfloor\frac{a_9}{a_{10}}\right\rfloor$.

证明 设 $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 我们有

$$f'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},f''\left(x\right)=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}.$$

由(18.2)得

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\left(n+3\right)\left(n+2\right)a_{n+3}x^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1},$$

即

$$a_0=18,a_1=3,a_2=0,a_{n+3}=\frac{a_n}{\left(n+3\right)\left(n+2\right)},n=0,1,2,\cdots.$$

现在递推得

$$a_3=3,a_4=\frac{1}{4},a_6=\frac{1}{10},a_7=\frac{1}{168},a_9=\frac{1}{720},a_{10}=\frac{1}{15120},$$

于是

$$\left\lfloor\frac{a_9}{a_{10}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{15120}{720}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1512}{72}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1512}{72}\right\rfloor=21.$$

18.1.4 多重求和

我们用 Putnam 1999 的题目来展示二重级数的对称算法.

例题 18.18 计算

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}.$$

笔记 二重级数一类题型往往会用对称性来简化结构.

[3]可以视为 4 阶线性常系数微分方程或者把 $f+f'$ 看成整体解二阶微分方程.

证明 直接计算有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn^2}{3^n\left(m3^n+n3^m\right)}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^mmn^2+3^nm^2n}{3^{n+m}\left(m3^n+n3^m\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{3^{n+m}}=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}\right)^2=\frac{9}{32},$$

这里最后的级数是一个差比数列，高中数学的错位相减可以直接算出结果.

例题 18.19 计算

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100m^2n}{2^m\left(n2^m+m2^n\right)}\right].$$

证明 我们有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100m^2n}{2^m\left(n2^m+m2^n\right)}=50\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2n}{2^m\left(n2^m+m2^n\right)}+\frac{n^2m}{2^n\left(m2^n+n2^m\right)}\right)$$
$$=50\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mn\left(\frac{m}{2^m}+\frac{n}{2^n}\right)}{n2^m+m2^n}\right)=50\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn}{2^{m+n}}=50\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\right)^2=200.$$

例题 18.20 计算级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn(m+n+2)}$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(m+n+2\right)}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{m+n+1}}{mn}dx\\&=\int_0^1x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}\right)^2dx\\&=\int_0^1x\ln^2\left(1-x\right)dx\\&=\int_0^1\left(1-x\right)\ln^2xdx\\&=-\frac{1}{4}x\left(x+2\left(x-2\right)\ln^2x-2\left(x-4\right)\ln x-8\right)\Big|_0^1\\&=\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

例题 18.21 计算级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(m+n+2\right)\left(m+n\right)}.$$

证明 利用对称性，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(m+n+2\right)\left(m+n\right)}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{mn\left(m+n+2\right)\left(m+n\right)}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{mn\left(m+n+2\right)\left(m+n\right)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+n}{mn\left(m+n+2\right)\left(m+n\right)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\left(m+n+2\right)}\\&=\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

例题18.20

例题 18.22 设

$$a_n=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2},$$

计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}
a_n&=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_2^2}{k_1^2k_2^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_1^2}{k_1^2k_2^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1^2k_2^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_3^2}{k_1^2k_2^2k_3^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2k_3^2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2}\cdots\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&\cdots\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2k_3^2k_4^2\cdots k_{n-1}^2}\cdot\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_n^2}{k_1^2k_2^2k_3^2k_4^2\cdots k_{n-1}^2k_n^2}\cdot\frac{1}{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2k_3^2k_4^2\cdots k_{n-1}^2k_n^2}\\
&=\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^n.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^n=e^{\frac{\pi^2}{6}}-1.$$

18.1.5 级数特殊算法

类似积分的计算方法, 二重级数换序, 积分级数换序, 级数求导换序都是常用的求解级数方法. 非数学考试中一般不会考察级数换序的具体细节, 往往会设计一些特殊的技巧来裂项完成级数的计算. 此时通过换序强行计算是可行的, 但是在时间比较空闲的情况下需要书写级数换序证明. 下面的级数问题我们只选取一些具体的例子给出级数换序的理由, 其余的例子我们不再过多赘述.

例题 18.23

1. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.
3. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$.

证明

1. 我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$
2. 注意到傅立叶展开[4] $f(x)=x^3-\pi^2x, x\in[-\pi,\pi]$ 得
$$x^3-\pi^2x\sim 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx).$$
考虑 $x=\frac{\pi}{2}$ 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.
3. 容易由例题14.43的计算过程得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$.

定义 18.1 (卡特兰常数定义)

定义
$$G\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\approx 0.91597.$$
♣

注 卡特兰常数的性质可参考.

来看十二届预赛压轴题.

例题 18.24 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t$.

笔记 非数学类竞赛现阶段一般不会真的考察级数换序, 但探索不换序方法可能却比较困难. 可以在无奈的时候直接使用 Levi 定理7.10, 即非负级数无脑换序.

证明 我们有
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln\left(1-\frac{1}{1+t^4}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\ln\left(1+t^4\right)\mathrm{d}t-\int_0^1\ln t^4\mathrm{d}t\\&=\ln 2-\int_0^1 t\mathrm{d}\ln\left(1+t^4\right)-4\int_0^1\ln t\mathrm{d}t\\&=\ln 2-\int_0^1\frac{4t^4}{1+t^4}\mathrm{d}t-4\int_0^1\ln t\mathrm{d}t\\&=\ln 2-4\int_0^1\frac{t^4+1-1}{1+t^4}\mathrm{d}t-4\int_0^1\ln t\mathrm{d}t\\&=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\pi+2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].\end{aligned}$$

例题 18.25 设 $f\in C^1[0,1], f(x)\geqslant 0$, 证明下述级数收敛且求值
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^n f(x)\,dx.$$

笔记 为了有换序
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)\,dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx,$$

[4] 实际考试中如果要用这个方法肯定有第一问的.

我们只需要

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int f_n(x)\,dx=\lim_{m\to\infty}\int\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\,dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx,$$

即需要证明

$$\lim_{m\to\infty}\int\sum_{n=m+1}^{\infty}f_n(x)\,dx=0.$$

证明 显然 $\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ 递减且

$$0\leqslant\int_0^1 x^n f(x)\,dx\leqslant\max f\cdot\int_0^1 x^n dx\to 0,n\to\infty,$$

故由交错级数判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ 收敛. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 x^n f(x)\,dx=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n f(x)\,dx=\int_0^1\frac{xf(x)}{1+x}dx,$$

这里换序来自

$$\left|\int_0^1\sum_{n=m}^{\infty}(-x)^n f(x)\,dx\right|\overset{\text{交错级数不等式18.4}}{\leqslant}\int_0^1 x^m f(x)\,dx\to 0,m\to\infty.$$

级数化积分是一种常用的算法.

例题 18.26 计算

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{80}{(3k+4)(3k+5)(3k+6)(3k+7)(3k+8)}.$$

笔记 证明的想法是利用Beta 函数

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{80}{(3k+4)(3k+5)(3k+6)(3k+7)(3k+8)}&=80\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k+3)!}{(3k+8)!}\\&=80\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3k+4)}{\Gamma(3k+9)}=\frac{80}{\Gamma(5)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(5)\Gamma(3k+4)}{\Gamma(3k+9)}=\frac{80}{24}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{3k+3}(1-x)^4\,dx\\&=\frac{10}{3}\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k+3}(1-x)^4\,dx=\frac{10}{3}\int_0^1\frac{x^3(1-x)^4}{1-x^3}dx=11-10\ln 3,\end{aligned}$$

这里最后一个积分来自

$$\int\frac{x^3(1-x)^4}{1-x^3}dx=-\frac{x^5}{5}+x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-3\ln\left(1+x+x^2\right)+3x+C.$$

例题 18.27 设 $a,b>0$, 判断级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ 收敛性并在收敛时求和.

证明 用斯特灵公式9.4, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}&=\frac{\Gamma(b)\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b+n+1)}\sim\frac{\Gamma(b)\sqrt{2\pi(a+n)}\left(\frac{a+n}{e}\right)^{a+n}}{\Gamma(a)\sqrt{2\pi(b+n)}\left(\frac{b+n}{e}\right)^{b+n}}\\&\sim e^{b-a}\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^{(a+n)\ln(a+n)-(b+n)\ln(b+n)}=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^{b-a}e^{(a-b)\ln n+O(1)}\\&\sim C\frac{1}{n^{b-a}},\end{aligned}$$

即原级数收敛的充要条件是 $b>a+1$.

当 $b>a+1$,

Method 1

我们求和有

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=1+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)}$$

$$=1+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+n)}=1+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\sum_{n=1}^{\infty}\beta(b-a,a+n)$$

$$=1+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x)^{a+n-1}\,\mathrm{d}x=1+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x)^{a}\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

$$=1+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\int_0^1 x^{b-a-2}(1-x)^{a}\,\mathrm{d}x=1+\frac{\Gamma(b)\beta(b-a-1,a+1)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}=1+\frac{\Gamma(b-a-1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}=\frac{b-1}{b-a-1}.$$

Method 2

我们求和有

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{1}{b-a-1}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{a(a+1)\cdots(a+n-2)}{b(b+1)\cdots(b+n-2)}(a+n-1)-\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}(a+n)\right]$$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{1}{b-a-1}\left[\frac{a(a+1)}{b}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}(a+n)\right)\right]$$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{1}{b-a-1}\frac{a(a+1)}{b}=\frac{b-1}{b-a-1},$$

这里用到了前面讨论收敛性时的估阶

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}(a+n)\right)=0.$$

作为本题的的延伸, 我们来看

例题 18.28 设 $a>0,b>a+2$, 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\right].$$

证明 由例题18.27, 我们得

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=\frac{b-1}{b-a-1},1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=\frac{b-1}{b-a-2}.$$

两式相减得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=\frac{b-1}{b-a-2}-\frac{b-1}{b-a-1}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=a\left(\frac{b-1}{b-a-2}-\frac{b-1}{b-a-1}\right).$$

和积分计算一样, 我们同样需要积累一些基本的级数恒等式, 例如命题14.1.

例题 18.29♠ 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{2n}^{n}H_nx^n$, 这里 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明 注意到对每个 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned}
-n\int_0^1(1-x)^{n-1}\ln x dx &= \lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1 \ln x d(1-x)^n\\
&= \lim_{\epsilon\to0^+}\left(-\ln\epsilon\cdot(1-\epsilon)^n-\int_\epsilon^1\frac{(1-x)^n}{x}dx\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to0^+}\left(-\ln\epsilon\cdot(1-\epsilon)^n-\int_\epsilon^1\frac{(1-x)^n-1}{x}dx+\ln\epsilon\right)\\
&= \int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k\,dx=H_n,
\end{aligned}$$

即

结论 [调和数列部分和一种积分表达式]

$$H_n=-n\int_0^1(1-x)^{n-1}\ln x dx.$$

结合

$$\frac{2}{(1-4x)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^\infty nC_{2n}^n x^{n-1},x\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}),$$

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty C_{2n}^n H_n x^n &= -\sum_{n=1}^\infty nC_{2n}^n x^n\int_0^1(1-y)^{n-1}\ln y dy=-x\int_0^1\sum_{n=1}^\infty nC_{2n}^n(x-xy)^{n-1}\ln y dy\\
&= -x\int_0^1\frac{2}{(1-4x+4xy)^{\frac{3}{2}}}\ln y dy=-2x\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{(1-4xy)^{\frac{3}{2}}}dy\\
&= -\left[\frac{\ln(1-y)}{\sqrt{1-4xy}}+\frac{\ln\frac{\sqrt{1-4xy}+\sqrt{1-4x}}{\sqrt{1-4xy}-\sqrt{1-4x}}}{\sqrt{1-4x}}\right]_{y=0}^{y=1}=-\lim_{y\to1^-}\left[\frac{\ln(1-y)}{\sqrt{1-4xy}}+\frac{\ln\frac{\sqrt{1-4xy}+\sqrt{1-4x}}{\sqrt{1-4xy}-\sqrt{1-4x}}}{\sqrt{1-4x}}\right]+\frac{\ln\frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}}}{\sqrt{1-4x}}\\
&= -\lim_{y\to1^-}\left[\frac{\ln(1-y)}{\sqrt{1-4xy}}-\frac{\ln\left(\sqrt{1-4xy}-\sqrt{1-4x}\right)}{\sqrt{1-4x}}\right]+\frac{-\ln\left(2\sqrt{1-4x}\right)+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}}}{\sqrt{1-4x}}\\
&= -\lim_{y\to1^-}\left[\ln(1-y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-4xy}}-\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)+\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{1-4xy}+\sqrt{1-4x}}{4x}\right)}{\sqrt{1-4x}}\right]\\
&\quad+\frac{-\ln\left(2\sqrt{1-4x}\right)+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}}}{\sqrt{1-4x}}\\
&= -\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{1-4x}}{2x}\right)}{\sqrt{1-4x}}+\frac{-\ln\left(2\sqrt{1-4x}\right)+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}}}{\sqrt{1-4x}}=\frac{\ln\left(\frac{x}{1-4x}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}}\right)}{\sqrt{1-4x}}=\frac{\ln\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^2}{4(1-4x)}\right)}{\sqrt{1-4x}}.
\end{aligned}$$

注意到 $\frac{\ln\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-4z}\right)^2}{4(1-4z)}\right)}{\sqrt{1-4z}}$ 在 $|z|<\frac{1}{4}$ 解析且以 $z=\frac{1}{4}$ 为奇点, 故幂级数收敛半径为 $\frac{1}{4}$, 由于幂级数系数为正, 因此

$$\sum_{n=1}^\infty C_{2n}^n H_n x^n=\frac{\ln\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^2}{4(1-4x)}\right)}{\sqrt{1-4x}},x\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}).$$

例题 18.30 计算 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{\sinh\pi}{\cosh(2n\pi)-\cosh\pi}$.

证明 利用命题14.1可导出恒等式

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nt}\sin(nx)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cosh t-\cos x},$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\pi}{\cosh(2n\pi)-\cosh\pi}&=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-2mn\pi}\sinh(m\pi)=2\sum_{m=1}^{\infty}\sinh(m\pi)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2mn\pi}\\&=2\sum_{m=1}^{\infty}\sinh(m\pi)\frac{e^{-2m\pi}}{1-e^{-2m\pi}}=2\sum_{m=1}^{\infty}\sinh(m\pi)\frac{1}{e^{2m\pi}-1}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{m\pi}-e^{-m\pi}}{e^{2m\pi}-1}=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m\pi}=\frac{1}{e^{\pi}-1}.\end{aligned}$$

例题 18.31 计算 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

笔记 想法是利用帕塞瓦尔恒等式. 本题主要是知道有这么一个方法, 想不想得到没那么重要.

证明 待定一个数字 k, 考虑 $f(x)=\begin{cases}\pi, & |x|<k\\ 0, & k\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$, 然后计算其傅立叶系数有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=2k,a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin(kn)}{n},b_n=0,n\in\mathbb{N}.$$

于是利用帕塞瓦尔恒等式得

$$2\pi^2k=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=2\pi k^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi\sin^2(kn)}{n^2}.$$

考虑 $k=1$ 得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$, 从而

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}=\pi.$$

来看两个极具特殊性的级数计算题, 它是竞赛真题也是 IMC 国际大学生数学竞赛真题.

例题 18.32 计算下列级数

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$.

证明

1. 记 $a_n=\ln\frac{n+1}{n},n\in\mathbb{N},a_n\sim\frac{1}{n},n\to\infty$, 于是接下来涉及的级数都收敛. 注意到 $a_n=a_{2n}+a_{2n+1},n\in\mathbb{N}$, 于是

$$a_n^2=a_{2n}^2+a_{2n+1}^2+2a_{2n}a_{2n+1},n\in\mathbb{N}.$$

现在

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}^2+a_{2n+1}^2\right)=\frac{a_1^2}{2}=\frac{\ln^2 2}{2}.$$

2. 记 $a_n=\ln\frac{n+1}{n},n\in\mathbb{N},a_n\sim\frac{1}{n},n\to\infty$, 于是接下来涉及的级数都收敛. 注意到 $a_{2n}+a_{2n+1}-a_n=0,n\in\mathbb{N}$. 利用高中数学中若 $x+y+z=0$ 则必有 $x^3+y^3+z^3=3xyz$, 我们有

$$a_{2n}^3+a_{2n+1}^3-a_n^3=-3a_{2n}a_{2n+1}a_n,n\in\mathbb{N}.$$

现在

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}a_n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n+1}^3+a_{2n}^3\right)=\frac{a_1^3}{3}=\frac{\ln^3 2}{3}.$$

结论 [组合数的无穷和技巧]

1. 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}b_ky^k\Rightarrow b_k=x^{-k}\sum_{n=k}^{\infty}C_n^ka_nx^n.$$

2. 我们有

$$\sum_{n=0}^{m} a_n (y+x)^n = \sum_{k=0}^{m} b_k y^k \Rightarrow b_k = x^{-k} \sum_{n=k}^{m} C_n^k a_n x^n.$$

例题 18.33 计算

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n, k \in \mathbb{N}.$$

证明 取 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. 由 Cauchy 积, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(y+x)^n &= -\frac{\ln(1-x-y)}{1-x-y} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\frac{1}{1-\frac{y}{1-x}} - \frac{1}{1-x}\frac{\ln\left(1-\frac{y}{1-x}\right)}{1-\frac{y}{1-x}} \\
&= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{(1-x)^k} + \frac{1}{1-x}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\frac{y^k}{(1-x)^k} \\
&= -\frac{\ln(1-x)}{1-x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln(1-x)}{(1-x)^{k+1}}\right] y^k.
\end{aligned}$$

于是由结论18.1.5, 我们有

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n = b_k x^k = \left[\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln(1-x)}{(1-x)^{k+1}}\right] x^k.$$

注意到和函数第一个奇点是 $x=1$, 所以幂级数收敛半径是 1. 注意到和函数在 $x=1$ 的左极限发散, 因此幂级数在 $x=1$ 不收敛. 虽然和函数在 $x=-1$ 的右极限收敛, 但并不能一定能推出幂级数在 $x=-1$ 收敛, 为了判断 $x=-1$ 的收敛性, 我们要使用小 o Tauber 定理19.3.

♠ 若 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-x)^n$ 存在, 则由小 o Tauber 定理19.3知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=k}^{k+m}\left[(-1)^n n C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right] = 0.$$

注意到

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{n=k}^{k+2m}\left[(-1)^n n C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right] = 0;$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\sum_{n=k}^{k+2m+1}\left[(-1)^n n C_n^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right] = 0,$$

我们有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^{k+2m+1}(k+2m+1)C_{k+2m+1}^k\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+2m+1}\right)}{2m+1} = 0.$$

又

$$\lim_{m\to\infty} C_{k+2m+1}^k = \lim_{m\to\infty}\frac{(k+2m+1)!}{k!(2m+1)!} = +\infty,$$

矛盾! 因此我们证明了原幂级数收敛域是 $(-1,1)$.

例题 18.34 设 $k \in \mathbb{N}_0, x \in (-1,1)$, 计算

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \left(e-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right) x^n.$$

证明 我们设

$$a_n = e-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{n!}.$$

由 Cauchy 积, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right)x^n=\left(-e+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^n\right)=\frac{e-e^x}{1-x}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(y+x\right)^n&=\frac{e-e^{y+x}}{1-y-x}=\frac{1}{1-x}\frac{e-e^x\cdot e^y}{1-\frac{y}{1-x}}\\&=\frac{e}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{\left(1-x\right)^n}-\frac{e^x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{1-x}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\\&=\frac{e}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{\left(1-x\right)^n}-\frac{e^x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\left(1-x\right)^{n-k}}\right)y^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{\left(1-x\right)^{n+1}}-\frac{e^x}{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\left(1-x\right)^{n-k}}\right)y^n.\end{aligned}$$

因此由结论18.1.5

$$\sum_{n=k}^{\infty}C_n^ka_nx^n=x^kb_k=\frac{e\cdot x^k}{\left(1-x\right)^{k+1}}-\frac{x^k\cdot e^x}{1-x}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!\left(1-x\right)^{k-j}}.$$

例题 18.35 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}+\frac{1}{\left(n+2\right)^2}-\frac{1}{\left(n+3\right)^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2n}\right].$$

笔记 积分化和, 和化积分是非常常见的积分级数计算的想法.

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^j}{\left(n+j\right)^2}-\frac{1}{2n}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{j=0}^{\infty}\left(-1\right)^j\int_0^{\infty}xe^{-(n+j)x}dx-\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\int_0^{\infty}xe^{-nx}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-e^{-x}\right)^jdx-\frac{1}{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\int_0^{\infty}\frac{xe^{-nx}}{1+e^{-x}}dx-\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)xe^{-nx}dx\right)\\&=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)x\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}dx\\&=\int_0^{\infty}\frac{xe^{-x}}{2\left(1-e^{-2x}\right)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2nx}dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(2n+1)x}dx\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n\right)^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{48}=\frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

例题 18.36 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n-1\right)^{2m+1}}.$$

证明 注意到基本恒等式

$$\frac{1}{\Gamma\left(s\right)}\int_0^{\infty}e^{-nx}x^{s-1}dx=\frac{1}{n^s},s>0.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)^{2m+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(2m+1)}\int_0^{\infty}e^{-(4n-1)x}x^{2m}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(4n-1)x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}dx\\&=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(4n-1)x}\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)dx=\int_0^{\infty}\frac{e^{-3x}}{1-e^{-4x}}\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)dx\\&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-3x}}{1-e^{-4x}}\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)dx=\frac{1}{2}\left(-x+\ln\left(1+e^x\right)+\arctan e^x\right)|_0^{\infty}=\frac{1}{8}\left(\pi-4\ln 2\right).\end{aligned}$$

例题 18.37 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln 2-\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\ln 2.\end{aligned}$$

例题 18.38 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{2n}\right).$$

证明 注意到

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}.$$

于是有经典恒等式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}. \tag{18.3}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln 2-\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln 2-\sum_{j=1}^{2n}\int_0^1(-x)^{j-1}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln 2-\int_0^1\frac{1-x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{1+x}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln x}{2-x}\mathrm{d}x-\frac{\ln^2 2}{2}\\&=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x+\ln 2}{2-2x}\mathrm{d}x-\frac{\ln^2 2}{2}=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x-\ln 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x-\frac{\ln^2 2}{2}\\&=\frac{\pi^2}{12}+\frac{\ln^2 2}{2}-\ln^2 2-\frac{\ln^2 2}{2}=\frac{\pi^2}{12}-\ln^2 2,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自例题14.43.

例题 18.39 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{\pi}{4}\right)$$

条件收敛并求和.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi}{4}&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\\&=\int_0^1\frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

我们有

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi}{4}\right|=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}x^{2n}\mathrm{d}x\sim\frac{1}{2n}\cdot\frac{1^2}{1+1^2},n\to\infty,$$

这里等价来自基本模型9.9, 于是我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi}{4}\right|=+\infty.$$

由交错级数判别法容易知道 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi}{4}\right)$ 条件收敛. 于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi}{4}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{\sqrt{y}}{1+y}y^n\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{\sqrt{y}}{1+y}y^{n-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}y^n\mathrm{d}y\\&\overset{\text{类似例题18.25}}{=}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{y}}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

当然你也可以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

第一种计算方法看似复杂计算但实质我是恰好发现例题18.25严格证明了换序, 所以切换到上面去从而使得计算是合法的.

最后我们给出 Poisson 求和公式:

定理 18.1 (Poisson 求和公式 ♠)

设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且存在 $C,\delta>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{1+\delta}},\forall x\in\mathbb{R}.\tag{18.4}$$

定义 $\hat{f}(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y$, 然后如果 $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(m)\right|<\infty$, 我们有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(m)e^{2\pi imx}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(x+m),\forall x\in\mathbb{R}.\tag{18.5}$$

♡

笔记 $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}f(x+m)$ 把 f 的周期化, 是一个常用技巧.

注读者可以无脑形式计算而不在乎定理使用条件, 因为实际做题的时候都是具体的函数, 因此下面的换序无脑的过得去.

证明

由条件(18.4)知 $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)$ 一致收敛, 所以

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) \in C(\mathbb{R}).$$

现在计算其傅立叶系数就有

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m)\cdot e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+m)\cdot e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_m^{m+1} f(x)\cdot e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

于是我们有(18.5).

例题 18.40 证明:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-tm^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\pi^2m^2}{t}}, \forall t>0. \tag{18.6}$$

证明 类似例题14.37的计算, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2}e^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\pi^2x^2}{t}}, t>0.$$

考虑 Poisson 求和公式18.1中 $x=0$ 的情况即得(18.6).

18.1.6 有理分式和无穷积计算方法 ♠

定理 18.2

在定义域有

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right);$$

$$\sinh z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k} = \frac{1-\pi z\cot(\pi z)}{2}, |z|<1;$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{z+\pi n}+\frac{1}{z-\pi n}\right)\right];$$

$$\frac{1}{\sinh z} = \frac{1}{z}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z}{n^2\pi^2+z^2};$$

$$\tan z = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{z+\frac{2n-1}{2}\pi}\right);$$

$$\frac{1}{\tan z} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right).$$

♡

笔记 以 ζ 函数为系数的幂级数居然和 cot 有关! 多么漂亮. 两个无穷积展开可以直接记忆而不管证明, 因为它最简单的方法是来自复分析的. 你可以类比韦达定理来记忆 sin 的无穷积展开, 其余的公式都可以在此之上推导出.

证明 注意到

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Rightarrow -i\sin(iz) = \sinh z, z\in\mathbb{C}. \tag{18.7}$$

我们利用(18.7)有

$$\sinh z = -i\sin(iz) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), z\in\mathbb{C}.$$

注意到

$$\ln\sin z=\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

于是我们有

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2z}{n^2\pi^2}}{1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right).$$

进一步有

$$\begin{aligned}\tan z=\cot\left(\frac{\pi}{2}-z\right)&=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z-n\pi}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z+n\pi}\right)\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{z+\frac{2n-1}{2}\pi}\right).\end{aligned}$$

再注意到

$$\ln\left(\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m}}{mn^{2m}}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2m}}{mn^{2m}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{m}z^{2m},$$

两边求导得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k}=\frac{1-\pi z\cot(\pi z)}{2}.$$

利用 $\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{z}{2}+\cot\frac{z}{2}\right)$ 可得

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{z+\pi n}+\frac{1}{z-\pi n}\right)\right].$$

最后利用(18.7)可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh z}=\frac{1}{-i\sin(iz)}&=\frac{i}{\sin(iz)}\\&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{iz-n\pi}+\frac{i}{iz+n\pi}\right)\\&=\frac{1}{z}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z}{n^2\pi^2+z^2}.\end{aligned}$$

18.1.7 留数计算方法 ♠

定理 18.3 (用留数计算级数)

设 $m,n\in\mathbb{N}$, $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上除点 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 外解析的函数, 且满足 $a_i\notin\mathbb{Z}$, 如果还成立

$$\lim_{n\to\infty}\oint_{C_n}|f(z)|\,ds=0.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}_{z=a_k}\{f(z)\cot(\pi z)\},$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}_{z=a_k}\{f(z)\csc(\pi z)\},$$

这里

$$C_n=\left\{z=x\pm in\in\mathbb{C}:-\frac{1}{2}-n\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+n\right\}\bigcup\left\{z=\pm\left(\frac{1}{2}+n\right)+yi\in\mathbb{C}:-n\leqslant y\leqslant n\right\}.$$

♡

笔记 纯兴趣内容.

证明

对 $n\in\mathbb{N}$ 充分大时, 由留数定理

$$\oint_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\,dz=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{z=a_k}\{f(z)\cot(\pi z)\}+\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}_{z=k}\{f(z)\cot(\pi z)\}$$

$$\oint_{C_n} f(z)\csc(\pi z)\,dz=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{z=a_k}\{f(z)\csc(\pi z)\}+\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}_{z=k}\{f(z)\csc(\pi z)\}.$$

注意到

$$\operatorname{Res}_{z=k}\{f(z)\cot(\pi z)\}=\lim_{z\to k}(z-k)f(z)\cot(\pi z)=\frac{f(k)}{\pi}$$

$$\operatorname{Res}_{z=k}\{f(z)\csc(\pi z)\}=\lim_{z\to k}(z-k)f(z)\csc(\pi z)=\frac{(-1)^k f(k)}{\pi},$$

以及

$$\left|\oint_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\,dz\right|\leqslant\sup_{z\in C_n}|\cot(\pi z)|\oint_{C_n}|f(z)|\,ds$$

$$\left|\oint_{C_n} f(z)\csc(\pi z)\,dz\right|\leqslant\sup_{z\in C_n}|\csc(\pi z)|\oint_{C_n}|f(z)|\,ds.$$

直接计算可以知道

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{z\in C_n}|\cot(\pi z)|<\infty$$

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{z\in C_n}|\csc(\pi z)|<\infty,$$

因此我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{z=a_k}\{f(z)\cot(\pi z)\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{z=a_k}\{f(z)\csc(\pi z)\}.$$

例题 18.41♠ 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+w^2},w\neq\pm ni,n=0,1,2,\cdots.$$

证明 利用定理18.3, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+w^2}&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+w^2}+\frac{1}{2w^2}=-\frac{\pi}{2}\operatorname*{Res}_{z=wi}\frac{\cot(\pi z)}{z^2+w^2}-\frac{\pi}{2}\operatorname*{Res}_{z=-wi}\frac{\cot(\pi z)}{z^2+w^2}+\frac{1}{2w^2}\\&=-\frac{\pi}{2}\frac{\cot(\pi wi)}{2wi}-\frac{\pi}{2}\frac{\cot(-wi\pi)}{-2wi}+\frac{1}{2w^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\cot(\pi wi)}{wi}+\frac{1}{2w^2}\\&=-\frac{\pi}{2}\frac{\cot(\pi wi)}{wi}+\frac{1}{2w^2}=\frac{1+\pi w\coth(\pi w)}{2w^2}.\end{aligned}$$

来看一个清华求真考试的得分率很低的题.

例题 18.42♠ 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+1}.$$

证明 由定理18.3, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+1}&=-\pi\sum_{j=1}^{4}\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{\pi}{4}(2j-1)i}}\frac{z^2+z+1}{\left(z^4+1\right)\tan\left(\pi z\right)}\\&=-\pi\left(-\frac{i\cot\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\pi\right)}{4\sqrt{2}-4}-\frac{\coth\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\pi\right)}{4\sqrt{2}+4}-\frac{i\cot\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\pi\right)}{4\sqrt{2}+4}-\frac{\coth\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\pi\right)}{4\sqrt{2}-4}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}\pi\sinh\left(\sqrt{2}\pi\right)}{\cosh\left(\sqrt{2}\pi\right)-\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)}.\end{aligned}$$

例题 18.43♠ 设 $z\in\mathbb{C}$, 在有意义时, 计算

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z^3-n^3}.$$

证明 由定理18.3我们知道

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z^3-n^3}&=\pi\mathrm{Res}_{w=z}\frac{\cot\left(\pi w\right)}{w^3-z^3}+\pi\mathrm{Res}_{w=ze^{\frac{2\pi}{3}i}}\frac{\cot\left(\pi w\right)}{w^3-z^3}+\pi\mathrm{Res}_{w=ze^{\frac{4\pi}{3}i}}\frac{\cot\left(\pi w\right)}{w^3-z^3}\\&=\frac{\pi\cot\left(\pi z\right)}{3z^2}+\frac{\pi\left(-1+i\sqrt{3}\right)\cot\left(\frac{i\sqrt{3}\pi z-\pi z}{2}\right)}{6z^2}+\frac{\pi\left(1+i\sqrt{3}\right)\cot\left(\frac{i\sqrt{3}\pi z+\pi z}{2}\right)}{6z^2}.\end{aligned}$$

结论 [组合数用留数表示] $C_m^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^m}{z^{n+1}}\mathrm{d}z, m\geqslant n\geqslant 0.$

18.2 级数结论

定理 18.4 (交错级数不等式)

设 a_n 递减非负数列, 则对 $m,p\in\mathbb{N}_0$, 必有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}(-1)^n a_n\right|\leqslant a_m. \tag{18.8}$$

♡

笔记 本不等式是最容易被遗忘的不等式, 应该牢记于心.

证明 不妨设 $m=0$, 则

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases}a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-1}-a_p), & p\text{为偶数}\\ a_0-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\cdots-(a_{p-2}-a_{p-1})-a_p, & p\text{为奇数}\end{cases}\leqslant a_0.$$

此外

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^n a_n=\begin{cases}(a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-2}-a_{p-1})+a_p, & p\text{为偶数}\\ (a_0-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-1}-a_p), & p\text{为奇数}\end{cases}\geqslant 0,$$

这就证明了不等式(18.8).

定理 18.5 (A-D 判别法级数)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 满足下列条件之一时收敛.

1. $\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, b_n 递减到 0;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, b_n 单调有界.

♡

证明 ♠ 由 Abel 变换, 注意到

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \sum_{j=n}^{k} a_j + b_m \sum_{k=n}^{m} a_k.$$

于是对于第一种情况, 设

$$M = 2 \sup_{n \geqslant 1} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|,$$

我们有

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leqslant M \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M |b_m| = M b_n \to 0, \text{当} n, m \to \infty.$$

对于第二种情况, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任何 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大, 对任何 $p \in \mathbb{N}_0$, 必有

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leqslant \epsilon.$$

于是当 n, m 充分大, 我们有

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leqslant \epsilon \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + \epsilon |b_m| = \epsilon |b_m - b_n| + \epsilon |b_m| \leqslant 3\epsilon \sup_{n \geqslant 1} |b_n|.$$

因此无论如何都有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 18.6 (凝聚判别法)

设 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 严格递增且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 非负递减. 若存在 $C > 0$ 使得

$$(m_{k+1} - m_k) \leqslant C (m_k - m_{k-1}), \forall k \geqslant 2. \tag{18.9}$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (m_{k+1} - m_k) a_{m_k}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

♡

笔记 单调性放缩构成主要想法.

注 一个常用操作是对 $p \in \mathbb{N}$ 且 $p > 1$, 则 $p^{k+1} - p^k = p\left(p^k - p^{k-1}\right)$ 满足(18.9). 所以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 非负递减时 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k a_{p^k}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

证明 因为正项级数的收敛性由其子列极限决定, 所以一方面

$$\begin{aligned} \sum_{n=m_1}^{\infty} a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_j \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_{m_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (m_{k+1} - m_k) a_{m_{k+1}} \overset{(18.9)}{\geqslant} \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} (m_{k+2} - m_{k+1}) a_{m_{k+1}}, \end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned} \sum_{n=m_1}^{\infty} a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_j \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} a_{m_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (m_{k+1} - m_k) a_{m_k}, \end{aligned}$$

这就证明了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (m_{k+1} - m_k) a_{m_k}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

定理 18.7 (积分判别法)

若 f 是 $[1,+\infty)$ 的单调不变号函数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 和 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

♡

笔记 注意有限项不影响级数收敛性, 有限区间不影响积分收敛性. 方法是我们之前已经反复训练的.

证明 不妨设 f 非负递减, 注意到

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\leqslant f(1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)+\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由夹逼准则即证.

为了统一导出一些常见级数的判别法, 我们引入两个重要技术, 从他们出发反复套娃可以得到各种个样的判别法.

定理 18.8 (Cauchy 链)

设正值递增函数 $F\in C^1[a,+\infty)$, $\frac{F'}{F}$ 在 $[a,+\infty)$ 递减. 若满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F'(n)$ 发散, 则对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$ 有如下判别法:

极限版:

1. 若
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}>1, \tag{18.10}$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}<1, \tag{18.11}$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c>1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\geqslant c, \forall n\geqslant N.$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $c\leqslant 1, N\in\mathbb{N}$ 使得
$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant c, \forall n\geqslant N.$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

笔记 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替. 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 因为如果改(18.11)为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant 1$, 则 $\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}$ 仍然可能在 n 充分大严格超过 1.

注 取 $F(x)=e^x$, 则

$$\frac{\ln\frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}=\frac{n-\ln a_n}{n}=1-\ln\sqrt[n]{a_n},$$

这恰好是根值判别法18.10.

取 $F(x)=x$, 则

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}=\frac{-\ln a_n}{\ln n},$$

这恰好是对数判别法18.9.

证明 **Step 1** 先证明

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty. \tag{18.12}$$

设 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=A$, 则积分判别法表明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\sim\int_a^{\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}\mathrm{d}x=\ln F(x)\,|_a^{\infty},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}$ 收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{A}$, 这就和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F'(n)$ 发散矛盾! 故我们证明了(18.12).

Step 2 当(18.10)成立, 存在 $c>1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\geqslant c, \forall n\geqslant N.$$

因此

$$\frac{F'(n)}{a_n}\geqslant e^{c\ln F(n)}\Rightarrow\frac{F'(n)}{F^c(n)}\geqslant a_n, \forall n\geqslant N.$$

结合 $\frac{F'(n)}{F^c(n)}=\frac{F'(n)}{F(n)}\cdot\frac{1}{F^{c-1}(n)}$ 递减, 由积分判别法18.7, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F^c(n)}\sim\int_N^{\infty}\frac{F'(x)}{F^c(x)}\mathrm{d}x=\int_{F(N)}^{\infty}\frac{1}{y^c}\mathrm{d}y<\infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

Step 3 若存在 $c\leqslant 1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{F'(n)}{a_n}}{\ln F(n)}\leqslant c, F(n)\geqslant 1, \forall n\geqslant N.$$

同样的我们有 $\frac{F'(n)}{F(n)}\leqslant\frac{F'(n)}{F^c(n)}\leqslant a_n, \forall n\geqslant N$ 以及由积分判别法18.7有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F'(n)}{F(n)}\sim\int_N^{\infty}\frac{F'(x)}{F(x)}\mathrm{d}x=\int_{F(N)}^{\infty}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 18.9 (对数判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c>1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant c, \forall n\geqslant N.$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c \leqslant 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant c, \forall n \geqslant N.$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

笔记 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替.

定理 18.10 (根值判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $c < 1, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant c, \forall n \geqslant N.$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

注值得注意的是, 对于根值判别法, 这里通过 Cauchy 链的叙述, 不应该是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, 而应该是 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$. 也不应是无穷多个 n, 而是任何 $n \geqslant N$. 所以我们需要一些加强的证明.

笔记 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替.

证明 若存在 $c \geqslant 1$ 和无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant c,$$

则存在 $n_k \to \infty$, 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant c \geqslant 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| \neq 0,$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 18.11 (Kummer 链)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 设

$$K_n = \frac{1}{d_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, n = 1, 2, \cdots, d_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty,$$

有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} K_n > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} K_n < 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>0$ 使得 $K_n\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $K_n\leqslant 0,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

♡

笔记 极限版和不等式版的第 1 个结果的条件是等价的, 第 2 个结果不等式版条件要更弱. 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替, 理由同 Cauchy 链18.8. 从证明可以看到, 无论是极限版还是不等式版的 1, 没用到条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n=+\infty$.

注 当 $d_n=1,n\in\mathbb{N}$, 我们有 $K_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}-1$, 这恰好就是比值判别法18.12.

当 $d_n=\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}$, 我们有 $K_n=n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)$, 这恰好是拉比判别法18.13.

当 $d_n=\frac{1}{n\ln n},n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}K_n&=n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)\\&=n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln n-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

即得一个比较广泛的判别法18.14. 要注意我们在阶的层面对 K_n 做了变形, 因此不再给出不等式版本的18.14.

证明 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta>0$ 使得 $K_n\geqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{d_n}-\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\right)\geqslant a_{n+1},\forall n\geqslant N.$$

现在

$$\sum_{k=N}^{m}a_{k+1}\leqslant\sum_{k=N}^{m}\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_k}{d_k}-\frac{a_{k+1}}{d_{k+1}}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{d_N}-\frac{a_{m+1}}{d_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{d_N},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $K_n\leqslant 0,\forall n\geqslant N$, 则 $\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\geqslant\frac{a_n}{d_n},\forall n\geqslant N$. 现在

$$a_{n+1}\geqslant\frac{a_N}{d_N}d_{n+1},\forall n\geqslant N,\sum_{n=1}^{\infty}d_n=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,$$

这就完成了证明.

定理 18.12 (比值判别法)

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N\in\mathbb{N},\delta\in(0,1)$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\delta,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1,\forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

♡

笔记 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替.

定理 18.13 (拉比判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

不等式版:

1. 若存在 $N\in\mathbb{N}, \delta>1$ 使得 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\delta, \forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1, \forall n\geqslant N$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

笔记 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替.

定理 18.14 (较为广泛的判别法)

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$, 有如下判别法:

极限版 1:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

极限版 2:

1. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

笔记 要求不高的同学可以把上下极限都用极限来代替. 极限版 2 和极限版 1 在很多情况下是等价的. 极限版 1 就是 kummer 链18.11的 $d_n=\frac{1}{n\ln n}$ 的情况. 我们这里以大家更熟悉的主流方法来书写一遍判别法证明, 以极限版 2 为例. 考场会更优先使用这种做法.

证明

1. 设 $t>1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]>t, \forall n\geqslant N.$$

然后

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{1}{n}+\frac{t}{n\ln n}, \forall n\geqslant N.$$

现在求和得

$$\ln\frac{a_N}{a_{n+1}}>\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right), \forall n\geqslant N.$$

于是

$$a_{n+1}<a_N e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)}, \forall n\geqslant N.$$

现在由例题8.6和8.52, 我们有

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O(1), \sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\ln\ln n+O(1), n\to\infty.$$

于是

$$e^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{t}{k\ln k}\right)}=e^{-\ln n-t\ln\ln n+O(1)}=\frac{e^{O(1)}}{n\ln^t n}.$$

结合积分判别法18.7有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n}\sim\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}\mathrm{d}x=\int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}\mathrm{d}y<\infty,$$

我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

2. 设 $0<t<1, N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\ln n\left[n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]<t,\forall n\geqslant N.$$

然后相似第 1 问的证明和

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln^t n}\sim\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x\ln^t x}\mathrm{d}x=\int_{\ln 10}^{\infty}\frac{1}{y^t}\mathrm{d}y=+\infty,$$

我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

命题9.11给了一类连根式极限存在的判别法, 我们来看另外一个版本.

定理 18.15 (Herschfeld 判别法)

设 $p>1$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$. 定义

$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}},n\in\mathbb{N},$$

然后 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

♡

证明 显然 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增.

必要性: 若 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则由

$$t_n=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}\geqslant\sqrt[p]{0+\sqrt[p]{0+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}=a_n^{\frac{1}{p^n}}$$

和 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界知 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界.

充分性: 若 $a_n^{\frac{1}{p^n}}$ 有界, 则设 $a_n^{\frac{1}{p^n}}\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$, 于是我们有 $a_n\leqslant M^{p^n},\forall n\in\mathbb{N}$. 因此

$$\begin{aligned}t_n&=\sqrt[p]{a_1+\sqrt[p]{a_2+\cdots+\sqrt[p]{a_n}}}\leqslant\sqrt[p]{M^p+\sqrt[p]{M^{p^2}+\cdots+\sqrt[p]{M^{p^n}}}}\\&=M\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\cdots+\sqrt[p]{1}}}\leqslant M\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\cdots+\sqrt[p]{1}}}}_{n\text{个根号}},\end{aligned}$$

其中最后一个等号的极限存在性可以考虑递增函数确定的递推

$$x_1=\sqrt[p]{1},x_{n+1}=\sqrt[p]{1+x_n},n\in\mathbb{N}.$$

注意到 $x_2=\sqrt[p]{2}>1=x_1$, 不动点 $x_0>1$ 满足 $x_0^p-x_0-1=0$. 因此由结论8.4.1知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增有上界, 从而极限存在.

来看一类经典的从级数收敛推通项渐近的例子.

命题 18.1

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则

1. 若 a_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.
2. 若 na_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln n\cdot a_n=0$.
3. 若 $n\ln n\cdot a_n$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot a_n=0$.

♠

证明

1. 不妨设 a_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为收敛级数末项趋于 0, 所以我们知道 a_n 递减到 0. 注意到由 a_n 递减知

$$0 \leqslant 2na_{2n} \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k, 0 \leqslant (2n-1)\, a_{2n-1} \leqslant 2na_{2n-1} \leqslant 2\sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

现在由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = \lim_{n\to\infty} (2n-1)\, a_{2n-1} = 0.$$

由命题7.4知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

2. 不妨设 na_n 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = c \neq 0$ 会导致 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以我们知道 na_n 递减到 0.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} a_k &= \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{ka_k}{k} \geqslant na_n \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{1}{k} \geqslant na_n \sum_{\sqrt{n}-1\leqslant k\leqslant n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \\ &= na_n \int_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n} \frac{1}{x}dx = na_n \ln \frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \geqslant na_n \ln \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}na_n \ln n \geqslant 0,\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则和夹逼准则我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n \cdot a_n = 0$.

3. 不妨设 $n\ln n \cdot a_n$ 递减, 否则考虑 $-a_n$ 即可. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} (n\ln n \cdot a_n) = c \neq 0$. 注意到 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛, 这就和比较判别法矛盾! 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} (n\ln n \cdot a_n) = 0$, 从而 $a_n \geqslant 0$.

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{\lfloor\ln n\rfloor\leqslant k\leqslant n} a_k &= \sum_{\lfloor\ln n\rfloor\leqslant k\leqslant n} \frac{k\ln k \cdot a_k}{k\ln k} \geqslant n\ln n \cdot a_n \sum_{\lfloor\ln n\rfloor\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k\ln k} \\ &\geqslant n\ln n \cdot a_n \sum_{\lfloor\ln n\rfloor\leqslant k\leqslant n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = n\ln n \cdot a_n \int_{\lfloor\ln n\rfloor}^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x \\ &= n\ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln\lfloor\ln n\rfloor} \geqslant n\ln n \cdot a_n \cdot \ln \frac{\ln n}{\ln\ln n} \sim n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot a_n,\end{aligned}$$

利用 Cauchy 收敛准则就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot a_n = 0$.

定理 18.16 (级数的控制收敛定理)

设 $a_n(s), n = 1, 2, \cdots$ 满足

$$|a_n(s)| \leqslant c_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

以及 $\lim\limits_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R}$.

则

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

这里 $\lim\limits_s$ 表示 s 趋于某个 $s_0 \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty, +\infty\}$.

♡

证明 事实上由极限保号性, 我们知道 $|b_n| \leqslant c_n, n = 1, 2, \cdots$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m} (a_n(s) - b_n)\right| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n(s) - b_n| \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{m} (a_n(s) - b_n)\right| + 2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.\end{aligned}$$

对 s 取极限得

$$\lim_s \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leqslant 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

由 m 任意性得

$$\lim_s \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| = 0.$$

我们完成了级数控制收敛定理的证明.

定理 18.17 (级数的 Levi 定理)

若非负 $a_n(s), n=1,2,\cdots$ 满足 $a_n(s)$ 是 s 的关于趋近方向的递增函数 (注意如果取极限的方式是 $s \to s_0^+$, 那么应该是关于 s 的递减函数) 且

$$\lim_s a_n(s) = b_n \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}.$$

证明

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

♡

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 那么由于 $0 \leqslant a_n(s) \leqslant b_n$, 取控制级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 即可使用控制收敛定理18.16得到

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 但是

$$\lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

此时对任何 $N \in \mathbb{N}$, 都有

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \lim_s \sum_{n=1}^{N} a_n(s) \leqslant \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) = m < \infty,$$

矛盾!, 我们完成了 Levi 定理的证明.

定理 18.18 (级数的法图引理 ♠)

设非负数列 $a_n(s), n=1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{\lim_s} a_n(s) \leqslant \underline{\lim_s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s). \tag{18.13}$$

♡

笔记 本定理即使级数发散, 极限数列发散, 也能使用.

证明 不妨设 $s \to +\infty$, 考虑 $g_n(s) \triangleq \inf\limits_{t \geqslant s} a_n(t)$, 则 g_n 关于趋于方向递增非负, 所以由级数的 Levi 定理18.17知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{\lim_s} a_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_s g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{t \geqslant s} a_k(t) \leqslant \underline{\lim_s} \sum_{n=1}^{\infty} a_k(s),$$

这就完成了证明.

定理 18.19 (级数的 Fubini 定理)

满足下述条件之一时, 必有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}. \tag{18.14}$$

1. $a_{m,n}\geqslant 0,\forall m,n\in\mathbb{N}$;
2. $$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|<\infty.$$

♡

笔记 第一个条件级数发散也能用. 再一次体现思想: 非负级数无脑换.

证明

1. 由级数的 Levi 定理18.17, 我们注意到 $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N}a_{m,n}\right\}$ 关于 N 非负递增, 于是有
$$\sum_{m=1}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_{m,n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}a_{m,n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}, \tag{18.15}$$
这就是(18.14).
2. 注意到
$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}a_{m,n}\right|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|<\infty,$$
于是由级数的控制收敛定理18.16知(18.15)仍然成立, 这就是(18.14).

定理 18.20 (级数加括号的理解)

1. 收敛级数任意加括号也收敛且收敛到同一个值.
2. 级数加括号之后收敛, 且括号内每个元素符号相同, 则原本级数收敛, 且级数值和如此加括号后一致,

♡

证明

1. 设加括号后新的级数是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j$, 则
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=n_1+1}^{n_{m+1}}a_j=\sum_{j=n_1+1}^{\infty}a_j,$$
这就完成了证明.
2. ♠即证明对严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N},n_1=0$, 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j$ 收敛且对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $a_{n_k+1},a_{n_k+2},\cdots,a_{n_{k+1}}$ 符号相同, 则 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ 收敛且
$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{18.16}$$
事实上, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $n_m<n\leqslant n_{m+1}$, 此时
$$\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j+\sum_{j=n_m+1}^{n}a_j.$$
则当 $a_j\geqslant 0,n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 我们有
$$\sum_{j=1}^{n}a_j\geqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j,\sum_{j=1}^{n}a_j=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j-\sum_{j=n+1}^{n_{m+1}}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{18.17}$$

若 $a_j\leqslant 0, n_m<j\leqslant n_{m+1}$, 可得(18.17)的类似物

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j. \tag{18.18}$$

让 $n\to+\infty$, 我们由(18.17),(18.18)和夹逼准则得(18.16). 这就完成了证明.

例题 18.44 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty), S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, n\in\mathbb{N}$. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不恒为 0, 不妨设 $a_1\neq 0$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{和}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\text{同敛散}, & 0<p\leqslant 1\end{cases}. \tag{18.19}$$

笔记 本结果虽然不能直接使用, 但连同证明方法却要记住! 并且要学会联想和转化到本题的样子, 例如

$$\sum\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right),\sum\left(\frac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln a_n}\right)$$

等结构.

注同类型问题见19.56, 19.57,19.58,19.59, 虽然放置在数学类, 但一定要前往学习.

证明 当 $p>1$, 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{S_1}^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x,$$

可以看到无论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛性如何都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant 1$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则有 $\frac{a_n}{S_n^p}\sim\frac{a_n}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)^p}, n\to\infty$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 我们对任何充分大的 $m,k\in\mathbb{N}$ 都有

$$1-\frac{S_k}{S_{k+m}}=\frac{S_{k+m}-S_k}{S_{k+m}}=\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_{k+m}}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n}\leqslant\sum_{n=k+1}^{k+m}\frac{a_n}{S_n^p}.$$

让 $m\to+\infty$, 利用[5]$S_{k+m}\to+\infty$, 于是我们有余项不能任意小, 因此由 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 发散. 这就完成了证明.

18.3 具体级数收敛性判断

18.3.1 估阶法

例题 18.45 判断下述级数收敛性.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}$;
2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

证明

1. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(e^n+n^2\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}&=\frac{\ln\left(e^n\right)+\ln\left(1+\frac{n^2}{e^n}\right)}{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}\cdot\ln^2(n+1)}\\&\sim\frac{n}{n^2\cdot\ln^2 n}=\frac{1}{n\ln^2 n}, n\to\infty.\end{aligned}$$

[5]注意此时 k 固定.

由积分判别法18.7, 我们有

$$\sum \frac{1}{n\ln^2 n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y < \infty,$$

故原级数收敛.

2. 注意到运用 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n\ln^2 n-(n-1)\ln^2(n-1)}$$

$$\overset{\text{拉中保持阶不变}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{\ln^2 n+2\ln n} = 1.$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p} \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln^2 n}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}.$$

因此原级数收敛等价于 $p>2$.

3. 由 Laplace 方法9.3, 我们有

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n} = \int_0^1 e^{-n\ln\left(1+t^4\right)}\mathrm{d}t \sim \int_0^{\infty} e^{-nt^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\int_0^{\infty} e^{-x^4}\mathrm{d}x, n\to\infty.$$

现在

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n} \sim \frac{C}{n^{\frac{5}{4}}}, n\to\infty,$$

故原级数收敛.

例题 18.46 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|\mathrm{d}t, n\in\mathbb{N}$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛性.

证明 利用不等式

$$|\sin(nt)| \leqslant n|\sin t|, \forall n\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R},$$

我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{tn^3\sin^3 t}{\sin^3 t}\mathrm{d}t = \frac{n^3}{2}\frac{\pi^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{8}n.$$

利用不等式 $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t, \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 我们有

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\left(\frac{2}{\pi}t\right)^3}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{2n}{\pi} = \frac{\pi^2}{4}n, \forall n\in\mathbb{N}.$$

现在

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin^3(nt)}{\sin^3 t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{8}n+\frac{\pi^2}{4}n = \frac{3\pi^2}{8}n, \forall n\in\mathbb{N},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{8}{3\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

例题 18.47 对 $x>0$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)\right]$ 收敛性.

证明 当 $x=2^m, m\in\mathbb{N}$, 我们知道级数末项在 n 充分大时恒为 0, 因此原本的级数收敛. 下设 $x\neq 2^m, \forall m\in\mathbb{N}$. 此时由

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)}{(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(2-x^{\frac{1}{n+1}}\right)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\ln x}{n+1} = \ln x,$$

以及拉比判别法18.13, 我们就有 $x>e$ 时数收敛, $x<e$ 时级数发散. 当 $x=e$ 时, 计算 Taylor 得[6]

$$\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{12n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right),n\to\infty,$$

然后

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[n\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n+1}}}-1\right]=0.$$

运用统一的判别法18.14, 我们知道原级数发散.

例题 18.48 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}},x\in(0,1)$ 收敛性.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{-\sin\frac{1}{n+1}\cdot\ln x}-1\right)=-\ln x\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n+1}=-\ln x.\end{aligned}$$

由拉比判别法18.13, 我们有 $0<x<\frac{1}{e}$ 时原级数收敛, $\frac{1}{e}<x<1$ 时原级数发散. 当 $x=\frac{1}{e}$, 由判别法18.14和

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln\frac{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}}{x^{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln\frac{1}{x^{\sin\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\ln e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\left[e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1+O\left(\left(e^{-\sin\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)^2\right)\right]-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\left[-\sin\frac{1}{n+1}\ln x+O\left(\left(-\sin\frac{1}{n+1}\ln x\right)^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln n\left(\left[n\sin\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n\cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=0,\end{aligned}$$

我们有原级数在 $x=\frac{1}{e}$ 发散.

18.3.2 带对数换底方法

例题 18.49 判断下列级数收敛性.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{\ln n}}\ (r>0)$;
2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln n}n}$;
3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;
4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;
5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$;
6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}$.

证明

1. 注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^{\ln n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln r}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln r}},$$

我们有原级数收敛等价于 $r>e$.

2. 注意到

$$\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{\ln^{\ln n}n}=\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln n}}=\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln n}}\leqslant\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln 100}}<\infty,$$

[6]可能比较难算, 但是一定要耐心算下去.

我们有原级数收敛.

3. 注意到

$$\sum_{n=\lfloor e^{e^e}\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\sum_{n=\lfloor e^{e^e}\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln n}}\leqslant\sum_{n=\lfloor e^{e^e}\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln\ln(\lfloor e^{e^e}\rfloor+1)}}=\sum_{n=\lfloor e^{e^e}\rfloor+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln\ln(\lfloor e^{e^e}\rfloor+1)}}<\infty,$$

我们有原级数收敛.

4. 由积分判别法18.7, 我们有

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln^2\ln n}}\sim\int_3^{\infty}\frac{1}{e^{\ln^2\ln x}}\mathrm{d}x\overset{x=e^y}{=}\int_{\ln 3}^{\infty}e^{y-\ln^2 y}\mathrm{d}y=\infty,$$

故原级数发散.

5. 首先

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}},$$

于是我们结合

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ne^{\sqrt{\ln n}}}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{t}}}\mathrm{d}t<\infty$$

知原级数收敛.

6. 当 n 充分大有

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}=\frac{1}{e^{\left(1+\frac{1}{\ln\ln n}\right)\ln n}\ln n}=\frac{1}{n\ln ne^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}}}\leqslant\frac{1}{n\ln ne^{\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln\ln n}}}=\frac{1}{n\ln ne^{\ln\ln n}}=\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

由积分判别法18.7知

$$\sum\frac{1}{n\ln^2 n}\sim\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y<\infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}\ln n}$ 收敛.

18.3.3 Taylor 公式法

例题 18.50 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}$ 收敛性.

笔记 此类问题可采用 Taylor 公式的 peano 余项方法, 主要要展开到余项的级数绝对收敛. 注意积累绝对 ± 绝对 = 绝对, 绝对 ± 条件 = 条件的结论.

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}+\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right).$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right)$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散知原级数发散.

例题 18.51 设 $\alpha>0$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\cos n+n^{\alpha}}$ 的绝对收敛和条件收敛性.

证明 当 $\alpha>\frac{1}{2}$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\cos n+n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\cos n}{n^{\alpha}}}{1+\frac{\cos n}{n^{\alpha}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right).$$

显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right|\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}<\infty.$$

显然由A-D 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{\alpha}}$ 收敛.

当 $\alpha>1$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^{\alpha}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}<\infty,$$

于是级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^{\alpha}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|^2}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(2n)}{2n^{\alpha}}=\infty,$$

于是我们证明了原级数条件收敛.

当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, 取正整数 m 使得 $m\alpha>1$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\cos n+n^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\cos n}{n^{\alpha}}}{1+\frac{\cos n}{n^{\alpha}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n^{\alpha}}-\frac{\cos^2 n}{n^{2\alpha}}+\cdots+O\left(\frac{1}{n^{m\alpha}}\right)\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n^{\alpha}}-\frac{1+\cos(2n)}{2n^{2\alpha}}+\cdots+O\left(\frac{1}{n^{m\alpha}}\right)\right),\end{aligned}$$

注意上式省略的发散部分的分母次方不可能抵消 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ 造成的发散, 因此我们说明了原级数发散. 为了更清晰, 我们如下方法来替代, 它具备一般性. 即减去第一项

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{\alpha}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\cos n+n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^{\alpha}(\cos n+n^{\alpha})}\\&\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^{\alpha}(n^{\alpha}+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(n^{\alpha}+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{n^{\alpha}(n^{\alpha}+1)}\\&=+\infty,\end{aligned}$$

这里 $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{n^{\alpha}(n^{\alpha}+1)}$ 收敛来自18.5.

例题 18.52 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 收敛性.

证明 Taylor 展开得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right).\tag{18.20}$$

注意到

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\text{递减到}0,\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\right|\leqslant 1,$$

我们由 A-D 判别法18.5知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n}}$ 收敛. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

例题 18.53 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}}-1\right)$ 的条件收敛和绝对收敛性.

证明 显然当 $\alpha\leqslant 0$, 末项不趋于 0, 因此发散. 当 $\alpha>0$, 取 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $m\alpha>1$, 运用 Taylor 公式

$$e^{x}=1+x+\cdots+\frac{x^m}{m!}+o(x^m),\tag{18.21}$$

我们有

$$e^{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}}-1=\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}+\frac{1}{2n^{2\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^{n(m-1)}}{(m-1)!n^{\alpha(m-1)}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha m}}\right).\tag{18.22}$$

注意到式(18.22)中的第一项一定收敛, 第二项在 $0<2\alpha\leqslant 1$ 时发散, 且其余项次数太高不足以影响第二项, 因此此时原级数发散.

当 $2\alpha>1$, 式(18.22)的第二项 (包括第二项) 之后全部绝对收敛, 因此原级数的条件收敛和绝对收敛性由第一

项决定. 因此 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ 时原级数条件收敛, $\alpha>1$ 时原级数绝对收敛, 其余情况发散.

例题 18.54 判断 $\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{m}\frac{\ln\left(\sqrt{2n}+(-1)^n\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}$ 收敛性.

笔记 注意无穷积本质也可以转化为级数. 此外要注意 $\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{m}f(n)=0$ 称为收敛[7], 但 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}f(n)=0$ 称为发散[8], 因为无穷积收敛定义为极限为非 0 数字.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\ln\prod_{n=1}^{m}\frac{\ln\left(\sqrt{2n}+(-1)^n\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}&=\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{\ln\left(\sqrt{2n}+(-1)^n\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}\\&=\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{\ln\left(\sqrt{2n}\right)+\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}=\sum_{n=1}^{m}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}\right)\\&=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}+O\left(\left(\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}\right)^2\right)\right]\\&=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}+O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)\right]=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}\ln\left(\sqrt{2n}\right)}-\frac{1}{4n\ln\sqrt{2n}}+O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)\right].\end{aligned}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}\ln\left(\sqrt{2n}\right)}+O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)\right]$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n\ln\sqrt{2n}}$ 发散, 故

$$\lim_{m\to\infty}\ln\prod_{n=1}^{m}\frac{\ln\left(\sqrt{2n}+(-1)^n\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}=-\infty,$$

从而

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\ln\left(\sqrt{2n}+(-1)^n\right)}{\ln\left(\sqrt{2n}\right)}=0\text{是收敛的}.$$

18.3.4 分组判别法

例题 18.55 设 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$ 收敛.

证明 待定

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\leqslant\frac{1}{2}a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>\frac{1}{2}a_n^{\frac{n}{n+1}}\right\}.$$

现在

$$a_n^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow a_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Rightarrow a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,\forall n\in M,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}=\sum_{n\in M}a_n^{\frac{n}{n+1}}+\sum_{n\in N}a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\sum_{n\in M}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\sum_{n\in N}a_n<\infty,$$

这就完成了证明.

例题 18.56 设 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s},s>1-\frac{1}{p},p>1$ 收敛.

证明 利用 Young 不等式16.1, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\frac{1}{p}}}{n^s}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{p}+\frac{1}{qn^{sq}}\right)<\infty,sq=\frac{s}{1-\frac{1}{p}}>1,$$

[7] 即作为数列极限.

[8] 即作为无穷积.

这就完成了证明.

例题 18.57 设 $a_n,b_n,c_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{b_n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^{-\sqrt{2}}$ 收敛. 若 $b_n=1+\frac{1}{\ln c_n}$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明 定义

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n\leqslant c_n^{-\sqrt{2}}\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:a_n>c_n^{-\sqrt{2}}\right\}.$$

注意到

$$a_n^{b_n}=a_n^{1+\frac{1}{\ln c_n}},\ln a_n>-\sqrt{2}\ln c_n,\forall n\in N,$$

于是

$$a_n^{b_n}=a_n^{1+\frac{1}{\ln c_n}}>a_n^{1-\frac{\sqrt{2}}{\ln a_n}}=a_n\cdot a_n^{-\frac{\sqrt{2}}{\ln a_n}}=a_ne^{-\frac{\sqrt{2}}{\ln a_n}\ln a_n}=e^{-\sqrt{2}}a_n.$$

现在

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n\in M}a_n+\sum_{n\in N}a_n\leqslant\sum_{n\in M}c_n^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}\sum_{n\in N}a_n^{b_n}<\infty.$$

例题 18.58 设 $\{x_n\}\subset(0,1)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx_n<\infty$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\ln\frac{1}{x_n}<\infty$.

证明 考虑

$$M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:x_n\ln\frac{1}{x_n}\leqslant nx_n\right\},N\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:x_n\ln\frac{1}{x_n}>nx_n\right\},$$

于是对 $n\in N$ 有 $0<x_n<e^{-n}\leqslant e^{-1}$, 因此由 $x\ln\frac{1}{x}$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 递增得

$$0<x_n\ln\frac{1}{x_n}\leqslant e^{-n}\ln e^n=ne^{-n}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\ln\frac{1}{x_n}&=\sum_{n\in M}x_n\ln\frac{1}{x_n}+\sum_{n\in N}x_n\ln\frac{1}{x_n}\\&\leqslant\sum_{n\in M}nx_n+\sum_{n\in N}ne^{-n}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nx_n+\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}<\infty,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

18.3.5 综合训练和杂题

例题 18.59 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

证明 相似结论18.26的计算, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right|=\frac{1}{2}\left|\sin n-\cot\frac{1}{2}\cos n+\cot\frac{1}{2}\right|,\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right|=\frac{1}{2}\left|\cos n+\cot\frac{1}{2}\sin n-1\right|$$

都是有界的. 又 $\frac{1}{n}$ 递减到 0, 我们由 A-D 判别法18.5得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛.

又

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|^2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n)}{2n}=\text{发散}-\text{收敛}=\text{发散};\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|^2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(2n)}{2n}=\text{发散}+\text{收敛}=\text{发散}.\end{aligned},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

例题 18.60 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$ 收敛.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin k\cdot\sin k^2\right)&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k\left(k+1\right)\right)-\cos\left(k\left(1-k\right)\right)\right]\\&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k\left(k+1\right)\right)-\cos\left(k\left(k-1\right)\right)\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(n\left(n+1\right)\right)-1\right],\end{aligned}$$

即 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin k\cdot\sin k^2\right)\right|$ 有界. 又 $\frac{1}{n}$ 递减到 0, 我们由 A-D 判别法18.5得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$ 收敛.

例题 18.61

1. 对 $\alpha\in\mathbb{N},\beta\geqslant 0$, 证明: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^{\beta}\left(\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right)^{\alpha}$ 绝对收敛.
2. 证明: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\cos 1\cdot\cos^2 2\cdot\cdots\cdot\cos^n n\right)$ 绝对收敛.
3. 对 $\alpha\in\mathbb{N},\beta\geqslant 0$, 证明: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^{\beta}\left(\sin 1\sin 2\cdots\sin n\right)^{\alpha}$ 绝对收敛.
4. 证明: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sin 1\cdot\sin^2 2\cdot\cdots\cdot\sin^n n\right)$ 绝对收敛.

证明

1. 由均值不等式有

$$\begin{aligned}\left|\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right|^2&\leqslant\left(\frac{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}{n}\right)^n\\&=\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[1+\cos\left(2k\right)\right]}{2n}\right)^n=\left(\frac{n+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(2k\right)}{2n}\right)^n\\&\overset{\text{相似18.4的计算}}{=}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin n\cos\left(n+1\right)}{2n\sin 1}\right)^n.\end{aligned}$$

   又当 n 充分大有

$$\frac{1}{2}+\frac{\sin n\cos\left(n+1\right)}{2n\sin 1}<\frac{2}{3},$$

   因此

$$\left|\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\Rightarrow\sum_{n\text{充分大}}^{\infty}\left|n^{\beta}\left(\cos 1\cos 2\cdots\cos n\right)^{\alpha}\right|\text{绝对收敛}.$$

2. 注意到由第 1 问有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\cos 1\cdot\cos^2 2\cdot\cdots\cdot\cos^n n\right|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left|\cos 1\cdot\cos 2\cdot\cdots\cdot\cos n\right|<\infty,$$

   故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\cos 1\cdot\cos^2 2\cdot\cdots\cdot\cos^n n\right)$ 绝对收敛.
3. 由均值不等式有

$$\begin{aligned}\left|\sin 1\cdot\sin 2\cdot\cdots\cdot\sin n\right|^2&\leqslant\left(\frac{\left|\sin 1\right|^2+\left|\sin 2\right|^2+\cdots+\left|\sin n\right|^2}{n}\right)^n\\&=\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(1-\cos 2k\right)\right]}{2n}\right)^n=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin n\cdot\cos\left(n+1\right)}{n\sin 1}\right)^n.\end{aligned}$$

当 n 充分大有

$$\frac{1}{2}-\frac{\sin n\cdot\cos(n+1)}{n\sin 1}<\frac{2}{3}.$$

因此

$$|\sin 1\sin 2\cdots\sin n|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\Rightarrow\sum_{n\text{充分大}}^{\infty}\left|n^{\beta}\left(\sin 1\sin 2\cdots\sin n\right)^{\alpha}\right|\text{绝对收敛}.$$

4. 利用 3 问类似 2 问可得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sin 1\cdot\sin^2 2\cdot\cdots\cdot\sin^n n\right)$ 绝对收敛.

例题 18.62 若 $a\in(0,1]$, 求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\ln n}{n^a}x^n\text{收敛域}.$$

证明 当 $|x|<1$ 时, 显然收敛, 当 $x=1$ 时, 注意到

$$\sum_{k=\lfloor e^{2\pi n}\rfloor+1}^{\left\lfloor e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right\rfloor}\frac{\cos\ln k}{k^a}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=\lfloor e^{2\pi n}\rfloor+1}^{\left\lfloor e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right\rfloor}\frac{1}{k}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left\lfloor e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right\rfloor-\left\lfloor e^{2\pi n}\right\rfloor}{\left\lfloor e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right\rfloor}.$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=\lfloor e^{2\pi n}\rfloor+1}^{\left\lfloor e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right\rfloor}\frac{\cos\ln k}{k^a}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\right).$$

故此时级数发散, 当 $x=-1$ 时, 显然只需要考虑前 $2n$ 项部分和, 注意到

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\cos\ln k}{k^a}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos\ln(2k)}{(2k)^a}-\frac{\cos\ln(2k-1)}{(2k-1)^a}\right],$$

以及由拉格朗日中值定理有

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos\ln(2k)}{(2k)^a}-\frac{\cos\ln(2k-1)}{(2k-1)^a}\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{-\sin\ln\theta_k-a\cos\ln\theta_k}{\theta_k^{a+1}}\right|,\theta_k\in(2k-1,2k).$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos\ln(2k)}{(2k)^a}-\frac{\cos\ln(2k-1)}{(2k-1)^a}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a+1}{(2k-1)^{a+1}}<+\infty,$$

从而原级数收敛, 故收敛域是 $[-1,1)$.

例题 18.63 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛性.

证明 **Case 1** 当 $\alpha=0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

Case 2 当 $\alpha>0$, 我们由洛必达法则有

$$\lim_{y\to0^+}\frac{1}{y^{\alpha+1}}\int_0^{y}\frac{\sin x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{y\to0^+}\left[\frac{1}{(\alpha+1)y^{\alpha}}\frac{\sin y^{\alpha}}{1+y}\right]=\frac{1}{\alpha+1}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x\sim\frac{1}{(\alpha+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}<\infty.$$

Case 3 当 $\alpha<0$,

$$-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n^{-\alpha}}^{\infty}\frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}+y}\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^{-\alpha}}{n^{-\alpha+1}+n^{-\alpha}}-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n^{-\alpha}}^{\infty}\frac{\cos y\left(\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)y^{-\frac{1}{\alpha}}+1\right)}{\left(y^{1-\frac{1}{\alpha}}+y\right)^2}\mathrm{d}y.$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n^{-\alpha}}{n^{-\alpha+1}+n^{-\alpha}}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}<\infty.$$

并有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{n^{-\alpha}}^{\infty}\frac{\cos y\cdot\left(\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)y^{-\frac{1}{\alpha}}+1\right)}{\left(y^{1-\frac{1}{\alpha}}+y\right)^{2}}\mathrm{d}y\right|&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n^{-\alpha}}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)y^{-\frac{1}{\alpha}}}{\left(y^{1-\frac{1}{\alpha}}+y\right)^{2}}\mathrm{d}y+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n^{-\alpha}}^{\infty}\frac{1}{\left(y^{1-\frac{1}{\alpha}}+y\right)^{2}}\mathrm{d}y\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n^{-\alpha}}^{\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{y^{2-\frac{1}{\alpha}}}+\frac{1}{y^{2-\frac{2}{\alpha}}}\right)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{\alpha-2}\frac{1}{n^{2-\alpha}})<\infty,\end{aligned}$$

故级数收敛当且仅当 $\alpha\neq0$.

例题 18.64 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

证明 由级数加括号的理解18.20得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}.$$

我们来证明上式右边级数符合莱布尼兹判别法.

首先

$$0\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\ln\frac{k}{k-1}=\lim_{t\to\infty}\ln\frac{(t+1)^2-1}{t^2-1}=0,$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}=0.$$

然后对 $t\in\mathbb{N},t\geqslant3$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=(t+1)^2}^{(t+2)^2-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=0}^{2t}\frac{1}{k+t^2}-\sum_{k=0}^{2t+2}\frac{1}{k+t^2+2t+1}\\&=\sum_{k=0}^{2t}\left(\frac{1}{k+t^2}-\frac{1}{k+t^2+2t+1}\right)-\frac{1}{t^2+4t+2}-\frac{1}{t^2+4t+3}\\&=\sum_{k=0}^{2t}\frac{2t+1}{\left(k+t^2\right)\left(k+t^2+2t+1\right)}-\frac{2t^2+8t+5}{\left(t^2+4t+2\right)\left(t^2+4t+3\right)}\\&\geqslant\frac{(2t+1)^2}{\left(2t+t^2\right)\left(2t+t^2+2t+1\right)}-\frac{2t^2+8t+5}{\left(t^2+4t+2\right)\left(t^2+4t+3\right)}\\&\geqslant\frac{(2t+1)^2}{\left(t^2+4t+2\right)\left(t^2+4t+3\right)}-\frac{2t^2+8t+5}{\left(t^2+4t+2\right)\left(t^2+4t+3\right)}\\&=\frac{2t^2-4t-4}{\left(t^2+4t+2\right)\left(t^2+4t+3\right)}\geqslant\frac{6t-4t-4}{\left(t^2+4t+2\right)\left(t^2+4t+3\right)}>0,\end{aligned}$$

这就证明了 $\sum\limits_{k=t^2}^{(t+1)^2-1}\frac{1}{k}$ 单调递减!.

现在由莱布尼兹判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛.

18.4 傅立叶级数

我们首先需要熟悉傅立叶级数的现代形式:

定义 18.2

设 f 是周期 1 的的可积函数, 则定义 f 的傅立叶系数为

$$\hat{f}(m)=\int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi imx}dx, m\in\mathbb{Z}.$$

f 的傅立叶级数为

$$f(x)\sim\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(m)\,e^{2\pi imx}. \tag{18.23}$$

♣

注定义(18.2)中的傅立叶级数(18.23)不意味着收敛到 f 或者收敛.

我们来看 Dirichlet 核和 Fejér 核, 他是核心问题.

定义 18.3

对每个 $N\in\mathbb{N}_0$,

1. 我们称

$$D_N(x)=\sum_{|m|\leqslant N}e^{2\pi imx}=\frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}. \tag{18.24}$$

为 Dirichlet 核.

2. 我们称

$$\begin{aligned}F_N(x)&=\frac{1}{N+1}\left[D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_N(x)\right]\\&=\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{2\pi ijx}\\&=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2\end{aligned} \tag{18.25}$$

为 Fejér 核.

♣

注注意哟, 定义18.3中的等式关系都是等比数列求和和欧拉公式, 二重求和换序的应用. 我们略去证明[9]

下面我们在高数框架下给出 Dirichlet 核和 Fejér 核, 为了形式上的统一, 我们定义

定义 18.4

对每个 $n\in\mathbb{N}_0$,

1. 我们称

$$D_0(x)=1, D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, n=1,2,\cdots. \tag{18.26}$$

为 Dirichlet 核.

2. 我们称

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x)=1+\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx=\frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 \tag{18.27}$$

为 Fejér 核.

♣

证明 证明的关键是如下结论

结论 [三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法] 三角函数复合等差数列时, 部分和计算方法可以通过欧拉公式之后用等比[10]数列求和公式或者乘 $\frac{\sin\frac{公差}{2}}{\sin\frac{公差}{2}}$ 之后对分子和差化积得到.

[9]但是我们会在大家更熟悉的课本的傅立叶形式下推导.

[10]有时候可能是所谓的差比数列, 即等差乘以等比.

1. 我们有

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2}\cos kx}{\sin\frac{x}{2}}=1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}+k\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$
$$=1+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

我们证明了式(18.26).

2. 我们有

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x)=\frac{1}{n+1}\left(1+\sum_{j=1}^{n}\left(1+2\sum_{k=1}^{j}\cos kx\right)\right)=\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\cos kx\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\cos kx\right)=\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx\right)$$
$$=1+\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cos kx,$$

以及

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}D_j(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x}{\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2(n+1)}\sum_{j=0}^{n}\frac{\cos(j+1)x-\cos jx}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\frac{\cos(n+1)x-1}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}.$$

这就证明了式(18.27).

下面我们利用 Dirichlet 核和 Fejér 核来给出傅立叶级数部分和的积分表达式.

定理 18.21 (傅立叶部分和积分表达式)

设 f 是周期 2π 的可积函数, 其傅立叶系数为 a_n,b_n. 记 $S_0(x)=\sigma_0(x)=\frac{a_0}{2}$ 以及

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x),n=1,2,\cdots.$$

则我们有

Dirichlet:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt,n=0,1,\cdots.$$

Fejér

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)F_n(t)\,dt=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt,n=0,1,\cdots.$$

♡

笔记 根据经验, 取平均性质会更好一些, 因此 Fejér 是一个好核[11]而 Dirichlet 核性质就相当糟糕, 在后面的证明中我们将充分感受到这一点.

[11]"Good kernal"

证明 当 $n=0$, 定理18.21显然成立. 当 $n>0$, 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\cos kxdy+\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ky\sin kxdy\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos k(y-x)\,dy\right)\\
&\overset{\text{注意周期}2\pi}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\,dy+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\,2\cos kydy\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right)dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\,D_n(y)\,dy.
\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}S_j(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\,D_j(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\,F_n(y)\,dy.$$

这就证明了定理18.21.

定理 18.22 (帕赛瓦尔恒等式)

设 $f,g\in L^2[-\pi,\pi]$, 则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx=\frac{a_0a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_na_n'+b_nb_n'\right). \tag{18.28}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right). \tag{18.29}$$

♡

注非数学只需要记忆结论, 证明不是初等的.

证明 由 Hilbert 空间理论, 本定理即

$$\left(L^2[-\pi,\pi],(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx\right)$$

中证明

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\right\}$$

是完备正交基. 于是问题就划归到了逼近方法13.6.

例题 18.65 设 $f,g\in C(\mathbb{R})$ 且都是周期 2π 函数. 若 f,g 的所有傅立叶系数一致, 证明 $f=g$.

证明 记 $h=f-g$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0,\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

由第二逼近定理13.15, 我们知道存在三角多项式 $p_m,m\in\mathbb{N}$ 使得在 $[-\pi,\pi]$ 一致的有 $\lim\limits_{m\to\infty}p_m=h$. 故

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^2\,\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\,p_m(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

这就证明了 $h(x)\equiv 0$, 因此我们有 $f=g$.

我们接下来给出各种核的应用:

例题 18.66fejer 核的逼近性质

1. 设 f 在 $x=0$ 连续且在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 可积, 则

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}f(x)\,\mathrm{d}x=f(0). \tag{18.30}$$

2. ♠ 设 f 周期 1 且在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上 $p\geqslant 1$ 次绝对可积, 证明

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Ny)}{\sin^2(\pi y)}f(x-y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|^p\mathrm{d}y=0. \tag{18.31}$$

证明

1. 对 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x+\int_{|\delta|<|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|\cdot\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x+\int_{|\delta|<|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)\,|f(x)-f(0)|}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|\cdot\int_{|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{N}\int_{|\delta|<|x|\leqslant\frac{1}{2}}\frac{|f(x)-f(0)|}{\sin^2(\pi x)}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

   让 $N\to+\infty$, 我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Nx)}{\sin^2(\pi x)}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|\cdot 1=\sup_{|x|\leqslant\delta}|f(x)-f(0)|.$$

   由 δ 的任意性我们有(18.30)成立.

2. 设 $\|g\|_x\triangleq\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, 由闵可夫斯基不等式16.3我们有

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Ny)}{\sin^2(\pi y)}f(x-y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right\|_y&=\left\|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Ny)}{\sin^2(\pi y)}\left[f(x-y)-f(x)\right]\mathrm{d}y\right\|_y\\
&\leqslant\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\pi Ny)}{\sin^2(\pi y)}\|f(x-y)-f(x)\|_x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

   由积分的绝对连续性13.48, 我们有 $\|f(x-y)-f(x)\|_x$ 在 $y=0$ 连续. 又由闵可夫斯基不等式16.3, 我们有

$$\|f(x-y)-f(x)\|_x\leqslant\|f(x-y)\|_x+\|f(x)\|_x=2\|f(x)\|_x<\infty,$$

   于是 $\|f(x-y)-f(x)\|_x$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上可积. 现在由第一问我们就知道(18.31)成立.

来看 2025 重庆大学数学分析考研压轴题.

例题 18.67 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 函数且在 $[-\pi,\pi]$ 黎曼可积, 设

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

若 $x_0\in(-\pi,\pi)$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 的唯一间断点[12]且存在下述极限

$$A=\lim_{x\to x_0^+}f(x),B=\lim_{x\to x_0^-}f(x),\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-A}{x-x_0},\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-B}{x-x_0}.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)}{2}.$$

[12] f 在 $\pm\pi$ 也是连续的.

证明 首先

$$\begin{aligned}S_n(x_0)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x_0+t)-A-B+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{A+B}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

然后因为

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-A-B+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\text{存在},$$

由黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x_0+t)-A-B+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0.$$

因为

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{\frac{t}{2}}\right)\text{存在},$$

继续由黎曼引理9.2得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right|=0.\end{aligned}$$

现在我们知道

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)&=\frac{A+B}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{A+B}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{A+B}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{A+B}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{A+B}{2}.\end{aligned}$$

18.5 级数证明

例题 18.68 设 $a_n>-1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

笔记 注意无穷积发散的定义是其收敛于 0 或者作为数列极限发散.

证明 若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 则

$$\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$$

收敛. 于是由比较判别法和

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2},\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n-\ln(1+a_n)\right]<\infty$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$. 反之若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}O\left(a_n^2\right)$$

也收敛, 这就证明了 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

例题 18.69Lobachevsky 判别法 设 a_n 递减到 0, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n2^{-n}$ 同敛散, 这里

$$b_n\triangleq\max\left\{k:a_k\geqslant 2^{-n}\right\}.$$

证明 注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛等价于 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{k\in\{n:2^{-m}\leqslant a_n<2^{-m+1}\}}a_k$ 收敛. 定义 $b_0=0$, 一方面

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k\in\{n:2^{-m}\leqslant a_n<2^{-m+1}\}}a_k&\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\sum_{k\in\{n:2^{-m}\leqslant a_n<2^{-m+1}\}}1\\&\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\left(b_m-b_{m-1}\right)=\lim_{M\to+\infty}\sum_{m=1}^{M}2^{-m}\left(b_m-b_{m-1}\right)\\&=\lim_{M\to+\infty}\left[\sum_{m=1}^{M}\left(2^{-m}b_m-2^{-(m-1)}b_{m-1}\right)+\sum_{m=1}^{M}\left(2^{-(m-1)}-2^{-m}\right)b_{m-1}\right]\\&\geqslant\lim_{M\to+\infty}\sum_{m=1}^{M}\left(2^{-(m-1)}-2^{-m}\right)b_{m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}b_{m-1},\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k\in\{n:2^{-m}\leqslant a_n<2^{-m+1}\}}a_k&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m+1}\sum_{k\in\{n:2^{-m}\leqslant a_n<2^{-m+1}\}}1\\&\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m+1}\sum_{k\in\{n:2^{-m}\leqslant a_n\}}1=\sum_{m=1}^{\infty}b_m2^{-m+1}.\end{aligned}$$

这就完成了证明.

Kummer 链还有一个余留的结果:

例题 18.70 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是存在 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty),\delta>0,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geqslant\delta,\forall n\geqslant N.\tag{18.32}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散的充要条件是存在 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty),N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=+\infty,b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\leqslant 0,\forall n\geqslant N.\tag{18.33}$$

证明 两个结果的充分性在定理18.11中已经证明过了, 只需证明必要性.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 取 $b_n=\frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k,n\in\mathbb{N},\delta=1,N=1$, 则有

$$b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k-\sum_{k=n+2}^{\infty}a_k=a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 取 $b_n=\frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N},N=1$, 则

$$b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n+1}a_k=-a_{n+1}\leqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由例题18.44知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=+\infty$. 我们完成了证明.

例题 18.71 设 $\phi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^k},x>0$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi(n)$ 收敛的充要条件是 $a_0=a_1=0$.

证明 注意到由幂级数和函数光滑知 $\phi\in C^{\infty}(0,+\infty)$, 从而由 Taylor 公式 Peano 余项知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi(n)$ 收敛的充要条件是 $a_0=a_1=0$.

来看 hardy 不等式在实际考试中的版本.

例题 18.72 设 $a_n>0,n=1,2,\cdots,m$, 证明:

1. 我们有
$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n}.$$
2. 我们有
$$\sum_{n=1}^{m}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant e\sum_{n=1}^{m}a_n.$$

笔记 本题的 1 在谢惠民上有一个递增重排然后分奇偶来放缩的方法, 但是其只能得到右边系数为 4, 并不是好的方法. 我们主要掌握最佳系数 2 的证明方法, 但应试角度不需要去思考为什么 2 是最佳的.

证明

1. 由 Cauchy 不等式得
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
于是
$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}=4\sum_{k=1}^{m}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}$$
$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{m}\frac{k^2}{a_k}\cdot\frac{1}{2k^2}=2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k},$$
这里用到了
$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{2k^2},k=1,2,\cdots. \tag{18.34}$$
我们来证明(18.34), 事实上, 设
$$x_k\triangleq\frac{1}{2k^2}-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2},$$
我们有
$$x_k-x_{k+1}=\frac{1}{2k^2(k+1)^2}\geqslant 0,\lim_{k\to\infty}x_k=0,$$
从而得到了(18.34).
2. 利用
$$e\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N},$$
我们有
$$e^n\geqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{(n+1)^n}{n!}\Rightarrow\sqrt[n]{n!}\geqslant\frac{n+1}{e}.$$

于是由均值不等式有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sum_{n=1}^{m}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(ka_k)}\leqslant\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n\sqrt[n]{n!}}\right)\\&\leqslant e\sum_{n=1}^{m}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n(n+1)}=e\sum_{k=1}^{m}ka_k\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)}\\&=e\sum_{k=1}^{m}ka_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{m+1}\right)\leqslant e\sum_{k=1}^{m}a_k.\end{aligned}$$

Hardy 不等式有如下更一般的结果.

例题 18.73Hardy 不等式 ♠ 设 $p>1$ 或 $p<0$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}a_k^p,\forall n\in\mathbb{N}.$$

并且系数是最佳的.

注 $p=+\infty$ 时退化为 Carleman 不等式, 即考虑

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots+a_k^{\frac{1}{p}}}{k}\right)^p\leqslant\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}a_k=e\sum_{k=1}^{n}a_k$$

并利用例题8.35就有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant e\sum_{k=1}^{n}a_k.\tag{18.35}$$

笔记 考试中 $p=+\infty,p=-1$ 是重要的.

证明 我们取 $a_k=\frac{1}{\sqrt[p]{k}},k=1,2,\cdots$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^p}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p}{a_n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{k}}\right)^p}{n^{p-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{k}}}{n^{1-\frac{1}{p}}}\right)^p=\left(\int_0^1\frac{1}{\sqrt[p]{x}}dx\right)^p=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p,\end{aligned}$$

注意到倒数第二个等号形式上是定积分定义, 但其实是广义积分, 在有单调性的时候其依然符合定积分定义的极限是经典习题, 留作读者思考. 现在我们就说明了系数不可改进.

记 $S_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 且 $S_0=0$, 那么对每个 $j\in\mathbb{N},p>1$, 我们有

$$\begin{aligned}S_j^p-\frac{p}{p-1}S_j^{p-1}a_j&=S_j^p-\frac{p}{p-1}S_j^{p-1}\left(jS_j-(j-1)S_{j-1}\right)\\&=S_j^p\left(1-\frac{jp}{p-1}\right)+\frac{(j-1)p}{p-1}S_j^{p-1}S_{j-1}\\&\leqslant S_j^p\left(1-\frac{jp}{p-1}\right)+\frac{(j-1)p}{p-1}\left(\frac{p-1}{p}S_j^p+\frac{1}{p}S_{j-1}^p\right)\\&=-\frac{j}{p-1}S_j^p+\frac{(j-1)}{p-1}S_{j-1}^p,\end{aligned}$$

这里不等号来自 Young 不等式16.1. 于是

$$\sum_{j=1}^{n}\left(S_j^p-\frac{p}{p-1}S_j^{p-1}a_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{j}{p-1}S_j^p+\frac{(j-1)}{p-1}S_{j-1}^p\right)=-\frac{n}{p-1}S_n^p\leqslant0.$$

因此利用离散的 Holder 不等式就有

$$\sum_{j=1}^{n} S_j^p \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{j=1}^{n} S_j^{p-1} a_j \leqslant \frac{p}{p-1} \left(\sum_{j=1}^{n} S_j^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=1}^{n} a_k^p, \forall n \in \mathbb{N}.$$

若 $p < 0$, 此时上述使用的 Holder 不等式和 Young 不等式16.1都反向, 于是完全照抄 (只需将不等号反向) 有

$$\sum_{j=1}^{n} S_j^p \geqslant \frac{p}{p-1} \sum_{j=1}^{n} S_j^{p-1} a_j \geqslant \frac{p}{p-1} \left(\sum_{j=1}^{n} S_j^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

这仍然是

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=1}^{n} a_k^p, \forall n \in \mathbb{N}.$$

这样就完成了证明.

例题 18.74 设递增数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$. 证明, 对 $k \in \mathbb{N}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n}$ 收敛.

注周民强第二册 185-186 页本结果的必要性证明不完善, 并不能总是找到 N 使得 $a_n \geqslant n, \forall n \geqslant N$.

证明 必要性: 注意到

$$0 \leqslant \frac{n}{a_n} \sim \frac{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{a_n} = \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}^{n} \frac{1}{a_n} \leqslant \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}^{n} \frac{1}{a_k}, n \to \infty.$$

我们由 cauchy 收敛准则有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{a_n} = 0.$$

于是若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n} < \infty$, 取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $n < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n} < \infty.$$

充分性:

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$ 和 a_n 递增, 我们知道 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$. 于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n} < \infty$, 则对充分大的 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{\ln^k a_n}{a_n}$ 在 $N, N+1, \cdots$ 递减. 于是我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n} &= \sum_{a_n \leqslant n^2} \frac{\ln^k a_n}{a_n} + \sum_{a_n > n^2} \frac{\ln^k a_n}{a_n} \leqslant \sum_{a_n \leqslant n^2} \frac{\ln^k n^2}{a_n} + \sum_{a_n > n^2} \frac{\ln^k n^2}{n^2} \\ &= 2^k \sum_{a_n \leqslant n^2} \frac{\ln^k n}{a_n} + \sum_{a_n > n^2} \frac{\ln^k n^2}{n^2} \leqslant 2^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n^2}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

例题 18.75 一个需要记的不等式例子 证明对任何 $x \geqslant 0$, 都有

$$0 \leqslant e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x}{n} \left(e^x - 1 \right), \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{18.36}$$

证明 注意到由 Taylor 级数, 我们知道

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

这就证明了式(18.36). 此外, 考虑 $f(x)=e^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\frac{x}{n}(e^x-1)$, 于是

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{(x+1)}{n}e^x+\frac{1}{n}. \\ f''(x) &= e^x-\sum_{k=2}^{n}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}-\frac{(x+2)}{n}e^x. \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x-1-\frac{(x+n)}{n}e^x. \end{aligned}$$

注意到

$$f^{(n)}(x)=e^x-1-\frac{(x+n)}{n}e^x=-\frac{xe^x}{n}-1<0, f^{(j)}(0)=-\frac{j}{n}\leqslant 0, j=0,2,3,\cdots,n, f'(0)=0.$$

于是显然推出对每个 $j\in\mathbb{N}$, 都有 $f^{(j)}(x)$ 单调递减, 于是 $f(x)\leqslant f(0)=0, \forall x\geqslant 0$, 这就证明了不等式(18.36).

作为例18.75的应用, 我们来简单证明一个竞赛真题.

练习 18.1 竞赛真题 设大于 1 的 $n\in\mathbb{N}$ 且 $F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt$. 证明方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根.

证明 利用不等式(18.36), 我们知道

$$F\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt<\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-t}\cdot e^t dt=\frac{n}{2},$$

以及

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt \\ &> \int_0^n e^{-t}\cdot\left(e^t-\frac{t}{n}(e^t-1)\right)dt \\ &> \int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)dt=\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

由零点定理即证明了 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根.

例题 18.76 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty), 0<p<1, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty, r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}<\frac{1}{1-p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^{1-p},$$

且右端系数 $\frac{1}{1-p}$ 是最佳的.

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n^p}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{r_{n+1}}^{r_n}\frac{1}{x^p}dx=\int_0^{r_1}x^{-p}dx=\frac{r_1^{1-p}}{1-p}.$$

为了等号可以成立, 我们需要

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{r_{n+1}}^{r_n}\left(\frac{1}{x^p}-\frac{1}{r_n^p}\right)dx=0.$$

这暗示 $r_n=r_{n+1}, n\in\mathbb{N}$, 这是不可能的, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}<\frac{1}{1-p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^{1-p}.$$

待定 $k>0$, 取 $a_n=\frac{1}{n^k}-\frac{1}{(n+1)^k}, r_n=\frac{1}{n^k}$, 则运用不等式

$$1-(1+x)^{-k}-kx\geqslant-\frac{k^2+k}{2}x^2, x>0, k>0,$$

知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{kp}\left(\frac{1}{n^k}-\frac{1}{(n+1)^k}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{kp-k}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-k}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{kp-k}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-k}-\frac{k}{n}\right)+k\sum_{n=1}^{\infty}n^{kp-k-1}\\&\geqslant-\frac{k^2+k}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{kp-k-2}+k\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{kp-k-1}dx\\&\geqslant-\frac{k^2+k}{2}-\frac{k^2+k}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}x^{kp-k-2}dx+k\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{kp-k-1}dx\\&=-\frac{k^2+k}{2}-\frac{k^2+k}{2}\int_1^{\infty}x^{kp-k-2}dx+k\int_1^{\infty}x^{kp-k-1}dx\\&=-\frac{k^2+k}{2}+\frac{k^2+k}{2\left(kp-k-1\right)}+\frac{1}{1-p}.\end{aligned}$$

我们令 $k\to0^+$ 即知所证不等式是最精确的.

例题 18.77 设 $n\in\mathbb{N}$, 证明

$$0<\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,C_n^k}{\sqrt{k+1}}<1.$$

证明 注意到

$$\Gamma\left(s\right)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\overset{x=yt}{=}y^s\int_0^{\infty}e^{-yt}t^{s-1}dt\Rightarrow\frac{1}{y^s}=\frac{1}{\Gamma\left(s\right)}\int_0^{\infty}e^{-yt}t^{s-1}dt,s>0.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,C_n^k}{\sqrt{k+1}}&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^k\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}e^{-(k+1)t}t^{\frac{1}{2}-1}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^ke^{-(k+1)t}t^{-\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(1-e^{-t}\right)^n\,e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt>0.\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,C_n^k}{\sqrt{k+1}}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(1-e^{-t}\right)^n\,e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt\\&<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 18.78 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ 有上界且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$. 若还有

$$x_{n+1}-x_n\geqslant-b_n,n=1,2,\cdots. \tag{18.37}$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x_{n+1}-x_n\right|$ 收敛.

笔记 想法就是 $x_{k+1}>x_k$ 的项用 x_n 上界控制, $x_k\leqslant x_{k+1}$ 的项用不等式(18.37)控制.

证明 注意到[13]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k| &= \sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k-2\min\left\{0,x_{k+1}-x_k\right\}\right)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)+2\sum_{k=1}^{n}b_k \leqslant x_{n+1}-x_1+2\sum_{k=1}^{\infty}b_k,\end{aligned}$$

由 x_n 有上界得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛.

例题 18.79 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛. 反之正确吗?

证明 由均值不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+a_{n+1}\right)<\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛.

反之不正确, 考虑

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{k}, & n=2k\\ \frac{1}{2^k}, & n=2k-1\end{cases},k=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_{2n}a_{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n2^{n+1}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n2^n}}<\infty.$$

例题 18.80 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 存在 $\alpha,\beta>0$, 使得

$$a_n-a_{n+1}\geqslant\beta a_n^{2-\alpha},n\in\mathbb{N},$$

证明

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n=O\left(a_N^{\alpha}\right)\left(N\to\infty\right).$$

证明 因为 a_n 递减, 所以假设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 0,$$

那么

$$0=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\geqslant\lim_{n\to\infty}\beta a_n^{2-\alpha}=\beta a^{2-\alpha},$$

因此 $2-\alpha>0,a=0$.

现在

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{x^{2-\alpha}}dx\geqslant\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{1}{a_n^{2-\alpha}}dx=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^{2-\alpha}}\geqslant\beta,$$

这给出了

$$\int_0^{a_1}\frac{1}{x^{2-\alpha}}dx\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\beta=+\infty,$$

即 $0<\alpha\leqslant 1$, 利用

$$a_n\leqslant\frac{1}{\beta}a_n^{\alpha-1}\left(a_n-a_{n+1}\right)\leqslant\frac{1}{\beta}\int_{a_{n+1}}^{a_n}x^{\alpha-1}dx,$$

我们有

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n\leqslant\frac{1}{\beta}\int_0^{a_N}x^{\alpha-1}dx=\frac{a_N^{\alpha}}{\alpha\beta}.$$

[13]涉及的等式和不等式可以分类讨论去 min 来验证.

这样就完成了证明.

例题 18.81 设 $0<a_n,b_n<\frac{\pi}{2},n\in\mathbb{N}$, 若

$$\cos a_n-a_n=\cos b_n,n\in\mathbb{N},\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty, \tag{18.38}$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 都收敛.

证明 由(18.38)知

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arccos\left(\cos a_n-a_n\right)}{\sqrt{a_n}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\arccos\left(\cos x-x\right)}{\sqrt{x}}\overset{\text{洛必达}}{=}\sqrt{2}.$$

另外一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n\sqrt{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{\arccos\left(\cos a_n-a_n\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\arccos\left(\cos x-x\right)}\overset{\text{洛必达}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n},\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

同收敛, 这就完成了证明.

例题 18.82 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 且 a_n 单调递减, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散.

证明 **Method 1**

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}<\infty$, 注意到不等式

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\min\left\{a_n,\frac{1}{n}\right\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}<\infty,$$

上述新的级数的通项递减, 由命题18.1, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\min\left\{na_n,1\right\}=\lim_{n\to\infty}n\min\left\{a_n,\frac{1}{n}\right\}=0,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{1+na_n}}{a_n}=1$, 由比较判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}=\infty$, 矛盾!

我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散.

Method 2

我们注意到 $\frac{a_n}{1+na_n}=\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n}$ 也是单调递减的, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}<\infty$. 由命题18.1推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{1+na_n}=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{1+na_n}}{a_n}=1$, 由比较判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}=\infty$, 矛盾!

我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散.

例题 18.83Ermakor 判别法 设 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ 单调递减, 连续可微函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$ 单调递增且满足 $\varphi(x)>x$, 证明:

极限版:

1. 若 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛;
2. 若 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散.

不等式版本:

1. 若存在 $0<q<1$ 使得对某个 $X>0$ 有
$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}\leqslant q,\forall x\geqslant X, \tag{18.39}$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛;
2. 若存在某个 $X>0$ 有
$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}\geqslant 1,\forall x\geqslant X, \tag{18.40}$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散.

笔记 和之前讨论的判别法一样, 只需证明不等式版本即可. 此外要求不高的同学直接把上下极限改为极限.

证明

1. 若存在 $0<q<1$ 使得对某个 $X>0$ 有(18.39)成立, 则考虑递推 $x_1=X,x_{n+1}=\varphi(x_n),n=1,2,\cdots$, 则 $x_{n+1}>x_n$ 且 $\{x_n\}$ 无不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 现在由(18.39)得
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}\varphi'(x)f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x\leqslant q\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
于是
$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\varphi(x_n)}^{\varphi(x_{n+1})}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant q\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$
现在
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant q^{n-1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x,\forall n\in\mathbb{N}.$$
注意到
$$\int_X^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty,$$
由积分判别法18.7可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\sim\int_X^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是收敛的.
2. 若存在某个 $X>0$ 有(18.40)成立. 同样的考虑递推 $x_1=X,x_{n+1}=\varphi(x_n),n=1,2,\cdots$, 则 $x_{n+1}>x_n$ 且 $\{x_n\}$ 无不动点, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 现在由(18.40)得
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}\varphi'(x)f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x,$$
即
$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x,\forall n\in\mathbb{N}.$$
故
$$\int_X^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty.$$
由积分判别法18.7可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\sim\int_X^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是发散的.

我们完成了证明.

例题 18.84 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 记 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径.

证明 因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 所以 a_n 收敛半径不超过 1. 又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}}\right)=1,$$

我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ 收敛半径为 1. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n < \infty, \forall x \in (0,1),$$

我们知道幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 1.

例题 18.85 设 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$ 满足

- $a_n - a_{n+1}$ 递减;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = +\infty.$$

证明 首先因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = 0.$$

由 $a_n - a_{n+1}$ 递减, 我们知道

$$a_n - a_{n+1} \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

注意到

$$a_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^2 - a_{k+1}^2 \right) \leqslant (a_n - a_{n+1}) \sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1}),$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1})} = +\infty.$$

我们完成了证明.

例题 18.86 设 $\varphi \in C(\mathbb{R})$ 满足周期 1 且 $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 则对 $f \in C^1[0,1]$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x \right)^2$ 收敛.

笔记 你看到 C^1 就知道应该分部积分改善阶来提供收敛性.

证明 考虑周期 1 函数

$$g(x) \triangleq \int_0^x \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

记

$$M \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}, y\in[0,1]} |g(x) f(y)|.$$

对 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x \right)^2 &= \left(\frac{1}{n} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}g(nx) \right)^2 \\ &= \left(0 - \frac{1}{n} \int_0^1 g(nx) f'(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \frac{M}{n^2}, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} < \infty.$$

例题 18.87 已知数列 $0<a_n<b_n, n=1,2,\cdots$, 是否存在这样的 $\{a_n\},\{b_n\}$ 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛.

证明 存在, 比如考虑

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}}, b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}+\frac{1}{n}, n\geqslant 1,$$

则

$$0<a_n<b_n, n=1,2,\cdots.$$

由交错级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right),\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 $\frac{x}{1-x}=x+x^2+O\left(x^3\right), x\longrightarrow 0$, 因此我们由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$ 收敛和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散.

例题 18.88 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2n-1}=1$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n^2}\leqslant 2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^2}<1.$$

证明 令

$$S_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x_k}{2k-1},$$

则

$$S_1=1, S_n\geqslant S_{n+1}, \lim_{n\to\infty}S_n=0.$$

因此

$$x_n=(2n-1)\left(S_n-S_{n+1}\right), n=1,2,\cdots.$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n^2}&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\frac{x_k}{n^2}\\&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\frac{(2k-1)(S_k-S_{k+1})}{n^2}\\&\leqslant 4\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\frac{(2k-1)(S_k-S_{k+1})}{(2n+1)(2n-1)}\\&=2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2m+1}\right)(2k-1)(S_k-S_{k+1})\\&=2(1-S_{m+1})-2\sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2m+1}(S_k-S_{k+1})\\&\leqslant 2.\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(S_n-S_{n+1})}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}S_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}S_{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}S_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}S_{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{(n+1)^2}-\frac{2n-1}{n^2}\right]S_{n+1}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{(n+1)^2}-\frac{2n-1}{n^2}\right]S_{n+1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2n^2}{n^2(n+1)^2}S_{n+1}<1.\end{aligned}$$

例题 18.89 设 $\{a_n\}\subset(0,+\infty),p\geqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^pa_k}$ 收敛.

笔记 借助估阶思想, 我们可以无需关心一些复杂的系数, 从而简化计算过程.

证明 下面不同地方 $C,C'>0$ 表示不同的数字. 首先由 Cauchy 不等式有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}k^pa_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^2k^pa_k}{a_k}}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{2+p}{2}}\right)^2\sim C\left(n^{2+\frac{p}{2}}\right)^2=Cn^{4+p},n\to\infty,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}k^pa_k\geqslant C\frac{n^{4+p}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^pa_k}&\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+1}}{\frac{n^{4+p}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}}}=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}}{n^3}=C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3}\\&\leqslant C'+C\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=C'+C\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{a_k}\int_{k-1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\\&=C'+C\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{a_k}\frac{1}{(k-1)^2}\leqslant C'+C\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k}<\infty,\end{aligned}$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^pa_k}$ 收敛.

例题 18.90 设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k,n=1,2,\cdots.$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|S_k-T_k|^2<\infty$, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$.

证明 由 $T_n=S_n-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|S_k-T_k|^2<\infty$ 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right)^2}{n(n+1)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|^2<\infty. \tag{18.41}$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}\right)\\&=a_1-\frac{\sum\limits_{k=1}^{m+1}ka_k}{m+1}+\sum_{n=1}^{m}a_{n+1}=S_{m+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{m+1}ka_k}{m+1}.\end{aligned}$$

由(18.41)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k}{n+1}=0$. 由均值不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n(n+1)}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right)^2}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)<\infty,$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n(n+1)}<\infty.$$

例题 18.91 设 $\{a_n\},\{b_n\}\subset(0,+\infty)$ 满足

$$b_{n+1}-b_n\geqslant\delta>0,n=1,2,\cdots. \tag{18.42}$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}}{b_nb_{n+1}}<\infty.$$

证明 首先由(18.42)有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=b_1+\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=+\infty.$$

由均值不等式有

$$\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_j.$$

现在

$$\frac{n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}}{b_nb_{n+1}}\leqslant\frac{1}{b_nb_{n+1}}\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\leqslant\frac{b_{n+1}-b_n}{\delta b_nb_{n+1}}\sum_{j=1}^{n}a_jb_j=\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\sum_{j=1}^{n}a_jb_j,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_n)}}{b_nb_{n+1}}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right]$$
$$=\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\left[a_jb_j\sum_{n=j}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\left[a_jb_j\frac{1}{b_j}\right]=\frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}a_j<\infty.$$

例题 18.92 设 $\{\lambda_n\},\{a_n\}\subset\mathbb{R}$.

1. 如果对任何收敛于 0 的数列 $\{\lambda_n\}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.
2. 设 $p>1$, 如果对任何 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p<\infty$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q<\infty$, 这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

笔记 此类问题有泛函分析背景和泛函分析中的共鸣定理的做法, 但在考试之中主要依赖例题18.44的结论证明.

证明

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$, 记 $S_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|,n=1,2,\cdots$. 由例题18.44知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n}=+\infty$. 取 $\lambda_n=\frac{\mathrm{sgn}a_n}{S_n}$ 有
$$|\lambda_n|\leqslant\left|\frac{1}{S_n}\right|\to0,n\to\infty.$$
但是由题目假设有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n}<\infty$, 这就是一个矛盾! 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.
2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q=+\infty$, 记 $S_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^q,n=1,2,\cdots$. 由例题18.44知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^q}{S_n}=+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\mathrm{sgn}a_n|\cdot\frac{|a_n|^{q-1}}{S_n}\right)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{S_n^p}\text{收敛}.$$
取 $\lambda_n=\mathrm{sgn}a_n\cdot\frac{|a_n|^{q-1}}{S_n}$, 我们由条件有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^q}{S_n}<\infty$, 这就是一个矛盾! 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q<\infty$.

例题 18.93 设 $\{a_n\}\subset[0,+\infty)$ 且递减. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 发散, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

证明 单调有界准则和交错级数判别法表明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. 注意到
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)=\frac{1}{1+a}<1,$$
由根值判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

例题 18.94 设 a_n 递减到 0 且 $b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\geqslant0,n=1,2,\cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛并计算值.

证明 直接计算有
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}nb_n&=\sum_{n=1}^{m}n(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{m}n(a_n-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_{n+2}))\\&=\sum_{n=1}^{m}n(a_n-a_{n+1})-\sum_{n=1}^{m}(n+1)(a_{n+1}-a_{n+2})\\&\quad+\sum_{n=1}^{m}(n+1)(a_{n+1}-a_{n+2})-\sum_{n=1}^{m}n(a_{n+1}-a_{n+2})\\&=a_1-a_2-(m+1)(a_{m+1}-a_{m+2})+\sum_{n=1}^{m}(a_{n+1}-a_{n+2})\\&=a_1-a_2-(m+1)(a_{m+1}-a_{m+2})+a_2-a_{m+2}.\end{aligned}$$
注意到 $b_n\geqslant0$ 知 a_n-a_{n+1} 递减, a_n 递减到 0 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛. 由命题18.1知 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n+1})=0$. 现

在我们就知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n = a_1$.

例题 18.95♠ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

笔记 注意上下极限可以等价定义为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} a_k,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} a_k.$$

当极限存在时, 上下极限当然和极限值相等.

作为本题的运用, 我们可以证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\sqrt{k}$ 无界. 事实上如果 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\sqrt{k}$ 有界. 注意到 $\lim\limits_{k\to\infty}\sin\sqrt{k}\neq 0$, 故由本题结论知

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sin\sqrt{k+1}-\sin\sqrt{k}\right)\neq 0.$$

但是由拉格朗日中值定理得

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sin\sqrt{k+1}-\sin\sqrt{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left[\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\cos\alpha_k\right]=0,$$

这就是一个矛盾!

证明 设 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right|\leqslant M$, 由数列内插13.5有

$$\sup_{k\geqslant n}|a_k|\leqslant 2\sqrt{M\sup_{k\geqslant n}|a_{k+1}-a_k|}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}|a_k|=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

例题 18.96 设 $f\in\mathbb{R}[x]$ 是只有正实根的多项式, 求 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 在 $x=0$ 幂级数展开和收敛域.

证明 设

$$f(x)=a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n},\ a\neq 0, 0<x_1<x_2<\cdots<x_n, k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{k_1}{x-x_1}+\frac{k_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{k_n}{x-x_n}.$$

于是我们有 Taylor 展开

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x-x_j}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j}\frac{1}{1-\frac{x}{x_j}}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_j}\right)^m=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}\right)x^m.$$

现在

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{x_1}\sqrt[m]{\frac{k_1}{x_1}}\sqrt[m]{1+\frac{x_1}{k_1}\sum_{j=2}^{n}\frac{k_jx_1^m}{x_j^{m+1}}}\right)=\frac{1}{x_1},$$

所以收敛半径为 x_1.

由

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{x_j^{m+1}}\right)x_1^m=\frac{k_1}{x_1}\neq 0$$

知幂级数在 $x=\pm x_1$ 发散, 这就说明了幂级数收敛域为 $(-x_1,x_1)$.

例题 18.97 设 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n}, a_n>0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

证明 由 Taylor 公式我们有

$$b_n=\ln\left(e^{a_n}-a_n\right)=a_n+\ln\left(1-a_ne^{-a_n}\right)=a_n+O\left(a_ne^{-a_n}\right),n\to\infty.$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty, \sum_{n=1}^{\infty}\left|O\left(a_n e^{-a_n}\right)\right|<\infty,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

来看数学类竞赛真题:

例题 18.98 设 $a_n>0, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|<\infty$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n \ln n}+b_n, n=1,2, \cdots, \tag{18.43}$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 由(18.43)有

$$\frac{a_2}{a_{n+1}}=\prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leqslant \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k \ln k}+b_k\right), n=2,3, \cdots .$$

现在运用例题8.6和8.52得

$$\begin{aligned} a_{n+1} & \geqslant a_2 e^{-\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k \ln k}+b_k\right)} \geqslant a_2 e^{-\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k \ln k}+b_k\right)} \\ & \geqslant a_2 e^{-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left|b_k\right|} e^{-\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k \ln k}\right)}=a_2 e^{-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left|b_k\right|} e^{-\ln n-\ln \ln n+O(1)} \\ & =a_2 e^{-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left|b_k\right|} \frac{e^{O(1)}}{n \ln n} . \end{aligned}$$

现在由积分判别法18.7我们知道

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \sim \int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d} x=+\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例题 18.99 设 $\left\{a_n\right\}$ 是递减正数列且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$, 证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1. \tag{18.44}$$

证明 由递减, 显然有

$$\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \leqslant \frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1,$$

以及

$$\begin{aligned} & \frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \geqslant \frac{a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \\ & =1-\frac{a_1-a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \geqslant 1-\frac{a_1}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} \\ & \geqslant 1-\frac{a_1}{\frac{1}{2}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2n}\right)} . \end{aligned}$$

由夹逼准则和

$$\lim_{n \to \infty}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{2n}\right)=+\infty$$

就证明了(18.44).

来看一个经典结论, 没有提前学过的的情况下难以自己想到:

例题 18.100 设 a_n 递减到 0, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明 显然 $a_n \geqslant 0$ 且

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n} k a_k-\sum_{k=1}^{n}(k+1) a_{k+1}+\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1} a_k-(n+1) a_{n+1}. \tag{18.45}$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 由命题18.1知 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 在(18.45)两边让 $n\to\infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛且

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(a_k-a_{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k. \tag{18.46}$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛. 对任何 $m\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant m$, 我们运用 a_n 递减有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+\sum_{k=m+1}^{n}a_k\geqslant\sum_{k=1}^{m}a_k+(n-m)\,a_n.$$

又由(18.45)知存在 $A>0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k-na_n\leqslant A,\forall n\in\mathbb{N}. \tag{18.47}$$

现在运用(18.47)得

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\leqslant ma_n+A,\forall n\geqslant m.$$

让 $n\to\infty$ 得 $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\leqslant A$. 由 m 任意性得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且此时仍有(18.46)成立. 我们完成了证明.

十四届大学生数学竞赛无人挨边的非数学类竞赛压轴真题.

例题 18.101 设 a_n 递减到 0, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 证明

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln f\left(x\right)}{x^2}dx\text{发散},$$

这里 $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^nx^n$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^n}=0$ 知,$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 显然 f 是递增的且 $f(x)>0,\forall x>0$. 待定递增的 b_n, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f\left(x\right)}{x^2}dx&\geqslant\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f\left(b_n\right)}{x^2}dx=\ln f\left(b_n\right)\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{1}{x^2}dx\\&=\ln f\left(b_n\right)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]\geqslant\ln(a_n^nb_n^n)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right]=n\ln(a_nb_n)\left[\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right].\end{aligned}$$

只需要 $a_nb_n=c>1$, 就知道

$$\int_{b_1}^{b_{n+1}}\frac{\ln f\left(x\right)}{x^2}dx=\sum_{n=1}^{n}\int_{b_n}^{b_{n+1}}\frac{\ln f\left(x\right)}{x^2}dx\geqslant\ln c\cdot\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right).$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}=\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\infty,$$

由例题18.100知

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\infty.$$

于是我们证明了 $\int_1^{\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}dx$ 发散.

例题 18.102 设 $S_1=0,2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n},u_n>0,n\in\mathbb{N}$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.

证明 首先

$$2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}\geqslant S_n+\sqrt{S_n^2}=2S_n\Rightarrow S_n\text{递增}.$$

又

$$\left(2S_{n+1}-S_n\right)^2=S_n^2+u_n\Rightarrow\frac{u_n}{4}=S_{n+1}^2-S_nS_{n+1}\leqslant S_{n+1}^2-S_n^2,$$

从而当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散必有

$$\lim_{n\to\infty} S_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(S_{n+1}^2 - S_n^2\right) + S_1^2$$

发散.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散, 则取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $S_N \geqslant 1$. 现在

$$\frac{u_n}{4} = S_{n+1}^2 - S_n S_{n+1} \geqslant S_{n+1} - S_n.$$

两边求和得

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{u_n}{4} \geqslant \sum_{n=N}^{\infty} \left(S_{n+1} - S_n\right) = +\infty,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 我们完成了证明.

例题 18.103

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $a_n > 0$, 则存在 A_n 使得 $a_n = o\left(A_n\right)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $a_n > 0$, 则存在 A_n 使得 $A_n = o\left(a_n\right)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 发散.

笔记 1 问即没有收敛得最慢的级数, 2 即没有发散的最慢的级数.

证明

1. 考虑

$$A_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}, n = 1, 2, \cdots,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}.$$

现在

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n\left(\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}\right) = 0,\end{aligned}$$

即 $a_n = o\left(A_n\right)$.

2. 考虑

$$A_1 = 1, A_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}, n = 2, 3, \cdots,$$

则

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{a_1} = +\infty.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}-\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}a_k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}a_k}\right)}{\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}a_k}\right)=+\infty,$$

即 $A_n=o(a_n)$.

例题 18.104 证明:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p,\forall p\in(1,+\infty).$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\geqslant p,\forall p\in(0,1).$$

笔记 注意强行凑裂项和熟悉[14]Bernouli 不等式.

证明

1. 求导可证
$$\sqrt[p]{1-x}\leqslant 1-\frac{x}{p},\forall x\in[0,1],p\geqslant 1.$$
于是对 $n\in\mathbb{N},p\geqslant 1$, 我们有
$$\sqrt[p]{n}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=1-\sqrt[p]{1-\frac{1}{n+1}}\geqslant 1-\left(1-\frac{1}{p(n+1)}\right)=\frac{1}{p(n+1)},$$
于是
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p.$$

2. 当 $p\in(0,1)$, 上述证明不等式符号恰好相反, 因此就完成了证明.

例题 18.105 对 $t\in\mathbb{R}$, 证明:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n^n}=\int_0^1\frac{1}{x^{tx}}\mathrm{d}x.$$

证明 我们有
$$\int_0^1\frac{1}{x^{tx}}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-tx\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tx\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\int_0^1(x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{x=e^{-y}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-(n+1)y}y^n\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!\,(n+1)^{n+1}}\int_0^{\infty}e^{-y}y^n\mathrm{d}y$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n^n}.$$

例题 18.106 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}<\infty$, 证明
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2p_n}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}<\infty.$$

[14]不用记忆, 需要的时候求导现证.

注 本题的想法就是把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2p_n}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}$ 放大为阶更小的量, 从而其收敛.

证明 记

$$S_0\triangleq 0, S_n\triangleq\sum_{k=1}^{n}p_k, n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2p_n}{\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)^2}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2\left(S_n-S_{n-1}\right)}{S_n^2}\\ &\overset{\text{常见和化积分操作}}{\leqslant}\frac{1}{S_1}+\sum_{n=2}^{N}n^2\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{S_1}+\sum_{n=2}^{N}n^2\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)\\ &\overset{\text{强行裂项想法}}{=}\frac{1}{S_1}+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n^2}{S_{n-1}}-\frac{(n+1)^2}{S_n}\right)+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{(n+1)^2-n^2}{S_n}\right)\\ &\leqslant\frac{1}{S_1}+\frac{4}{S_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{S_n}\overset{\text{很随意的操作,只要阶不变即可.}}{\leqslant}\frac{5}{S_1}+3\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\\ &=\frac{5}{S_1}+3\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n\sqrt{p_n}}{S_n}\frac{1}{\sqrt{p_n}}\right)\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant}\frac{5}{S_1}+3\sqrt{\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2p_n}{S_n^2}\cdot\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{p_n}}\\ &\overset{\text{抓住主要部分,不重要的部分直接写成某个常数}}{\leqslant}c_1+c_2\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2p_n}{\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)^2}},\end{aligned}$$

即得到不等式

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2p_n}{\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)^2}\leqslant c_1+c_2\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2p_n}{\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)^2}},\forall N\geqslant 2.$$

左边是 1 次的, 右边是开方的, 阶不同, 这只能有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2p_n}{\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)^2}<\infty.$$

例题 18.107 设实数列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$u_n=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2, n=0,1,2,\cdots,\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛},$$

证明:$u_n=0, n=0,1,2,\cdots.$

证明 显然 u_n 非负. 注意到

$$u_n-u_{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2-\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+1+k}^2=u_{n+1}^2\geqslant 0, n=0,1,2,\cdots.$$

取 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty}u_{k+1}<1$. 然后我们有

$$u_{n_0}=\sum_{k=n_0}^{\infty}u_{k+1}^2\leqslant u_{n_0+1}\sum_{k=n_0}^{\infty}u_{k+1}\leqslant u_{n_0+1}\leqslant u_{n_0},$$

即只能有 $u_{n_0+1}=0$. u_n 递减给出 $u_n=0,\forall n\geqslant n_0+1$. 递推 $u_n=u_{n+1}+u_{n+1}^2$ 给出 $u_n=0,\forall 1\leqslant n<n_0+1$, 因此 $u_n=0, n=0,1,2,\cdots.$

例题 18.108 设实数列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$u_n=\sum_{k=1}^{\infty}\tan^2u_{n+k}, n=0,1,2,\cdots,\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛},$$

证明:$u_n=0, n=0,1,2,\cdots.$

证明 显然 u_n 非负. 由 $\tan x \sim x, x \to 0^+$ 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan u_n < \infty$.

注意到

$$u_n - u_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \tan^2 u_{n+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \tan^2 u_{n+1+k} = \tan^2 u_{n+1} \geqslant 0, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \tan u_{k+1} < \inf_{u \in (0,1]} \frac{u}{\tan u}, u_{n_0+1} < 1.$$

然后我们有

$$\begin{aligned} u_{n_0+1} + \tan^2 u_{n_0+1} = u_{n_0} &= \sum_{k=n_0}^{\infty} \tan^2 u_{k+1} \\ &\leqslant \tan u_{n_0+1} \sum_{k=n_0}^{\infty} \tan u_{k+1} = \tan^2 u_{n_0+1} + \tan u_{n_0+1} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \tan u_{k+1} \\ &\leqslant \tan^2 u_{n_0+1} + \tan u_{n_0+1} \inf_{u \in (0,1]} \frac{u}{\tan u} \end{aligned}$$

即只能有 $u_{n_0+1} = 0$.

u_n 递减给出 $u_n = 0, \forall n \geqslant n_0 + 1$. 递推 $u_n = u_{n+1} + \tan^2 u_{n+1}$ 给出 $u_n = 0, \forall 1 \leqslant n < n_0 + 1$, 因此 $u_n = 0, n = 0, 1, 2, \cdots$.

例题 18.109 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n+k} = 0$.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n$ 收敛, 所以对每一个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+k) a_{n+k}$ 收敛. 于是我们写

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+k} (n+k) a_{n+k} \right].$$

注意到 $\frac{n}{n+k}$ 关于 n 单调有界, 因此由级数的 A-D 判别法我们知道对每一个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n+k}$ 收敛.

由 Abel 变换8.2, 我们有

$$\sum_{n=k+1}^{m} a_n = \sum_{n=k+1}^{m} \frac{n a_n}{n} = \sum_{n=k+1}^{m-1} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{j=k+1}^{n} j a_j \right] + \frac{\sum\limits_{j=k+1}^{m} j a_j}{m}.$$

让 $m \to \infty$, 上式右边第二项因为 Stolz 定理9.1知极限为 0, 所以

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{j=k+1}^{n} j a_j \right].$$

现在

$$\left| k \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \right| \leqslant \sup_{n \geqslant k+1} \left| \sum_{j=k+1}^{n} j a_j \right| \cdot k \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leqslant \sup_{n \geqslant k+1} \left| \sum_{j=k+1}^{n} j a_j \right|.$$

由 Cauchy 收敛准则得 $\lim\limits_{k \to \infty} \left(k \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n \right) = 0$, 即在

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n+k} \right) &= \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k) a_n \right) \\ &= \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n a_n \right) - \lim_{k \to \infty} \left(k \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \right) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

18.6 特殊多项式 ♠

我们来看一类生成函数研究其性质的习题, 综合考察了积分学, 级数, 微分学的方法.

定理 18.23

设 $\alpha,\beta>-1$, 定义[a]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\triangleq\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k,n=0,1,2,\cdots.$$

则

1. 对 $n\in\mathbb{N}_0$, 我们有
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right].\tag{18.48}$$
2. 对 $n,m\in\mathbb{N}_0$, 我们有
$$\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,\mathrm{d}x=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\delta_{nm}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.\tag{18.49}$$
3. 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们有
$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),\tag{18.50}$$
以及
$$(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}=\frac{n[(\alpha-\beta)-(2n+\alpha+\beta)x]}{2n+\alpha+\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).\tag{18.51}$$
4. 对 $n\in\mathbb{N}_0$, 我们有 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 是方程
$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0\tag{18.52}$$
的解.
5. 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们有
$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)=(A_nx+B_n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-C_nP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),\tag{18.53}$$
这里
$$\begin{aligned}A_n&\triangleq\frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)},\\B_n&\triangleq\frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)},\\C_n&\triangleq\frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$
6. 对 $t,x\in(-1,1)$, 我们有
$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n=\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xt+t^2}\left(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^\alpha\left(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^\beta}.\tag{18.54}$$

[a]注意组合数理解为广义二项式系数.

♡

笔记 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 本质上是 $[-1,1]$ 考虑测度 $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,\mathrm{d}x$ 的完备正交多项式.

注 直接计算可得
$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1,P_1^{(\alpha,\beta)}(x)=\tfrac{\alpha+\beta+2}{2}x+\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

容易看到 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 一定是 n 次多项式且首系数为
$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}\right)=\frac{C_{2n+\alpha+\beta}^{n}}{2^n},\tag{18.55}$$

这里用到了 Vandermonde 恒等式23.21.

显然

$$\operatorname{span}\left\{P_0^{(\alpha,\beta)}(x),P_1^{(\alpha,\beta)}(x),\cdots,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}=\operatorname{span}\left\{1,x,\cdots,x^n\right\},\forall n\in\mathbb{N}_0, \tag{18.56}$$

以及

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=C_{n+\alpha}^n,P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n C_{n+\beta}^n,\forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{18.57}$$

注 本题中 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 叫做雅可比多项式, 当 $\alpha=\beta=0$ 时也叫勒让德多项式. $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ 时叫第一类切比雪夫多项式. $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 时叫第二类切比雪夫多项式. $\alpha=\beta$ 时叫盖根鲍尔多项式. 实际考试中会出这些多项式为背景的题目. 此外注意不同教科书对这些多项式的取名可能会相差一个常数倍数.

证明

1. 对 $n\in\mathbb{N}_0$, 由乘积求导公式得

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]\\
=&\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\sum_{k=0}^n C_n^k\left((1-x)^{\alpha+n}\right)^{(k)}\left((1+x)^{\beta+n}\right)^{(n-k)}\\
=&\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^n(-1)^k C_{n+\alpha}^k C_{n+\beta}^{n-k}(1-x)^{n-k}(1+x)^k\\
=&\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n(-1)^k C_{n+\alpha}^k C_{n+\beta}^{n-k}(x-1)^{n-k}(1+x)^k\\
=&P_n^{(\alpha,\beta)}(x),
\end{aligned}$$

即得(18.48)成立.

2. 不妨设自然数 $n\geqslant m\geqslant 0$, 由(18.48)得

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^1\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathrm{d}x\\
\overset{\text{分部积分}}{=}&\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\frac{d^n P_m^{(\alpha,\beta)}}{dx^n}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,\mathrm{d}x=0,\forall n>m,$$

以及当 $n=m$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{C_{2n+\alpha+\beta}^n}{4^n}\int_{-1}^1(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,\mathrm{d}x\\
\overset{x=2t-1}{=}&\frac{C_{2n+\alpha+\beta}^n}{4^n}\cdot 2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_0^1 t^{\beta+n}(1-t)^{\alpha+n}\,\mathrm{d}t\\
=&\frac{C_{2n+\alpha+\beta}^n}{4^n}\cdot 2^{\alpha+\beta+2n+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}\\
=&\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},
\end{aligned}$$

这就证明了(18.54).

3. 由 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 定义, 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们计算得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}\frac{d\left((x-1)^{n-k}\right)}{dx}(x+1)^k+\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}(x-1)^{n-k}\frac{d\left((x+1)^k\right)}{dx}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}(n-k)(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k+\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}kC_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^{k-1}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}(n-k)(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{n+\alpha}^{k+1}C_{n+\beta}^{n-k-1}(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(n-k)C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-k}+(k+1)C_{n+\alpha}^{k+1}C_{n+\beta}^{n-k-1}\right](x-1)^{n-k-1}(x+1)^k\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(n-k)\cdot C_{n+\alpha}^{k}\cdot C_{n+\beta}^{n-k}\cdot\frac{n+\alpha+\beta+1}{\beta+k+1}\right](x-1)^{n-k-1}(x+1)^k\\
&=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[C_{n+\alpha}^{k}C_{n+\beta}^{n-1-k}(x-1)^{n-k-1}(x+1)^k\right]\\
&=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),
\end{aligned}$$

即(18.50)得证.

当 $n=1$ 显然有(18.51). 当 $n\geqslant 2$, 我们来证明对所有不超过 $n-2$ 次多项式 r 都有

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left[(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}+nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]r(x)(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}\right\}\mathrm{d}x=0. \tag{18.58}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left\{\left[(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}+nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]r(x)(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}\right\}\mathrm{d}x\\
=&\int_{-1}^{1}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\left(r(x)(x-1)^{\alpha+1}(x+1)^{\beta+1}\right)'\right]\mathrm{d}x\\
&+\int_{-1}^{1}\left[nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x)r(x)(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}\right]\mathrm{d}x\\
=&-\int_{-1}^{1}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{\left(r(x)(x-1)^{\alpha+1}(x+1)^{\beta+1}\right)'}{(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}}(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}\right]\mathrm{d}x\\
&+\int_{-1}^{1}\left[nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x)r(x)(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

注意到

$$nxr(x)-\frac{\left(r(x)(x-1)^{\alpha+1}(x+1)^{\beta+1}\right)'}{(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}}$$

是不超过 $n-1$ 次多项式, (18.56)以及(18.49)得(18.58).

注意到 $(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}+nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的首系数为 0, 即为 n 次多项式. 于是由(18.56)得

$$(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}+nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{n}A_kP_k^{(\alpha,\beta)}(x),A_k\in\mathbb{R},k=0,1,2,\cdots,n.$$

由(18.58), 对 $0 \leqslant k \leqslant n-2$ 得

$$\begin{aligned} & A_k \int_{-1}^{1}\left|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right|^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x \\ =& \int_{-1}^{1}\sum_{m=0}^{n} A_m P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x \\ =& 0, \end{aligned}$$

即 $A_k = 0$.

现在在

$$(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} + nxP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = A_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + A_{n-1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

中代入 $x \pm 1$ 并由(18.57)得

$$A_n = \frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}, B_n = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}.$$

因此我们证明了(18.51).

4. 对 $n \in \mathbb{N}$, 由(18.48)得

$$P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right].$$

再结合(18.50)得

$$(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = \frac{(-1)^{n-1}(n+\alpha+\beta+1)}{2^n(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right].$$

上式两边对 x 求导再由(18.48)得

$$\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}\right)' = -n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

注意到

$$\begin{aligned} & \frac{\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}\right)'}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \\ =& \left(1-x^2\right)\frac{d^2P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}, \end{aligned}$$

这就证明了 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 是方程(18.52)的解.

5. 对 $n \in \mathbb{N}$, 首先 $\deg\left(xP_n^{(\alpha,\beta)}\right) = n+1$. 于是由(18.56)我们有

$$xP_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=0}^{n+1} S_k P_k^{(\alpha,\beta)}, S_k \in \mathbb{R}, k = 0,1,2,\cdots,n+1.$$

对任意自然数 $0 \leqslant m \leqslant n-2$, 我们利用(18.49)有

$$\begin{aligned} 0 =& \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, xP_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x \\ =& \int_{-1}^{1} xP_n^{(\alpha,\beta)}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x \\ =& \sum_{k=0}^{n+1} S_k \int_{-1}^{1} P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x \\ =& S_m \int_{-1}^{1}\left|P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\right|^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

即 $S_m = 0$.

现在我们对比

$$xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = S_{n+1}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + S_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) + S_{n-1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{18.59}$$

两边的首系数并利用(18.55)得

$$S_{n+1}=\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}.$$

再在(18.59)中令 $x=\pm1$ 并利用(18.57), 解线性方程组得

$$S_n=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}, S_{n-1}=\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

现在变形即得(18.53).

6. 对 $x\in(-1,1)$, 注意到(18.54)的和函数分母在 $t\in(-1,1)$ 没有零点, 所以(18.54)的幂级数在 $t\in(-1,1)$ 收敛.

记

$$g(x)\triangleq(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \phi(x)\triangleq\frac{x^2-1}{2},$$

于是(18.48)可以写为

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{n!g(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[g(x)\phi^n(x)\right].$$

现在记

$$S(x,t)\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n=\frac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[g(x)\phi^n(x)\right].$$

我们知道函数

$$y(x,t)\triangleq\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}, & t\neq0\\ x, & t=0\end{cases}$$

满足

$$y(x,t)=x+t\frac{y^2(x,t)-1}{2}=x+t\phi(y(x,t)).$$

为方便我们简记 $y=y(x,t)$. 归纳证明

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[g(y)y_x\right]=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[g(y)y_x\phi^n(y)\right],\forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{18.60}$$

当 $n=0$ 显然有(18.60)成立. 假设 $n=k\in\mathbb{N}_0$ 时有(18.60)成立, 那么对于 $n=k+1$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}\left[g(y)y_x\right]&=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[g(y)y_x\right]\right\}=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[g(y)y_x\phi^k(y)\right]\right\}\\&=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[g(y)y_x\phi^{k+1}(y)\right]\right\}=\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}\left[g(y)y_x\phi^{k+1}(y)\right],\end{aligned}$$

这里第三个等号来自[15]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[g(y)y_x\phi^k(y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[g(y)y_x\phi^{k+1}(y)\right]. \tag{18.61}$$

于是由数学归纳法即得(18.60).

现在设

$$U(x,t)\triangleq g(x,t)y_x(x,t).$$

由式(18.60)可得

$$\frac{\partial^n U}{\partial t^n}|_{t=0}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[U(x,0)\phi^n(x)\right]=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[g(x)\phi^n(x)\right],\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

[15]式(18.61)可以两边直接求导并代入隐函数求导公式导出的

$$y_x=\frac{1}{1-t\phi'(y)}, y_t=\phi(y)y_x$$

得到.

现在我们知道

$$S(x,t)=\frac{U(x,t)}{g(x)}=\frac{g(y(x,t))\,y_x(x,t)}{g(x)}=\frac{g(y(x,t))}{g(x)(1-ty(x,t))}$$
$$=\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xt+t^2}\left(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{\alpha}\left(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{\beta}},$$

这就证明了(18.54).

定理 18.24

定义

$$H_n(x)=\sqrt{n!}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k}{2^k k!(n-2k)!}x^{n-2k},n=0,1,2,\cdots.$$

则

1. 对 $n\in\mathbb{N}_0$ 得
$$H_n(x)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{2^n n!}{\alpha^n}}P_n^{(\alpha,\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right)\right].$$
2. 对 $n\in\mathbb{N}_0$ 得
$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

♡

笔记 H_n 本质上是 $\mathbb{R}$ 考虑测度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 的完备标准正交多项式.

注 直接计算可得

$$H_0(x)=1,H_1(x)=x,H_2(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{2}},H_3(x)=\frac{x^3-3x}{\sqrt{6}}.$$

容易看到 H_n 一定是 n 次多项式且首系数为 $\frac{1}{\sqrt{n!}}$.

显然

$$\operatorname{span}\{H_0(x),H_1(x),\cdots,H_n(x)\}=\operatorname{span}\{1,x,\cdots,x^n\},\forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{18.62}$$

证明

1.

第 18 章 练习

1. (1.) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^{p-1}}<\infty,p>1$, 证明
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p p_n}{S_n^p}<\infty,$$
这里 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$.
2. (2.) 设 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n(n+1)}.$$
3. (3.) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递减的正数列并且满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=+\infty$, 并证明
$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}=+\infty.$$
4. (4.) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\ln\frac{1}{a_n}}{\ln(1+n)}$ 收敛.

5. (5.) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\arcsin\frac{n}{n+1}$ 条件收敛.
6. (6.,*) 已知微分方程 $y'=1+x\left(y-y''\right)$ 的解 y 满足 $y\left(0\right)=\frac{\pi}{2},y'\left(0\right)=1,y''\left(0\right)=\frac{\pi}{4}$, 计算 $\int_0^1 y\left(x\right)dx$.
7. (7.) 设 $a_n=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}},n\in\mathbb{N}$, 定义 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}S_n^p},p>0$ 是否绝对收敛和条件收敛.
8. (8.) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.
9. (9.) 设 $\lambda_n,n\in\mathbb{N}$ 是一个正数列, 并记 $\Lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$. 假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$ 收敛且 $a_n\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}$, 证明
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}}\leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n.$$
10. (10.) 计算
$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2\left(n+1\right)}\right].$$
11. (11.) 设 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}$.
12. (12.) 计算 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k2^n+1}$.
13. (13.) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\in\mathbb{R}.$$
求 L.
14. (14.) 计算
$$\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\left[(2n)!!\right]^2}\mathrm{d}x.$$
15. (15.) 证明:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{4^n}=\theta^2-\sin^2\theta,\forall\theta\in\mathbb{R}.\tag{18.63}$$
16. (16.) 设 $b_n>0,n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n}$ 发散.
17. (17.) 当 $|q|<1$, 计算 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+q^n\right)\left(1-q^{2n-1}\right)$.
18. (18.) 证明:
$$\sum_{m_n=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}x=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n-1}}{(1+x)^n}\mathrm{d}x.$$

笔记 当 $n=2,3,$ 是经典习题, 我们可以算出积分值为
$$\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2},-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\frac{5}{8}-\ln 2.$$

19. (19.) 记
$$T=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3:a,b,c\text{可以构成某个三角形的三边长}\right\}.$$
求下述级数的值
$$\sum_{(a,b,c)\in T}\frac{2^a}{3^b5^c}.$$
20. (20.) 设
$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!},w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

证明:

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=1.$$

21. (21.) 设对 $n\in\mathbb{N}$ 都有

$$u_n=\lim_{m\to\infty}\left(u_{n+1}^2+u_{n+2}^2+\cdots+u_{n+m}^2\right). \tag{18.64}$$

证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right)$ 存在, 则 $u_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

22. (22.) 计算 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{2^{\max\{i,j\}}}{3^i5^j}$.

23. (23.) 设 $a_1=x\in\mathbb{R},a_ne^{a_{n+1}}=e^{a_n}-1,n\in\mathbb{N}$, 证明:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}a_n=e^x.$$

24. (24.) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散且 $a_n>0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

25. (25.) 设 $a_0=1,a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=\frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n},n\in\mathbb{N}$, 证明: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛并求值.

26. (26.) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2+k^2}$ 收敛性.

27. (27.♠) 对 $\alpha>0$, 判断 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}$ 级数收敛性和绝对收敛性.

28. (28.) 设 $\{a_n\}$ 递减到 0 的数列, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛.

29. (29.) 设 $u_n(x)=\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)},n\in\mathbb{N},x\geqslant1$, 计算 $I_n=\int_1^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x$ 并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n=$ 收敛.

30. (30.) 设 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+1}$ 发散.

31. (31.) 设 $a_n>0$ 且单调递减到 0, $S_k=\sum\limits_{j=1}^{k}a_j$, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{S_k}(a_k-a_{k+1})$ 同敛散.

32. (32.) 设 $a_n>0$ 且单调递减到 0, $S_k=\sum\limits_{j=1}^{k}a_j$, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{S_{k+1}}-\frac{k+1}{S_k}\right)a_{k+1}$ 同敛散.

33. (33.) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{7}\right)^n\right]$ 收敛性.

34. (34.) 设 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=3a_n-a_{n-1},n=2,3,\cdots$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$ 和判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛性.

35. (35.) 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{1+n^2},F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

证明:

$$\frac{7}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{1}{2}.$$

36. (36.) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}\text{也收敛.}$$

37. (37.) 设 $a_n\in(0,1)$ 满足 a_n 严格递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. 对 $p>0$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_n)^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_{n+1})^p}$$

收敛性.

38. (38.) 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

39. (39.) 设 $a_n=\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n$, 讨论 $\sum a_n$ 收敛性.
40. (40.) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 收敛域.
41. (41.) 求所有 α,β 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha m^\beta}$ 收敛.
42. (42.) 设

$$a_n>0,n=1,2,\cdots,\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1,A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{A_n}-e^{A_{n-1}}}{A_n^e-A_{n-1}^e}\right).$$

43. (43.) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n$ 收敛性.
44. (44.) 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\right].$$

45. (45.♠) 计算

$$\sum_{\pi\in S_n}\frac{\sigma(\pi)}{v(\pi)+1},$$

这里 σ 表示置换的符号, 即偶置换为 1, 奇置换为 -1. v 表示置换的不动点个数.
46. (46.) 设

$$x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{\sqrt{n}},n=1,2,\cdots.$$

求 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的范围使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.
47. (47.) 计算 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2^k}}{1+x^{2^k}},|x|<1.$
48. (48.) 设 $\theta\in\mathbb{R}$, 求 $f(x)=\frac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开.
49. (49.) 设 $a_n\downarrow 0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\ln n\}$ 有界且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\ln n$ 收敛.
50. (50.) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2x\sin^2(2x)\cdots\sin^2(2^nx)$ 收敛性.
51. (51.) 设

$$a_0=1,a_{n+1}=a_ne^{\frac{1}{a_n}},n=1,2,\cdots,$$

判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n-n}{n(\ln n)^p}$ 收敛性.
52. (52.) 设

$$\left(1+x^2\right)f'(x)+(1+x)f(x)=1,x>0.$$

若 $g'(x)=f(x),g(0)=f(0)=0$, 证明:

$$\frac{1}{4}<\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)<1.$$

53. (53.) 证明:

$$\frac{1}{2ne}<\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{ne},n\geqslant 2.$$

54. (54.) 计算 $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\sum\limits_{k=2}^{n-2}\frac{1}{kC_n^k}$.

55. (55.) 设 $\alpha>0$, 正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+a_k^{1-k^{-\alpha}}\right)$$

存在.

56. (56.) 设 $n\in\mathbb{N}$, 证明:$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{\sin((2i+1)x)}{(2i+1)^n}$ 的最大值为 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^n}$, 最小值为 $-\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^n}$.

57. (57.) 对实数 $\sigma>0$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}$ 收敛. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\sigma}=0.$$

58. (58.) 对收敛正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, C_N 定义为 $a_n\geqslant\frac{1}{n}, 1\leqslant n\leqslant N$ 的 n 的个数. 证明: $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{C_N}{N}=0$.

59. (59.) 设 $a_n>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 单调递减. 证明: 如果 $\int_{2026}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf(S_n)$ 收敛. 并判断如果 $\int_{2026}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf(S_n)$ 发散吗?

60. (60.) 设 $p>0$, 证明:

$$\frac{1}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}<1.$$

61. (61.) 证明:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

62. (62.) 求最大的 α 使得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{k}}-\frac{2}{3}\sin\frac{1}{k}\right)>(n+1)^{\alpha},\forall n\in\mathbb{N}.$$

63. (63.) 设 $\{t_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ 满足对任何收敛到某个 $a\in\mathbb{C}$ 的数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ 都有

$$x_n\triangleq\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k,n\in\mathbb{N}$$

也收敛到 a. 证明:

(a). $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0,\forall k\in\mathbb{N}$;

(b). 存在 $M>0$ 使得对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_{nk}|\leqslant M;$$

(c). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1$.

64. (64.) 设

$$a_1=2,a_2=8,a_n=4a_{n-1}-a_{n-2},n=3,4,\cdots.$$

计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{a_n^2}=\frac{\pi}{12}.$$

第 19 章 数学类级数

内容提要

- 基本结论 19.1
- 实解析函数 19.2
- 三角级数 19.3
- 黎曼重排定理的技巧 19.4
- 函数项级数一致收敛性判断专题 19.5
- 级数技巧训练题集 19.6

19.1 基本结论

19.1.1 幂级数阶和系数阶的关系

定理 19.1 (幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶)

1. 设
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-1,1)$$
满足
$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0, \lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty, \tag{19.1}$$
则
$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0. \tag{19.2}$$
2. 设
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-1,1)$$
满足
$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty, \tag{19.3}$$
则
$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{19.4}$$
3. 设
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in\mathbb{R}$$
满足
$$b_n>0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \tag{19.5}$$
则
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{19.6}$$

♡

注一句话总结本结论: 即幂级数系数的阶蕴含幂级数和函数的阶.

证明

1. 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}.$$

我们有

$$0\leqslant\lim_{x\to1^-}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}=\lim_{x\to1^-}\frac{b_nx^n}{g(x)}=0.$$

由连续版本[1]的 Toeplitz 定理9.5以及(19.1)即得(19.2).

2. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$ 和 1 问知

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0,$$

即得(19.4).

3. 注意到

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}.$$

我们有

$$0\leqslant\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}\leqslant\frac{b_nx^n}{b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}}=\frac{b_n}{b_n+b_{n+1}x},$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}=0$. 由连续版本[2]的 Toeplitz 定理9.5以及(19.5)我们就得到(19.6).

例题 19.1 设 p 是 $\mathbb{R}$ 上实解析函数且 $0<\prod\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(0)<\infty$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}$.

证明 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}p^{(n)}(0)=1$, 所以 $\left\{p^{(n)}(0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列, 故

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n,p'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}x^n,\forall x\in\mathbb{R}.$$

由幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1的最后一个结论, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p^{(n)}(0)}{n!}}{\frac{p^{(n+1)}(0)}{n!}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}=1.$$

19.1.2 Cauchy 积

定义 19.1

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 是两个收敛级数, 我们称

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n,c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 的 Cauchy 乘积. 我们记

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,S_n=\sum_{k=0}^{n}c_k.$$

♣

[1]和离散证明一模一样.

[2]和离散证明一模一样.

注我们暂时并不清楚 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 是否收敛, 更不知道是否有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \tag{19.7}$$

来看一组 Cauchy 积不收敛的反例.

例题 19.2 设 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, n = 0, 1, \cdots$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

证明 事实上, 我们有

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \to 2,$$

这就证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

发散.

命题 19.1

延续定义19.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} S_j}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \tag{19.8}$$

笔记 本结果可导出收敛级数 Cauchy 积如果收敛, 则由 Stolz 定理9.1可得(19.7).

证明 注意到

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i. \tag{19.9}$$

于是我们有

$$\sum_{j=0}^{n} S_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{j-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i} B_i.$$

类似例题9.4可得(19.8).

定理 19.2 (Cauchy 积收敛定理)

延续定义19.1, 我们有

1. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 有一个绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛.
2. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

证明

1. 由(19.9), 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}$$

收敛. 不妨设[3]

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty,\ \lim_{n\to\infty}B_n=0.$$

于是运用例题9.2就有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=0}^{n}a_iB_{n-i}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}|a_i|\cdot|B_{n-i}|=\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\cdot 0=0,$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛.

2. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛. 注意到

$$\sum_{k=0}^{n}|c_k|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}|a_ib_{k-i}|=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}|a_ib_{k-i}|=\sum_{i=0}^{n}\left(|a_i|\sum_{k=i}^{n}|b_{k-i}|\right),$$

于是由例题9.2就有

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(|a_i|\sum_{k=i}^{n}|b_{k-i}|\right)=\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\cdot\sum_{i=0}^{\infty}|b_i|<\infty,$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 绝对收敛.

接下来我们研究 Cauchy 积和两个级数的积差距有多少.

命题 19.2

延续定义19.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}=0\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_n\text{收敛}.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}&=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{j=0}^{n}b_{n-j}-\sum_{j=k}^{n}b_{n-j}\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\left(\sum_{k=0}^{n}a_k-a_0\right)-\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{n-k}b_j\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}a_kb_j\\&=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}c_k,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自(19.9).

由于 Cauchy 积收敛, 则必收敛到原本级数的积的推论19.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}b_{n-j}=0\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_n\text{收敛}.$$

例题 19.3 设递减数列 $a_n,b_n>0,n=0,1,2\cdots$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛, 记 $c_n=\sum\limits_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n\text{收敛}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}c_n=0.\tag{19.10}$$

[3]否则用 B_n-B 代替 B_n.

证明 左推右显然, 现在假设 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, 由命题19.2, 我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j} = 0.$$

现在

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \left|\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} = c_{n+1},\end{aligned}$$

其中第二个不等号来自于交错级数不等式18.4. 于是我们有

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{n-j} b_{n-j}\right| = 0.$$

我们证明了(19.10).

例题 19.4 设 $\alpha, \beta > 0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\alpha}}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\beta}}$$

Cauchy 积收敛的充要条件是 $\alpha + \beta > 1$.

证明 由例题19.3知我们只需要证明

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha} (n-k)^{\beta}} = 0$$

的充要条件是 $\alpha + \beta > 1$.

当 $\alpha + \beta \leqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha} (n-k)^{\beta}} &\geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha} (n-1)^{\beta}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha}} \overset{\text{Stolz 定理9.1和分母拉中}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\beta n^{\beta-1}} \\ &= \frac{1}{\beta} \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha-\beta} > 0.\end{aligned}$$

当 $\alpha + \beta > 1$, 我们首先由对称性得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha} (n-k)^{\beta}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k^{\alpha} (n-k)^{\beta}}.$$

又

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k^{\alpha} (n-k)^{\beta}} &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k^{\alpha} \left(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)^{\beta}} \\ &= 2^{\beta} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant 2^{\beta} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \\ &\overset{\text{Stolz 定理9.1和分母拉中}}{=} \frac{2^{\beta}}{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{n^{\beta-1}} = \frac{2^{\beta}}{\beta} \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha-\beta} = 0,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha} (n-k)^{\beta}} = 0.$$

现在我们完成了证明.

结论 延续定义19.1, 我们有

$$\begin{cases} a_0b_0 = c_0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = c_1 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = c_2 \\ \vdots \\ a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0 = c_n \end{cases},$$

这可以看做一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

则当 $a_0 \neq 0$, 我们有

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

本结论可以帮我们计算已知函数的倒数的 Taylor 展开.

19.1.3 Tauber 和 Littlewood-hardy 型问题

所谓 Tauber 定理, 大体上说就是说若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n = A$, 问 a_n 满足什么条件时必有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

一个最简单的例子是:

命题 19.3

说若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n = A$. 若 $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

注显然本结论可以加强为 a_n 在 n 充分大是不变号的.

证明 注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 关于 x 递增且对任何 $m \in \mathbb{N}$ 都有

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{m} a_nx^n \leqslant \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = A.$$

现在我们知道 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant A$, 从而由幂级数在收敛域上一定内闭一致收敛得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = A,$$

这就完成了证明.

引理 19.1

1. 若对任何 $y>0$ 都有 $\int_0^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x$ 收敛且存在 $A\in\mathbb{R}$ 使得
$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x = A. \tag{19.11}$$
若
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0, \tag{19.12}$$
则 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = A$.
2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 收敛且
$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0,\ \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A, \tag{19.13}$$
则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

♡

笔记 注意积累离散和连续的转换.

证明

1. 利用(19.12), 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $y>0$, 使得
$$x|f(x)|\leqslant\epsilon, \forall x\geqslant\frac{1}{y}. \tag{19.14}$$
于是利用(19.14)得
$$\left|\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon\int_{\frac{1}{y}}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-yx}\mathrm{d}x \leqslant \epsilon y\int_0^{\infty} e^{-yx}\mathrm{d}x = \epsilon,$$
以及
$$\begin{aligned}\overline{\lim_{z\to 0^+}} z\int_0^{\frac{1}{z}} x|f(x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \overline{\lim_{z\to 0^+}} z\int_0^{\frac{1}{y}} x|f(x)|\,\mathrm{d}x + \overline{\lim_{z\to 0^+}} z\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} x|f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \epsilon\,\overline{\lim_{z\to 0^+}} z\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} 1\mathrm{d}x = \epsilon\,\overline{\lim_{z\to 0^+}}\left(1-\frac{z}{y}\right) = \epsilon,\end{aligned}$$
即
$$\lim_{y\to 0^+}\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x = 0,\ \lim_{z\to 0^+} z\int_0^{\frac{1}{z}} x|f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$
现在
$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{y\to 0^+}}\left|\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \overline{\lim_{y\to 0^+}}\left|\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)\left(1-e^{-yx}\right)\mathrm{d}x\right| + \overline{\lim_{y\to 0^+}}\left|\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \overline{\lim_{y\to 0^+}}\int_0^{\frac{1}{y}}|f(x)|\left(1-e^{-yx}\right)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\lim_{y\to 0^+}}\, y\int_0^{\frac{1}{y}} x|f(x)|\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$
从而由(19.11)得
$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0^+}\int_0^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x = A.$$

2. 考虑 $f(x)=a_n, n\leqslant x<n+1, n\in\mathbb{N}_0$, 则对 $t>0$, 取 $n\in\mathbb{N}_0$ 使得 $n\leqslant t<n+1$. 注意到 $n\sim t$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x+\int_n^t f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\int_k^{k+1}e^{-yx}\mathrm{d}x+a_n\int_n^t e^{-yx}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\frac{e^{-ky}-e^{-(k+1)y}}{y}+a_n\frac{e^{-ny}-e^{-ty}}{y}\\&=\frac{1-e^{-y}}{y}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left(e^{-y}\right)^k+a_n\frac{e^{-ny}-e^{-ty}}{y}.\end{aligned}$$

由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(e^{-y}\right)^k$ 收敛得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_ne^{-ny}=0,\forall y>0$. 于是由

$$0=\lim_{n\to\infty}\left|a_n\frac{e^{-ny}-e^{-ty}}{y}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{a_ne^{-ny}+a_ne^{-ny}}{y}=0$$

得[4]

$$\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x=\frac{1-e^{-y}}{y}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(e^{-y}\right)^k,\ \lim_{y\to0+}\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x=A.$$

又

$$\lim_{t\to+\infty}tf(t)=\lim_{t\to+\infty}ta_n=\lim_{n\to+\infty}na_n=0,$$

故由 1 问可得

$$\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=A=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}f(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k,$$

这就完成了证明.

定理 19.3 (小 o Tauber 定理)

1. 若对任何 $y>0$ 都有 $\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x$ 收敛且存在 $A\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{y\to0+}\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-yx}\mathrm{d}x=A.\tag{19.15}$$

则 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}=0.\tag{19.16}$$

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 收敛且

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A,\tag{19.17}$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}=0.\tag{19.18}$$

♡

笔记 从引理19.3的证明可以看到 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$ 可以推出(19.16)成立. Stolz 定理9.1表明如果 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ 则(19.18)成立.

证明

[4]注意这并不需要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 这在后面证明的时候是有用的.

1. 必要性: 若 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = A$, 则由例题13.9知(19.16)成立.
   充分性: 若(19.16)成立, 考虑

$$F(x) \triangleq \int_0^x (t+1) f(t)\,\mathrm{d}t, H(x) \triangleq \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{tf(t)}{t}\mathrm{d}t}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}H(t)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{H(x)}{x} + \int_1^x \frac{H(t)}{t^2}\mathrm{d}t}{x} \\ &\overset{(19.16)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{H(t)}{t^2}\mathrm{d}t}{x} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{H(x)}{x^2}}{1} \overset{(19.16)}{=} 0,\end{aligned}$$

   即

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0. \tag{19.19}$$

   再注意到

$$\begin{aligned}\int_0^u f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x &= \int_0^u \frac{e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}F(x) \\ &= F(u)\frac{e^{-yu}}{u+1} + y\int_0^u \frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x + \int_0^u \frac{F(x)e^{-yx}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

   结合(19.19)有

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-yx}\mathrm{d}x = y\int_0^{\infty} \frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{F(x)e^{-yx}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$$

   对任何 $M > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{y\to0^+}}\left|y\int_0^{\infty} \frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \overline{\lim_{y\to0^+}}\left|y\int_0^{M} \frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x\right| + \overline{\lim_{y\to0^+}}\left|y\int_M^{\infty} \frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \overline{\lim_{y\to0^+}}\left(y\int_0^{M} \frac{|F(x)|e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x\right) + \overline{\lim_{y\to0^+}}\left(y\sup_{X\geqslant M}\frac{|F(x)|}{x+1}\int_M^{\infty} e^{-yx}\mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant 0 + \overline{\lim_{y\to0^+}}\left(y\sup_{X\geqslant M}\frac{|F(x)|}{x+1}\int_0^{\infty} e^{-yx}\mathrm{d}x\right) = \sup_{X\geqslant M}\frac{|F(x)|}{x+1},\end{aligned}$$

   从而由 M 任意性得

$$\lim_{y\to0^+}\left|y\int_0^{\infty} \frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\mathrm{d}x\right| = 0.$$

   现在

$$A = \lim_{y\to0^+}\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}\mathrm{d}x = \lim_{y\to0^+}\int_0^{\infty} \frac{F(x)e^{-yx}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x, \lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{(x+1)^2} \overset{(19.19)}{=} 0\ .$$

   我们用引理19.1就有

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u \frac{F(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{u\to+\infty}\int_0^u F(x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x+1} = -\lim_{u\to+\infty}\frac{F(u)}{u+1} + \lim_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(19.19)}{=} \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   证毕!

2. 和引理19.1的 2 构造一样, 我们考虑 $f(x) = a_n, n \leqslant x < n+1, n \in \mathbb{N}_0$ 并有 $\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}\mathrm{d}x = A$. 并且如果 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 存在.

现在若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 存在, 对 $t>0$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\leqslant t<n+1$, 然后

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_n^t f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1} a_k+\int_n^t f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_n^t f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(t-n)|a_n|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|=0,$$

即 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

现在当(19.18)成立, 对 $x>0$, 设 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\leqslant x<n+1$, 则成立

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^n tf(t)\,\mathrm{d}t+\int_n^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{n}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k\int_k^{k+1}t\mathrm{d}t+a_n\int_n^x t\mathrm{d}t}{n}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)a_k}{n}+\frac{a_n\left(x^2-n^2\right)}{2n}\right),\end{aligned}$$

注意到

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{a_n\left(x^2-n^2\right)}{2n}\right|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_n|(2n+1)}{2n},\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}ka_k}{n+1}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n+1}=a_{n+1},$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n\left(x^2-n^2\right)}{2n}\right|=0,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}0.$$

现在我们知道(19.16)成立. 由 1 问知 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=A$, 从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

反过来如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$, 则由命题8.3知(19.18)成立, 这就完成了证明.

我们来看大 O Tauber 定理, 有较高的难度. 先来看逼近引理:

引理 19.2

设 $a,\epsilon>0,c\in(0,1),g\in C[c,1],g(c)>0,g(x)=0,\forall x\in[0,c)$, 则有 $p,q\in C[0,1]$ 使得

$$p(x)\leqslant g(x)\leqslant q(x),\forall x\in[0,1];\tag{19.20}$$

$$\int_0^1\ln^{a-1}\frac{1}{x}[q(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\leqslant\epsilon;\tag{19.21}$$

$$\int_0^1\ln^{a-1}\frac{1}{x}[g(x)-p(x)]\,\mathrm{d}x\leqslant\epsilon.\tag{19.22}$$

♡

注读者会提出能否加强到 $g\in R[0,1]$, 实际上这会有很强的技术困难, 因为 0 附近是有奇性的. 而本引理恰好通过 g 在 0 附近为 0 来抵消奇性.

证明 为克服掉 g 在 c 不连续, 考虑

$$q(x) \triangleq \begin{cases} g(x), & x \in [c,1) \\ g(c)\frac{x-c+\delta}{\delta}, & x \in (c-\delta, c) \\ 0, & x \in [0, c-\delta] \end{cases}, \delta \in (0,c).$$

取 δ 充分小, 使得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \ln^{a-1}\frac{1}{x}\left[q(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = g(c)\int_{c-\delta}^{c}\left[\ln^{a-1}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-c+\delta}{\delta}\right]\mathrm{d}x \\ &\leqslant g(c)\int_{c-\delta}^{c}\ln^{a-1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \epsilon, \end{aligned}$$

这就给出了(19.21)以及 $q(x) \geqslant g(x)$. 类似的可以给出 p, 我们完成了证明.

引理 19.3

设 f 非负且对任何 $x>0$, $\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛, $F(x) \triangleq \int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$. 若存在 $a>0$ 使得

$$\lim_{x\to 0^+} x^a F(x) = s \in \mathbb{R}, \tag{19.23}$$

则对 $g \in C[0,1]$, 必有

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t. \tag{19.24}$$

且对 $c \in (0,1), g \in C[c,1], g(c)>0, g(x)=0, \forall x \in [0,c)$, 也有(19.24)成立.

证明 首先利用等式

$$\frac{1}{(n+1)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-(n+1)t}t^{a-1}\mathrm{d}t, a>0,$$

我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} x^a \int_0^\infty e^{-xt}e^{-nxt}f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{(n+1)^a}\lim_{x\to 0^+}\left[(n+1)x\right]^a\int_0^\infty e^{-x(n+1)t}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(19.23)}{=} \frac{s}{(n+1)^a} = \frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}e^{-nt}t^{a-1}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

于是显然对一切 $g \in \mathbb{R}[x]$ 有(19.24)成立.

现在

$$\begin{aligned} &\left|x^a\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|x^a\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{sx^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x^a\int_0^\infty\left[e^{-xt}\left|g\left(e^{-xt}\right)\right|\cdot\left|f(t)-\frac{st^{a-1}}{\Gamma(a)}\right|\right]\mathrm{d}t \\ &\leqslant x^a\sup_{t\in[0,1]}|g(t)|\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t + x^a\sup_{t\in[0,1]}|g(t)|\int_0^\infty e^{-xt}\frac{|s|\,t^{a-1}}{\Gamma(a)}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,1]}|g(t)|\sup_{x\in[0,\delta]}x^a\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t + |s|\cdot\sup_{t\in[0,1]}|g(t)|, \end{aligned}$$

这里 $\delta>0$ 使得由(19.23)确定

$$\sup_{x\in[0,\delta]} x^a\int_0^\infty e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

现在由章节9.4的 Friedrichs mollifier technique 知对一切 $g \in C[0,1]$ 有(19.24)成立.

对 $c \in (0,1), g \in C[c,1], g(c)>0, g(x)=0, \forall x \in [0,c)$, 此时细节过于琐碎, 追求一般性的 Friedrichs mollifier technique 观点反而繁琐, 因此我们直接逼近.

由引理19.2, 对任何 $\epsilon>0$, 有 $p,q \in C[0,1]$ 使得(19.20), (19.21), (19.22)成立.

考虑 q, 换元得

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{a-1}\left[q\left(e^{-t}\right)-g\left(e^{-t}\right)\right]\mathrm{d}t\leqslant\epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}
&x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\\
\leqslant\ &x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}q\left(e^{-xt}\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}q\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\\
&+\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}\left[q\left(e^{-t}\right)-g\left(e^{-t}\right)\right]t^{a-1}\mathrm{d}t\\
\leqslant\ &x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}q\left(e^{-xt}\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}q\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t+\epsilon.
\end{aligned}$$

结合对连续函数的(19.24)可得

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\left[x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\right]\leqslant\epsilon.$$

由 ϵ 任意性

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\left[x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\right]\leqslant0.$$

对于 p 类似可得

$$\underline{\lim_{x\to0^+}}\left[x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{s}{\Gamma\left(a\right)}\int_0^{\infty}e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t\right]\geqslant0.$$

这就对 g 证明了(19.24).

定理 19.4 (大 O Tauber 定理 $*$)

1. 设 $B\in\mathbb{R}$ 且 $f\left(x\right)>-\frac{B}{x},\forall x>0$. 若

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^{\infty}f\left(y\right)e^{-xy}\mathrm{d}y=s,\tag{19.25}$$

则 $\int_0^{\infty}f\left(t\right)\mathrm{d}t=s$.

2. 设

$$a_n>-\frac{B}{n},\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s,$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

♡

证明

1. 不妨设 $B>0$, 考虑 $F\left(x\right)\triangleq\int_0^{\infty}f\left(y\right)e^{-yx}\mathrm{d}y$, 注意到对 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 和 $x\in[a,b],A>0$ 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_A^{\infty}-yf\left(y\right)e^{-yx}\mathrm{d}y\right|&\leqslant\int_{yf(y)>0,y>A}yf\left(y\right)e^{-yx}\mathrm{d}y+\int_A^{\infty}Be^{-yx}\mathrm{d}y\\
&=\int_{yf(y)>0,y>A}yf\left(y\right)e^{-\frac{a}{2}y}e^{-y\left(x-\frac{a}{2}\right)}\mathrm{d}y+\int_A^{\infty}Be^{-yx}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_{yf(y)>0,y>A}yf\left(y\right)e^{-\frac{a}{2}y}e^{-y\left(a-\frac{a}{2}\right)}\mathrm{d}y+\int_A^{\infty}Be^{-ya}\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

即 $\int_0^{\infty}-yf\left(y\right)e^{-yx}\mathrm{d}y$ 内闭一致收敛, 因此

$$F'\left(x\right)=-\int_0^{\infty}yf\left(y\right)e^{-yx}\mathrm{d}y,x>0.$$

类似的得到

$$F''\left(x\right)=\int_0^{\infty}y^2f\left(y\right)e^{-yx}\mathrm{d}y>-B\int_0^{\infty}ye^{-yx}\mathrm{d}y=-\frac{B}{x^2},\forall x>0.$$

现在利用反向洛必达13.9, 我们有

$$\lim_{x\to 0^+} xF'(x)=0. \tag{19.26}$$

于是从(19.26)得

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_0^{\infty}[yf(y)+B]e^{-yx}\mathrm{d}y=B. \tag{19.27}$$

取 $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \frac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 0\leqslant x<\frac{1}{e}\end{cases}$ 并利用引理19.3得

$$\lim_{x\to 0^+} x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}p\left(e^{-xt}\right)[tf(t)+B]\,\mathrm{d}t=\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-t}p\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t, a=1.$$

注意到

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}p\left(e^{-xt}\right)[tf(t)+B]\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{x}}[tf(t)+B]\,\mathrm{d}t, \int_0^{\infty}e^{-t}p\left(e^{-t}\right)t^{a-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{a-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}.$$

于是我们得到 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\int_0^{\frac{1}{x}}[tf(t)+B]\,\mathrm{d}t=B$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=0$. 由小 o Tauber 定理19.3知 $\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=s$.

2. 相似小 o Tauber 定理19.3的 2 的证明, 我们考虑 $f(x)=a_n, n\leqslant x<n+1, n\in\mathbb{N}_0$, 然后有(19.25)成立. 现在对 $x>0$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\leqslant x<n+1$, 于是有

$$\varliminf_{x\to+\infty} xf(x)=\varliminf_{x\to+\infty} xa_n\geqslant\varliminf_{x\to+\infty}\left(-x\frac{B}{n}\right)=-B,$$

于是容易找到一个 B' 使得 f 满足 1 问条件, 这就证明了 $\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=s$, 从而得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

定理 19.5 (Hardy-littlewood)

设 $\sigma>0$ 且

$$a_n\geqslant 0, \lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1, \tag{19.28}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}\sum_{k=0}^{n}a_k=\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}. \tag{19.29}$$

♡

证明 在引理19.3的(19.24)中取

$$f(x)=a_n, n\leqslant x<n+1, n\in\mathbb{N}_0, g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \frac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 0\leqslant x<\frac{1}{e}\end{cases}, a=\sigma.$$

我们有

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sigma}\int_0^{\infty}f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t=1, \lim_{x\to 0^+} x^{\sigma}\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 t^{\sigma-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}\sum_{j=0}^{n-1}a_j=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}\sum_{j=0}^{n-1}\int_j^{j+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\sigma+1)},$$

即(19.29)成立.

例题 19.5 若 $\sigma>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}$ 收敛, 证明:

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0. \tag{19.30}$$

笔记 为利用幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1, 如果我们直接展开 $(1-x)^{-\sigma}$ 并用它的系数和 a_n 比较, 这得不

到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma-1}}=0$. 因为差不多相当于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛推 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$. 但这熟知不一定可能! 但是由命题8.3, 我们可以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kb_k=0.$$

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}=0$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 收敛. 我们考虑

$$(1-x)^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^{\sigma+1}\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^{\sigma+1}\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^n,$$

这里

$$S_n\triangleq\sum_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N}.$$

注意到

$$(1-x)^{-\sigma-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sigma+1)\cdots(\sigma+k)}{k!}x^k,x\in(-1,1).$$

由定理 Gamma 函数的极限定义9.21, 我们知道对 $s>0$ 有

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^sn!}{s(s+1)\cdots(s+n)},$$

即 $(1-x)^{-\sigma-1}$ 幂级数的系数与 n^{σ} 同阶. 现在利用定理19.1知要证明(19.30), 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\sigma}}=0. \tag{19.31}$$

由命题9.1, 这直接给出了(19.31). 至此, 我们证明了(10.17).

来看一个被数分高代战神评价为全网无人可以做的简单级数题, 他是 Tauber 定理的类似物.

例题 19.6 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,f(0)=1$ 且 f' 在 $[0,+\infty)$ 绝对可积. 若

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}a_k\right\}\text{有界},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}a_j=A, \tag{19.32}$$

且对任何 $t>0$ 都有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nf(tn)$ 收敛, 证明:

$$\lim_{t\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}a_nf(tn)=A. \tag{19.33}$$

证明 不妨设 $A=0$ 并记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_n,\sigma_n=\sum\limits_{k=0}^{n}S_k$, 则由 Abel 变化8.2得

$$\sum_{k=0}^{n}a_kf(tk)=\sum_{k=0}^{n-1}S_k[f(tk)-f(t(k+1))]+S_nf(tn).$$

注意到 S_n 有界, $\lim\limits_{n\to\infty}f(tn)=0$, 记

$$h(x)\triangleq S_k,x\in[k,k+1),k=0,1,2,\cdots,$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}a_kf(tk)&=\sum_{k=0}^{\infty}S_k[f(tk)-f(t(k+1))]=-t\sum_{k=0}^{\infty}S_k\int_k^{k+1}f'(tx)\,\mathrm{d}x\\&=-t\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}h(x)f'(tx)\,\mathrm{d}x=-t\int_0^{\infty}h(x)f'(tx)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{\infty}h\left(\frac{x}{t}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又对任何 $x>0$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}_0$ 使得 $n\leqslant x<n+1$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}S_k\mathrm{d}t+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_n^x h(t)\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}S_k+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_n^x h(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用 $0\leqslant x-n\leqslant 1, n\sim x$ 和(19.32), 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}S_k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}S_k=0,\ \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\int_n^x h(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{\sup\limits_{k\geqslant1}|S_k|}{x}=0.$$

然后用黎曼引理9.6知

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^\infty h\left(\frac{x}{t}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=0\cdot\int_0^\infty f'(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

这就给出了(19.33).

19.2 实解析函数

定义 19.2 (实解析函数定义)

设 $a,b\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}$, 我们称 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是实解析的, 如果对每个 $x_0\in(a,b)$, 满足存在 $a_n\in\mathbb{R}, n=1,2,\cdots$ 和 $\delta>0$, 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b).\tag{19.34}$$

♣

笔记

1. 显然实解析函数 f 在定义域内是无穷阶连续可微函数.
2. 由经典的幂级数结论, 我们知道级数(19.34)也是内闭绝对一致收敛的.
3. 由幂级数理论我们知道 a_n 由 f 和 x_0 唯一确定且 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
4. 实解析函数的四则运算和复合运算[5]也是实解析的.
5. 幂级数在收敛区间内定义的函数是实解析函数[6].

定理 19.6 (实解析函数展开为幂级数的充要条件 $*$)

对 $x_0\in\mathbb{R}, R>0$, 设 $f(x)\in C^\infty(x_0-R,x_0+R)$.

证明 : $f(x)$ 可在 (x_0-R,x_0+R) 展开为 x_0 处的幂级数的充分必要条件是存在一个 $[0,R)$ 上的非负值函数 $M(r)$, 使得

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant\frac{M(r)\,n!}{(r-|x-x_0|)^{n+1}},\ \forall n\geqslant0,\ x\in(x_0-r,x_0+r)$$

♡

证明 不妨设 $x_0=0$, 否则平移即可.

必要性 : 当 $f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 展开为 x_0 处的幂级数, 解析延拓到 $|z|<R$, 因此对给定的 $|x|<r$, 由 *cauchy* 积分公式, 我们有

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-x)^{n+1}}d\zeta,$$

从而

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta|=r}\frac{|f(\zeta)|}{(r-|x|)^{n+1}}ds\leqslant r\sup_{|z|=r}|f(z)|\frac{n!}{(r-|x|)^{n+1}}.$$

[5]对于复合运算, 运用复分析更好说明, 因此直接使用.

[6]直接用即可.

我们完成了必要性证明.

充分性：我们证明 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 处处实解析即可，事实上对给定 $|x|<r$，取 $r>\delta>0$，使得 $|x|<\delta$，当

$$y\in(-\delta,\delta)\bigcap(x-r+\delta,x+r-\delta),$$

余项有

$$\frac{f^{(n)}(\theta(y))}{n!}|y-x|^n\leqslant\frac{M(r)|y-x|^n}{(r-|\theta(y)|)^{n+1}}\leqslant\frac{M(r)|y-x|^n}{(r-\delta)^{n+1}}\to 0.$$

因此我们完成了证明.

下述定理是熟知的，可以直接使用的. 但证明依赖基本的复分析，是复解析函数的直接推论.

定理 19.7 (实解析函数零点孤立性)

设 f 在开区间 I 上实解析且存在 $x_n\in I,n=1,2,\cdots$ 和 $x\in I$，满足

$$f(x_n)=0,\lim_{n\to\infty}x_n\text{存在且属于}I,$$

则 $f(y)\equiv 0,\forall y\in I$.

证明 **Method 1** 注意到 f 可以解析延拓到 $\mathbb{C}$ 上一个包含 (a,b) 的开集中，因此由复解析函数零点孤立性可得实解析函数零点孤立性.

Method 2 对任何 $k\in\mathbb{N}$，由罗尔中值定理，存在

$$y_n\in I,\lim_{n\to\infty}y_n=x,f^{(k)}(y_n)=0,$$

即 $f^{(k)}(x)=0$. 把 f 在 x 展开为 Taylor 级数即得 f 在 x 邻域为 0.

考虑 $S=\{y\in I:f(y)=0\}$，现在 S 是既开又闭的，由 I 连通性知 $f(y)\equiv 0,\forall y\in I$.

例题 19.7 实解析函数的开映射定理不一定成立 例如 $f(x)=x^3-3x^2,x\in\left(-\frac{1}{2},3\right)$，但是 $f\left(\left(-\frac{1}{2},3\right)\right)=[-4,0]$.

笔记 因此实解析函数的最大模定理也不一定成立.

实解析函数在数学分析框架下最重要的三个结果是

命题 19.4 (实解析的充要条件)

设 f 在开区间 I 上任意次可导，则 f 在开区间 I 上实解析的充要条件是对任何 $x_0\in I$，存在 $A,B,r>0$，成立不等式

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant AB^n n!,\forall x\in(x_0-r,x_0+r).\tag{19.35}$$

证明 充分性：对任何固定的 x_0，假定，存在 $A,B,r>0$ 使得不等式(19.35)成立. 取 $0<R<\min\left\{r,\frac{1}{B}\right\}$，于是对 $x\in(x_0-R,x_0+R)$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|f^{(n)}(x_0)\right|}{n!}\cdot|x-x_0|^n\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}A(BR)^n<\infty.$$

这就证明了 f 在 x_0 邻域内可以展开为幂级数，因此 f 在 I 实解析.

必要性：假如 f 在 I 上实解析，则设 f 在 $x_0\in I$ 的收敛半径为 $R>0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|}=\frac{1}{R}.$$

故存在 $t\in(0,R)$，使得

$$\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|}\leqslant\frac{1}{t},n=1,2,\cdots.$$

变形得

$$\left|f^{(n)}(x_0)\right|\leqslant\frac{n!}{t^n},n=1,2,\cdots.$$

于是取 $r\in(0,t)$, 对 $x\in(x_0-r,x_0+r)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(x)\right|&=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n+k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{t^{n+k}k!}r^k\\&=t^{-n}n!\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k}^k\left(\frac{r}{t}\right)^k\\&=t(t-r)^{-n-1}n!,\end{aligned}$$

这里最后一个级数计算可以使用结论18.1.5. 这就得到了不等式(19.35).

定理 19.8 (Bernstein 定理)

在 f 在 $[x_0,x_0+h)$ 上任意阶导数都是非负的, 则 f 在 x_0 的 Taylor 级数在 $[x_0,x_0+h)$ 收敛到 f.

♡

证明 不妨设 $x_0=0$, 由 Taylor 公式积分余项11.4, 我们对每个 $x\in[0,h)$, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x-xu)\,du.$$

于是由导函数递增性, 对每个 $x\in[0,h-\delta),\delta\in(0,h)$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x-xu)\,du&\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(h-\delta-(h-\delta)u)\,du\\&=\left(\frac{x}{h-\delta}\right)^{n+1}\frac{(h-\delta)^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(h-\delta-(h-\delta)u)\,du\\&=\left(\frac{x}{h-\delta}\right)^{n+1}\frac{1}{n!}\int_0^{h-\delta}u^nf^{(n+1)}(u)\,du\\&=\left(\frac{x}{h-\delta}\right)^{n+1}\left[f(h-\delta)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(h-\delta)^k\right]\\&\leqslant\left(\frac{x}{h-\delta}\right)^{n+1}f(h-\delta),\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,x\in[0,h-\delta).$$

由 δ 任意性即得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,x\in[0,h).$$

我们完成了证明.

推论 19.1

设 $x_k^0\in\mathbb{R},h_k>0,k=1,2,\cdots,n$. 记

$$U\triangleq\prod_{k=1}^{n}\left[x_k^0+h_k\right).$$

若 f 在 U 上任意阶可偏导且所有偏导数非负. 则对任何 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U$ 都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{N}_0^n}\left[\frac{\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)}{\alpha!}\prod_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^0\right)^{\alpha_k}\right].\tag{19.36}$$

♡

证明 不失一般性, 我们不妨设 $x_k^0=0,k=1,2,\cdots,n$. 先来考虑 $n=2$ 的情况.

由定理19.8, 我们知道

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0,y)\,x^i,\forall(x,y)\in[0,h_1)\times[0,h_2);$$
$$\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}(0,0)\,y^j,\forall y\in[0,h_2),$$

于是就有

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}(0,0)\,x^iy^j,\forall(x,y)\in[0,h_1)\times[0,h_2),$$

注意这里是非负数列的级数, 所以累次级数, 重级数没有区别.

显然一般 n 的情况是类似的, 我们完成了证明.

推论 19.2

设 f 在开区间 I 上任意次可导且

$$(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant 0,\forall x\in I,n=0,1,\cdots, \tag{19.37}$$

证明:f 在 I 上实解析.

证明 考虑 $f(-x),x\in -I$, 则由 Bernstein 定理19.8知 $f(-x)$ 实解析, 从而 f 在 I 上实解析.

来看一个经典定理, 他的证明来自Terry Tao.

定理 19.9 (∗)

设 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$M(x)\triangleq\sup_{m\geqslant 0}\left|f^{(m)}(x)\right|<\infty,\forall x\in\mathbb{R},$$

则 f 是某个复平面上的整函数在 $\mathbb{R}$ 上的限制.

证明 若 f 不是某个复平面上的整函数在 $\mathbb{R}$ 上的限制, 考虑

$$X\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}:\text{不存在任何整函数在}x\text{某个邻域与}f\text{一致}\right\}.$$

Step 1 证明 X 非空闭集.

若 $X=\emptyset$, 则对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有整函数 g_x 使得在 x 某个邻域 (a_x,b_x) 内 $f=g_x$. 固定 $x_0\in\mathbb{R}$, 考虑

$$S\triangleq\{x\in\mathbb{R}:g_x=g_{x_0}\}.$$

实解析函数零点孤立性19.7容易给出 S 是 $\mathbb{R}$ 的开集. 设

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S,\lim_{n\to\infty}x_n=y.$$

当 n 充分大我们有 $x_n\in(a_y,b_y)$, 于是实解析函数零点孤立性19.7给出 $g_{x_n}=g_y$, 因此我们有 $g_y=g_{x_0}$, 即 $y\in S$, 即 S 是闭集. 由 $\mathbb{R}$ 连通性得 $S=\mathbb{R}$, 于是 f 是整函数 g_{x_0} 在 $\mathbb{R}$ 上的限制, 这就是一个矛盾!. 因此我们证明了 X 非空. 显然 X 的补是开集, 因此 X 是闭集.

Step 2

因为 $M(x)$ 是连续函数列的上确界, 所以下半连续, 因此有闭集的并

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X:M(x)\leqslant n\}.$$

在拓扑空间 X 中用 Baire 纲定理, 我们得某个 $(a,b),N\in\mathbb{N}$ 使得

$$(a,b)\bigcap X\neq\emptyset,(a,b)\bigcap X\subset S_N.$$

若 $(a,b)\subset X$, 则

$$\left|f^{(m)}(x)\right|\leqslant N,\forall x\in(a,b),m\geqslant 0.$$

对 $x\in(a,b)$, 由 Taylor 中值定理得

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{j!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{j}+\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}.$$

由

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}\right|\leqslant\frac{N}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\to 0,n\to\infty$$

得

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{j!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{j},x\in(a,b),$$

即 $x\notin X$, 这就是一个矛盾, 因此 $(a,b)\setminus X\neq\emptyset$.

在开集 $(a,b)\setminus X$ 中考虑一个极大的开区间 (c,e), 相似 **Step 1** 构造 S 的方法, 利用 (c,d) 中每一个点都存在邻域使得 f 和某个整函数一致, 我们可得一个整函数 g 使得在 (c,d) 上和 f 一致, 从而在 $[c,e]$ 上 g 也和 f 一致. 由于 (c,d) 是极大的, 所以[7]c,e 必有一个落在 X, 不妨设为 c, 从而

$$c\in(a,b)\bigcap X\subset S_N.$$

Step 3

对 $m\in\mathbb{N}$, 让 g 在 c 处做 Taylor 展开得

$$g^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{g^{(m+j)}(c)}{j!}(x-c)^{j},\forall x\in\mathbb{R}.$$

因为在 $[c,d]$ 上 $f=g$, 所以

$$f^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(m+j)}(c)}{j!}(x-c)^{j},\forall x\in[c,d].$$

现在就有

$$\left|f^{(m)}(x)\right|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\frac{N}{j!}(d-c)^{j}=Ne^{d-c}\leqslant Ne^{b-a},\forall x\in(a,b)\setminus X,m\in\mathbb{N}_0.$$

考虑每个极大开区间可得

$$\left|f^{(m)}(x)\right|\leqslant Ne^{b-a},\forall x\in(a,b)\setminus X,m\in\mathbb{N}_0.$$

又

$$\left|f^{(m)}(x)\right|\leqslant N\leqslant Ne^{b-a},\forall x\in(a,b)\bigcap X,m\in\mathbb{N}_0,$$

即

$$\left|f^{(m)}(x)\right|\leqslant Ne^{b-a},\forall x\in(a,b),m\in\mathbb{N}_0.$$

Step 4

现在相似 **Step 2** 的步骤在 $\frac{a+b}{2}$ Taylor 展开, 我们得 $(a,b)\bigcap X=\emptyset$, 这就是一个矛盾!, 因此我们有 f 是某个复平面上的整函数在 $\mathbb{R}$ 上的限制, 从而完成了证明.

[7] c,d 如果不落在 X, 就只能落在 a 或者 b.

19.3 三角级数

定理 19.10 (∗)

设 $\alpha\in[0,1],p\in\mathbb{R}$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{\alpha}}{n^{p}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^{\alpha}}{n^{p}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in^{\alpha}}}{n^{p}}$$

在 $p\leqslant 1-\alpha$ 发散, 在 $1-\alpha<p\leqslant 1$ 条件收敛, $p>1$ 绝对收敛. ♡

证明 当 $\alpha=0,1$ 问题是平凡的, 当 $p>1$ 问题也是平凡的. 当 $p\leqslant 0$ 且 $\alpha\in(0,1)$, 显然

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=0.$$

我们先断言

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^{\alpha}\neq 0. \tag{19.38}$$

事实上若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^{\alpha}=0$, 则对任何 $\epsilon\in(0,\frac{\pi}{3})$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $n\geqslant N$, 存在整数 k_n, 使得

$$\left|n^{\alpha}-k_n\pi\right|<\epsilon,\left|(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right|<\epsilon.$$

于是

$$\left|k_{n+1}-k_n\right|\pi-\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]\leqslant\left|(n+1)^{\alpha}-k_{n+1}\pi\right|+\left|n^{\alpha}-k_n\pi\right|<2\epsilon.$$

现在就有

$$\left|k_{n+1}-k_n\right|\pi<3\epsilon<\pi,$$

即 $k_{n+1}=k_n$. 但是 $\epsilon>\lim\limits_{n\to\infty}\left|n^{\alpha}-k_N\pi\right|=+\infty$, 这就是一个矛盾! 我们完成了证明(19.38). 现在根据级数收敛的必要条件我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{\alpha}}{n^{p}}$ 发散, 同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^{\alpha}}{n^{p}}$ 发散, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in^{\alpha}}}{n^{p}}$ 也发散.

接下来讨论问题最困难的部分, 即对 $p\in(0,1]$ 且 $\alpha\in(0,1)$ 证明结论. 首先此时[8]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in^{\alpha}}}{n^{p}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}=+\infty,$$

即不可能绝对收敛.

设 $f(x)=\frac{e^{ix^{\alpha}}}{x^{p}}$. 运用复合函数高阶导公式10.1, 我们有

$$\begin{aligned}f^{(j)}(x)&=\sum_{t=0}^{j}C_j^t\left(e^{ix^{\alpha}}\right)^{(t)}\left(x^{-p}\right)^{(j-t)}\\&=\sum_{t=0}^{j}\sum\frac{t!C_j^t i^{b_1+\cdots+b_t}e^{ix^{\alpha}}}{b_1!\cdots b_t!}\left(\frac{(x^{\alpha})^{(1)}}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{(x^{\alpha})^{(2)}}{2!}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{(x^{\alpha})^{(t)}}{t!}\right)^{b_t}\left(x^{-p}\right)^{(j-t)},\end{aligned} \tag{19.39}$$

这里求和对集合 $\{(b_1,b_2,\cdots,b_t)\in\mathbb{N}_0^t:b_1+2b_2+\cdots+tb_t=t\}$ 进行,$t=0$ 时考虑自然定义.

显然对任何 $j\in\mathbb{N}_0$ 都有

$$\lim_{m\to+\infty}\left|f^{(j)}(m)\right|=0.$$

我们运用 EM 公式9.9有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{e^{in^{\alpha}}}{n^{p}}&=\int_1^m\frac{e^{ix^{\alpha}}}{x^{p}}dx+\frac{e^{i}+\frac{e^{im^{\alpha}}}{m^{p}}}{2}+\sum_{k=2}^{N}\left[f^{(k-1)}(m)-f^{(k-1)}(1)\right]b_k(0)+(-1)^{N+1}\int_1^m b_N(x)f^{(N)}(x)dx\\&=C+\frac{1}{\alpha}\int_1^{m^{\alpha}}\frac{e^{ix}}{x^{\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1}}dx+(-1)^{N+1}\int_1^m b_N(x)f^{(N)}(x)dx+o(1).\end{aligned}$$

[8]我们直接考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in^{\alpha}}}{n^{p}}$, 但这并不和单独考虑正余弦的级数等价, 但是方法是类似的.

从(19.39)可以看到, 当我们取足够大的 N, 可使得 $f^{(N)}(x)$ 分母的 x 的幂次足够大[9], 因此有 $(-1)^{N+1}\int_1^{\infty} b_N(x) f^{(N)}(x)\,dx$ 收敛.

所以原级数收敛完全由 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_1^{m^\alpha}\frac{e^{ix}}{x^{\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1}}dx$ 收敛性决定. 由A-D 判别法知当 $\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1>0$ 时有 $\int_1^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^{\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1}}dx$ 收敛. 但是当 $\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1\leqslant 0$, 我们分部积分有

$$\int_1^{m^\alpha}\frac{e^{ix}}{x^{\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1}}dx=\frac{1}{i}\int_1^{m^\alpha}\frac{1}{x^{\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1}}de^{ix}=\frac{1}{i}\left[m^{1-\alpha-p}e^{im^\alpha}-e^i+\left(\frac{p}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1\right)\int_1^{m^\alpha}\frac{e^{ix}}{x^{\frac{p-1}{\alpha}+2}}dx\right].$$

可以看到每次分部积分总能抬高积分分母的次方, 分部足够多次后可以保证积分部分收敛. 而非积分部分形如 $p(m)e^{im^\alpha}+c$, 这里 p 是幂函数的线性组合且非 0. 容易由(19.38)知其极限在 $m\to\infty$ 时不存在. 这就证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^\alpha}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^\alpha}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in^\alpha}}{n^p}$$

在 $p\leqslant 1-\alpha$ 发散, 在 $1-\alpha<p\leqslant 1$ 条件收敛, $p>1$ 绝对收敛. 这就完成了证明.

19.3.1 处处连续处处不可微

我们来看经典的处处连续处处不可微的例子, 也就是 Weierstrass 函数.

例题 19.8 设 $0<b<1, a$ 为正奇数且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续但处处不可微.

证明 我们将反复运用不等式 $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$, 这可以由拉格朗日中值定理得到.

对任何 $\epsilon>0$, 取 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{n=m}^{\infty}b^n<\frac{\epsilon}{2}$, 注意到

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}b^n|\cos(a^n\pi x)-\cos(a^n\pi y)|\\&\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}b^na^n\pi|x-y|+2\sum_{n=m}^{\infty}b^n\\&\leqslant\left(\sum_{n=1}^{m-1}b^na^n\pi\right)\cdot|x-y|+\epsilon,\end{aligned}$$

于是由一致连续的充要条件13.10, 我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

现在固定 $x\in\mathbb{R}$, 对 $h\neq 0, m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n\cos(a^n\pi x+a^n\pi h)-b^n\cos(a^n\pi x)}{h}\\&=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b^n\cos(a^n\pi x+a^n\pi h)-b^n\cos(a^n\pi x)}{h}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b^n\cos(a^n\pi x+a^n\pi h)-b^n\cos(a^n\pi x)}{h}\\&=X_m+Y_m.\end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned}|X_m|&\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b^n|\cos(a^n\pi x+a^n\pi h)-b^n\cos(a^n\pi x)|}{|h|}\\&\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}b^na^n\pi=\frac{(ab)^m-1}{ab-1}\pi<\frac{(ab)^m}{ab-1}\pi.\end{aligned}$$

另外一方面, 我们记

$$a^mx=\alpha_m+\gamma_m,\gamma_m\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\alpha_m\in\mathbb{Z},h_m=\frac{1-\gamma_m}{a^m}.$$

因为 a 是奇数且显然 $a>1$, 故 $\lim\limits_{m\to\infty}h_m=0$.

[9]更精确的, $|f^{(j)}(x)|=O\left(\frac{1}{x^{p+j(1-\alpha)}}\right), x\to+\infty$ 且幂次不可改进.

现在

$$\begin{aligned}|Y_m| &= \left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b^n\cos\left(a^n\pi x+a^n\pi h_m\right)-b^n\cos\left(a^n\pi x\right)}{h_m}\right| \\ &= \left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b^n\cos\left(a^{n-m}\pi\left(\alpha_m+1\right)\right)-b^n\cos\left(a^{n-m}\pi\left(\alpha_m+\gamma_m\right)\right)}{h_m}\right| \\ &= \left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b^n\cos\left(a^{n-m}\pi\right)-b^n\cos\left(a^{n-m}\pi\gamma_m\right)}{h_m}\right| \\ &= \left|\frac{a^m}{1-\gamma_m}\sum_{n=m}^{\infty}b^n\left(1+\cos\left(a^{n-m}\pi\gamma_m\right)\right)\right| \\ &\geqslant \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}a^mb^m\left[1+\cos\left(\pi\gamma_m\right)\right]\geqslant\frac{2}{3}a^mb^m.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\left|\frac{f\left(x+h_m\right)-f\left(x\right)}{h_m}\right|\geqslant|Y_m|-|X_m|\geqslant\frac{2}{3}a^mb^m-\frac{\left(ab\right)^m}{ab-1}\pi=\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)\left(ab\right)^m.$$

注意到 $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}>0, ab>1$, 我们有

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f\left(x+h_m\right)-f\left(x\right)}{h_m}\right|=+\infty,$$

这就证明了 f 在 x 不可导.

例题 19.9 设 $\{a_n\},\{b_n\}\subset[0,+\infty)$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$. 证明:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(b_nx\right)$$

在 $\mathbb{R}$ 上可微的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n<\infty. \tag{19.40}$$

笔记 本题的一个特例是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n^2}$ 在原点不可微.

证明 充分性: 若(19.40)成立, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\sin\left(b_nx\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_nb_n\cos\left(b_nx\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n<\infty.$$

由函数项级数的逐项微分定理得 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微.

必要性: 若 f 在 $x=0$ 可微, 则 $\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin(b_nx)}{x}$ 存在, 于是存在 $C,\delta>0$ 使得

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(b_nx\right)\right|\leqslant C\cdot\left|x\right|,\forall x\in\left[-\delta,\delta\right].$$

对任何 $N\in\mathbb{N}, x\in(0,\delta)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\sin\left(b_nx\right)}{x}+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\frac{\sin\left(b_nx\right)}{x}\leqslant\left|\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(b_nx\right)\right|\leqslant C. \tag{19.41}$$

对任何 $\eta>0$, 我们有

$$\int_0^{\eta}\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\sin\left(b_ny\right)\mathrm{d}y=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\left(1-\cos\left(b_n\eta\right)\right)\geqslant0,$$

这里分母为 0 时视为极限意义. 现在必然存在 $\eta'\in(0,\eta)$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\sin\left(b_n\eta'\right)\geqslant0.$$

因此存在 $\{x_m\}\subset(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}x_m=0,\ \sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\sin(b_nx_m)\geqslant 0.$$

由(19.41)知

$$\sum_{n=1}^{N}a_nb_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\sin(b_nx_m)}{x_m}\leqslant C,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n<\infty$, 这就完成了证明.

例题 19.10 设 $b_n\geqslant 0,n=1,2,\cdots$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$. 证明:$\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ 充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛.

证明 充分性: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛, 则显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n\cos(nx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 因此有

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos(nx)\in C(\mathbb{R}).$$

充分性得证.

必要性: 若 $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$. 显然 φ 是周期 2π 函数奇函数. 对 $n\in\mathbb{N}$ 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x&=n\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\&=n\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\&=nb_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x=\pi nb_n.\end{aligned}$$

对 $N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left[\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\varphi'(x)\sum_{n=1}^{N}\left[\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\cos(nx)\right]\right\}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)^2}{(N+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{N+1}\int_{0}^{\pi}\varphi'(x)\frac{\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\sup\limits_{\mathbb{R}}|\varphi'|}{N+1}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=\pi\sup_{\mathbb{R}}|\varphi'|.\end{aligned}$$

于是由

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{2N}\left[\left(1-\frac{n}{2N+1}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right]\\&\geqslant\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{N}nb_n\end{aligned}$$

可得

$$\sum_{n=1}^{N}nb_n\leqslant 2\sup_{\mathbb{R}}|\varphi'|,\forall N\in\mathbb{N}.$$

必要性得证.

来看 2023 浙江大学数学分析考研压轴题, 他也是当年最难的考研压轴题.

例题 19.11 设 $s\in(0,1),\lambda\in(1,+\infty)$, 证明存在 $C>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^s,\forall x,y\in\mathbb{R},$$

这里

$$f(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-sn}\sin\left(\lambda^n x\right).$$

证明 对 $x\in\mathbb{R},h\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, 我们取 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\lambda^N h\leqslant 1,\lambda^{N+1}h>1$, 于是我们有

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|&=2\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-sn}\cos\left(\lambda^n x+\frac{1}{2}\lambda^n h\right)\sin\left(\frac{1}{2}\lambda^n h\right)\right|\\&\leqslant 2\sum_{n=1}^{N}\left|\lambda^{-sn}\sin\left(\frac{1}{2}\lambda^n h\right)\right|+2\sum_{n=N+1}^{\infty}\lambda^{-sn}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}\lambda^{(1-s)n}h+2\sum_{n=N+1}^{\infty}\lambda^{-sn}\\&=\frac{\lambda^{1-s}\left(\lambda^{(1-s)N}-1\right)}{\lambda^{1-s}-1}h+2\frac{\lambda^{-s(N+1)}}{1-\lambda^{-s}}\\&\leqslant\frac{\lambda^{1-s}\left(h^{s-1}-1\right)}{\lambda^{1-s}-1}h+2\frac{h^s}{1-\lambda^{-s}}\\&\leqslant\left(\frac{\lambda^{1-s}}{\lambda^{1-s}-1}+\frac{2}{1-\lambda^{-s}}\right)h^s,\end{aligned}\tag{19.42}$$

现在对 $h\geqslant\frac{1}{\lambda}$, 我们有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-sn}=\frac{2\lambda^{-s}}{1-\lambda^{-s}}\leqslant\frac{2h^s}{1-\lambda^{-s}},$$

因此总的来说有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\left(\frac{\lambda^{1-s}}{\lambda^{1-s}-1}+\frac{2}{1-\lambda^{-s}}\right)|x-y|^s,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

我们完成了证明.

例题 19.12* 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1-\cos(2^n x)}{2^n}$ 在 $x=0$ 不可微.

证明 当 $m\to+\infty$, 一方面我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\cos\left(2^n\cdot\frac{\pi}{2^m}\right)}{2^n\frac{\pi}{2^m}}&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m}\left[2^{m-n}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^{m-n}}\right)\right)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m}\left[2^n\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)\right]\to\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2^n\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

另外一方面我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\cos\left(2^n\cdot\frac{3\pi}{2^m}\right)}{2^n\frac{3\pi}{2^m}}&=\frac{1}{3\pi}\sum_{n=0}^{m}\left[2^{m-n}\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2^{m-n}}\right)\right)\right]\\&=\frac{1}{3\pi}\sum_{n=0}^{m}\left[2^n\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2^n}\right)\right)\right]\to\frac{1}{3\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2^n\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2^n}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

显然这两个级数不等, 可以数值计算得

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2^n\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)\right]\approx 2.03,\frac{1}{3\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2^n\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2^n}\right)\right)\right]\approx 2.25.$$

于是我们证明了 f 在 $x=0$ 不可微.

来看一个中科院夏令营题, 是一类经典题型.

例题 19.13 设 $\varphi(x)$ 表示到 x 最近整数距离, 证明: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(4^kx\right)}{4^k}$ 处处连续但是处处不可微.

证明 首先

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\varphi\left(4^kx\right)}{4^k}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}<\infty$$

且对每一个 $k\in\mathbb{N}_0$ 都有 $\frac{\varphi\left(4^kx\right)}{4^k}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 现在我们知道 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(4^kx\right)}{4^k}$ 一致收敛且末项是连续函数, 从而处处连续.

注意到 φ 是周期 1 函数, 所以我们只需要对 $x\in[0,1)$ 来证明 φ 不可微. 考虑四进制展开

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{4^j},a_j\in\{0,1,2,3\},$$

这里不考虑从某一位开始后面全为 3 的情况. 我们取

$$h_j\triangleq\begin{cases}4^{-j}, & a_j=0,2\\ -4^{-j}, & a_j=1,3\end{cases},j=1,2,\cdots.$$

注意到 $\lim\limits_{j\to+\infty}h_j=0$. 又当 $1\leqslant j\leqslant k$ 有 $4^kh_j\in\mathbb{Z}$, 所以

$$\varphi\left(4^k\left(x+h_j\right)\right)-\varphi\left(4^kx\right)=0.$$

当 $j>k$ 我们有

$$\varphi\left(4^k\left(x+h_j\right)\right)-\varphi\left(4^kx\right)=\pm4^{k-j}.$$

我们对上面等式解释更多一点, 实际上 h_j 的定义是保证 x 四进制展开中的每一个位置不会产生进位或者退位, 然后 4^kx 最接近的整数由 a_{k+1} 和 2 大小关系来确定. 上述的 h_j 定义同时保证了 $4^k(x+h_j),4^kx$ 最接近的整数可以是同一个.

现在

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(4^k\left(x+h_j\right)\right)-\varphi\left(4^kx\right)}{4^kh_j}=\sum_{k=0}^{j-1}\pm1,$$

从而

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(4^k\left(x+h_j\right)\right)-\varphi\left(4^kx\right)}{4^kh_j}$$

不存在, 因此 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(4^kx\right)}{4^k}$ 处处连续但是处处不可微.

19.3.2 基于 Weyl 等分布 *

例题 19.14 设 $p\in\mathbb{R}[x]$ 且次数大于 0, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin p(n)|}{n}$ 发散.

证明 假若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin p(n)|}{n}$ 收敛, 则由命题8.3, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\frac{|\sin p\left(k\right)|}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\sin p\left(k\right)|=0,$$

但是由 Weyl 等分布9.18和推论9.6, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\sin p\left(k\right)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\left(\pi\frac{p\left(k\right)}{\pi}\right)\right|=\int_0^1|\sin\left(\pi x\right)|\,\mathrm{d}x\neq0,$$

这就是一个矛盾! 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin p(n)|}{n}$ 发散.

例题 19.15

1. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sin n^2|}{n}$ 发散.
2. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sin n^2\sin n^3|}{n}$ 发散.

证明

1. 注意到
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sin n^2|}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sin^2 n^2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-\cos(2n)]\cdot[1-\cos(2n^2)]}{4n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{\bigstar}{n}\right),$$
容易观察上式打开括号之后 $\bigstar$ 可以用积化和差写成三角函数复合多项式的线性组合. 由 Weyl 等分布9.18和推论9.6我们知道
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\frac{\bigstar}{k}=0.$$
由非数学类极限习题15.我们知道
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bigstar}{k}=0.$$
于是 $\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{\bigstar}{k}\right)\sim\frac{\ln n}{4},n\to\infty$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sin n^2\sin n^3|}{n}$ 发散.
2. 注意到
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sin n^2\sin n^3|}{n}&\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sin^2 n^2\sin^2 n^3}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos(2n))\left(1-\cos(2n^2)\right)\left(1-\cos(3n^2)\right)}{8n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n}-\frac{\bigstar}{n}\right),\end{aligned}$$
容易观察上式打开括号之后 $\bigstar$ 可以用积化和差写成三角函数复合多项式的线性组合. 由 Weyl 等分布9.18和推论9.6我们知道
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\frac{\bigstar}{k}=0.$$
由非数学类极限习题15.我们知道
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bigstar}{k}=0.$$
于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8k}-\frac{\bigstar}{k}\right)\sim\frac{1}{8}\ln n,n\to\infty$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\sin n^2\sin n^3|}{n}$ 发散.

19.4 黎曼重排定理的技巧

本节是竞赛的热点题型, 其核心思想就一个: 如果大了, 就加一项变小, 如果小了, 就加一项变大.

定理 19.11 (黎曼重排定理)

设实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛. 固定 $-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty$, 则存在级数的重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a'_n$ 使得
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,S'_n=\beta,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,S'_n=\alpha,\tag{19.43}$$
这里 S'_n 是重排级数的部分和. ♡

笔记 定理叙述和证明思想都同等重要. 本结果比通常的黎曼重排定理要强. 证明的核心想法就是如果比 β 大, 则下一项加入负部来调小. 如果比 α 小了, 则下一项加入正部来调大.

注重排的严格叙述是: 固定一个双射 $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$. 因此排列 $1,3,5,\cdots,2,4,\cdots$ 是无意义的.

证明

考虑

$$p_n\triangleq\frac{a_n+|a_n|}{2},q_n\triangleq\frac{|a_n|-a_n}{2},\tag{19.44}$$

则

$$p_n+q_n=|a_n|,p_n-q_n=a_n.\tag{19.45}$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都发散. 现在把 a_n 中非负的项依此记作 $P_1,P_2,\cdots$, 负的项的绝对值依此记作 $Q_1,Q_2,\cdots$.

当 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 选取最小的 $m_1,k_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m_1}P_i>\beta,\sum_{i=1}^{m_1}P_i-\sum_{j=1}^{k_1}Q_j<\alpha.$$

选取最小的 $m_2,k_2\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m_1}P_i-\sum_{j=1}^{k_1}Q_j+\sum_{i=m_1+1}^{m_2}P_i>\beta,\sum_{i=1}^{m_1}P_i-\sum_{j=1}^{k_1}Q_j+\sum_{i=m_1+1}^{m_2}P_i-\sum_{j=k_1+1}^{k_2}Q_j<\alpha.$$

现在依此下去得到一个重排级数:

$$\sum_{i=1}^{m_1}P_i-\sum_{j=1}^{k_1}Q_j+\sum_{i=m_1+1}^{m_2}P_i-\sum_{j=k_1+1}^{k_2}Q_j+\cdots.$$

设部分和的子列刚好是加到 P_{m_n-1} 这种形式, 也就是说

$$\begin{cases}\text{第一项:}\quad P_1+\cdots+P_{m_1-1};\\ \text{第二项:}\quad P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots+P_{m_2-1};\\ \text{第三项:}\quad \cdots+P_{m_2+1}+\cdots+P_{m_3-1};\\ \vdots\end{cases}.$$

现在

$$\left(\cdots+P_{m_{n-1}+1}+\cdots+P_{m_n-1}\right)+P_{m_n}>\beta,\left(\cdots+P_{m_{n-1}+1}+\cdots+P_{m_n-1}\right)\leqslant\beta,$$

因此

$$0\leqslant\beta-\left(\cdots+P_{m_{n-1}+1}+\cdots+P_{m_n-1}\right)<P_{m_n}.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{m_n}=0$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cdots+P_{m_{n-1}+1}+\cdots+P_{m_n-1}\right)=\beta.$$

类似的, 设部分和子列刚好是加到 Q_{k_n-1} 这种形式并有

$$0\leqslant\left(\cdots-Q_{k_{n-1}+1}-\cdots-Q_{k_n-1}\right)-\alpha<Q_{k_n},\lim_{n\to\infty}Q_{k_n}=0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cdots-Q_{k_{n-1}+1}-\cdots-Q_{k_n-1}\right)=\alpha.$$

此外显然有上极限不超过 β, 下极限不小于 α, 这就证明了(19.43).

当 α,β 可以取 ∞ 时, 可取 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_n<\beta_n,\alpha_n\to\alpha,\beta_n\to\beta$. 考虑

$$\left(\cdots+\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n}P_j\right)>\beta_n,\left(\cdots-\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}Q_j\right)<\alpha_n,$$

即可完成构造并类似得到(19.43).

例题 19.16 设

$$\Gamma=\left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}:x_n=0,2\right\},f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

证明 $f(\Gamma)=[0,2]$.

证明 显然 $0\leqslant f\leqslant 2$ 且 $0,2$ 都能取到, 固定 $\alpha\in(0,2)$. 类似黎曼重排定理的证明, 我们考虑

$$x_1=0,x_{n+1}=\begin{cases}2, & \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\alpha\\ 0, & \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>\alpha\end{cases},n=1,2,\cdots.$$

现在如果存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n=2,\forall n\geqslant N$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=2.$$

如果存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n=0,\forall n\geqslant N$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0.$$

于是 x_n 是 $0,2$ 是交替着取.

若 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\alpha$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+2}{n+1}\geqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2}{n+1}\geqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n(n+1)},\end{aligned}$$

而后一式显然成立. 若 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>\alpha$, 则直接有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+0}{n+1}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

因此只需看从 α 下方跳到上方和从 α 上方跳到下方时和 α 的接近程度.

事实上, 若

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\alpha,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+2}{n+1}>\alpha,$$

则

$$\alpha<\frac{n}{n+1}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{2}{n+1}\leqslant\frac{n}{n+1}\alpha+\frac{2}{n+1}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\alpha,\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}=\alpha.\tag{19.46}$$

若

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>\alpha,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+0}{n+1}\leqslant\alpha,$$

类似可得(19.46), 这就证明了 $f(\Gamma)=[0,2]$.

例题 19.17 设

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty),\lim_{n\to\infty}a_n=0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{发散},$$

证明: 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{-1,1\}$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_na_n=x$.

证明 考虑

$$t_1=1,t_{n+1}=\begin{cases}1, & \sum\limits_{k=1}^{n}t_ka_k<x\\ -1, & \sum\limits_{k=1}^{n}t_ka_k\geqslant x\end{cases},n=1,2,\cdots.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散知 t_n 在 $1,-1$ 交替取值.

如果 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k < x$, 那么 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} t_k a_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k$. 如果 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k \geqslant x$, 那么 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} t_k a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k$. 所以极限被跳跃 x 时和 x 的接近程度决定.

当 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k < x, \sum\limits_{k=1}^{n+1} t_k a_k \geqslant x$, 则

$$0 < x - \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \leqslant a_{n+1}.$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k a_k = x, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} t_k a_k = x. \tag{19.47}$$

当 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k \geqslant x, \sum\limits_{k=1}^{n+1} t_k a_k < x$, 类似的可得(19.47), 于是我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n a_n = x$.

例题 19.18 对任何实数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 证明: 存在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{-1, 1\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n + a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha. \tag{19.48}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n + a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{a_k}{n}} - n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{a_k}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2n} + O\left(\frac{1}{n} \right) - n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

即只需寻找 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{-1, 1\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n}} = 2\alpha$.

考虑[10]

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n}} < 2\alpha \\ -1, & \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n}} \geqslant 2\alpha \end{cases}, n = 1, 2, \cdots.$$

设 $a_{n+1} = 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} > 0.
\end{aligned}$$

[10]注意仔细体会大了就调小, 小了就调大.

设 $a_{n+1}=-1$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}&=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\\&\leqslant-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<0.\end{aligned}$$

显然对 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$ 时 a_n 不能是常数列[11].

若 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}<2\alpha,\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}\geqslant 2\alpha$, 则

$$\begin{aligned}0\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}-2\alpha&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right)\frac{a_k}{\sqrt{n}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}-2\alpha\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right)\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}-2\alpha\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}=2\alpha,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}=2\alpha.\tag{19.49}$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}\geqslant 2\alpha,\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}<2\alpha$, 则

$$\begin{aligned}0\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{\sqrt{n+1}}-2\alpha&=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right)\frac{a_k}{\sqrt{n}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}-2\alpha\\&\geqslant-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right)\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}-2\alpha\\&\geqslant-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right),\end{aligned}$$

这同样有(19.49). 从而得到[12](19.48).

例题 19.19 考虑

$$P\triangleq\left\{\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}:p_1\geqslant 2,p_{n+1}\geqslant p_n^2,\forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

然后对 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\in P$, 定义

$$f\left(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right).$$

证明: f 是 P 到 $(1,2]$ 的双射.

证明 对任何 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\in P$, 注意到

$$p_n\geqslant p_{n-1}^2\geqslant p_{n-2}^{2^2}\geqslant\cdots\geqslant p_1^{2^{n-1}},\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_1^{2^{k-1}}}<\infty,$$

[11]如若不然, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{n}}=\infty,$$

和 a_n 定义矛盾!

[12]注意非跳跃处会更接近 2α.

我们有 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)$ 收敛从而 f 良定. 此外为了 f 值尽可能大, 显然 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体应该尽可能小, 所以

$$\begin{aligned}f&\leqslant\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^2}}\right)\prod_{k=3}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\\&=\cdots=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)=2.\end{aligned}$$

此外显然 $f>1+\frac{1}{p_1}$, 所以让 p_1 尽可能大我们就证明了 f 下界是 1 但不能达到.

设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty},\{q_n\}_{n=1}^{\infty}\in P$, 不妨设[13]$p_1>q_1$. 断言

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)<\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right).\tag{19.50}$$

事实上, 类似证明上界时的计算和无穷积 f 中的任何项都大于 1, 以及

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{q_1}\right)-1=\frac{p_1-q_1-1}{p_1q_1}\geqslant 0,$$

我们有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)\leqslant\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_1^{2^{n-1}}}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}<\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{q_1}\right)}\leqslant\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right).$$

现在得到了(19.50), 从而 f 是单射.

为证明 f 是满射, 对 $c\in(1,2)$ 我们来归纳构造 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\in P$ 使得

$$f\left(\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=c.\tag{19.51}$$

取整数 $\frac{1}{c-1}<h_1\leqslant\frac{c}{c-1}$, 当 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 取定, 取 h_{n+1} 是满足下述条件的最大自然数[14]

$$\frac{1}{\frac{c}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}-1}<h_{n+1}\leqslant\frac{1}{1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}}.\tag{19.52}$$

然后注意到

$$\begin{aligned}&h_n^2\leqslant\frac{1}{1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}}\Leftrightarrow\left(1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}\right)\leqslant\frac{1}{h_n^2}\\&\Leftrightarrow 1-\frac{1}{h_n^2}\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{h_n}\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}\\&\Leftrightarrow\left(1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}\right)\leqslant\frac{1}{h_n}\Leftrightarrow h_n\leqslant\frac{1}{1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}},\end{aligned}$$

于是我们有[15]$h_{n+1}\geqslant h_n^2$. 现在我们有

$$+\infty=\lim_{n\to\infty}h_{n+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}}\Rightarrow\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)=c,$$

[13]考虑最小的 k 使得 $p_k\neq q_k$, 因为前 $k-1$ 不影响, 所以不妨设 $k=1$.

[14]注意区间长度为 1, 所以这样的整数存在.

[15]注意 $h_n^2\leqslant\frac{1}{1-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{h_k}\right)}{c}}$ 意味着肯定有满足条件(19.52)和 $h_{n+1}\geqslant h_n^2$ 的整数存在, 现在我们取的是最大的.

这就证明了(19.51).

例题 19.20* 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{2,6\}$, 定义

$$F\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\triangleq\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{\cdots+\sqrt{a_n}}}}}.$$

证明 F 的值域是一个无内点的闭集.

证明 运用递增递推数列极限的结论8.4.1, 我们容易证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3,\text{当}x_{n+1}=\sqrt{6+x_n},x_1>0;$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2,\text{当}x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},x_1>0.$$

首先

$$F\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\cdots+\sqrt{6}}}}}=3;$$

$$F\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}=2.$$

注意到 $\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 赋予积拓扑是紧拓扑空间, 于是我们可以视

$$F:\{2,6\}^{\mathbb{N}}\to(0,+\infty).$$

注意到连续函数

$$F_m:\{2,6\}^{\mathbb{N}}\to(0,+\infty),\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\mapsto\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{\cdots+\sqrt{a_m}}}}},$$

我们断言 $\lim\limits_{m\to\infty}F_m=F$ 关于 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 一致收敛.

对 $m\geqslant n$, 我们由拉格朗日中值定理有

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{a_1+\cdots\sqrt{a_n+\sqrt{a_{n+1}+\cdots\sqrt{a_m}}}}-\sqrt{a_1+\cdots\sqrt{a_n}}\right|\\=&\frac{\sqrt{a_{n+1}+\sqrt{a_{n+2}+\cdots+\sqrt{a_m}}}}{2^n\sqrt{a_1+\cdots\sqrt{a_n+\theta}}\cdot\sqrt{a_2+\cdots\sqrt{a_n+\theta}}\cdot\cdots\cdot\sqrt{a_n+\theta}}\\\leqslant&\frac{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}{2^n}=\frac{3}{2^n},\end{aligned}$$

因此我们得到了一致收敛从而 F 是连续函数, 即 F 值域是紧集.

设 $\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}\neq\left\{a_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, 考虑最小 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a_N^{(1)}\neq a_N^{(2)}$. 不妨设 $a_N^{(1)}=2,a_N^{(2)}=6$. 于是

$$\begin{aligned}F\left(\left\{a_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}\right)&>F\left(a_1^{(2)},\cdots,a_{N-1}^{(2)},6,0,0,\cdots\right)\\&>F\left(a_1^{(2)},\cdots,a_{N-1}^{(2)},5,0,0,\cdots\right)=F\left(a_1^{(1)},\cdots,a_{N-1}^{(1)},2,6,6,\cdots\right)\\&\geqslant F\left(a_1^{(1)},\cdots,a_{N-1}^{(1)},2,a_{N+1}^{(1)},a_{N+2}^{(1)},\cdots\right)=F\left(\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}\right),\end{aligned}$$

即如果赋予 $\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 字典序, 则 F 严格递增. 又紧拓扑空间到 Hausdorff 空间的连续一一映射是同胚, 我们知道 F 的值域同胚 $\{2,6\}^{\mathbb{N}}$.

我们断言 $\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 是完全不连通空间, 即没有包含两个或两个以上点的连通子集, 从而 F 的值域也是完全连通空间, 自然 F 的值域没有内点.

设 $C\subset\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 是连通的且包含两个不同点

$$\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty},\left\{a_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}\in\{2,6\}^{\mathbb{N}}.$$

考虑最小 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a_N^{(1)}\neq a_N^{(2)}$. 不妨设 $a_N^{(1)}=2,a_N^{(2)}=6$.

注意到

$$U\triangleq\left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{2,6\}^{\mathbb{N}}:a_N=2\right\}$$

是 $\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 的既开又闭的集, 故 $U\bigcap C$ 是 C 的既开又闭的真子集, 这和 C 连通矛盾!, 因此我们有 $\{2,6\}^{\mathbb{N}}$ 是完全不连通空间.

我们完成了证明.

19.5 级数一致收敛性判断专题

例题 19.21 判断

$$f_n(x)=n^2\left(e^{x^n}-\cos x^n\right),x\in(0,1)$$

的一致收敛性.

证明 首先

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(e^{x^n}-\cos x^n\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(e^{x^n}-1\right)+\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos x^n\right)=0.$$

然后

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}n^2\left|e^{x^n}-\cos x^n\right|=\lim_{n\to\infty}n^2\left(e-\cos 1\right)=+\infty,$$

即 $f_n(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 不一致收敛.

例题 19.22 判断下列级数在指定区间一致收敛性.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}},[0,+\infty)$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2},[-a,a],a>0$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right),[-1,1]$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)},[0,+\infty)$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right),(0,+\infty)$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2x}{x+n^3x^2},(0,+\infty)$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2,[0,+\infty)$.

证明

1. 显然 $\left|\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^j\right|\leqslant 2$ 以及对每一个 $x\in[0,+\infty)$ 都有 $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 单调递减. 又
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\to 0,n\to\infty,$$
我们由一致收敛的 A-D 判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.
2. 显然 $\left|\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^j\right|\leqslant 2$ 以及对每一个 $x\in[-a,a]$ 都有 $\frac{n+x^2}{n^2}$ 单调递减. 又
$$\frac{n+x^2}{n^2}\leqslant\frac{n+a^2}{n^2}\to 0,n\to\infty,$$
我们由一致收敛的 A-D 判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}$ 在 $[-a,a]$ 一致收敛.

3. 注意到
$$\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)\right|=\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\frac{x^m}{m+1}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}=0,$$
我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛.

4. 一方面, 对 $x\in[1,+\infty),n\in\mathbb{N}$, 我们有
$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},\forall x\in[1,+\infty).$$
另外一方面, 对 $n\geqslant 2,x\in[0,1)$, 我们有
$$\begin{aligned}&\frac{x^{2n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n+1})}\leqslant\frac{x^{2n}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})}\\&\leqslant\underbrace{\frac{x^{2n}}{(1+x^n)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}}_{n\text{个}}\leqslant\frac{x^{2n}}{C_n^2x^{2n}}=\frac{2}{n(n-1)},\end{aligned}$$
即由魏尔斯特拉斯判别法和
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}<\infty,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n-1)}<\infty,$$
我们知道原级数一致收敛.

5. 首先
$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}},\forall x>0,n\in\mathbb{N}.$$
然后
$$\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\right)'=\frac{\sqrt{x}\left(3-nx^2\right)}{2n\left(1+x^2n\right)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\leqslant\frac{\sqrt{x}}{n}\frac{x}{1+nx^2}\Big|_{x=\sqrt{\frac{3}{n}}}=\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{4}}.$$
这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

6. 我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2x}{x+n^3x^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2x}{2n^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}\leqslant\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{\sin^2x}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\infty,$$
即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2x}{x+n^3x^2},(0,+\infty)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

7. 因为
$$\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)'=\frac{n^2-x^2}{\left(x^2+n^2\right)^2},$$
于是我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+n^2}\right)^2<\infty,$$
即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2+x^2}\right)^2$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

例题 19.23 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 是否一致收敛.

笔记 连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 一致收敛, 则在 $\overline{I}$ 也一致收敛, 这是因为有等式
$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|=\sup_{x\in\overline{I}}|f_n(x)-f_m(x)|.$$

我们可以猜测级数值

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\Im\left(\frac{e^{inx}}{n}\right)=\Im\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}=\Im\left(-\ln\left(1-e^{ix}\right)\right)=-\arg\left(1-e^{ix}\right)\\&=-\arg\left(1-\cos x-i\sin x\right)=\arctan\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{\pi}{2}-\arctan\tan\frac{x}{2}=\frac{\pi-x}{2},\end{aligned}$$

然后对 $\frac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi)$ 做奇延拓之后在 $[-\pi,\pi]$ 展开为傅立叶级数, 从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi).$$

这个级数结果应当记忆.

证明 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 一致收敛, 则在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 也一致收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot0)}{n}\neq\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

这就和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $x=0$ 应该连续矛盾! 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 不一致收敛.

例题 19.24 判断下列级数在指定区间一致收敛性.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}\frac{x^2\sin x}{1+n^5x^4},(-\infty,+\infty)$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^{-n^5x^2}\sin(nx)\right],(0,+\infty)$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+nx^2},(0,+\infty)$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\frac{x}{\ln n}}{(n\ln n+x)^2},[0,+\infty)$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(1+\frac{x}{n}\right),x\in[a,b]$.

证明

1. 注意到

$$\left(\frac{x^2}{1+n^5x^4}\right)'=\frac{2x\left(1-n^5x^4\right)}{\left(1+x^4n^5\right)^2},$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2}{n+1}\frac{x^2\sin x}{1+n^5x^4}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2}{n+1}\frac{x^2}{1+n^5x^4}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\frac{x^2}{1+n^5x^4}\right)|_{x=\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\infty.$$

现在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}\frac{x^2\sin x}{1+n^5x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

2. 注意到

$$\left(xe^{-n^5x^2}\right)'=\left(1-2n^5x^2\right)e^{-n^5x^2},$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{-n^5x^2}\sin(nx)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nxe^{-n^5x^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nxe^{-n^5x^2}|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{5}{2}}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2e}n^{\frac{3}{2}}}<\infty.$$

现在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^{-n^5x^2}\sin(nx)\right]$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

3. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+nx^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(1+nx^2\right)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n2\sqrt{nx}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}<\infty.$$

现在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+nx^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

4. 注意到
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\arctan\frac{x}{\ln n}}{(n\ln n+x)^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\ln n\cdot(n\ln n+x)^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\ln n\cdot 4x\cdot n\ln n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}<\infty.$$
现在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\frac{x}{\ln n}}{(n\ln n+x)^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.
5. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, $\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)$ 在 n 充分大时单调递减且一致有界. 因此由一致收敛的 A-D 判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

例题 19.25 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 令
$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],n=1,2,\cdots.$$
试证明对任给区间 $[a,b]$ 都有 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f'(x)$.

证明 由 f' 内闭一致连续性, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in[a,b],t\in[0,\delta]$, 我们有
$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant\epsilon.$$
当 $n>\frac{1}{\delta}$, 我们对任何 $x\in[a,b]$ 有
$$\begin{aligned}|f_n(x)-f'(x)|&=n\left|\int_x^{x+\frac{1}{n}}f'(y)-f'(x)\,\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant n\int_x^{x+\frac{1}{n}}|f'(y)-f'(x)|\,\mathrm{d}y=n\int_0^{\frac{1}{n}}|f'(x+t)-f'(x)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\epsilon n\int_0^{\frac{1}{n}}1\mathrm{d}t=\epsilon,\end{aligned}$$
这就证明了 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f'(x)$.

例题 19.26 讨论下列函数在给定区间可微性.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x},(0,+\infty)$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3},(-\infty,+\infty)$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),(-\infty,+\infty)$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x,\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

证明
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$ 显然收敛. 考虑逐项微分级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n^2\pi x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}-n^2\pi e^{-n^2\pi x}.$$
对任何 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 我们有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|-n^2\pi e^{-n^2\pi x}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi e^{-n^2\pi a}<\infty,$$
即内闭一致收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$ 在 $(0,+\infty)$ 可微.
2. 注意到
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$
于是我们有原级数和逐项微分级数一致收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微.

3. 显然

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\downarrow 0,\forall x\in\mathbb{R},$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 考虑逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}\right).$$

注意到

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\right|\leqslant 1,\left|\frac{1}{n+x^2}\right|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},$$

以及对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $\frac{1}{n+x^2}$ 递减, 因此由一致收敛的 A-D 判别法我们知道逐项微分级数一致收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微.

4. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 收敛. 因为可微性是局部的概念, 我们来证明逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2x+1\right)$$

在任何 $[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 一致收敛.

显然存在 $c_{a,b}\in(0,1)$ 使得

$$|\tan x|\leqslant c_{a,b},\forall x\in[a,b].$$

于是我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2x+1\right)\right|\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}c_{a,b}^{n-1}<\infty.$$

因此逐项微分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n}\tan^{n-1}x\left(\tan^2x+1\right)$$

在 $[a,b]$ 一致收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan^n x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 可微.

例题 19.27 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $[0,\lambda],\lambda>0$ 的一致收敛性.

证明 注意到

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\left[\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right],n=2,3,\cdots.$$

于是我们有

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)}.$$

现在

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x>0\\ \frac{1}{1+x}-1, & x=0\end{cases}.$$

于是由级数和函数不连续知其在 $[0,\lambda],\lambda>0$ 不一致收敛.

例题 19.28 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,b]$ 和 $[0,+\infty)$ 的一致收敛性.

证明 首先注意到

$$\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]'=e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\geqslant 0,$$

我们有

$$e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n.$$

由 Taylor 公式得

$$e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\sim\frac{e^bb^2}{2n},n\to\infty,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\right]<\infty.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,b]$ 一致收敛. 注意到

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\right|=+\infty,$$

我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 19.29 对 $\alpha>0$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^\alpha e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 注意到

$$\left(x^\alpha e^{-nx}\right)'=(\alpha-nx)\,x^{\alpha-1}e^{-nx},$$

我们有

$$x^\alpha e^{-nx}\leqslant\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha>1$, 我们由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty$ 知原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

当 $\alpha\in[0,1)$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^\alpha e^{-nx}=\begin{cases}\frac{x^\alpha}{e^x-1}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

如果原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 那么上述和函数在 $x=0$ 应该连续. 但是

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha}{e^x-1}\neq0,$$

故原级数在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛.

例题 19.30 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$ 在 $x\in[0,1)$ 一致收敛性.

证明 同例题19.23的证明. 注意到如果上述级数在 $x\in[0,1)$ 一致收敛, 则考虑 cauchy 收敛准则知在 $x=1$ 也必然收敛. 但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+1}=+\infty$, 因此原级数在 $x\in[0,1)$ 不一致收敛.

例题 19.31 求 α 的范围, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

笔记 我们只需保证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$$

收敛. 虽然一般情况这并不能说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha=+\infty$$

时一定有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 不一致收敛, 但是对具体例子, 我们通过对 x 赋值往往能实现这一点.

证明 当 $\alpha>1$, 首先由

$$\left[\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha\right]'=\left(x-\frac{1}{n}\right)^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}\left[n+\frac{\alpha}{n}-(n+\alpha)x\right]$$

知

$$\sup_{x\in[0,1]}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha=\left(\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{n+\frac{\alpha}{n}}{n+\alpha}\right)^\alpha\sim\frac{C}{n^\alpha},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

当 $\alpha\leqslant 0$, 原级数在 $x=1$ 都不收敛.

当 $0<\alpha\leqslant 1$, 当 $N\to+\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\geqslant\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}-\frac{1}{N}\right)^n\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\\
&=\sum_{n=N}^{2N-1}\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^n\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\geqslant N\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{2N-1}\left(1-\frac{N+\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\\
&\geqslant N\left(\frac{N^2-N}{(N+\alpha)N}\right)^{2N-1}\left(\frac{\alpha-\frac{\alpha}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha=\alpha^\alpha N\left(\frac{N-1}{N+\alpha}\right)^{2N-1}\left(\frac{1-\frac{1}{N}}{N+\alpha}\right)^\alpha\to+\infty,
\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}\right)^n(1-x)^\alpha$ 在 $x\in[0,1]$ 不一致收敛.

例题 19.32 求 p,q 的范围使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+n^qx^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

笔记 证明的想法即围绕均值不等式及其取等条件来考虑.

证明 我们断言 $p+q>2$ 为所求. 一方面, 由均值不等式, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{n^p+n^qx^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{2\sqrt{n^{p+q}x^2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}<\infty.$$

故由优级数存在性我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+n^qx^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

当 $p+q\leqslant 2$, 不妨设 $p,q\geqslant 0$, 其他情况更难一致收敛. 现在我们有

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=m+1}^{2m}\frac{x}{n^p+n^qx^2}\right|&\geqslant\left|\sum_{n=m+1}^{2m}\frac{\sqrt{\frac{(2m)^p}{(2m)^q}}}{n^p+n^q\left(\sqrt{\frac{(2m)^p}{(2m)^q}}\right)^2}\right|\\
&\geqslant\left|\sum_{n=m+1}^{2m}\frac{\sqrt{\frac{(2m)^p}{(2m)^q}}}{(2m)^p+(2m)^q\left(\sqrt{\frac{(2m)^p}{(2m)^q}}\right)^2}\right|=\frac{1}{2^{\frac{p+q}{2}+1}}\frac{1}{m^{\frac{p+q}{2}-1}},
\end{aligned}$$

于是我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+n^qx^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛.

例题 19.33 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

证明 对 $p\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{N}$, 注意到

$$\sum_{n=m}^{m+p}\int_0^x t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=m}^{m+p}t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(t^m-t^{m+p+1}\right)\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\mathrm{d}t,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x\left(t^m-t^{m+p+1}\right)\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 t^m\left|\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\right|\mathrm{d}t\\
&\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\right|\int_0^1 t^m\mathrm{d}t=\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\right|\cdot\frac{1}{m+1},
\end{aligned}$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

例题 19.34 对 $x\in[0,1]$, 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos(nx)}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}$$

一致收敛性.

笔记 本题注意不能直接 A-D 判别法, 因为 0 附近 cos 求和有奇性, 正确的方法是回到 A-D 判别法证明过程中去修正细节.

证明 一方面

$$\left|\sum_{j=m}^{n}\cos(jx)\right|=\left|\frac{\cos\left(\frac{2nx+x-\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{2mx-x-\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|},\forall x\in(0,1],n\geqslant m,n,m\in\mathbb{N}.$$

另外一方面 $\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}$ 关于 n 递减且

$$\frac{1}{x}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\leqslant\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}\leqslant\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}=\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N},x\in[0,1].$$

于是考虑 $f_n(x)\triangleq\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}$ 并用 Abel 变换8.2得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=m}^{m+p}f_n(x)\cos(nx)\right|&=\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}[f_n(x)-f_{n+1}(x)]\sum_{j=m}^{n}\cos(jx)+f_{m+p}(x)\sum_{j=m}^{m+p}\cos(jx)\right|\\&\leqslant\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}[f_n(x)-f_{n+1}(x)]\sum_{j=m}^{n}\cos(jx)\right|+\left|f_{m+p}(x)\sum_{j=m}^{m+p}\cos(jx)\right|\\&\leqslant\sum_{n=m}^{m+p-1}[f_n(x)-f_{n+1}(x)]\left|\sum_{j=m}^{n}\cos(jx)\right|+f_{m+p}(x)\cdot\left|\sum_{j=m}^{m+p}\cos(jx)\right|\\&\leqslant\left[\sum_{n=m}^{m+p-1}[f_n(x)-f_{n+1}(x)]+f_{m+p}(x)\right]\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\frac{f_m(x)}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\\&\overset{\text{Jordan 不等式 }\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\leqslant}\frac{\pi}{x}\cdot f_m(x)\leqslant\frac{\pi}{m}.\end{aligned}$$

因此原级数对 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

例题 19.35 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}$ 在任何有限闭区间上一致收敛的充要条件是 $\alpha>\frac{1}{2}$.

证明 充分性:

当 $\alpha>\frac{1}{2}$, 对任何 $[a,b]$, 利用 $|\sin x|\leqslant|x|$ 和均值不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}\right|\leqslant|x|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\frac{1}{n^\alpha}<\infty,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

必要性:

当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, 注意到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}\sin\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{k^\alpha}\right|&\geqslant\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}\sin\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(2n)^\alpha},\\&=\frac{n+1}{1+2}\sin\left(\frac{1}{2^\alpha n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right)\sim\frac{1}{3\cdot2^\alpha}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}},n\to\infty\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛.

当 $\alpha<0$, 注意到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+k\left(2n\right)^{2\alpha}}\sin\frac{\left(2n\right)^{\alpha}}{k^{\alpha}}\right|\geqslant\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{1+2n\left(2n\right)^{2\alpha}}\sin\frac{\left(2n\right)^{\alpha}}{n^{\alpha}},\\&=\frac{n+1}{1+\left(2n\right)^{2\alpha+1}}\sin\left(2^{\alpha}\right)\to+\infty,n\to\infty\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^{\alpha}}$ 在 $[0,2^{\alpha}]$ 不一致收敛.

我们完成了证明.

例题 19.36 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且有界, 考虑

$$f_n\left(x\right)=\frac{n\int_0^1 f\left(x+t\right)e^{-nt}\mathrm{d}t}{1-e^{-n}},n=1,2,\cdots.$$

证明:f_n 一致收敛到 f.

证明 由 f 一致连续且有界, 设 $M\triangleq\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f\left(x\right)\right|$ 且对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall\left|y-x\right|\leqslant\delta.$$

再取 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{2M\left(1-\delta\right)n}{1-e^{-n}}e^{-n\delta}\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall n\geqslant N.$$

于是对 $n\geqslant N,x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|&=\left|\frac{n\int_0^1 f\left(x+t\right)e^{-nt}\mathrm{d}t}{1-e^{-n}}-\frac{n\int_0^1 f\left(x\right)e^{-nt}\mathrm{d}t}{1-e^{-n}}\right|\\&\leqslant\frac{n}{1-e^{-n}}\int_0^{\delta}\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|e^{-nt}\mathrm{d}t+\frac{n}{1-e^{-n}}\int_{\delta}^1\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|e^{-nt}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{n}{1-e^{-n}}\frac{\epsilon}{2}\int_0^{\delta}e^{-nt}\mathrm{d}t+\frac{2Mn}{1-e^{-n}}\int_{\delta}^1 e^{-nt}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{n}{1-e^{-n}}\frac{\epsilon}{2}\int_0^1 e^{-nt}\mathrm{d}t+\frac{2M\left(1-\delta\right)n}{1-e^{-n}}e^{-n\delta}\\&\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 f_n 一致收敛到 f.

例题 19.37 设 $f_1\in C\left[a,b\right],x_0\in\left[a,b\right]$. 考虑函数列

$$f_{n+1}\left(x\right)=\int_{x_0}^{x}f_n\left(t\right)\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

讨论 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛性.

笔记 要注意积分上下限大小问题. 如果积分上限小于下限, 则绝对值不等式要反一下上下限使得上限大于下限, 且看下面操作.

证明 设 $M\triangleq\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_1\left(x\right)\right|$, 我们归纳证明

$$\left|f_n\left(x\right)\right|\leqslant\frac{M}{\left(n-1\right)!}\left|x-x_0\right|^{n-1}.\tag{19.53}$$

现在(19.53)对 $n=1$ 已经成立. 假设 n 时成立, 我们对 $b\geqslant x\geqslant x_0$ 有

$$\left|f_{n+1}\left(x\right)\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}\left|f_n\left(t\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{\left(n-1\right)!}\int_{x_0}^{x}\left|x-x_0\right|^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{M}{n!}\left|x-x_0\right|^{n}.$$

对 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 有

$$\left|f_{n+1}\left(x\right)\right|\leqslant\int_{x}^{x_0}\left|f_n\left(t\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{\left(n-1\right)!}\int_{x}^{x_0}\left|x-x_0\right|^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{M}{n!}\left|x-x_0\right|^{n}.$$

现在由数学归纳法知对一切 $n\in\mathbb{N}$ 都有(19.53)成立, 故

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1}\leqslant\frac{M}{(n-1)!}\max\left\{|b-x_0|^{n-1},|x_0-a|^{n-1}\right\},$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 0.

例题 19.38 求 R 最大值 $R_{\max}$ 使得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

在 $x\in(0,R_{\max})$ 收敛. 并问是否有 $f\in C^{\infty}(0,R_{\max})$?.

证明 由例题8.6注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{n^{\ln x}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln x\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)}=x^{\gamma},\forall x\in(0,+\infty).\tag{19.54}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\ln x}},$$

从而 $R_{\max}=\frac{1}{e}$.

在 $[a,b]\subset\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上逐项微分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-m+1\right)x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-m}\right]$$

由例题8.6和(19.54)得

$$\begin{aligned}&\left|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-m+1\right)x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-m}\right|\\&\leqslant\left|\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-m+1\right)b^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-m}\right|\\&\sim\ln^m n\cdot b^{-m}\cdot n^{\ln b}\cdot b^{\gamma}=b^{\gamma-m}\cdot\frac{\ln^m n}{n^{-\ln b}},n\to\infty,\end{aligned}$$

即这些逐项微分得到的幂级数都内闭一致收敛. 因此我们证明了 $f\in C^{\infty}(0,R_{\max})$.

来看一个 25 湘潭大学的一个考研题.

例题 19.39 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$, 证明:$f$ 在 $[0,+\infty)$ 可导且一致连续. 再证明 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明 首先

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,\forall x\geqslant0,$$

即原级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛且由级数的控制收敛定理18.16得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^n+x}=0.$$

现在由例题13.14知 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

又

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2^n+x}\right)'\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^n+x)^2}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}<\infty,$$

即原级数逐项微分级数也在 $[0,+\infty)$ 一致收敛. 因此我们知道 f 在 $[0,+\infty)$ 可导.

注意到

$$\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=+\infty,$$

故 $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例题 19.40 设 $a_n>0, n=0,1,\cdots$ 且 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n!$ 收敛, 证明:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!.$$

笔记 直观上, 我们应该有

$$\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} n!a_n. \tag{19.55}$$

实际上(19.55)可以直接由 Levi 定理得到, 即非负无脑换, 这不失为一种考场来不及解决时救命的方法.

证明 一方面, 对任何 $m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{m} a_n\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{m} n!a_n,$$

即让 $m\to\infty$ 得

$$\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=0}^{\infty} n!a_n.$$

另外一方面, 由于幂级数在收敛域内内闭一致收敛, 所以对任何 $t>0$ 都有

$$\int_0^{t} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^{t} x^n e^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!,$$

即让 $t\to+\infty$ 得

$$\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!,$$

这就证明了

$$\int_0^{\infty} f(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!.$$

例题 19.41 设 $u_n\in R[0,1], n=1,2,\cdots$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛. 设

$$v_n(x)=\int_0^1 u_n(t)\sqrt{x+t}\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots.$$

证明 $v_n\in C^1(0,1)\bigcap C[0,1], n=1,2,\cdots$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 收敛于连续函数 $S(x), x\in[0,1]$.

证明 对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 作为常意积分, 显然有

$$\int_0^1 u_n(t)\sqrt{x+t}\mathrm{d}t\in C[0,1],\int_0^1 u_n(t)\frac{1}{2\sqrt{x+t}}\mathrm{d}t\in C(0,1). \tag{19.56}$$

我们只需要证明

$$v_n'(x)=\int_0^1 u_n(t)\frac{1}{2\sqrt{x+t}}\mathrm{d}t.$$

对 $x_0\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}v_n'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{v_n(x)-v_n(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\int_0^1 u_n(t)\frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x_0+t}}{x-x_0}\mathrm{d}t\\&\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=}\lim_{x\to x_0}\int_0^1 u_n(t)\frac{1}{2\sqrt{\theta+t}}\mathrm{d}t=\int_0^1 u_n(t)\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2\sqrt{\theta+t}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 u_n(t)\frac{1}{2\sqrt{x_0+t}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这就得证 $v_n\in C^1(0,1)\bigcap C[0,1], n=1,2,\cdots$.

注意到

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} v_n(x)\right| = \left|\int_0^1 \sum_{n=m}^{m+p} u_n(t)\sqrt{x+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n(t)\right| \cdot \int_0^1 \sqrt{1+t}\mathrm{d}t, \forall x\in[0,1],$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 一致收敛, 从而收敛到连续函数 $S(x), x\in[0,1]$.

注 有同学对(19.56)证明还是困惑, 我们来证明一下.

对 $x_0\in[0,1]$, 我们有

$$\int_0^1 |u_n(t)|\cdot\left|\sqrt{x+t}-\sqrt{x_0+t}\right|\mathrm{d}t = |x-x_0|\int_0^1 |u_n(t)|\cdot\frac{1}{\sqrt{x+t}+\sqrt{x_0+t}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\int_0^1 |u_n(t)|\mathrm{d}t,$$

即

$$\lim_{x\to x_0} v_n(x) = v_n(x_0).$$

对 $x_0\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |u_n(t)|\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{x+t}}-\frac{1}{2\sqrt{x_0+t}}\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 |u_n(t)|\cdot\left|\frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x_0+t}}{\sqrt{x+t}\sqrt{x_0+t}}\right|\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 |u_n(t)|\cdot\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x+t}\sqrt{x_0+t}\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x_0+t}\right)}\right|\mathrm{d}t\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}\right|\int_0^1 |u_n(t)|\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x\to x_0} v_n'(x) = v_n'(x_0).$$

例题 19.42 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛.

证明 对任何 $[a,b]\subset(-1,1)$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\max\{|a|,|b|\}+\frac{1}{N}<1.$$

我们有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\left(|x|+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\left(\max\{|a|,|b|\}+\frac{1}{N}\right)^n < \infty,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[a,b]$ 一致收敛, 因此在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛.

例题 19.43 证明 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛性.

笔记 注意到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t^2+x}\right) = \frac{x-t^2}{(x+t^2)^2},$$

所以不能找到和 x 无关的 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{t}{t^2+x}$ 在 $[N,+\infty)$ 递减, 因此不能直接使用一致收敛的 A-D 判别法.

证明 **Method 1**

由 Abel 变换8.2得对任何 $m\in\mathbb{N}$ 成立

$$\begin{aligned}\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{t=m}^{n}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{t=m}^{n-1}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t+\frac{n}{n^2+x}s_n\right]\\&=\sum_{t=m}^{\infty}\left(\frac{t}{t^2+x}-\frac{t+1}{(t+1)^2+x}\right)s_t\\&=\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t-\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t,\end{aligned}$$

这里 $s_t\in\{1,-1\}$.

一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{t^2+t}{t^2(t^2+2t+1)},$$

另外一方面

$$\left|\sum_{t=m}^{\infty}\frac{x}{(x+t^2)(x+t^2+2t+1)}s_t\right|\leqslant\sum_{t=m}^{\infty}\frac{1}{t^2+t+1}.$$

于是我们有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{t=m}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}=0,\text{关于}x\in[0,+\infty)\text{一致},$$

这就证明了 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

Method 2

注意到

$$\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t}\frac{t^2}{t^2+x},$$

则 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t}$ 收敛且 $0\leqslant\frac{t^2}{t^2+x}\leqslant1$. 对固定的 $x\geqslant0$ 也有 $\frac{t^2}{t^2+x}$ 关于 $t\in\mathbb{N}$ 单调递增. 此时就可以直接使用一致收敛的 A-D 判别法得 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{t}{t^2+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

例题 19.44 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}x^n$ 在 $x\in(0,1)$ 一致收敛性.

证明 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}x^n=\frac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}\cdot\frac{x}{1-x}\in C[0,1],$$

即由 Dini 定理13.39知原级数在 $x\in(0,1)$ 一致收敛.

例题 19.45 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛性.

证明 显然 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 关于 n 单调且一致有界. 又由例题18.64得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\right),$$

于是由级数一致收敛的 A-D 判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛.

例题 19.46* 证明

$$\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\int_{t^2}^{2t+t^2}\frac{1}{\sqrt{y(y+x)}}\mathrm{d}y$$

关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛.

证明 我们证明对 $x>0$,

$$\int_0^2\left(\frac{1}{y+t^2}-\frac{t}{\sqrt{\left(y+t^2\right)\left(t^2y+t^4+x\right)}}\right)\mathrm{d}y$$

关于 $t\geqslant 1$ 递减. 事实上

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y+t^2}-\frac{t}{\sqrt{\left(y+t^2\right)\left(t^2y+t^4+x\right)}}\right)\\
&=\frac{2t^8+4t^6y+2t^4y^2-2t^5\sqrt{t^6+2t^4y+t^2y^2+xy+t^2x}-2t^3y\sqrt{t^6+2t^4y+t^2x+t^2y^2+xy}}{\left(y+t^2\right)^2\left(x+t^4+t^2y\right)\sqrt{\left(y+t^2\right)\left(t^2y+t^4+x\right)}}\\
&\quad+\frac{-t^2xy-2tx\sqrt{t^6+2t^4y+t^2x+t^2y^2+xy}-xy^2}{\left(y+t^2\right)^2\left(x+t^4+t^2y\right)\sqrt{\left(y+t^2\right)\left(t^2y+t^4+x\right)}}\\
&\leqslant\frac{2t^8+4t^6y+2t^4y^2-2t^5\sqrt{\left(t^3+ty\right)^2}-2t^3y\sqrt{\left(t^3+ty\right)^2}}{\left(y+t^2\right)^2\left(x+t^4+t^2y\right)\sqrt{\left(y+t^2\right)\left(t^2y+t^4+x\right)}}\\
&=\frac{2t^8+4t^6y+2t^4y^2-2t^8-2t^6y-2t^6y-2t^4y^2}{\left(y+t^2\right)^2\left(x+t^4+t^2y\right)\sqrt{\left(y+t^2\right)\left(t^2y+t^4+x\right)}}=0.
\end{aligned}$$

现在

$$\int_{t^2}^{2t+t^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\right)\mathrm{d}y=\int_0^2\left(\frac{1}{y+t}-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\left(y+t\right)\left(ty+t^2+x\right)}}\right)\mathrm{d}y$$

关于 $t\geqslant 1$ 递减. 又

$$0\leqslant\int_{t^2}^{2t+t^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\right)\mathrm{d}y\leqslant\int_{t^2}^{2t+t^2}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{t},$$

即

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t^2}^{2t+t^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\right)\mathrm{d}y=0$$

关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致的成立. 故由一致收敛的 A-D 判别法得

$$\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\int_{t^2}^{2t+t^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\right)\mathrm{d}y$$

关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛.

注意到

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left[(-1)^t\int_{t^2}^{t^2+2t}\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\mathrm{d}y\right]=\sum_{t=1}^{\infty}\left[(-1)^t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right]-\sum_{t=1}^{\infty}\left[(-1)^t\int_{t^2}^{t^2+2t}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\right)\mathrm{d}y\right],$$

我们知道

$$\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\int_{t^2}^{2t+t^2}\frac{1}{\sqrt{y\left(y+x\right)}}\mathrm{d}y$$

关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛.

例题 19.47 设 $\{x_n\}\subset(0,1)$ 满足对 $i\neq j$, 有 $x_i\neq x_j$, 讨论函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 连续性.

证明 首先由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}\left(x-x_n\right)}{2^n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

故级数一致收敛. 注意到 $x\neq x_n,n=1,2,\cdots$, sgn 函数是连续函数, 则 f 在异于 $x_n,n=1,2,\cdots$ 处连续. 对

$k\in\mathbb{N}$, 异于 k 的 n, 显然 $\operatorname{sgn}(x-x_n)$ 在 x_k 是连续的. 又 $\operatorname{sgn}(x-x_k)$ 在 $x=x_k$ 是不连续的, 因此

$$f(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}+\sum_{n\neq k}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在 $x=x_k$ 是不连续函数.

例题 19.48 设 $a_n>0$ 是趋于 0 的递减数列, 证明：在 $\mathbb{R}$ 上, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx$ 一致收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=0$.

证明 必要性：

注意到利用单调性有

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}2na_{2n}\leqslant\frac{4}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}a_k\sin\frac{k\pi}{4n}=0,0\leqslant\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}\cdot2na_{2n}=0,$$

因此由命题7.4有

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

充分性：

因为 sin 是周期 2π 的奇函数, 我们证明在 $x\in[0,\pi]$ 证明一致收敛即可.

相似定义18.4的计算, 注意

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos[(n-\frac{1}{2})x]-\cos[(m+\frac{1}{2})x]\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.\tag{19.57}$$

于是对 $x\in\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$, 由 Abel 变换8.2有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}[\sum_{k=n}^{m-1}|a_k-a_{k+1}|+a_m]=\frac{a_n}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{\pi a_n}{x}\leqslant na_n.$$

对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$, 由

$$|\sin(kx)|\leqslant k|\sin x|.\tag{19.58}$$

有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|\sum_{k=n}^{m}ka_k\leqslant|x|\sum_{k=n}^{m}ka_k\leqslant\frac{\pi}{m}\sum_{k=n}^{m}ka_k.$$

对 $x\in\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right]$, 取 $\ell=\left[\frac{\pi}{x}\right],x\in\left[\frac{\pi}{\ell+1},\frac{\pi}{\ell}\right]$, 由前面的推导有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|\leqslant\left|\sum_{k=n}^{\ell}a_k\sin kx\right|+\left|\sum_{k=\ell+1}^{m}a_k\sin kx\right|\leqslant\frac{\pi}{\ell}\sum_{k=n}^{\ell}ka_k+(\ell+1)a_{\ell+1}.$$

由 Stolz 定理9.1我们知道 $\lim\limits_{\ell\to+\infty}\frac{1}{\ell}\sum\limits_{k=1}^{\ell}ka_k=0$. 因此上述估计右边的项会当 n,m 充分大[16]时任意小, 这就完成了证明.

结论

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right|\leqslant2\sqrt{\pi},\forall n\in\mathbb{N}.\tag{19.59}$$

[16]此时 ℓ 也会充分大.

证明 由 sin 周期性和奇函数, 只需对 $x\in(0,\pi]$ 证明(19.59)即可. 待定 $q\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right|&\leqslant\sum_{k=1}^{q}\frac{|\sin(kx)|}{k}+\left|\sum_{k=q+1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right|\\&\overset{|\sin x|\leqslant|x|,(19.57),\text{Abel 变换}8.2}{\leqslant}\sum_{k=1}^{q}\frac{kx}{k}+\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left[\sum_{k=q+1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{n}\right]\\&=qx+\frac{1}{(q+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\overset{\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x}{\leqslant}qx+\frac{\pi}{(q+1)x}.\end{aligned}$$

取 $q=\left\lfloor\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right\rfloor$, 利用

$$x\geqslant\lfloor x\rfloor\geqslant x-1,\forall x\in\mathbb{R},$$

我们有

$$qx+\frac{\pi}{(q+1)x}\leqslant\sqrt{\pi}+\frac{\pi}{\sqrt{\pi}}=2\sqrt{\pi},$$

这就完成了证明.

例题 19.49 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 证明对任何闭区间 $[a,b]$,

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right),n=1,2,\cdots$$

在 $[a,b]$ 一致收敛.

证明 对任何 $\epsilon>0$, 因为 f 内闭一致连续, 我们知道存在 $\delta>0$ 使得当

$$|z_1-z_2|\leqslant\delta,z_1,z_2\in[a,b+1],$$

成立

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant\epsilon.$$

当正整数 $n>\frac{1}{\delta}$, 对 $x\in[a,b]$, 因为

$$\left|x+t-x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\delta,\forall t\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right],$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-\int_0^1f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n}\epsilon\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}1\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon}{n}=\epsilon,\end{aligned}$$

即在 $[a,b]$ 上有

$$f_n(x)\rightrightarrows\int_0^1f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

例题 19.50 讨论 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续性.

证明 对 $x_0\in(0,2\pi)$ 的小邻域, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

是一致有界的且 $\frac{1}{\sqrt{n}}\downarrow0$. 因此由级数的一致收敛的 A-D 判别法我们得原级数在这个小邻域一致收敛, 即 f 在 x_0 连续.

注意到

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{N}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\sqrt{n}}=\sum_{r=1}^{N}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(qN+r)\pi}{N}\right)}{\sqrt{qN+r}}\\
&=\sum_{r=1}^{N}\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{\sqrt{qN+r}}\\
&\geqslant\sum_{r=1}^{N}\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{N+r}}\right)\\
&=\sqrt{N}\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{N}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r}{N}}}\right)\right]\\
&\sim\int_0^1\left[\sin(\pi x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\right]\mathrm{d}x\cdot\sqrt{N},N\to+\infty,
\end{aligned}$$

这里

$$\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{\sqrt{qN+r}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{N+r}}$$

来自交错级数不等式18.4. 现在 f 在 0 附近无界, 因此 f 在 $x=0$ 不连续.

由周期性我们知道当且仅当 f 在 $x\neq 2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ 连续.

例题 19.51 设 $u_n,n=1,2,\cdots$ 在 $[a,b]$ 有相同单调性且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a,b$ 收敛. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

注 当不具备相同单调性时结论是错的, 例如你可以考虑

$$u_n(x)\triangleq\begin{cases}0, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ \frac{(-1)^n}{n}\left(x-\frac{1}{n}\right), & x\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases},n=1,2,\cdots.$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛.

这是因为: 首先 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(0)=0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛, 则其确定的和函数在 $x=0$ 连续. 但是

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\right]&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^n}{n}\right)-\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\\
&=0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\neq 0,
\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!

证明 不妨设每一个 u_n 都是递增的, 则

$$\sum_{n=N}^{N+p}u_n(a)\leqslant\sum_{n=N}^{N+p}u_n(x)\leqslant\sum_{n=N}^{N+p}u_n(b),\forall N,p\in\mathbb{N}.$$

于是

$$\left|\sum_{n=N}^{N+p}u_n(x)\right|\leqslant\max\left\{\left|\sum_{n=N}^{N+p}u_n(a)\right|,\left|\sum_{n=N}^{N+p}u_n(b)\right|\right\},\forall N,p\in\mathbb{N}.$$

由函数项级数在端点收敛得函数项级数在 $[a,b]$ 一致收敛.

例题 19.52 设 $f,h\in C[0,+\infty)$ 满足对某个 $a<1,M>0$ 成立

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[0,+\infty),\int_0^{\infty}|h(x)|\,\mathrm{d}x=a.$$

设

$$g_0(x)=f(x),g_n(x)=f(x)+\int_0^x h(t)\,g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots,$$

证明:g_n 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛到某个函数 g, 并求出 g.

证明 对 $x\in[0,+\infty),n\geqslant 2$, 我们有

$$\begin{aligned}|g_n(x)-g_{n-1}(x)|&=\left|\int_0^x h(t)\left[g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t)\right]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_0^\infty|h(t)|\cdot|g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\sup_{t\in[0,+\infty)}|g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t)|\cdot\int_0^\infty|h(t)|\,\mathrm{d}t\\&=a\sup_{t\in[0,+\infty)}|g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t)|.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[0,+\infty)}|g_n(x)-g_{n-1}(x)|\leqslant a\sup_{x\in[0,+\infty)}|g_{n-1}(x)-g_{n-2}(x)|\\&\leqslant a^2\sup_{x\in[0,+\infty)}|g_{n-2}(x)-g_{n-3}(x)|\leqslant\cdots\leqslant a^{n-1}\sup_{x\in[0,+\infty)}|g_1(x)-g_0(x)|\\&=a^{n-1}\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\int_0^x h(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant a^{n-1}\int_0^\infty|h(t)f(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant Ma^{n-1}\int_0^\infty|h(t)|\,\mathrm{d}t=Ma^n,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^\infty|g_n(x)-g_{n-1}(x)|\leqslant M\sum_{n=1}^\infty a^n<\infty,$$

因此

$$f(x)+\sum_{k=1}^n\left[g_k(x)-g_{k-1}(x)\right]=g_n(x)\rightrightarrows g(x).$$

现在我们知道 g 是方程

$$g(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

的解.

例题 19.53 设 $f_n\in D^1[0,1],n=1,2,\cdots$ 满足

$$|f_n'(x)|\leqslant 1,\forall n\in\mathbb{N},x\in[0,1].$$

若

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall g\in C[0,1],$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=0.$$

证明 **Method 1**

若要证不成立, 结合有界数列必有收敛子列, 可知存在 $\epsilon_0>0$ 使得可取 $\{x_k\}_{k=1}^\infty\subset[0,1]$ 和严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 满足

$$|f_{n_k}(x_k)|\geqslant\epsilon_0,k=1,2,\cdots,\lim_{k\to\infty}x_k=x_0\in[0,1].$$

拉格朗日中值定理给出

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in[0,1],n\in\mathbb{N}.$$

不妨设[17]

$$f_{n_k}(x_k) \geqslant \epsilon_0, k = 1, 2, \cdots.$$

记

$$I \triangleq \left\{x \in [0,1] : |x - x_0| \leqslant \frac{\epsilon_0}{4}\right\},$$

现在当 k 充分大我们有 $|x_k - x_0| \leqslant \frac{\epsilon_0}{4}$, 从而在 I 上当 k 充分大我们有

$$\begin{aligned} f_{n_k}(x) &\geqslant f_{n_k}(x_k) - |x - x_k| \\ &\geqslant f_{n_k}(x_k) - |x_0 - x_k| - |x - x_0| \\ &\geqslant \epsilon_0 - \frac{\epsilon_0}{4} - \frac{\epsilon_0}{4} = \frac{\epsilon_0}{2}. \end{aligned}$$

取 $g \in C[0,1]$ 使得 $\operatorname{supp} g \subset I, g \geqslant 0, g$ 不恒为 0, 从而

$$\int_0^1 f_{n_k}(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_I f_{n_k}(x) g(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{\epsilon_0}{2} \int_I g(x) \mathrm{d}x > 0,$$

这就和

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 f_{n_k}(x) g(x) \mathrm{d}x = 0$$

矛盾!, 因此我们证明了

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 0.$$

Method 2[$*$]

我们考虑

$$T_n : C[0,1] \to \mathbb{R}, g \mapsto \int_0^1 f_n(x) g(x) \mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots.$$

由条件得

$$\lim_{n \to \infty} T_n(g) = 0, \forall g \in C[0,1].$$

由共鸣定理得

$$M \triangleq \sup_{n \geqslant 1} ||T_n|| = \sup_{n \geqslant 1} \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

由积分中值定理11.3得

$$|f_n(\theta_n)| = \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots.$$

于是由拉格朗日中值定理得

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(\theta_n)| + \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x \leqslant |x - \theta_n| + M \leqslant 1.$$

于是 Ascoli 定理13.12表明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 的列紧集. 考虑 $C[0,1]$ 中的极限 $f_{n_k} \to f \in C[0,1]$, 则

$$\int_0^1 f_{n_k} f \mathrm{d}x \to \int_0^1 f^2 \mathrm{d}x = 0,$$

即 $f = 0$. 因此类似命题7.4, 我们有 $C[0,1]$ 中 $f_n \to 0$, 这就是

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 0.$$

[17]否则再抽一次子列即可, 必然有无穷多项 $\geqslant \epsilon_0$ 或者 $\leqslant -\epsilon_0$, 对于后者我们可以考虑 $-f_{n_k}$.

19.6 级数技巧训练题集

例题 19.54 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ 的收敛点集是?

证明 为了表达式有定义, 首先必须 $x\neq -y$, 然后我们发现 x,y 只有一个为 0 时原级数显然收敛. 当 $x=y\neq 0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2},$$

即 $|x|<1$ 原级数收敛.

假设 x,y 都不为 0, 然后当 $|x|>|y|$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{\left(\frac{y}{x}\right)^n+1}\sim\sum_{n=1}^{\infty}y^n,$$

即原级数当且仅当 $|y|<1$ 收敛.

对称的可以讨论 $|x|<|y|$, 综上所述得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ 的收敛点集为

$$\{(x,y):\min\{|x|,|y|\}<1,x+y\neq 0\}.$$

例题 19.55 设 $a>1$, 定义

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,a)\\ (-1)^{k+1}, & x\in\left[a^k,a^{k+1}\right),k\in\mathbb{N}\end{cases},a_n=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

求

$$A=\left\{\beta\in\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}\text{绝对收敛}\right\},B=\left\{\beta\in\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}\text{收敛}\right\}.$$

证明 对每一个 $n\geqslant a$, 存在唯一的 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$a^m\leqslant n<a^{m+1}. \tag{19.60}$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a(-1)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=2}^{m}\int_{a^{j-1}}^{a^j}(-1)^j\,\mathrm{d}x+\int_{a^m}^{n}(-1)^{m+1}\,\mathrm{d}x\\&=-a+\sum_{j=2}^{m}(-1)^j\left(a^j-a^{j-1}\right)+(-1)^{m+1}\left(n-a^m\right)\\&=-a+\left(1-\frac{1}{a}\right)\sum_{j=2}^{m}(-a)^j+(-1)^{m+1}\left(n-a^m\right)\\&=-a+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{a^2-(-a)^{m+1}}{1+a}+(-1)^{m+1}\left(n-a^m\right)\\&=-\frac{2a}{a+1}+(-1)^m\left(\frac{2a^{m+1}}{1+a}-n\right)=-\frac{2a}{a+1}+(-1)^m\left(\frac{2a^{m+1}}{n(1+a)}-1\right)n.\end{aligned}$$

由(19.60), 我们有

$$\frac{1-a}{1+a}=\frac{2a^{m+1}}{a^{m+1}(1+a)}-1\leqslant\frac{2a^{m+1}}{n(1+a)}-1\leqslant\frac{2a^{m+1}}{a^m(1+a)}-1=\frac{a-1}{a+1}. \tag{19.61}$$

现在由(19.61)得

$$|a_n|\leqslant\frac{2a}{a+1}+\left|\frac{2a^{m+1}}{n(1+a)}-1\right|n\leqslant\frac{2a}{a+1}+\frac{a-1}{a+1}n,\forall n\geqslant a.$$

从而

$$(2,+\infty)\subset A,(2,+\infty)\subset B.$$

我们断言 $A=B=(2,+\infty)$, 目标是放在某一个区间 $\left[a^m,c_aa^m\right),c_a>1$ 内讨论, c_a 的目标是为了 a_n 通项的 n 前面的系数符号定下来. 当 m 为充分大的偶数, 则

$$\begin{aligned}a_n&=-\frac{2a}{a+1}+\left(\frac{2a^{m+1}}{n\left(1+a\right)}-1\right)n\geqslant\left(\frac{2a^{m+1}}{c_aa^m\left(1+a\right)}-1\right)n-\frac{2a}{a+1}\\&\geqslant\left(\frac{2a^{m+1}}{c_aa^m\left(1+a\right)}-1\right)a^m-\frac{2a}{a+1}=\left(\frac{2a}{c_a\left(1+a\right)}-1\right)a^m-\frac{2a}{a+1},\end{aligned}$$

这里

$$\frac{2a}{c_a\left(1+a\right)}-1>0\Leftrightarrow1<c_a<\frac{2a}{1+a}.$$

又 $\left[a^m,c_aa^m\right)$ 内至少有 $\left\lfloor c_aa^m-a^m\right\rfloor-1$ 个整数, 于是当 $m\to\infty$, 放缩得

$$\begin{aligned}\sum_{a^m\leqslant n<c_aa^m}\frac{a_n}{n^\beta}&\geqslant\frac{\left(\frac{2a}{c_a(1+a)}-1\right)a^m-\frac{2a}{a+1}}{n^\beta}\left(\left\lfloor c_aa^m-a^m\right\rfloor-1\right)\\&\geqslant\frac{\left(\frac{2a}{c_a(1+a)}-1\right)a^m-\frac{2a}{a+1}}{\left(c_aa^m\right)^\beta}\left(\left\lfloor c_aa^m-a^m\right\rfloor-1\right)\\&\sim\left(\frac{2a}{c_a\left(1+a\right)}-1\right)\cdot c_a^{1-\beta}a^{2m-m\beta},m\to+\infty.\end{aligned}$$

现在当 $\beta\leqslant2$ 知 $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{a^m\leqslant n<\frac{1}{1+a}a^{m+1}}\frac{a_n}{n^\beta}\neq0$, 因此由 Cauchy 收敛准则可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$ 发散. 因此我们证明了 $A=B=(2,+\infty)$.

例题 19.56♡ 对 $p>0$ 和收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,a_n>0$, 定义 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k,n=0,1,2,\cdots$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}$ 收敛性.

证明 一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^p}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_n}^{R_{n-1}}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{R_0}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x.$$

故当 $0<p<1$ 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}$ 收敛.

另外一方面, 当 $p\geqslant1$, 对 $m,t\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{n=m}^{m+t}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}=\sum_{n=m}^{m+t}\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^p}\geqslant\sum_{n=m}^{m+t}\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{m-1}^p}=\frac{R_{m-1}-R_{m+t}}{R_{m-1}^p}.$$

注意 $\lim\limits_{t\to+\infty}R_{m+t}=0$, 故

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{n=m}^{m+t}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}\geqslant\begin{cases}1, & p=1\\ \frac{1}{R_{m-1}^{p-1}}\geqslant\frac{1}{R_0^{p-1}}>0, & p>1\end{cases},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}$ 发散.

例题 19.57♡ 设 $\{a_n\}\subset(1,+\infty)$ 递增, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 此外并判断是否可以把分母 a_n 换成 a_{n+1}.

证明 充分性: 设 $|a_n|\leqslant M$, 由单调有界必收敛有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1\ln a_2}=\frac{1}{a_1\ln a_2}\lim_{n\to\infty}a_n-\frac{1}{\ln a_2}<\infty.$$

必要性: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛, 利用 $x-1\geqslant\ln x,\forall x>0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}{\ln a_{n+1}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}.$$

如果 a_n 无界, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=+\infty$. 由例题18.44知[18] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}}$ 发散, 这就是一个矛盾! 必要性得证.

分母 a_n 不能替换成 a_{n+1}: 取的想法就是要让 a_n 非常快. 而且为了替换失效, 需要比值极限不为常数. 而通常的指数函数比值是常数, 更快的指数函数的指数当然是二次函数. 现在我们取 $a_n=e^{n^2},n\in\mathbb{N}$, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}\ln a_{n+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(n+1)^2}-e^{n^2}}{(n+1)^2e^{(n+1)^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{n^2-(n+1)^2}}{(n+1)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-(2n+1)}}{(n+1)^2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}<\infty,\end{aligned}$$

但是 a_n 无界.

例题 19.58♡ 设 $\{p_n\}\subset(0,+\infty)$ 递增, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}$ 在 $\alpha>0$ 收敛.

笔记 注意巧妙的使用交错级数判别法.

证明 **Case 1** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=A>0$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}\sim\frac{1}{A^{\alpha+1}}\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-p_{n-1})=\frac{A-p_0}{A^{\alpha+1}},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}$ 收敛.

Case 2 设 $\alpha\geqslant1$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$, 注意

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha-1}p_n}=0.$$

于是我们可以把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha-1}p_n}\right)$ 视为交错级数[19].

一方面

$$\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha-1}p_n}\leqslant\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}\Leftrightarrow\frac{1}{p_n}\leqslant\frac{1}{p_{n-1}}\Leftrightarrow p_n\geqslant p_{n-1}.$$

另外一方面

$$\frac{1}{p_n^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha-1}p_n}\Leftrightarrow\frac{1}{p_n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha-1}}\Leftrightarrow p_n\geqslant p_{n-1}.$$

因此由交错级数判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}$ 在 $\alpha\geqslant1$ 收敛.

Case 3 对 $\alpha\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p_n-p_{n-1})\,p_n^{\alpha-1}}{p_n^{\alpha}p_{n-1}^{\alpha}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n^{\alpha}-p_{n-1}^{\alpha}}{\alpha p_n^{\alpha}p_{n-1}^{\alpha}}\\&=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_n^{\alpha}}\right]=\frac{1}{\alpha p_0^{\alpha}}<\infty.\end{aligned}$$

例题 19.59♡ 设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 讨论下述级数收敛性:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$.

[18] 注意到 $\ln a_n$ 就是例题18.44中的 S_n.

[19] 注意运用收敛级数加括号也收敛18.20.

证明

1. 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $S_N>1$. 注意到
$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n\ln S_n}\geqslant\sum_{n=N}^{\infty}\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_{S_N}^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=+\infty,$$
故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$ 发散.
2. 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $S_{N-1}>1$. 注意到
$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n\ln^2 S_n}\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_{S_{N-1}}^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x<\infty,$$
故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$ 收敛.

例题 19.60

1. ♡ 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0.\tag{19.62}$$
证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
2. 设 $\alpha\in(0,1),\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$ 且满足
$$\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda\in(0,+\infty).\tag{19.63}$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}n^k a_n=0$.

笔记 此类问题只需要把极限条件翻译成极限定义不等式来自然放缩即可.

证明

1. 因为(19.62), 我们知道存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何 $n\geqslant N$ 都有
$$b_n\leqslant\frac{c}{2}n,b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>c>0.$$
不妨设 $N=1$, 注意到
$$b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>c\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{c}{b_n}\Rightarrow a_1>a_{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{b_k}\right),$$
于是
$$\begin{aligned}a_{n+1}&<a_1\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{c}{b_k}}=a_1\prod_{k=1}^{n}e^{-\ln\left(1+\frac{c}{b_k}\right)}\leqslant a_1\prod_{k=1}^{n}e^{-\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}\\&=a_1e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}=a_1e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)}=a_1e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^2}\right)-\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^2}\right)}e^{-2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\\&\overset{\text{例题8.6}}{=}a_1e^{C+O\left(\frac{1}{n}\right)}e^{-2(\ln n+O(1))}=\frac{O(1)}{n^2},\end{aligned}$$
现在就有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
2. 因为极限(19.63), 所以当 n 充分大有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$, 从而 a_n 单调递减. 进一步, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得
$$n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{\lambda}{2},\forall n\geqslant N,$$
从而
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{\lambda}{2n^{\alpha}}+1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2n^{\alpha}}}\Rightarrow a_{n+1}<a_N\prod_{k=N}^{n}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2k^{\alpha}}},\forall n\geqslant N.$$

故

$$a_{n+1}<a_N\prod_{k=N}^{n}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2k^\alpha}}=a_Ne^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\ln\left(1+\frac{\lambda}{2k^\alpha}\right)}$$
$$=a_Ne^{-\sum\limits_{k=N}^{n}\left(\frac{\lambda}{2k^\alpha}+O\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right)}\overset{\text{命题8.4}}{\leqslant}Ce^{-\frac{\lambda}{2(1-\alpha)}n^{1-\alpha}},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^ka_n=0$.

来看北大数学分析期末题.

例题 19.61 设 $a_n,n=0,1,2,\cdots$ 为单调递增的正数列, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$ 收敛.

证明 必要性: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_{n-1}-(n-1)a_{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n-1}}<\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$ 收敛.

充分性: 证明的想法是用凝聚判别法18.6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$ 收敛. 运用 Cauchy 不等式, 我们有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2^k-2^{k-1}\right)^2}{\sum\limits_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\left[na_n-(n-1)a_{n-1}\right]}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k-1}}{2^ka_{2^k}-2^{k-1}a_{2^{k-1}}}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k-1}}{2^ka_{2^k}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{a_{2^k}}.$$

由凝聚判别法18.6, 我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

例题 19.62A-D 判别法也是必要的 证明:

1. 实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n=a_nb_n,n\in\mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 且 $\sum b_n$ 部分和有界.
2. 实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于存在分解 $u_n=a_nb_n,n\in\mathbb{N}$ 使得 $\{a_n\}$ 单调有界且 $\sum b_n$ 部分和收敛.

证明

1. 充分性由 A-D 判别法18.5可得. 必要性可设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 由 Cauchy 收敛准则, 对每个 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $n_i\in\mathbb{N}$ 使得 $n_{i+1}>n_i$ 且
$$\left|\sum_{n=k}^{k+p}u_n\right|\leqslant\frac{1}{i^3},\forall k\geqslant n_i,p\in\mathbb{N}_0.$$
考虑
$$n_0\triangleq1,a_n\triangleq\begin{cases}1, & 1\leqslant n\leqslant n_1\\ \frac{1}{i}, & n_i<n\leqslant n_{i+1},i\in\mathbb{N}\end{cases},b_n\triangleq\frac{u_n}{a_n},n\in\mathbb{N},$$
则 $\{a_n\}$ 递减到 0.
当 $1\leqslant n\leqslant n_1$, 我们有
$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n_1}|u_k|.$$

当 $n>n_1$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}b_j\right|&=\left|\sum_{j=1}^{n_1}u_j+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}}iu_j+k\sum_{j=n_k+1}^{n}u_j\right|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n_1}|u_j|+\sum_{i=1}^{k-1}i\left|\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}}u_j\right|+k\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}u_j\right|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n_1}|u_j|+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{i^3}+\frac{k}{k^3}\leqslant\sum_{j=1}^{n_1}|u_j|+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2},\end{aligned}$$

即 $\sum b_n$ 部分和有界, 这就完成了必要性证明.

2. 充分性由 A-D 判别法18.5可得. 必要性可设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 由第一问, 存在递减到 0 的数列 $\{\alpha_n\}$, 部分和有界的数列 $\{\beta_n\}$ 使得 $u_n=\alpha_n\beta_n,\forall n\in\mathbb{N}$. 令 $a_n\triangleq\sqrt{\alpha_n},b_n\triangleq\beta_n\cdot\sqrt{\alpha_n},n\in\mathbb{N}$, 由 A-D 判别法18.5可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 这就完成了必要性证明.

例题 19.63 设实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=s$ 条件收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{f(n)}=t\neq s$ 是一个重排. 证明: 对任何 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $|n-f(n)|>N$.

证明 如果存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|n-f(n)|\leqslant N$. 那么 $\sum\limits_{k=1}^{m+N}a_{f(k)}-\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$ 不含有

$$a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{f(1)},a_{f(2)},\cdots,a_{f(m-N)}$$

项且 $\sum\limits_{k=1}^{m+N}a_{f(k)}-\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$ 至多只有 $m+N-(m-N)=2N$ 项.

对任何 $\epsilon>0$, 当 n 充分大有 $|a_n|\leqslant\epsilon$. 现在让 m 充分大有

$$\left|\sum_{k=1}^{m+N}a_{f(k)}-\sum_{k=1}^{m}a_k\right|\leqslant 2N\epsilon.$$

让 $m\to+\infty$ 有

$$|s-t|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{f(k)}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|\leqslant 2N\epsilon.$$

由 ϵ 任意小得 $s=t$ 而矛盾! 这就完成了证明.

来看一个北京大学的数分期末考试真题的推广:

例题 19.64* 设 n 个数列 $\left\{x_k^{(j)}\right\}_{k=1}^{\infty},j=1,2,\cdots,n$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}x_k^{(j)}=0,j=1,2,\cdots,n.\tag{19.64}$$

证明存在 $\xi_k\in\{-1,1\},k=1,2,\cdots$, 使得对每个 $j=1,2,\cdots,n$, 都有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_kx_k^{(j)}$ 收敛.

证明 证明的想法颇为简单, 我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一串列向量

$$\alpha_k=\begin{pmatrix}x_k^{(1)}\\x_k^{(2)}\\\vdots\\x_k^{(n)}\end{pmatrix},k=1,2,\cdots.$$

用 $||\cdot||$ 表示向量的模长, 以及对每个 $r>0,\alpha\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$B_\alpha(r)\triangleq\{\beta\in\mathbb{R}^n:||\beta-\alpha||\leqslant r\}.$$

先来看一个引理

引理 19.4

设 $\epsilon>0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\in\mathbb{R}^n$, 满足 $||\beta_k||\leqslant\epsilon,k=1,2,\cdots,m$. 则存在 $\xi_k\in\{-1,1\},k=1,2,\cdots,m$, 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{j}\xi_k\beta_k\right\|\leqslant 3^n\epsilon,\forall j=1,2,\cdots,m. \tag{19.65}$$

♡

证明　引理证明: 当 $1\leqslant m\leqslant 3^n$, 问题显然成立. 假设问题对 $m\geqslant 3^n$ 成立, 对 $m+1$, 注意到

$$\bigcup_{j=1}^{m}B_{\beta_j}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\subset B_{\mathbf{0}}\left(\frac{3\epsilon}{2}\right),$$

以及考察体积

$$m\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n\geqslant 3^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{3\epsilon}{2}\right)^n.$$

故必有某个 $1\leqslant i<j\leqslant 3^n$ 使得

$$B_{\beta_i}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\bigcap B_{\beta_j}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\neq\emptyset,$$

这给出 $||\beta_i-\beta_j||\leqslant\epsilon$. 现在对剩下的 $m-1$ 个 β_k 和 $\beta_i-\beta_j$ 用归纳假设, 存在 $\xi_k'\in\{-1,1\},1\leqslant k\leqslant m$ 使得对这个 m 个向量有不等式(19.65)成立. 此时取

$$\xi_k=\begin{cases}\xi_k', & k=1,2,\cdots,j-1\\ -\xi_i', & k=j\\ \xi_{k-1}', & k=j+1,j+2,\cdots,m+1\end{cases},$$

容易看到 $\xi_k\in\{-1,1\},k=1,2,\cdots$, 使得对 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m+1}\in\mathbb{R}^n$ 成立不等式(19.65). 这就完成了引理的证明.

回到原例题的证明. 考虑

$$S_j=\left\{k\in\mathbb{N}:\frac{1}{2^{j+1}}\leqslant||\alpha_k||<\frac{1}{2^j}\right\},j=1,2,\cdots,$$

因为条件(19.64), 我们知道 S_j 是空集或者有限集且 $\mathbb{N}\supset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}S_j$. 由引理, 对每个 $j\in\mathbb{N}$ 和 $\epsilon=\frac{1}{2^j}$, 我们知道对每个 $k\in S_j$, 都能分配一个 $\xi_k\in\{-1,1\}$, 当然空集时可以不分配, 使得不等式(19.65)在 S_j 中成立. 于是对任何 $\delta>0$, 取 $j\geqslant 1$, 使得 $\sum\limits_{i=j}^{\infty}\frac{1}{2^i}\leqslant\frac{\delta}{3^n}$. 因为条件(19.64), 可取 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $||\alpha_k||<\frac{1}{2^j},\forall k\geqslant N$. 于是当 $M_2\geqslant M_1\geqslant N$, 我们有

$$\left\|\sum_{k=M_1}^{M_2}\xi_k\alpha_k\right\|\leqslant\sum_{i=j}^{\infty}\left\|\sum_{\{M_1\leqslant k\leqslant M_2:k\in S_i\}}\xi_k\alpha_k\right\|\leqslant 3^n\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{2^i}\leqslant\delta.$$

于是我们证明了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k$ 收敛, 这就完成了证明.

例题 19.65

1. 设 f 满足: 对任何绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 绝对收敛, 证明 $f(x)=O(x)$.
2. 设 f 满足: 对任何收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 收敛, 证明存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

证明

1. 如果 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 的邻域内无界, 则存在 $x_n\to 0$ 使得

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|>n,n=1,2,\cdots. \tag{19.66}$$

然后取 x_n 的子列 x_{n_k} 使得

$$|x_{n_k}|<\frac{1}{k^2},k=1,2,\cdots. \tag{19.67}$$

注意到运用(19.67)就有

$$\frac{2}{k^2\left|x_{n_k}\right|}-\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}=\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}>1,$$

于是存在正整数 m_k, 使得

$$\frac{1}{k^2\left|x_{n_k}\right|}<m_k<\frac{2}{k^2\left|x_{n_k}\right|}. \tag{19.68}$$

现在考虑

$$\underbrace{x_{n_1}+x_{n_1}+\cdots+x_{n_1}}_{m_1\text{个}}+\underbrace{x_{n_2}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_2}}_{m_2\text{个}}+\cdots,$$

于是由(19.68)知

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|x_{n_k}\right|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}<\infty.$$

由于 f 保绝对收敛, 因此

$$\underbrace{f\left(x_{n_1}\right)+f\left(x_{n_1}\right)+\cdots+f\left(x_{n_1}\right)}_{m_1\text{个}}+\underbrace{f\left(x_{n_2}\right)+f\left(x_{n_2}\right)+\cdots+f\left(x_{n_2}\right)}_{m_2\text{个}}+\cdots$$

绝对收敛. 但是有(19.67)和(19.68)知

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_kn_k\left|x_{n_k}\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_kk\left|x_{n_k}\right|\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了 $f(x)=O(x)$.

2. 目标证明 f 在 $x=0$ 邻域满足 Cauchy 方程.

考虑 $g(x,y)=f(x+y)+f(-x)+f(-y)$. 如果对任何 0 的开邻域 U 都有 g 在 $U\times U$ 上不恒为 0, 那么存在 $(x_n,y_n)\to(0,0)$ 使得 $g(x_n,y_n)\neq0$.

考虑

$$\begin{aligned}&\underbrace{(x_1+y_1)-x_1-y_1,(x_1+y_1)-x_1-y_1,\cdots,(x_1+y_1)-x_1-y_1}_{m_1\text{次}}+\\&\underbrace{(x_2+y_2)-x_2-y_2,(x_2+y_2)-x_2-y_2,\cdots,(x_2+y_2)-x_2-y_2}_{m_2\text{次}}+.\\&\vdots\end{aligned}$$

上述级数的部分和只可能出现 $x_n+y_n,y_n,0$, 而当 $n\to+\infty$ 时它们都趋于 0, 因此上述级数收敛. 由题目条件, 我们有

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left(f\left(x_1\right)+f\left(y_1\right)\right)+f\left(-x_1\right)+f\left(-y_1\right),\cdots,\left(f\left(x_1\right)+f\left(y_1\right)\right)+f\left(-x_1\right)+f\left(-y_1\right)}_{m_1\text{次}}+\\&\underbrace{\left(f\left(x_2\right)+f\left(y_2\right)\right)+f\left(-x_2\right)+f\left(-y_2\right),\cdots,\left(f\left(x_2\right)+f\left(y_2\right)\right)+f\left(-x_2\right)+f\left(-y_2\right)}_{m_2\text{次}}+\\&\vdots\end{aligned}$$

收敛. 由收敛级数加括号也收敛18.20, 我们知道对任何一组 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m_ng\left(x_n,y_n\right)$ 收敛, 这显然不可能! 因此我们证明了 $f(x+y)+f(-x)+f(-y)$ 在某个 $U\times U$ 上恒为 0, 这里 U 是一个开区间. 现在由

$$f(0)+f(0)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

知

$$f(x-x)+f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f\text{是奇函数},$$

即 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

再证明 f 在 $x=0$ 连续. 设 $x_n\to 0$, 我们考虑收敛级数 $x_1-x_1+x_2-x_2+\cdots$, 故级数

$$f(x_1)-f(x_1)+f(x_2)-f(x_2)+\cdots$$

收敛. 考虑上述级数部分和可得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$, 从而 f 在 $x=0$ 连续. 现在由定理12.6知存在 $k\in\mathbb{R}$ 使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

例题 19.66 证明:

1. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|\sin n|+|\sin(n+1)|\}>0$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2^n|}{n}$ 发散.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n^2|}{n}$ 发散.

证明

1. 设

$$\lim_{k\to\infty}(|\sin n_k|+|\sin(n_k+1)|)=0,\ \lim_{k\to\infty} n_k=+\infty,$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}|\sin n_k|=\lim_{k\to\infty}|\sin(n_k+1)|=0.$$

现在对任何 $\epsilon>0$ 和充分大的 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $a,b\in\mathbb{N}$ 使得

$$|n_k-a\pi|<\epsilon,|n_k+1-b\pi|<\epsilon.$$

现在

$$1\leqslant|1+(a-b)\pi|\leqslant|n_k-a\pi|+|n_k+1-b\pi|<2\epsilon,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|\sin n|+|\sin(n+1)|\}>0$.

2. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2^n|}{n}<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2^{n+1}|}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\cos 2^n|}{n-1}\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\cos 2^n|}{n}<\infty.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2^{n+1}|+|\cos 2^n|}{n}<\infty.$$

接下来我们断言

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\left|\cos 2^{n+1}\right|+|\cos 2^n|\right)>0. \tag{19.69}$$

注意到 $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{2n-1}{2}\pi, n\in\mathbb{Z}$. 假设 $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=+\infty$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\left(|\cos 2^{n_k}|+\left|\cos 2^{n_k+1}\right|\right)=0,$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}|\cos 2^{n_k}|=\lim_{k\to\infty}\left|\cos 2^{n_k+1}\right|=0.$$

对任何 $\epsilon>0$ 和充分大的 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $a,b\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|2^{n_k}-\frac{2a-1}{2}\pi\right|<\epsilon,\left|2^{n_k+1}-\frac{2b-1}{2}\pi\right|<\epsilon.$$

现在

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\left|\frac{2b-1}{2}\pi-(2a-1)\pi\right|\leqslant\left|2^{n_k+1}-(2a-1)\pi\right|+\left|2^{n_k+1}-\frac{2b-1}{2}\pi\right|<3\epsilon,$$

这就是一个矛盾! 因此可得(19.69). 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2^{n+1}|+|\cos 2^n|}{n}$ 发散, 这就是一个矛盾! 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2^n|}{n}$ 发散.

3. 和第二问类似, 我们只需证明

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left|\sin n^2\right|+\left|\sin(n+1)^2\right|+\left|\sin(n+2)^2\right|\right\}>0. \tag{19.70}$$

和第二问一样, 我们不妨设

$$\lim_{k\to\infty}\left|\sin n_k^2\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\sin(n_k+1)^2\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\sin(n_k+2)^2\right|=0,\lim_{k\to\infty}n_k=+\infty.$$

对任何 $\epsilon>0$ 和充分大的 $k\in\mathbb{N},$, 存在 $a,b,c\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|n_k^2-a\pi\right|<\epsilon,\left|(n_k+1)^2-b\pi\right|<\epsilon,\left|(n_k+2)^2-c\pi\right|<\epsilon.$$

注意到恒等式

$$n^2+(n+2)^2-2(n+1)^2=2,\forall n\in\mathbb{Z}. \tag{19.71}$$

因此

$$\pi-2\leqslant|2-a\pi-c\pi+2b\pi|\leqslant\left|n_k^2-a\pi\right|+\left|2(n_k+1)^2-2b\pi\right|+\left|(n_k+2)^2-c\pi\right|<4\epsilon,$$

这就是一个矛盾! 从而(19.70)成立! 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin n^2\right|}{n}$ 发散.

例题 19.67 设 $a_n>0,n\in\mathbb{N},\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 证明: $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$ 的聚点为 $[0,1]$.

证明 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N}$, 注意到

$$\{S_{n+1}\}-\{S_n\}=S_{n+1}-S_n-(\lfloor S_{n+1}\rfloor-\lfloor S_n\rfloor)\leqslant a_{n+1},$$

即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\{S_{n+1}\}-\{S_n\})\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}a_{n+1}=0.$$

由稠密聚点引理9.4, 我们只需证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\{S_n\}=1,\underline{\lim_{n\to\infty}}\{S_n\}=0. \tag{19.72}$$

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n\}<1$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\{S_n\}\leqslant C<1,a_n<1-C,\forall n\geqslant N.$$

注意

$$\lfloor S_N\rfloor\leqslant S_N\leqslant S_{N+1}=S_N+a_{N+1}=\lfloor S_N\rfloor+\{S_N\}+a_{N+1}<\lfloor S_N\rfloor+1,$$

从而 $\lfloor S_{N+1}\rfloor=\lfloor S_N\rfloor$. 类似的得

$$\lfloor S_{N+p}\rfloor=\lfloor S_N\rfloor,\forall p\in\mathbb{N},$$

这和 $\lim\limits_{p\to+\infty}\lfloor S_{N+p}\rfloor=+\infty$ 矛盾! 现在 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n\}=1$.

若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n\}>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\{S_n\}\geqslant C>0,a_n<C,\forall n\geqslant N.$$

注意

$$\lfloor S_N\rfloor\leqslant\lfloor S_{N+1}\rfloor=S_{N+1}-\{S_{N+1}\}=\{S_N\}+\lfloor S_N\rfloor+a_{N+1}-\{S_{N+1}\}<1+\lfloor S_N\rfloor+C-C=1+\lfloor S_N\rfloor.$$

从而 $\lfloor S_{N+1}\rfloor=\lfloor S_N\rfloor$. 类似的得

$$\lfloor S_{N+p}\rfloor=\lfloor S_N\rfloor,\forall p\in\mathbb{N},$$

这和 $\lim\limits_{p\to+\infty}\lfloor S_{N+p}\rfloor=+\infty$ 矛盾! 现在 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n\}=0$. 这就完成了证明.

例题 19.68 设 $a\in\mathbb{R}$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^ae^{-\sqrt{n}x}$ 在 $[0,+\infty)$ 的连续性, 这里在 0 处的连续性指的是 $\lim\limits_{x\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^ae^{-\sqrt{n}x}$ 是否存在.

证明 显然, 当 $x_0>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^ae^{-\sqrt{n}x}$ 在 x_0 附近一致收敛, 因此是连续的, 问题的关键是 $x\to0^+$.

一方面我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}x}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}e^{-\sqrt{y}x}dy=\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{y}x}dy=\frac{2}{x^2},$$

另外一方面我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}x}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}e^{-\sqrt{y}x}dy=\int_1^{\infty}e^{-\sqrt{y}x}dy=\frac{2e^{-x}\left(x+1\right)}{x^2}.$$

现在

$$\lim_{x\to0^+}x^2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}x}=2,$$

因此 $a>2$ 函数在 $[0,+\infty)$ 连续, $a\leqslant2$ 时函数在 $x=0$ 不连续但是在 $x>0$ 连续.

例题 19.69 给定 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, 设

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in\left(-1,1\right).$$

若

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=+\infty\left(-\infty\right),$$

证明

$$\lim_{x\to1^-}f\left(x\right)=+\infty\left(-\infty\right),$$

并指出

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\right|=\infty\nRightarrow\lim_{x\to1^-}\left|f\left(x\right)\right|=\infty.$$

证明 记 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, 不妨设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

于是对任意 $C>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n>N$, 成立 $S_n\geqslant C$. 注意到

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to1^-}f\left(x\right)&=\varliminf_{x\to1^-}\left(1-x\right)\frac{f\left(x\right)}{1-x}\\&=\varliminf_{x\to1^-}\left(1-x\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n\right]\\&=\varliminf_{x\to1^-}\left(1-x\right)\left[\sum_{n=0}^{N}S_nx^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}S_nx^n\right]\\&\geqslant\varliminf_{x\to1^-}\left(1-x\right)\left[\sum_{n=0}^{N}S_nx^n+C\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n\right]\\&=C\varliminf_{x\to1^-}\left(1-x\right)\frac{x^{N+1}}{1-x}=C,\end{aligned}$$

由 C 任意性, 我们证明了

$$\lim_{x\to1^-}f\left(x\right)=+\infty.$$

对于反例, 考虑下面的函数即可

$$f\left(x\right)=\frac{x-1}{\left(1+x\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(2n+1\right)x^n.$$

例题 19.70 设 $\alpha\in(0,1)$, 把 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots$ 的项重新安排如下:

先依次取 $p\in\mathbb{N}$ 个正项, 再依次取 $q\in\mathbb{N}$ 个负项, 然后得到新的级数, 判断这个新的级数收敛性.

证明 当 $p=q=1$, 则就是原本的级数, 此时由交错级数判别法知道级数收敛. 下设 p,q 不都为 1.

对每个 $k\in\mathbb{N}_0$, 注意到

$$\sum_{n=kp+1}^{(k+1)p}\frac{1}{(2n-1)^a}\sim\int_{kp+1}^{(k+1)p}\frac{1}{(2x-1)^\alpha}dx\sim\frac{p-1}{2^\alpha p^\alpha}\cdot\frac{1}{k^\alpha},k\to+\infty$$

$$\sum_{n=kq+1}^{(k+1)q}\frac{1}{(2n)^a}\sim\int_{kq+1}^{(k+1)q}\frac{1}{(2x)^\alpha}dx\sim\frac{q-1}{2^\alpha q^\alpha}\cdot\frac{1}{k^\alpha},k\to+\infty.$$

于是重排后加括号的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=kp+1}^{(k+1)p}\frac{1}{(2n-1)^a}-\sum_{n=kq+1}^{(k+1)q}\frac{1}{(2n)^a}\right).\tag{19.73}$$

在 $p\neq q$ 发散, 故重排后的级数发散.

当 $p=q$, 因为重排后的级数末项趋于 0, 所以只需判断加括号的级数(19.73)收敛性, 即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=kp+1}^{(k+1)p}\frac{1}{(2n-1)^a}-\sum_{n=kp+1}^{(k+1)p}\frac{1}{(2n)^a}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=kp+1}^{(k+1)p}\frac{(2n)^\alpha-(2n-1)^\alpha}{(2n-1)^a(2n)^\alpha}.$$

因为当 n 充分大时, $\frac{(2n)^\alpha-(2n-1)^\alpha}{(2n-1)^a(2n)^\alpha}$ 递减, 所以我们有

$$\sum_{n=kp+1}^{(k+1)p}\frac{(2n)^\alpha-(2n-1)^\alpha}{(2n-1)^a(2n)^\alpha}\sim\int_{kp+1}^{(k+1)p}\frac{(2x)^\alpha-(2x-1)^\alpha}{(2x-1)^a(2x)^\alpha}dx\overset{*}{\sim}\frac{(p-1)\alpha}{2^{2\alpha}p^{\alpha+1}}\frac{1}{k^{\alpha+1}},k\to+\infty,$$

其中 $*$ 部分可以通过算积分或用中值定理快速得到. 于是我们知道重排后的级数收敛.

例题 19.71 判断级数

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\cdots\tag{19.74}$$

收敛性.

证明 由级数加括号的理解18.20, 我们直接证明级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\sum\limits_{k=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{1}{k}$ 收敛, 就能证明(19.74)收敛.

由 EM 公式9.9, 我们有

$$\sum_{k=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{j(j-1)}{2}+1}+\frac{1}{\frac{j(j+1)}{2}}\right)+\int_{\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_{\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^2}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\left|\int_{\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_{\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{j(j-1)}{2}+1}-\frac{1}{\frac{j(j+1)}{2}}\right)=O\left(\frac{1}{j^2}\right),j\to\infty,$$

以及

$$\int_{\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{\frac{j(j+1)}{2}}{\frac{j(j-1)}{2}+1}=\frac{2}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right),j\to\infty.$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\sum_{k=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\left(\frac{2}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right)\text{ 收敛.}$$

例题 19.72 设 $\alpha>0,m\in\mathbb{N}$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt[m]{n}\rfloor}}{n^\alpha}$ 收敛性.

证明 **Step 1** 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt[m]{n}\rfloor}}{n^{\alpha}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

知当 $\alpha>1$ 原级数绝对收敛, $\alpha\leqslant 1$ 原级数不能绝对收敛.

Step 2 当 $\alpha\in(0,1]$, 由级数加括号的理解18.20我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt[m]{n}\rfloor}}{n^{\alpha}}$ 收敛等价于 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{n=j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{(-1)^j}{n^{\alpha}}$ 收敛. 采用积分和式等价的方法[20]有

$$\sum_{n=j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\int_{j^m}^{(j+1)^m}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x\sim\frac{m}{j^{m\alpha-m+1}},j\to\infty,$$

于是原级数收敛的必要条件是

$$m\alpha-m+1>0\Leftrightarrow\alpha>1-\frac{1}{m}.$$

Step 3 当 $\alpha\in\left(1-\frac{1}{m},1\right]$, 我们有 $m\alpha>m-1\geqslant 0$. 然后由 EM 公式9.3, 我们有

$$\sum_{n=j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{\frac{1}{j^{m\alpha}}+\frac{1}{[(j+1)^m-1]^{\alpha}}}{2}+\int_{j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x-\int_{j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{\alpha b_1(x)}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x.$$

交错级数判别法给出

$$\sum\left[(-1)^j\frac{\frac{1}{j^{m\alpha}}+\frac{1}{[(j+1)^m-1]^{\alpha}}}{2}\right]$$

收敛. 又

$$\left|\int_{j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{\alpha b_1(x)}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\alpha}{2}\int_{j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{1}{j^{m\alpha+m}}\mathrm{d}x=\frac{\alpha\left[(j+1)^m-1-j^m\right]}{2j^{m\alpha+m}}\sim\frac{m\alpha}{2j^{m\alpha+1}},j\to+\infty,$$

故

$$\sum\left[(-1)^j\int_{j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{\alpha b_1(x)}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x\right]$$

收敛. 又

$$\int_{j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\frac{(j+1)^m-1}{j^m}, & \alpha=1\\ \frac{[(j+1)^m-1]^{1-\alpha}-j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}, & 1-\frac{1}{m}<\alpha<1\end{cases}.$$

结合

$$\ln\frac{(j+1)^m-1}{j^m}=\frac{m}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right),j\to+\infty,$$

我们有 $\sum(-1)^j\ln\frac{(j+1)^m-1}{j^m}$ 收敛. 结合

$$\begin{aligned}\frac{[(j+1)^m-1]^{1-\alpha}-j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}&=\frac{j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}\left[\left[\left(1+\frac{1}{j}\right)^m-\frac{1}{j^m}\right]^{1-\alpha}-1\right]\\&=\frac{j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}\left\{\left[1+\frac{m}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]^{1-\alpha}-1\right\}=\frac{j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}\left[\frac{m(1-\alpha)}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\\&=\frac{j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}\left[\frac{m(1-\alpha)}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]=\frac{m}{j^{1-m+m\alpha}}+O\left(\frac{1}{j^{2-m+m\alpha}}\right),j\to+\infty,\end{aligned}$$

我们有 $\sum(-1)^j\left[\frac{[(j+1)^m-1]^{1-\alpha}-j^{m(1-\alpha)}}{1-\alpha}\right]$ 收敛. 综上所述, 我们有 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{n=j^m}^{(j+1)^m-1}\frac{(-1)^j}{n^{\alpha}}$ 收敛.

Step 4 原级数在 $\left(0,1-\frac{1}{m}\right]$ 发散, $\left(1-\frac{1}{m},1\right]$ 条件收敛, $(1,+\infty)$ 绝对收敛.

来看一个经典模型, 他是首届阿里巴巴数学竞赛决赛, 大学生数学竞赛真题的完整版推广.

例题 19.73

[20]读者应该自己给出细节.

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是两两不同的实数, $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为复数. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}=0\Leftrightarrow C_j=0,j=1,2,\cdots,n. \tag{19.75}$$

2. 设 $m\geqslant 2,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R},C_1,C_2,\cdots,C_m\in\mathbb{C}$. 若

$$\lambda_j-\lambda_k\neq 2\ell\pi,\forall 1\leqslant j<k\leqslant m,\ell\in\mathbb{Z},$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}C_je^{ni\lambda_j}=0\Leftrightarrow C_j=0,j=1,2,\cdots,m. \tag{19.76}$$

笔记 想法即类比傅立叶系数, 做积分使得系数暴露出来. 离散版本可以类似连续版本证明, 连续的处理方式核心是乘上某个 $e^{-xi\lambda_j}$ 均值形式的积分取极限. 从而离散的时候应该是乘上某个 $e^{-ni\lambda_j}$ 均值的取和.

证明

1. 充分性显然, 只需证明必要性. 考虑 $f(x)\triangleq\sum\limits_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}$. 对 $T>0,k=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}\left(\sum_{j=1}^{n}C_je^{i\lambda_jx}\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=1}^{n}C_j\int_T^{2T}e^{i(\lambda_j-\lambda_k)x}\mathrm{d}x=TC_k+\sum_{j\neq k}C_j\frac{e^{2i(\lambda_j-\lambda_k)T}-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)T}}{\lambda_j-\lambda_k},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|C_k|&=\left|\frac{\int_T^{2T}e^{-i\lambda_kx}f(x)\,\mathrm{d}x-\sum\limits_{j\neq k}C_j\frac{e^{2i(\lambda_j-\lambda_k)T}-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)T}}{\lambda_j-\lambda_k}}{T}\right|\\&\leqslant\frac{\int_T^{2T}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\sum\limits_{j\neq k}\frac{2|C_j|}{|\lambda_j-\lambda_k|}}{T}=\frac{|f(\theta_T)|\,T+\sum\limits_{j\neq k}\frac{2|C_j|}{|\lambda_j-\lambda_k|}}{T},\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自积分中值定理11.3且 $\theta_T\in(T,2T)$. 现在由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 可知

$$\lim_{T\to\infty}C_k=0,k=1,2,\cdots,n,$$

这就证明了 $C_j=0,j=1,2,\cdots,n$, 必要性得证.

2. 充分性显然, 只需证明必要性. 对 $k=1,2,\cdots,m$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(C_k-\sum_{j\neq k}C_je^{ni(\lambda_j-\lambda_k)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-ni\lambda_k}\sum_{j=1}^{m}C_je^{ni\lambda_j}\right)=0.$$

现在由 Stolz 定理9.1我们有

$$C_k=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{t=0}^{n}\sum\limits_{j\neq k}C_je^{ti(\lambda_j-\lambda_k)}}{n+1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k}\sum\limits_{t=0}^{n}C_je^{ti(\lambda_j-\lambda_k)}}{n+1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k}C_j\frac{1-e^{(n+1)i(\lambda_j-\lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}}}{n+1}.$$

结合

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sum\limits_{j\neq k}C_j\frac{1-e^{(n+1)i(\lambda_j-\lambda_k)}}{1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}}}{n+1}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\neq k}|C_j|\frac{2}{\left|1-e^{i(\lambda_j-\lambda_k)}\right|}}{n+1}=0,$$

我们知道 $C_j=0,j=1,2,\cdots,n$, 这就证明了必要性!

例题 19.74 设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}\subset\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{m}\sin(n\alpha_i)=0. \tag{19.77}$$

证明: 必有一个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $\frac{\alpha_i}{\pi}\in\mathbb{Z}$.

证明 由欧拉公式得

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\frac{e^{in\alpha_j}-e^{-in\alpha_j}}{2i}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(e^{in\alpha_j}-e^{-in\alpha_j}\right)=0.$$

打开括号得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\epsilon_i\in\{-1,1\}}(-1)^{|\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:\epsilon_i=-1\}|}e^{in(\epsilon_1\alpha_1+\epsilon_2\alpha_2+\cdots+\epsilon_m\alpha_m)}=0.$$

由例题19.73知上式的项可以合并满足

$$\epsilon_1\alpha_1+\epsilon_2\alpha_2+\cdots+\epsilon_m\alpha_m=\epsilon_1'\alpha_1+\epsilon_2'\alpha_2+\cdots+\epsilon_m'\alpha_m+2\ell\pi,\ell\in\mathbb{Z}$$

的项使得表达式恒为 0. 现在 $\prod_{j=1}^{m}\left(e^{in\alpha_j}-e^{-in\alpha_j}\right)=0,\forall n\in\mathbb{N}$, 容易看到这必有一个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $\frac{\alpha_i}{\pi}\in\mathbb{Z}$.

下题牛顿公式在级数的推广.

例题 19.75* 设 $\{a_n\}\subset\mathbb{C}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k=0,\forall k\in\mathbb{N}$, 证明: $a_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

证明 因为级数收敛给出 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 于是

$$W\triangleq\left\{z\in\mathbb{C}:\sup_{n\geqslant1}\left|za_n^2\right|<1\right\}$$

是一个开集. 对 $z\in W$, 我们考虑

$$\begin{aligned}0&=\int_0^z\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{2k}\right)\zeta^{k-1}\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_n^{2k}\zeta^{k-1}\right)\mathrm{d}\zeta\\&=\int_0^z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1-a_n^2\zeta}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z\frac{a_n^2}{1-a_n^2\zeta}\mathrm{d}\zeta=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-za_n^2\right),\end{aligned}$$

这里积分路径是连接 0 到 z 的线段，于是

$$1=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-za_n^2\right),\forall z\in W.$$

解析函数唯一性定理表明

$$1=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-za_n^2\right),\forall z\in\mathbb{C}.$$

如果某个 $a_n\neq0$, 代入 $z=\frac{1}{a_n}$ 就是一个矛盾!, 因此我们证明了 $a_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

例题 19.76 设不恒为 0 的 $a_n\geqslant0,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,n=1,2,\cdots$.

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ 且对任何 $a\in\mathbb{R}$ 都有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛, 在 $(-\infty,a]$ 非一致收敛.
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 收敛域和一致收敛性.

证明

1. 设 $\lim_{n\to\infty}S_n=s>0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-sx}<\infty,\forall x\in\mathbb{R},$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

对任何 $a\in\mathbb{R}$, 不妨设 $a<0$, 我们注意到 $e^{-S_nx}\leqslant\begin{cases}1, & x\in[0,+\infty)\\ e^{-sa}, & x\in[a,0]\end{cases}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}\leqslant\sup_{x\in[a,+\infty),n\in\mathbb{N}}e^{-S_nx}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在 $(-\infty,a]$ 一致收敛, 那么由 Cauchy 收敛准则, 当 m 充分大有

$$S_n\geqslant\frac{s}{2},\forall n\geqslant m,1\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}a_ne^{-S_nx}\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}a_ne^{-\frac{s}{2}x},\forall x\in(-\infty,a)\,.$$

但是让 $x\to-\infty$ 得矛盾! 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在 $(-\infty,a]$ 非一致收敛.

2. 当 $x\leqslant0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty.$$

当 $x>0$, 取 $S_0=0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-xS_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)e^{-xS_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}e^{-xy}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-xy}\mathrm{d}y=\frac{1}{x},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 的收敛域是 $(0,+\infty)$. 对任何 $a>0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-xS_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-aS_n}<\infty,\forall x\geqslant a,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-xS_n}$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛. 但是若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-xS_n}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对一切 $n\geqslant N$ 都有

$$\left|\sum_{n=m+p}^{m}a_ne^{-xS_n}\right|\leqslant\epsilon,\forall x\in(0,+\infty)\,.$$

在上式让 $x\to0^+$, 我们有

$$\left|\sum_{n=m+p}^{m}a_n\right|\leqslant\epsilon,$$

这和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散矛盾! 因此我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 的一致收敛域为 $[a,+\infty),\forall a>0$.

例题 19.77 设 a_n 是有界数列, $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{n}<\infty,$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}A_n=0.\tag{19.78}$$

证明 由命题8.3得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k^2=0.$$

注意到

$$\begin{aligned}
n\left(A_n^2-A_{n-1}^2\right) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\\
&=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_k-\frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\\
&=\left(a_n-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\\
&\geqslant -\left|a_n-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right|\cdot\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right|\\
&\geqslant -(M+M)(M+M)=-4M^2>-\infty,
\end{aligned}$$

由反向 Stolz 定理9.22得 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^2=0$, 即(19.78)成立.

例题 19.78 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty, a_n>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}=0.$$

证明 由 Cauchy 不等式得

$$\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{a_k}\cdot\sum_{k=N+1}^{n}a_k\geqslant(n-N)^2,\forall n>N\geqslant 1.$$

于是对任何固定的 $N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$0\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2}{\sum\limits_{k=N+1}^{n}\frac{1}{a_k}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(n-N)^2}{\sum\limits_{k=N+1}^{n}\frac{1}{a_k}}\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k.$$

让 $N\to+\infty$ 并利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}=0.$$

例题 19.79 设

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k=+\infty.$$

假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x\in(-1,1)$ 收敛, 证明:

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty.$$

证明 由幂级数 Cauchy 积我们有

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}S_k\right)x^n,x\in(-1,1).$$

对任何 $C>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geqslant N$ 有

$$\sum_{k=0}^{n}S_k\geqslant C(n+1).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to1^-} f(x) &\geqslant \varliminf_{x\to1^-}\left[(1-x)^2\frac{f(x)}{(1-x)^2}\right]\\ &= \varliminf_{x\to1^-}\left((1-x)^2\sum_{n=0}^{N}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}S_k\right)x^n\right]\right)\\ &\quad+\varliminf_{x\to1^-}\left((1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}S_k\right)x^n\right]\right)\\ &\geqslant C\varliminf_{x\to1^-}\left((1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[(n+1)x^n\right]\right)\\ &= C\varliminf_{x\to1^-}\left[x^{N+1}(N-Nx-x+2)\right]=C.\end{aligned}$$

由 C 的任意性可得

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty.$$

第 19 章 练习

1. (1.∗) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n|\sin n|}{n}$ 收敛性.
2. (2.) 设数列 $\{a_{nk}\}_{1\leqslant k\leqslant n<\infty}$ 满足
   - $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=a_k,\forall k\in\mathbb{N}$;
   - 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}$ 存在;
   - 存在 $M>0$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{nk}|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$,

   证明对任何 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 存在, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}z_k$ 存在.
3. (3.) 求最佳常数 $C>0$, 使得对所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 都有
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n+C\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}.$$
4. (4.) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 定义
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n|\sin nx|,x\in(-\infty,+\infty).$$
   证明: 若存在 $M>0$, 使得对任何 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有
$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|..\tag{19.79}$$
   证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛.
5. (5.) 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 其傅立叶级数
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$
   证明对任何 $[c,d]\subset[-\pi,\pi]$ 都有
$$\int_c^d f(x)\,dx=\int_c^d\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx.\tag{19.80}$$

6. (6.♡) 证明存在 $\xi \in (0,\pi)$ 使得
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\xi)}{n\ln^2(n+2)} = 0.$$
7. (7.∗) 设 a_n 是正数列且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, 证明存在严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = 1$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \infty$.
8. (8.∗) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\sqrt{n}}{n}$ 发散.
9. (9.) 判断
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\cos(n\theta), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\sin(n\theta)$$
在 $\theta \in \mathbb{R}$ 收敛性.
10. (10.) 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$, 证明 $\int_0^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛.
11. (11.) 设 $\alpha < 2$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\sin n}}$ 发散.
12. (12.) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 又设
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, x \in (0,1),$$
证明
$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(1) - f(x)}{1-x}.$$
13. (13.) 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间且 $f_n : I \to \mathbb{R}, n = 1,2,\cdots$ 满足对某个 $M > 0$ 成立
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right| \leqslant M, \forall x \in I. \tag{19.81}$$
对 $p \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^p}$ 在 I 一致收敛.
14. (14.∗) 设 $M \subset \mathbb{N}$, 证明存在复数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛当且仅当 $p \notin M$.
注本结果实级数版本只能对奇数次幂提出, 方法类似. 参考答案见美国数学月刊.
15. (15.) 设实数 $m \geqslant 1$, 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(1-x)x^{n^m}$ 在 $x \in [0,1)$ 一致收敛性.
16. (16.) 设 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots$. 记 $k_n \triangleq \min\{i \in \mathbb{N} : H_i \geqslant n\}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = e$.
17. (17.) 设两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散且通项递减, 是否有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ 可能收敛?
18. (18.) 设 $\alpha > 0$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{\alpha}+k^{\alpha}}$ 收敛性和绝对收敛性.
19. (19.) 存在可微函数 f 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{F_n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 存在. 其中
$$F_n = [f(n), f(n+1)] \bigcap \mathbb{N}.$$
20. (20.) 将全体有理数排成 1 列, 记为 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定义
$$f(x) = \sum_{n:r_n<x} \frac{1}{2^n}, x \in \mathbb{R}.$$
证明: f 严格单调递增且在无理点连续, 有理点间断.
21. (21.) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, 若对任何 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ 收敛, 判断是否有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.
22. (22.) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, 若对任何 $i,j \in \mathbb{N}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{i+nj}$ 收敛, 判断是否有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

23. (23.)[21]设
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y),(x,y)\in[0,1]^2$$
满足 $u''_{xx}+u''_{yy}=x$, 求 A_{mn}.

24. (24.) 设
$$a_n>0,\sum_{n=0}^{\infty}a_n<\infty,T=\max_{n\geqslant 1}a_n.$$
对每一个 $x>0$, 记 $L(x)$ 是 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数. 证明
   (a). 0 是 $L(x)$ 瑕点;
   (b). 瑕积分 $\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛并且
$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.$$

25. (25.) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上内闭黎曼可积, 证明: $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对可积的充要条件是对任意严格递增的数列 $\{x_n\}$ 且 $x_0=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 都有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

26. (26.) 设 $\beta\in(1,2]$, 证明:
   (a). 对任何 $x\in\left[0,\frac{1}{\beta-1}\right]$, 均存在序列 $a_k\in\{0,1\}$ 使得 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\beta^k}$.
   (b). 对任何 $x\in\left[-\frac{1}{\beta-1},\frac{1}{\beta-1}\right]$, 均存在序列 $a_k\in\{-1,1\}$ 使得 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\beta^k}$.

27. (27.) 设 $x_0\neq 0$ 且 $\left\{\sum\limits_{j=0}^{n}a_jx_0^j\right\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界数列. 证明: 幂级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jx^j$ 收敛半径 $r\geqslant|x_0|$ 且在
$$x\in A\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}:0<x_0x<x_0^2\right\}$$
时成立
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right|\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left|\sum_{j=0}^{n}a_jx_0^j\right|.$$

28. (28.) 考虑 Cantor 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k!}$, 这里
$$c_k\in\mathbb{N}_0,0\leqslant c_{k+1}\leqslant k,\forall k\in\mathbb{N}.$$
   (a). 对任何 $x\geqslant 0$, 存在一个 Cantor 级数使得 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k!}$. 并判断什么时候表示是唯一的.
   (b). 设 $x\in[0,1)$ 被表示为为 Cantor 级数 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k!}$. 证明 x 是有理数当且仅当存在某个 $k_0\in\mathbb{N}_0$ 使得 $c_k=0,\forall k\geqslant k_0$.

29. (29.) 设
$$S(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\sin\left(n^2x\right).$$
将 $S(x)$ 在 $x=0$ 展开为幂级数并求其收敛域.

30. (30.) 证明:
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n}\notin R[0,\pi].$$

31. (31.) 设 $a_n\subset(0,+\infty)$ 是单调递增到 $+\infty$ 的数列. 判断
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^xa_{n+1}}$$

[21]本题是考研真题, 但是出得不是很好, 形式计算, 算出来是什么就是什么. 不用管太严格的逻辑

定义域和连续性.

32. (32.) 设 $0<a_n<a_{2n}+a_{2n+1}, n=1,2,\cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
33. (33.) 设 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}, n=2,3,\cdots$, 证明: 对任何实数 $s>0$, 都存在一个 a_n 的重排 $a_{f(n)}$ 使得
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+a_{f(n)}\right)=s.$$
34. (34.) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $0<R<\infty$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,R)$ 一致收敛.
35. (35.) 设 $0<a_n<a_{n+1}+a_{n^2}, n=1,2,\cdots$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
36. (36.$*$) 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+|\sin n|}}$ 发散.
37. (37.) 决定所有 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得存在 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ 满足
$$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n^3}, x_0=1, x_{n+1}>x_n, \forall n\in\mathbb{N}_0.$$
38. (38.) 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是双射, 证明下述之一必然成立:
$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+f(n)}=+\infty,\ \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{f(n)}\right)=+\infty.$$
39. (39.) 用 $(\cdot)$ 表示小数部分. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$ 的间断点和在有界闭区间的黎曼可积性.
40. (40.) 判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 的一致收敛性.
41. (41.) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}, x\in[0,+\infty)$. 证明 f 在 $[0,+\infty)$ 可导且一致连续. 并证明
$$0<f(x)-\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}<\frac{1}{1+x}, \forall x>0.$$
42. (42.) 设 $a_k>0$ 满足
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(a_k x)}{k^2}\right|\leqslant|\tan x|, x\in(-1,1).$$
证明: $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_k}{k^2}=0$.
43. (43.) 给定 $k\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{C}, \epsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 证明存在无穷多个 $n\in\mathbb{N}$ 使得
$$\left|\sum_{0\leqslant\ell\leqslant\frac{n}{k+1}} C_{n-k\ell}^{\ell} z^{\ell}\right|\geqslant\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^n.$$
44. (44.) 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^{\alpha}x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛性.
45. (45.) 设 $a_n>0$, 定义 $S_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 的收敛域和一致收敛域.
46. (46.) 证明 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n\ln n}$ 在 $x=0$ 连续.
47. (47.) 设
$$\zeta(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}, x\in(1,+\infty).$$
    (a). 证明:$\zeta\in C^{\infty}(1,+\infty)$;
    (b). 判断 $\int_1^{\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x$ 是否收敛?
48. (48.) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,+\infty)$ 满足
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{g_n}}{n}<+\infty, \tag{19.82}$$

且对某个 $C>0$ 成立

$$a_n \leqslant C \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_r}+g_n, \forall n\in\mathbb{N}<\infty. \tag{19.83}$$

证明: 存在 $M_1,M_2>0$ 使得

$$a_n \leqslant M_1M_2^n n!, \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

49. (49.) 考虑

$$S\triangleq\left\{\{s_n\}_{n=0}^{\infty}:s_n\in\{-1,1\},n=0,1,2,\cdots\right\}.$$

对 $s=\{s_n\}_{n=0}^{\infty}\in S$, 定义

$$h(s)\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_0s_1\cdots s_k}{2^k}.$$

求 h 值域并判断 h 是否为单射. 然后证明对任何 $s=\{s_n\}_{n=0}^{\infty}\in S$ 和 $n\in\mathbb{N}_0$ 都有

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n}\frac{s_0s_1s_2\cdots s_k}{2^k}\right)=s_0\sqrt{2+s_1\sqrt{2+s_2\sqrt{2+\cdots+s_{n-1}\sqrt{2+s_n\sqrt{2}}}}}. \tag{19.84}$$

50. (50.) 已知函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x)}{n^{ax}}$ 关于 $x\in(2,+\infty)$ 一致收敛, 求实数 a 的取值范围.

51. (51.) 证明

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\arctan(nx)$$

在 $[0,+\infty)$ 连续且严格递减.

52. (52.) 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛, 证明: 存在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一种加括号的函数项级数在区间 I 绝对且一致收敛.

53. (53.) 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(0,1)$ 中有理数的一个排列. 在 $(0,1)$ 上定义

$$f(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{2026^n}.$$

判断 f 在 $(0,1)$ 上可微性.

54. (54.) 证明:

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\sqrt{2}-\cos x}\mathrm{d}x>0,\forall n\in\mathbb{N}$$

并计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\sqrt{2}-\cos x}\mathrm{d}x.$$

55. (55.) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[0,1]$ 上全体有理数组成的集合. $u_n:[0,1]\to\mathbb{R},n=1,2,\cdots$ 满足对某个 $L>0$ 有

$$|u_n(x')-u_n(x'')|\leqslant L|x'-x''|,\forall n\in\mathbb{N},x',x''\in[0,1].$$

若还有对 $n\in\mathbb{N}$, $u_n(0)=0$ 且 u_n 只在 x_n 不可导, 证明:$S(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)}{2^n}$ 在 $[0,1]$ 连续且在 $[0,1]$ 的有理数处不可导, 无理数处可导, 并在可导点处成立

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n'(x)}{2^n}.$$

第 20 章 非数学类多元积分和解析几何

内容提要

- 基本结论20.1
- 二重积分20.2
- 三重积分20.3
- 第一类曲线积分20.4
- 第二类曲线积分20.5
- 第一类曲面积分20.6
- 第二类曲面积分20.7
- 一般的多元积分问题20.8
- 非数学类解析几何20.9

20.1 基本结论

20.1.1 换元法

本部分结论我们不给予严格叙述和证明[1]，显然类似的结果可以扩充到 $\mathbb{R}^n$，读者只需要无脑套公式即可.

定理 20.1 (重积分换元法)

1. 考虑换元 $w:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{w^{-1}(D)} f(x(u,v),y(u,v))\cdot|\det J|\,dudv,$$

这里

$$J\triangleq\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

2. 考虑换元 $w:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$，则有

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{w^{-1}(D)} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\cdot|\det J|\,dudvdw,$$

这里

$$J\triangleq\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}.$$

♡

笔记

1. 记忆结论

$$\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\left[\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right]^{-1}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)},\tag{20.1}$$

于是有

$$\left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1,\left|\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1.\tag{20.2}$$

[1] 严重超纲.

2. 换元法的区域确定重点是: 边界对应边界.
3. 极坐标, 柱坐标, 球坐标等方法是换元法的特例, 我们课本上记忆的经典确定上下限的几何直观是他们独有的. 对于一般没有, 或者很难有几何意义的换元法, 只能把换元后的新变量用直角坐标的方法确定上下限. 特别的, 极坐标, 柱坐标, 球坐标等方法也可以视换元后的新变量用直角坐标的方法确定上下限.

应用我们后面展开叙述, 这里举几个例子供大家熟悉.

例题 20.1 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2\leqslant\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\leqslant 4\right\}$, 计算 $\iint_D\frac{1}{xy}dxdy$.

证明 做换元 $\begin{cases}u=\frac{x}{x^2+y^2}\\ v=\frac{y}{x^2+y^2}\end{cases}$, 则

$$\left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}.$$

于是我们有

$$\iint_D\frac{1}{xy}dxdy=\int_2^4\int_2^4\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{xy}dudv=\int_2^4\int_2^4\frac{1}{uv}dudv=\ln^2 2.$$

例题 20.2 设 Ω 由 $z=y^2,z=4y^2,z=x,z=2x,z=2$ 围成的 $y>0$ 的区域, 计算

$$\iiint_\Omega\frac{z\sqrt{z}}{y^3}\cos\frac{z}{y^2}dxdydz.$$

证明 做换元

$$\begin{cases}u=\frac{z}{y^2}\\ v=\frac{z}{x}\\ w=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{z}{v}\\ y=\sqrt{\frac{z}{u}}\\ z=w\end{cases},$$

则计算得

$$\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{u^3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2v^2}\left(\frac{w}{u}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

于是我们有

$$\iiint_\Omega\frac{z\sqrt{z}}{y^3}\cos\frac{z}{y^2}dxdydz=\frac{1}{2}\int_1^4\cos udu\int_1^2\frac{1}{v^2}dv\int_0^2 w^{\frac{3}{2}}dw=\frac{2\sqrt{2}}{5}\left(\sin 4-\sin 1\right).$$

定理 20.2 (第一类曲线曲面积分换元法)

1. 我们约定

$$D_F\triangleq\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix},||D_F||\triangleq\sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2}.$$

于是做换元 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$, 我们有

$$\int_{F(x,y)=0}f(x,y)\,ds=\int_{F(x(u,v),y(u,v))=0}f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{|\det J|\cdot||D_F||}{||J^T\cdot D_F||}ds,$$

这里 J 定义和定理20.1一致.

2. 我们约定

$$D_F \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}, ||D_F|| \triangleq \sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^2}.$$

于是做换元 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$，我们有

$$\begin{aligned} &\iint_{F(x,y,z)=0} f(x,y,z)\,dS \\ &= \iint_{F(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))=0} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \frac{|\det J| \cdot ||D_F||}{||J^T \cdot D_F||} dS, \end{aligned}$$

这里 J 定义和定理20.1一致.

♡

注

1. 设 $\begin{cases} x = a + r_1 u \\ y = b + r_2 v \end{cases}$，可以看到

$$\frac{|\det J| \cdot ||D_F||}{||J^T \cdot D_F||} = \frac{r_1 r_2 \sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2}}{\sqrt{r_1^2 \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2 + r_2^2 \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2}},$$

因此这种换元是十分复杂的除非 $r_1 = r_2 = r$. 当 $r_1 = r_2 = r$, 我们有

$$\frac{|\det J| \cdot ||D_F||}{||J^T \cdot D_F||} = r.$$

此外注意到换元 $\begin{cases} x = a + ru \\ y = b + rv \end{cases}$ 对二重积分而言是 r^2, 但对曲线积分却是 r. 类似的对三重积分是 r^3, 但对曲面积分却是 r^2. 一般的, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面积分, 其 r 的次方要比重积分少 1, 这也反映了曲面积分是低一维的积分[2].

2. 重积分正交变换下显然不变, 因为换元得到的雅克比矩阵是正交矩阵, 而正交矩阵行列式为 ± 1.
3. 曲线曲面积分正交变换下也不变, 因为设 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, J 是正交矩阵, 则

$$||J^T \cdot D_F|| = \sqrt{D_F^T \cdot J J^T \cdot D_F} = ||D_F|| \Rightarrow \frac{|\det J| \cdot ||D_F||}{||J^T \cdot D_F||} = 1.$$

例题 20.3 计算 $\iint_\Omega (x+y+z)\,dS$, 这里

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z \geqslant 0\right\}.$$

证明 待定换元 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, T是三阶正交矩阵. 可让

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

[2]在现代数学中, 也叫做 $n-1$ 维 Hausdorff 测度的积分.

于是

$$\iint_{\Omega}(x+y+z)\,dS=\sqrt{3}\iint_{\Omega'}w dS,\Omega'=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3:u^2+v^2+w^2=1,w\geqslant 0\right\},$$

这里用到了

$$u^2+v^2+w^2=\begin{pmatrix}u&v&w\end{pmatrix}I_3\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}TI_3T^T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2=1.$$

现在我们就知道

$$\iint_{\Omega}(x+y+z)\,dS=\sqrt{3}\iint_{\Omega'}w dS\overset{\text{投影法}}{=}\sqrt{3}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}1dxdy=\sqrt{3}\pi.$$

定理 20.3 (第二类曲线积分换元法)

考虑换元 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$，则

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy&=\int_{L'}f(x(u,v),y(u,v))\,dx(u,v)+g(x(u,v),y(u,v))\,dy(u,v)\\&=\int_{L'}f(x(u,v),y(u,v))\left[\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right]+g(x(u,v),y(u,v))\left[\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right],\end{aligned}$$

这里 L' 是 L 在换元下对应的像，方向如下确定.

$$\begin{cases}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0, & \text{与}L\text{同向}\\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}<0, & \text{与}L\text{反向}\end{cases}.$$

♡

注

1. 我们不给出第二类曲面积分换元法，因为从未用上.
2. 定理20.3只需记忆一个方向即可，换元只需要自然的计算.

例题 20.4 计算

$$\lim_{r\to+\infty}\oint_{x^2+y^2+xy=r^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^{\alpha}},$$

这里积分方向是逆时针.

证明 注意到

$$x^2+xy+y^2=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

于是可以求一个正交矩阵 $T\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 使得 $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ 对角化. 线性代数基本知识告诉我们可取 $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，此时

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

做换元 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，即

$$\begin{cases}x=\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\end{cases}.$$

我们可以算得 $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1>0$. 现在积分方向仍然是逆时针, 于是就有

$$\lim_{r\to+\infty}\oint_{x^2+y^2+xy=r^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\lim_{r\to+\infty}\oint_{\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2}\frac{\frac{u+v}{\sqrt{2}}d\frac{u-v}{\sqrt{2}}-\frac{u-v}{\sqrt{2}}d\frac{u+v}{\sqrt{2}}}{\left(\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^\alpha}$$

$$=\lim_{r\to+\infty}\oint_{\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2}\frac{vdu-udv}{(u^2+v^2)^\alpha}\begin{cases}u=\sqrt{\frac{2}{3}}r\cos\theta\\ v=\sqrt{2}r\sin\theta\end{cases}=\lim_{r\to+\infty}\frac{-2r^{2(1-\alpha)}}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^\alpha}.$$

当 $\alpha<1$ 极限不存在, 当 $\alpha>1$, 我们就有

$$\lim_{r\to+\infty}\oint_{x^2+y^2+xy=r^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=0.$$

当 $\alpha=1$, 我们就有

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\oint_{x^2+y^2+xy=r^2}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}&=\frac{-2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}\\&=\frac{-2}{\sqrt{3}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=\frac{-8}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}\\&=\frac{-8}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=\frac{-8}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=-\frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\frac{2}{3}+2t^2}dt=-2\pi.\end{aligned}$$

定理 20.4 (第一类曲面积分的参数方程法)

若曲面 $F(x,y,z)=0$ 有参数方程表示 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. 我们记

$$\Delta(u,v)=\sqrt{\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\det\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|^2+\left|\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2},$$

则

$$\iint_{F(x,y,z)=0}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\Delta(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

这里第二个积分的积分区域是参数 (u,v) 的取值区域.

注我们将其运用的例子后置到 Poisson 公式之后.

笔记 特别的, 对于球坐标换元

$$\begin{cases}x=x_0+r\sin\psi\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\psi\sin\theta\\ z=z_0+r\cos\psi\end{cases},\psi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi],$$

我们有 $\Delta(\psi,\theta)=r^2\sin\psi$.

20.1.2 Poisson 公式和余面积公式

结论 [球面外法向量] 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ 在其上一点 (x,y,z) 处的单位外法向量为

$$\left(\frac{x-x_0}{r},\frac{y-y_0}{r},\frac{z-z_0}{r}\right).$$

定理 20.5 (余面积公式)

1.

$$\iint_{r_1\leqslant F(x,y)\leqslant r_2}f(x,y)\,dxdy=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_{F(x,y)=r}\frac{f(x,y)}{\sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2}}ds.$$

2.
$$\iiint_{r_1\leqslant F(x,y,z)\leqslant r_2} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{r_1}^{r_2}dr\iint_{F(x,y,z)=r}\frac{f(x,y,z)}{\sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^2}}dS.$$
♡

注特别的取 $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 我们有

1.
$$\iint_{r_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant r_2} f(x,y)\,dxdy=\int_{r_1}^{r_2}dr\int_{\sqrt{x^2+y^2}=r} f(x,y)\,ds.$$

2.
$$\iiint_{r_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant r_2} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{r_1}^{r_2}dr\iint_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r} f(x,y,z)\,dS.$$

例题 20.5 对 $a,b,c>0$, 计算
$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}dS.$$

证明 利用余面积公式20.5, 我们有
$$\int_0^r\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=t}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}dSdt=2\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant r}1dxdydz=2abc\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r}1dxdydz=\frac{8\pi abc}{3}r^{\frac{3}{2}}.$$
于是
$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}dS=\frac{8\pi abc}{3}\frac{d}{dr}r^{\frac{3}{2}}=4\pi abc\sqrt{r}, r>0.$$
让 $r=1$, 即可得
$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}dS=4\pi abc.$$

例题 20.6 计算
$$\iiint_\Omega\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz,$$
这里
$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x,y,z\geqslant 0,x+y+z\leqslant 1\right\}.$$

证明 利用余面积公式20.5, 我们有
$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz&=\iiint_{x+y+z\leqslant 1}\frac{\chi_{[0,+\infty)^3}(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3}dxdydz\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^1 dr\iint_{x+y+z=r}\frac{\chi_{[0,+\infty)^3}(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 dr\iint_{x+y+z=r}\frac{\chi_{[0,+\infty)^3}(x,y,z)}{(1+r)^3}dS\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{1}{(1+r)^3}dr\iint_{x+y+z=r,x,y,z\geqslant 0}1dS=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{r^2}{(1+r)^3}dr=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

作为多元积分换元法的应用, 我们有 Poisson 公式:

推论 20.1 (二元函数 Poisson 公式)

设 $r>0, a, b, c \in \mathbb{R}$, 且下述积分有意义, 则有

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(ax+by)\, g\left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2}y\right) g\left(x^2+y^2\right) dxdy \tag{20.3}$$

$$\oint_{x^2+y^2=r^2} f(ax+by)\, g\left(x^2+y^2\right) ds = \oint_{x^2+y^2=r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2}y\right) g\left(x^2+y^2\right) ds. \tag{20.4}$$

♡

推论 20.2 (三元函数 Poisson 公式)

设 $r>0, a, b, c \in \mathbb{R}$, 且下述积分有意义, 则有

$$\begin{aligned} &\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} f(ax+by+cz)\, g\left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz \\ =& \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z\right) g\left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz \end{aligned} \tag{20.5}$$

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f(ax+by+cz)\, g\left(x^2+y^2+z^2\right) dS \\ =& \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z\right) g\left(x^2+y^2+z^2\right) dS \end{aligned} \tag{20.6}$$

♡

注 Poisson 公式本质上依赖于换元法, 所以实际运用中要注意变通, 并不只适用于上述形式. 此外 Poisson 公式在一些常见例题中右端项还可以进一步化为单变量积分, 那样不利于记忆, 所以竞赛课程给的形式更容易记忆. Poisson 公式对 n 重积分和 n 重曲面积分也是正确的.

例题 20.7 设 $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, r>0$, 计算

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} \left(x^2+y^2+z^2\right)^p |ax+by+cz|^q\, dxdydz.$$

注 积累一个小结果, 如何判断广义重积分的收敛性? 记住固定的操作即: 加绝对值之后无脑算, 算出来收敛就收敛, 算出来发散就发散.

证明 直接计算有

$$\begin{aligned} &\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} \left(x^2+y^2+z^2\right)^p |ax+by+cz|^q\, dxdydz \\ \overset{\text{余面积公式}20.5}{=}& \int_0^r t^{2p} dt \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} |ax+by+cz|^q\, dS \\ \overset{\text{Poisson 公式}20.2}{=}& \left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^r t^{2p} dt \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} |z|^q\, dS \\ =& 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^r t^{2p} dt \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2, z\geqslant 0} z^q dS \\ \overset{\text{换元法}20.2}{=}& 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^r t^{2p+q+2} dt \iint_{x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0} z^q dS \\ =& 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^r t^{2p+q+2} dt \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{q-1}{2}} dxdy \\ \overset{\text{余面积公式}20.5}{=}& 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^r t^{2p+q+2} dt \int_0^1 dv \int_{x^2+y^2=v^2} \left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{q-1}{2}} ds \\ =& 4\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^r t^{2p+q+2} dt \int_0^1 v\left(1-v^2\right)^{\frac{q-1}{2}} dv. \end{aligned}$$

因此积分收敛等价于

$$2p+q+2>-1, \frac{q-1}{2}>-1. \tag{20.7}$$

于是当 p,q 满足(20.7)时, 就有

$$\begin{aligned}&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^p|ax+by+cz|^q\,dxdydz\\&=4\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{q}{2}}\frac{(q+1)\,r^{2p+q+3}}{2p+q+3}.\end{aligned}$$

例题 20.8 计算 $\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\psi-\sin\psi)}\sin\theta d\theta$.

证明 运用曲面积分的参数方程20.4和 Poisson 公式20.2, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\psi-\sin\psi)}\sin\theta d\theta d\psi&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}e^{x-y}dS=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}e^{\sqrt{2}z}dS\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{\sqrt{2}\cos\psi}\sin\psi d\psi d\theta=2\sqrt{2}\pi\sinh\sqrt{2}.\end{aligned}$$

20.1.3 旋转体表面积和体积统一公式

除去课本上大家要记[3]的基本旋转体表面积和体积公式, 我们给出一般的:

定理 20.6 (旋转体表面积和体积)

1. 平面曲线 L 绕直线[a]旋转一周形成旋转体表面积: 设 d 为曲线上的点到直线的距离, 计算 $\int_L 2\pi d\,(x,y)\,\mathrm{d}s$;
2. 平面区域 D 绕直线[b]旋转一周形成旋转体体积: 设 d 为区域上的点到直线的距离, 计算 $\iint_D 2\pi d\,(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[a]不穿过直线.

[b]不穿过直线.

♡

笔记 本结果在任何时候都可以直接使用而无需给出任何理由.

来看第八届非数学类决赛填空压轴题.

例题 20.9 求 $L:y=\frac{1}{3}x^3+2x,0\leqslant x\leqslant 1$ 绕 $y=\frac{4}{3}x$ 旋转一周形成旋转体表面积.

证明 直接套用定理20.6有

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_L d\,(x,y)\,\mathrm{d}s=2\pi\int_L\frac{\left|y-\frac{4}{3}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}\mathrm{d}s\\&=2\pi\int_0^1\frac{\left|y-\frac{4}{3}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_0^1\frac{\left|\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{4}{3}x\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}\sqrt{1+\left(x^2+2\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2\pi\sqrt{10}-\pi\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

例题 20.10 求 $y=x^2,y=mx\,(m>0)$ 在第一象限围成区域 D 绕 $y=mx$ 旋转一周形成旋转体体积.

[3]其余公式都无需再记

证明 直接套用定理20.6有

$$\begin{aligned}V&=2\pi\iint_D d(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\iint_D\frac{mx-y}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\pi\int_0^m\mathrm{d}x\int_{x^2}^{mx}\frac{mx-y}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{2\sqrt{m^2+1}}\int_0^m x^2(x-m)^2\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi m^5}{30\sqrt{m^2+1}}.\end{aligned}$$

例题 20.11 求 $(x-2)^2+y^2\leqslant 1$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体表面积和体积.

证明 直接套用定理20.6有

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_{(x-2)^2+y^2=1}x\mathrm{d}s=2\pi\int_{(x-2)^2+y^2=1}(x-2+2)\,\mathrm{d}s\\&=4\pi\int_{(x-2)^2+y^2=1}1\mathrm{d}s=8\pi^2;\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}V&=2\pi\iint_{(x-2)^2+y^2=1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\iint_{(x-2)^2+y^2=1}(x-2+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4\pi\iint_{(x-2)^2+y^2=1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi^2.\end{aligned}$$

例题 20.12 设 $a>0$, 求 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$ 和 x 轴围成区域绕直线 $y=2a$ 旋转一周形成的旋转体体积.

证明 直接套用定理20.6有

$$\begin{aligned}V&=2\pi\iint|y-2a|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(2a-y)\,\mathrm{d}y\\&=2\pi\int_0^{2\pi}\left[2ay(x)-\frac{1}{2}y^2(x)\right]\mathrm{d}x=2\pi a^3\int_0^{2\pi}\left[2(1-\cos t)-\frac{1}{2}(1-\cos t)^2\right]\mathrm{d}(t-\sin t)\\&=2\pi a^3\int_0^{2\pi}\frac{3-5\cos t+\cos^2 t+\cos^3 t}{2}\mathrm{d}t=2\pi a^3\cdot\frac{7}{2}\pi=7\pi^2a^3.\end{aligned}$$

20.2 二重积分

20.2.1 二重积分计算

例题 20.13 计算积分 $\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明

$$\begin{aligned}\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2}(x-a+a)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2}a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi ar^2.\end{aligned}$$

例题 20.14 计算 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}e^x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

笔记 想法即调和函数平均定理20.7.

证明 注意到

$$\frac{\partial^2(e^x\cos y)}{\partial x^2}=e^x\cos y=-\frac{\partial^2(e^x\cos y)}{\partial y^2},$$

我们由调和函数平均定理20.7得

$$\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = e^0\cos 0 = 1 \Rightarrow \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} e^x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$$

例题 20.15 设 $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-5)^2+(y-4)^2\leqslant 20,(x-4)^2+(y-2)^2\geqslant 1\right\}$, 计算 $\iint_S \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明 注意到

$$\Delta\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0, \forall (x,y)\in S.$$

由调和函数平均定理20.7得

$$\begin{aligned}\iint_S \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{(x-5)^2+(y-4)^2\leqslant 20}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{(x-4)^2+(y-2)^2\leqslant 1}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 20\pi\arctan\frac{4}{5}-\pi\arctan\frac{2}{4} = 20\pi\arctan\frac{4}{5}-\pi\arctan\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例题 20.16

1. 计算 $\iint_\Omega \operatorname{sgn}(x+y)e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里
$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\geqslant 0, x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}.$$
2. 计算 $\iint_\Omega \operatorname{sgn}(x+y)e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里
$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

证明

1. $$\begin{aligned}\iint_\Omega \operatorname{sgn}(x+y)e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\Omega\bigcap\{(x,y):x+y>0\}} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega\bigcap\{(x,y):x+y<0\}} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 re^{r^2}\mathrm{d}r - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 re^{r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}(e-1).\end{aligned}$$
2. 做 $y=x$, 注意到 $\Omega\bigcap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\leqslant x\right\}$ 和 $\Omega\bigcap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\leqslant -x\right\}$ 对称, 因此容易看到原积分为
$$\iint_{\Omega\bigcap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\geqslant\max\{x,-x\}\}}\operatorname{sgn}(x+y)e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 re^{r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}(e-1).$$
解决如下问题.

例题 20.17 对 $f\in R[0,1]$, 证明

1. 设 $f\in R[0,1]$ 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$, 求
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(1-\sin x\sin y)\sin y\mathrm{d}y.$$
2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta\sin\varphi)\sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\,dt. \tag{20.8}$$
3. 设 f 是连续函数, 证明:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot f(\sin x\cdot\sin y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cdot f(\cos u)\mathrm{d}u. \tag{20.9}$$

笔记 非数学类只证明 $f\in C[0,1]$ 的版本. 本题当然可以通过换元法得到, 但那样并不容易理解本质.

证明

1. 逆用曲面积分的参数方程20.4, 我们有
$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(1-\sin x\sin y\right)\sin y\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2+z^2=1,\text{第一象限}}f\left(1-y\right)\mathrm{d}S\\&\overset{\text{轮换}}{=}\iint_{x^2+y^2+z^2=1,\text{第一象限}}f\left(1-z\right)\mathrm{d}S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(1-\cos\psi\right)\sin\psi\mathrm{d}\psi\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\pi.\end{aligned}$$
2. 当然可以用第一问方法解决, 我们来看另外一种套路方法. ♠ 当 $f\left(x\right)=x^n,n\in\mathbb{N}$, 我们有
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos\theta\sin\varphi\right)\sin\varphi d\theta d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!n!!}{n!!\left(n+1\right)!!}=\frac{\pi}{2\left(n+1\right)}=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^n dx,$$
于是(20.8)对 $x^n,n\in\mathbb{N}$ 成立. 显然(20.8)对线性运算封闭, 因此对一切多项式 $f\in\mathbb{R}[x]$ 都有(20.8)成立. 又由第一逼近定理13.45我们知道(20.8)对一切 $f\in C[0,1]$ 都成立. 由13.50还能将(20.8)扩充到一切黎曼可积函数 $f\in R[0,1]$.
3. 逆用曲面积分的参数方程20.4, 并结合轮换对称性, 我们有
$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot f\left(\sin x\cdot\sin y\right)\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2+z^2=1,x,y,z\geqslant 0}f\left(y\right)\mathrm{d}S\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1,x,y,z\geqslant 0}f\left(z\right)\mathrm{d}S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cdot f\left(\cos u\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cdot f\left(\cos u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

例题 20.18 设 $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ 且
$$f\left(0\right)=0,D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqslant 2tx,y\geqslant 0\right\}.$$
证明
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{5}f'\left(0\right).$$

证明 对 $r\in\mathbb{R}$, 首先由拉格朗日中值定理得 β 介于 0 到 r 之间使得 $f\left(r\right)=f\left(0\right)+f'\left(\beta\right)r$. 注意到
$$\lim_{r\to 0}\frac{f\left(r\right)-f\left(0\right)}{r}=f'\left(0\right),$$
于是
$$f'\left(\beta\right)=\begin{cases}\frac{f(r)-f(0)}{r}, & r\neq 0\\ f'\left(0\right), & r=0\end{cases}\in C\left(\mathbb{R}\right).$$
于是
$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}r^2 f\left(r\right)\mathrm{d}r\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}r^2 f\left(r\right)\mathrm{d}r=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}r^2\left[f\left(0\right)+f'\left(\beta\right)r\right]\mathrm{d}r\\&\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'\left(\alpha\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2t\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0^+}\frac{16t^4}{t^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'\left(\alpha\right)\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=}4\lim_{t\to 0^+}\eta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{5}f'\left(0\right).\end{aligned}$$

例题 20.19 设 D 由 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 x 轴围成平面区域, 计算 $\iint_D\left(x+2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明 直接有

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(xy(x)+y^2(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{2\pi}\left[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2\right]\mathrm{d}(t-\sin t) = \pi(5+3\pi).\end{aligned}$$

例题 20.20 计算

$$\iint_{1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明

$$\begin{aligned}\iint_{1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\overset{\text{余面积公式}20.5}{=} 4\int_1^2\mathrm{d}t\int_{x+y=t,x,y\geqslant 0}\frac{x^2+y^2}{t\sqrt{1+1}}\mathrm{d}s\\ &= 4\int_1^2\frac{1}{t}\mathrm{d}t\int_0^t\left[x^2+(t-x)^2\right]\mathrm{d}x = 8\int_1^2\frac{1}{t}\mathrm{d}t\int_0^t x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\int_1^2 t^2\mathrm{d}t\\ &= \frac{56}{9}.\end{aligned}$$

例题 20.21 设 $f\in C^2(\bar{D})$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$, 计算

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\right\}.$$

证明

$$\begin{aligned}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\overset{\text{余面积公式}}{=} \int_0^1\mathrm{d}r\oint_{x^2+y^2=r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}s \overset{\text{格林公式}}{=} \int_0^1 r\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 r\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^r\rho e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho = \pi\int_0^1 r\left(1-e^{-r^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2e}.\end{aligned}$$

例题 20.22 计算 $\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里 D 由 $y=x,x=-1,y=1$ 所围成.

证明 直接计算有

$$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}y = 2\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.,$$

这里注意到第二象限部分区域和第三象限的区域关于 x 轴对称从而可以丢掉. 第二象限剩下区域和第一象限区域关于 y 轴对称, 因此可以变为 2 倍第一象限的积分.

例题 20.23 设 $n\in\mathbb{N}$, 计算

$$\iint_D\left(x^2-y^2\right)^{2n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqslant 1,|x\pm y|\geqslant 1\right\}.$$

证明

$$\begin{aligned}\iint_D \left(x^2-y^2\right)^{2n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^{2n}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 r^{4n+1}\mathrm{d}r\\ &= \frac{4}{4n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^{2n}\left[1-(\cos\theta+\sin\theta)^{-4n-2}\right]\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^{2n}\left[1-(\cos\theta+\sin\theta)^{-4n-2}\right]\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)^{2n}(\cos\theta+\sin\theta)^{-4n-2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)^{2n}(\cos\theta+\sin\theta)^{-2n-2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta-\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n}\left(\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-2n-2}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^{2n}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{(2n+1)}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-\frac{2}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

例题 20.24 计算

$$\iint_D \left||x+y|-2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant 2\right\}.$$

证明 由余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned}\iint_D \left||x+y|-2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^4\mathrm{d}t\int_{x+y=t,x,y\in[0,2]\times[-2,2]}\left||x+y|-2\right|\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^0\left||t|-2\right|\cdot|t+2|\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left||t|-2\right|\cdot 2\sqrt{2}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_2^4\left||t|-2\right|\cdot|4-t|\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}t\\ &= \int_{-2}^0(t+2)^2\,\mathrm{d}t+\int_0^2 2(2-t)\,\mathrm{d}t+\int_2^4(t-2)(4-t)\,\mathrm{d}t=8.\end{aligned}$$

例题 20.25 计算 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{25-(3x+4y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明

$$\begin{aligned}&\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{25-(3x+4y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{Poisson 公式20.1}}{=} \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{25-25y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 5\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}\mathrm{d}r=\frac{40}{3}.\end{aligned}$$

例题 20.26 计算

$$\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}, \text{其中}D\text{由}e^x+e^y=1, e^{2x}+e^{2y}=1\text{围成}.$$

证明 我们有

$$\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{r_2(\theta)}^{r_1(\theta)}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\ln\frac{r_1(\theta)}{r_2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

这里

$$e^{r_1(\theta)\cos\theta}+e^{r_1(\theta)\sin\theta}=1, e^{2r_2(\theta)\cos\theta}+e^{2r_2(\theta)\sin\theta}=1.$$

于是 $2r_2(\theta)=r_1(\theta)$.

例题 20.27 设 $\begin{cases}x=t(1-\sin t)\\ y=t\cos t\end{cases}$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 围成区域 D，计算 D 面积.

笔记 本题想法是逆用格林公式求面积，即 $S_D=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$.

证明 我们直接计算有

$$\begin{aligned}S_D&=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-t\cos t\mathrm{d}(t-t\sin t)+(t-t\sin t)\mathrm{d}(t\cos t)\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2(1-\sin t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^3-24\pi+48}{48}.\end{aligned}$$

例题 20.28 计算

$$\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 直接分段积分去绝对值有

$$\begin{aligned}&\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1,x^2+y^2\leqslant 1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1,x^2+y^2>1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad-\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1,x^2+y^2>1}\left(2-2\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)r\mathrm{d}r-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}(2-2r)r\mathrm{d}r\\&=\frac{9\pi-32}{9}-\frac{10\pi-27\sqrt{3}}{9}=-\frac{\pi+32}{9}+3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

例题 20.29 计算 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里 D 是以 $(x_i,y_i),i=1,2,3$ 为顶点的三角形.

证明 注意到三角形是三个顶点的凸包，于是

$$\begin{cases}x=t_1x_1+t_2x_2+(1-t_1-t_2)x_3\\ y=t_1y_1+t_2y_2+(1-t_1-t_2)y_3\end{cases},t_1,t_2\geqslant 0,t_1+t_2\leqslant 1.$$

由

$$J=\left|\det\begin{pmatrix}x_1-x_3 & x_2-x_3\\ y_1-y_3 & y_2-y_3\end{pmatrix}\right|$$

知

$$\begin{aligned}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=J\iint_D(t_1x_1+t_2x_2+(1-t_1-t_2)x_3)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\&=J\int_0^1\mathrm{d}t_1\int_0^{1-t_1}(t_1x_1+t_2x_2+(1-t_1-t_2)x_3)\mathrm{d}t_2\\&=\frac{x_1+x_2+x_3}{6}J.\end{aligned}$$

来看江苏省第二十一届高等数学竞赛让人发狂的积分计算题.

例题 20.30 计算

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{|x^2+y^2-2x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{|x^2+y^2-2x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{t}\mathrm{d}t\int_{x^2+y^2=t^2,x,y\geqslant 0}y\sqrt{|t^2-2x|}\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin\theta\sqrt{|t^2-2t\cos\theta|}\mathrm{d}\theta\overset{\cos\theta=u}{=}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\int_0^1\sqrt{|t-2u|}\mathrm{d}u\\
&=\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\int_0^{\frac{t}{2}}\sqrt{t-2u}\mathrm{d}u+\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\int_{\frac{t}{2}}^1\sqrt{2u-t}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\left(t^{\frac{3}{2}}+(2-t)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{3\pi+4}{48}.
\end{aligned}$$

例题 20.31 计算 Ahmed 积分

$$\int_0^1\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x=\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 由轮换对称性, 我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\frac{1+y^2+1+x^2}{(1+x^2)(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^2}{32}.
\end{aligned}$$

例题 20.32 设 $a,b>0$, 计算 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=xy$ 围成区域 D 面积.

证明 考虑

$$x=ar\cos^2\theta,y=br\sin^2\theta,$$

则

$$D=\left\{(x,y):r\leqslant ab\cos^2\theta\sin^2\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{ab\cos^2\theta\sin^2\theta}ab\left|\det\begin{pmatrix}a\cos^2\theta & -2ar\cos\theta\sin\theta\\ b\sin^2\theta & 2br\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}r\\
&=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{ab\cos^2\theta\sin^2\theta}r\mathrm{d}r\\
&=a^3b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^3b^3}{2^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5(2\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{a^3b^3}{64}\int_0^{\pi}\sin^5\alpha\mathrm{d}\alpha=\frac{a^3b^3}{32}\cdot\frac{4!!}{5!!}=\frac{a^3b^3}{60}.
\end{aligned}$$

20.2.2 反常二重积分收敛性判断 ♠

例题 20.33 判断收敛性 $\iint_{|x|+|y|\leqslant a^2}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明

$$\begin{aligned}
&\iint_{|x|+|y|\leqslant a^2}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{收敛性只和奇点有关}}{\sim}\iint_{|x|^2+|y|^2\leqslant a^2}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}\mathrm{d}r=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}\mathrm{d}\theta<\infty.
\end{aligned}$$

例题 20.34 判断收敛性 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

笔记 很容易误判为对称性

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Rightarrow\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证明 我们由

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\left|y^2-x^2\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\left|\sin^2\theta-\cos^2\theta\right|}{r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2}\mathrm{d}r=+\infty$$

知道 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散.

例题 20.35 判断 $\iint_{x>1,y>1}\frac{\cos(x+2y)}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛性.

证明

Case 1 当 $\min\{p,q\}\leqslant 0$, 考虑累次积分显然原积分发散.

Case 2 当 $2p\left(1-\frac{1}{q}\right)>1, p>0$, 此时 $q>1$ 且

$$\begin{aligned}&\iint_{x>1,y>1}\frac{\left|\cos\left(x+2y\right)\right|}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint_{x>1,y>1}\frac{1}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_1^{\infty}\mathrm{d}x\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}y=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{2p}}\mathrm{d}x\int_{x^{\frac{2p}{q}}}^{\infty}\frac{x^{\frac{2p}{q}}}{1+y^q}\mathrm{d}y\\&=\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x^{2p\left(1-\frac{1}{q}\right)}}\int_{x^{\frac{2p}{q}}}^{\infty}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x<\infty.\end{aligned}$$

Case 3 当 $2p\left(1-\frac{1}{q}\right)\leqslant 1, q\geqslant 2p>0$, 由余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{x>1,y>1}\frac{\left|\cos\left(x+2y\right)\right|}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\oint_{x+2y=t,x>1,y>1}\frac{1}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\int_1^{\frac{t-1}{2}}\frac{1}{\left(t-2y\right)^{2p}+y^q}\sqrt{1+4}\mathrm{d}y=\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\int_1^{\frac{t-1}{2}}\frac{1}{\left(t-2y\right)^{2p}+y^q}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned}&\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\int_1^{\frac{t-1}{2}}\frac{1}{\left(t-2y\right)^{2p}+y^q}\mathrm{d}y\geqslant\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\int_1^{\frac{t-1}{2}}\frac{1}{\left(t-2\right)^{2p}+y^q}\mathrm{d}y\\&=\int_3^{\infty}\left[\frac{\left|\cos t\right|}{(t-2)^{2p-\frac{2p}{q}}}\int_{\frac{1}{(t-2)^{\frac{2p}{q}}}}^{\frac{t-1}{2(t-2)^{\frac{2p}{q}}}}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t\sim C\int_3^{\infty}\left[\frac{\left|\cos t\right|}{(t-2)^{2p-\frac{2p}{q}}}\right]\mathrm{d}t\overset{\text{相似例题14.65}}{=}+\infty,\end{aligned}$$

这里

$$C=\begin{cases}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y, & q>2p\\ \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y, & q=2p\end{cases}>0.$$

Case 3 当 $2p\left(1-\frac{1}{q}\right)\leqslant 1, 2p>q>0$, 此时 $q\left(1-\frac{1}{2p}\right)\leqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{x>1,y>1}\frac{\left|\cos\left(x+2y\right)\right|}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\oint_{x+2y=t,x>1,y>1}\frac{1}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\int_1^{t-2}\frac{1}{x^{2p}+\left(\frac{t-x}{2}\right)^q}\sqrt{1+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_3^{\infty}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t\int_1^{t-2}\frac{1}{x^{2p}+\left(\frac{t-1}{2}\right)^q}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_3^{\infty}\frac{\left|\cos t\right|}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^{q-\frac{q}{2p}}}\mathrm{d}t\int_{\frac{1}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^{\frac{q}{2p}}}}^{\frac{t-2}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^{\frac{q}{2p}}}}\frac{1}{x^{2p}+1}\mathrm{d}x\sim\frac{1}{2}\int_3^{\infty}\frac{\left|\cos t\right|}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^{q-\frac{q}{2p}}}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{2p}+1}\mathrm{d}x=+\infty.\end{aligned}$$

综上所述, $\iint_{x>1,y>1}\frac{\cos(x+2y)}{x^{2p}+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛当且仅当 $2p\left(1-\frac{1}{q}\right)>1, p>0$.

例题 20.36 判断 $\iint_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\cdot\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 敛散性.

证明 由余面积公式20.5得

$$\begin{aligned}\iint_{x+y\geqslant 1}\frac{|\sin x\cdot\sin y|}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t\int_{x+y=t}|\sin x\cdot\sin y|\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}|\sin x\cdot\sin(t-x)|\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x=+\infty,\end{aligned}$$

即原积分分散.

例题 20.37 判断

$$\iint_{0<|x|+|y|<1}\frac{1}{|x|^p+|y|^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛性.

证明

注意到当 p,q 有一个非正时被积函数没有奇点, 因此收敛. 下面假设 $p,q>0$.

由对称性得

$$\iint_{0<|x|+|y|<1}\frac{1}{|x|^p+|y|^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{0<x+y<1,x>0,y>0}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

然后

$$\iint_{0<x+y<1,x>0,y>0}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}y.$$

我们需要寻求 $\int_0^{1-x}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}y, x\to 0^+$ 的等价量.

我们有

$$\int_0^{1-x}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}y=x^{\frac{p}{q}}\int_0^{\frac{1-x}{x^{\frac{p}{q}}}}\frac{1}{x^p+\left(x^{\frac{p}{q}}y\right)^q}\mathrm{d}y=x^{\frac{p}{q}-p}\int_0^{\frac{1-x}{x^{\frac{p}{q}}}}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y.$$

当 $q>1$, 我们有

$$\int_0^{1-x}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}y\sim x^{\frac{p}{q}-p}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y, x\to 0^+,$$

即原积分当且仅当 $p-\frac{p}{q}<1$ 收敛.

当 $q=1$, 我们有

$$\int_0^{1-x}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}y\sim\int_0^{\frac{1-x}{x^p}}\frac{1}{1+y}\mathrm{d}y=\ln\left(1+\frac{1-x}{x^p}\right)\sim -p\ln x, x\to 0^+,$$

即原积分总是收敛.

当 $0<q<1$, 由洛必达法则得

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\int_0^z\frac{1}{1+y^q}\mathrm{d}y}{z^{-q+1}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+z^q}}{(1-q)z^{-q}}=\frac{1}{1-q},$$

即

$$\int_0^{1-x}\frac{1}{x^p+y^q}\mathrm{d}y\sim\frac{1}{1-q}x^{\frac{p}{q}-p}\left(\frac{1-x}{x^{\frac{p}{q}}}\right)^{-q+1}\sim\frac{1}{1-q}, x\to 0^+,$$

因此原积分总是收敛.

我们总结一下, 原积分当且仅当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1, p,q>0$ 或者 p,q 至少有一个非正[4]时原积分收敛, 我们完成了证明.

例题 20.38 设

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x,y\leqslant 1\right\}, 1\leqslant p<\infty,$$

[4]读者也可以发现者 p,q 至少有一个非正时, 被积函数没有奇点.

判断积分 $\iint_D \left|\frac{1}{1-xy}\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛性.

注 读者可以记一下由斯特林公式9.4得到的渐近估计:

结论 对 $a,b\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)}\sim k^{a-b}, k\to+\infty.$$

证明 利用

$$(1-t)^{-p}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{k!}t^k, t\in(-1,1),$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_D\left|\frac{1}{1-xy}\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{1}{(1-xy)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{k!}(xy)^k\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{k!}\int_0^1\int_0^1(xy)^k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{(k+1)!(k+1)}=1+\frac{1}{\Gamma(p)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p+k)}{(k+1)\Gamma(k+2)}\\
&\sim 1+\frac{1}{\Gamma(p)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3-p}}.
\end{aligned}$$

然后我们有原积分收敛等价于 $1\leqslant p<2$.

来看复旦大学 2026 数学分析考研压轴题.

例题 20.39 计算

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\iint_{x^2+xy+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{1}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 注意到

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\frac{1}{r}\left|\sin\frac{1}{r^2}\right|\mathrm{d}r\\
&\overset{r=t^{-\frac12}}{=}2\pi\cdot\frac12\int_0^{\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}r=\pi\int_0^{\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}r=+\infty,
\end{aligned}$$

即上述二重积分是发散的, 因此上述极限是计算一个具体的子列极限, 而不能直接当成二重积分计算.

证明 极坐标计算得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to0^+}\iint_{x^2+xy+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{1}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\cos\theta\sin\theta}}}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\\
&\overset{u=\frac{1}{r^2}}{=}\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{2\pi}\left(\frac12\int_0^{\frac{1+\cos\theta\sin\theta}{\epsilon^2}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

注意到

$$F(\epsilon,\theta)\triangleq\begin{cases}\frac12\int_0^{\frac{1+\cos\theta\sin\theta}{\epsilon^2}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, & \epsilon>0\\ \frac12\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, & \epsilon=0\end{cases}$$

是二元连续函数, 所以

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{2\pi}\left(\frac12\int_0^{\frac{1+\cos\theta\sin\theta}{\epsilon^2}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\frac12\int_0^{\frac{1+\cos\theta\sin\theta}{\epsilon^2}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{2}.$$

20.3 三重积分

例题 20.40 计算 $\iiint_\Omega xy^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 $z=xy, y=x, y=1, z=0$ 围成区域.

证明 容易预见, 图形极其抽象, 我们要强迫自己不画图, 直接根据自然范围确定上下限得

$$\iiint_\Omega xy^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{165}.$$

我们来看四川大学练习册上的一道题.

例题 20.41 计算 $I=\iiint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 这里 D 由 $z=xy, x+y+z=1, z\geqslant 0$ 围成的第一象限的区域.

注本题主要体会不画图解决三重积分的方法.

证明 注意到 $xy\geqslant 1-x-y\Leftrightarrow y\geqslant\frac{1-x}{x+1}$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x\mathrm{d}z+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}y+\int_0^{xy}x\mathrm{d}z\\&=\frac{192\ln 2-133}{24}+\frac{-36\ln 2+25}{6}=2\ln 2-\frac{11}{8}.\end{aligned}$$

例题 20.42 计算 $\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 这里 Ω 由 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 围成且在第一象限部分.

证明 球坐标给出

$$\rho^4=2\rho^2\sin^2\psi\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\rho^2=\sin^2\psi\sin\left(2\theta\right),\theta,\psi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{\sin\psi\sqrt{\sin(2\theta)}}\rho^2\frac{\rho^3\sin^2\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta}{\rho^2\sin^2\psi}\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{\sin\psi\sqrt{\sin(2\theta)}}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sin^2\left(2\theta\right)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\psi\cos\psi\mathrm{d}\psi\\&=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\left(2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{72}.\end{aligned}$$

例题 20.43 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2<1\right\}$ 且 $f\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ 满足 $\Delta f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算

$$\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

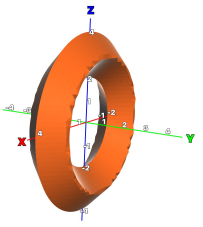
证明 由余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}t\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}S\\&=\int_0^1t\mathrm{d}t\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&=\int_0^1t\mathrm{d}t\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S\\&=4\pi\int_0^1t\mathrm{d}t\int_0^tr^3\mathrm{d}r=\pi\int_0^1t^5\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

例题 20.44 计算 $\iiint_\Omega\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 这里 Ω 由曲面 $\left|3-\sqrt{x^2+z^2}\right|+|y|=1$ 围成.

证明 我们写成图更舒服的形式, 由轮换对称性, 我们只需计算 $\iiint_\Omega\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

图 20.3.1: 本题图



这里 Ω' 由曲面 $\left|3-\sqrt{x^2+y^2}\right|+|z|=1$ 围成. 为方便, 我们下文的 Ω' 仍写做 Ω.

注意到

$$\left|3-\sqrt{x^2+y^2}\right| \leqslant 1 \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 4.$$

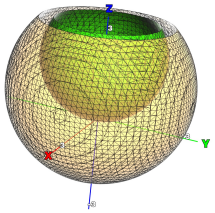
利用柱坐标, 我们有

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_2^4 r\mathrm{d}r \int_{-1+|3-r|}^{1-|3-r|} r\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_2^4 r^2\left(2-2\left|3-r\right|\right)\mathrm{d}r = \frac{110\pi}{3}.\end{aligned}$$

例题 20.45 计算 $\iiint_V \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9, z \geqslant 0$ 围成的空心体.

证明 采用截面法有

图 20.3.2: 本题图



$$\begin{aligned}\iiint_V \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^4 \mathrm{d}z \iint_{4-(z-2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 9-(z-1)^2} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}} r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^4 \left[\left(9-(z-1)^2\right)^2-\left(4-(z-2)^2\right)^2\right]\mathrm{d}z \\ &= \frac{256\pi}{3}.\end{aligned}$$

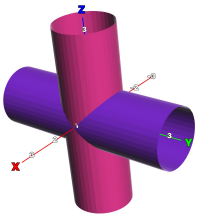
命题 20.1 (圆柱之交的体积)

设 $R>0$,

1. 求 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围立体体积.
2. 求 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2, y^2+z^2=R^2$ 所围立体体积.

证明

图 20.3.3: $R=1$ 第一问图



1. 只需计算 8 倍第一象限的体积, 即

$$\begin{aligned}\iiint 1\mathrm{d}V &= 8\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2,x,y\geqslant 0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}1\mathrm{d}z = 8\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2,x,y\geqslant 0}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}\mathrm{d}r = \frac{8}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}R^3,\end{aligned}$$

这里根据

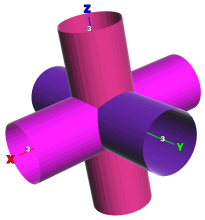
$$\int\left(\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta+\int\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\left(\cos\theta\right),$$

就能求出原函数.

2. 只需计算 8 倍第一象限的体积, 伸缩 R 倍, 不妨设 $R=1$. 我们有

$$\begin{aligned}\iiint 1\mathrm{d}V &= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}1\mathrm{d}z+8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}}1\mathrm{d}z \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}\mathrm{d}r+8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}\mathrm{d}r \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta+\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \left(8-4\sqrt{2}\right)+\left(8-4\sqrt{2}\right) = 16-8\sqrt{2}.\end{aligned}$$

图 20.3.4: $R=1$ 第二问图

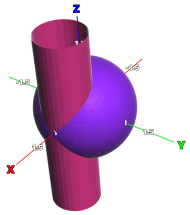


因此所求体积为 $\left(16-8\sqrt{2}\right)R^3$.

例题 20.46 设 $a>0$, 求 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax$ 围成体积.

证明

图 20.3.5: $a=1$ 本题图



只需计算 2 倍 $z\geqslant 0$ 的部分, 即

$$\begin{aligned}\iiint 1\mathrm{d}V&=2\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}1\mathrm{d}z=2\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{6\pi-8}{9}a^3.\end{aligned}$$

来看一个当年几乎没人做出的决赛真题.

例题 20.47 计算 $\iiint_{[0,1]^3}\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}V$.

笔记 核心想法就是把分数的次方用 Gamma 函数积分定义表示出来. 当然本题也能转化为 Ahmed 积分, 即例题20.31, 这也是参考答案的方法. 但我认为这样太孤立, 不是一种好的方法.

证明 我们有

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]^3}\frac{1}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}V&=\iiint_{[0,1]^3}\int_0^{\infty}e^{-\left(1+x^2+y^2+z^2\right)t}t\mathrm{d}t\mathrm{d}V\\&=\int_0^{\infty}te^{-t}\cdot\left(\int_0^1e^{-x^2t}\mathrm{d}x\right)^3\mathrm{d}t\overset{x=\frac{y}{\sqrt{t}}}{=}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\cdot\left(\int_0^{\sqrt{t}}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^3\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\sqrt{t}}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^3\mathrm{d}\left(\int_0^{\sqrt{t}}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^4=\frac{\pi^2}{32}.\end{aligned}$$

例题 20.48 设 $a>R>0,\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\right\}$, 计算

$$\iiint_{\Omega}\frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证明 直接计算有

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}\frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overset{\text{Gauss 公式}}{=}\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2,\text{朝外}}\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2,}\sqrt{R^2-2az+a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left[\sqrt{R^2-2a\sqrt{R^2-x^2-y^2}+a^2}-\sqrt{R^2+2a\sqrt{R^2-x^2-y^2}+a^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\pi\int_0^R r\left[\sqrt{R^2-2a\sqrt{R^2-r^2}+a^2}-\sqrt{R^2+2a\sqrt{R^2-r^2}+a^2}\right]\mathrm{d}r\\&\overset{R^2-r^2=u^2}{=}2\pi\int_0^R u\left[\sqrt{R^2-2au+a^2}-\sqrt{R^2+2au+a^2}\right]\mathrm{d}u\\&=2\pi\int_0^R u\left[\sqrt{R^2-2au+a^2}-\sqrt{R^2+2au+a^2}\right]\mathrm{d}u\\&=\frac{4\pi}{15}R^3\left(\frac{R^2}{a^2}-5\right),\end{aligned}$$

这里最后一个积分是难算的, 可以让 $R^2-2au+a^2=i^2,R^2+2au+a^2=j^2$ 转化成多项式积分来计算.

例题 20.49 计算

$$\iiint_{x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\iiint_{x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{4\cos\psi}r^3\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}\cdot4^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos^4\psi\mathrm{d}\psi=\frac{128}{5}\pi.\end{aligned}$$

下面这个题来自复旦大学.

例题 20.50 设

$$\Omega_t=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:t^2\leqslant x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leqslant1\right\},$$

计算

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\ln t}\iiint_{\Omega_t}\frac{\cos\left(x+2y+3z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz.$$

笔记 这里涉及的极限积分换序非数学类无需给出理由, 本题出题意图只是让学生纯计算的.

证明 注意到

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\ln t}\iiint_{\Omega_t}\frac{\cos(x+2y+3z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=6\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\ln t}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_t^1\frac{\cos(r\sin\varphi\cos\theta+4r\sin\varphi\sin\theta+9r\cos\varphi)}{r\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta+4\sin^2\varphi\sin^2\theta+9\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}dr$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\varphi}{\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta+4\sin^2\varphi\sin^2\theta+9\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\int_t^1\frac{\cos(r\sin\varphi\cos\theta+4r\sin\varphi\sin\theta+9r\cos\varphi)}{r}dr}{\ln t}\right]d\varphi$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\varphi}{\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta+4\sin^2\varphi\sin^2\theta+9\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{\cos(t\sin\varphi\cos\theta+4t\sin\varphi\sin\theta+9t\cos\varphi)}{t}}{\frac{1}{t}}\right]d\varphi$$

$$=-6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta+4\sin^2\varphi\sin^2\theta+9\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta+4\sin^2\varphi\sin^2\theta+9\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}d\cos\varphi$$

$$=6\int_0^{2\pi}\frac{2}{9\cos^2\theta-12}d\theta=-4\pi.$$

练习 20.1 设 $V=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leqslant1,z\geqslant0,y^2\geqslant2zx\right\}$, 计算 $I=\iiint_V|y|\,dV$.

证明 注意到 y 换成 $-y$, 表达式和积分都不变. 于是有

$$y=r\sin\psi\sin\varphi\geqslant0\Rightarrow\varphi\in[0,\pi],z\geqslant0\Rightarrow r\cos\psi\geqslant0\Rightarrow\psi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

以及

$$r^2\sin^2\psi\sin^2\varphi\geqslant2r^2\cos\psi\sin\psi\cos\varphi\Rightarrow\tan\psi\geqslant\frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi},\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

因此

$$I=\iiint_V|y|\,dV=2\iiint_V ydV$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\arctan\frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi d\psi\int_0^1r^3\sin\psi\sin\varphi dr+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi d\psi\int_0^1r^3\sin\psi\sin\varphi dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_{\arctan\frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi d\psi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1dt\int_{\arctan\frac{2t}{1-t^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi d\psi+\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2t}{1-t^2}+\frac{\sin\left(2\arctan\frac{2t}{1-t^2}\right)}{2}\right)dt+\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\ln2\right)+(1-\ln2)\right)+\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8},$$

这里

$$\int_0^1\arctan\frac{2t}{1-t^2}dt=t\arctan\frac{2t}{1-t^2}|_0^1-\int_0^1td\left(\arctan\frac{2t}{1-t^2}\right)$$

$$=t\arctan\frac{2t}{1-t^2}|_0^1-\int_0^1\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\ln2;$$

以及

$$\frac{1}{2}\int_0^1\sin\left(2\arctan\frac{2t}{1-t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{2t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=1-\ln2.$$

例题 20.51 计算 $\iiint_D \frac{xyz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,(a>b>c>0)$, 这里 D 是第一象限半径为 R 的球, 中心在原点.

注本题是暴力计算题.

证明 直接计算有

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{xyz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^R \frac{r^5\sin^3\psi\cos\psi\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2r^2\sin^2\psi\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\psi\sin^2\theta+c^2r^2\cos^2\psi}}\mathrm{d}r\\ &= \frac{R^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\psi\cos\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi\cos^2\theta+b^2\sin^2\psi\sin^2\theta+c^2\cos^2\psi}}\mathrm{d}\psi\\ &= \frac{R^5}{20}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\left(\sin^2\theta\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi\cos^2\theta+b^2\sin^2\psi\sin^2\theta+c^2\cos^2\psi}}\mathrm{d}\left(\sin^2\psi\right)\\ &= \frac{R^5}{20}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{y}{\sqrt{a^2y^2(1-x)+b^2yx+c^2(1-y)}}\mathrm{d}y\\ &= \frac{R^5}{20}\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1\frac{1}{\sqrt{a^2y^2(1-x)+b^2yx+c^2(1-y)}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{R^5}{20}\int_0^1\frac{2y}{b^2y-a^2y}\left(\sqrt{b^2y+c^2-c^2y}-\sqrt{a^2y+c^2-c^2y}\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{R^5(ab+ca+bc)}{15(b+c)(a+c)(a+b)},\end{aligned}$$

其中注意定积分

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{mx+n}}\mathrm{d}x=\frac{2}{m}\left(\sqrt{m+n}-\sqrt{n}\right),\int_0^1\sqrt{mx+n}\mathrm{d}x=\frac{2}{3m}\left[(m+n)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}\right].$$

例题 20.52 计算 $\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 这里 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=2$ 围成区域.

证明 我们分成两个区域之差并分别用柱坐标和球坐标有

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_r^2 z\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^3\cos\psi\mathrm{d}r\\ &= 4\pi-\frac{\pi}{8}=\frac{31\pi}{8}.\end{aligned}$$

例题 20.53 设 $H(x)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 3}a_{ij}x_ix_j, A=(a_{ij})$ 是三阶实正定矩阵, 计算

$$\iiint_{H(x)\leqslant 1}e^{\sqrt{H(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

笔记 此类问题都是统一的正交相似对角化.

证明 做换元 $x=Ty$ 使得 T 是三阶实正交矩阵,

$$T^THT=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}.$$

现在因为正交矩阵的行列式的绝对值为 1, 我们有

$$\begin{aligned}\iiint_{H(x)\leqslant 1}e^{\sqrt{H(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 &= \iiint_{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2\leqslant 1}e^{\sqrt{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\iiint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2\leqslant 1}e^{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_0^1\mathrm{d}r\iint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=r^2}e^r\mathrm{d}S\\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{\det A}}\int_0^1 r^2e^r\mathrm{d}r=\frac{4\pi(e-2)}{\sqrt{\det A}}.\end{aligned}$$

例题 20.54 设 $R>0$, 计算

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

这里 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. 再计算

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

证明 **Step 1**

$$\begin{aligned}
&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\
&=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2}}\\
&\overset{\text{Poisson 公式}}{=}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2\sqrt{a^2+b^2+c^2}z+a^2+b^2+c^2}}\\
&\overset{\text{余面积公式20.5}}{=}\int_0^R\mathrm{d}t\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{t^2-2\sqrt{a^2+b^2+c^2}z+a^2+b^2+c^2}}\\
&=2\pi\int_0^R\mathrm{d}t\int_0^\pi\frac{t^2\sin\psi\mathrm{d}\psi}{\sqrt{t^2-2\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\cos\psi+a^2+b^2+c^2}}\\
&=2\pi\int_0^R t^2\mathrm{d}t\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{t^2-2\sqrt{a^2+b^2+c^2}tu+a^2+b^2+c^2}}\\
&=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\int_0^R t\left[\sqrt{a^2+b^2+c^2}+t-\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}-t\right|\right]\mathrm{d}t\\
&=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{cases}2\int_0^R t^2\mathrm{d}t, & \sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant R\\ 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\int_{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}^R t\mathrm{d}t+2\int_0^{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}t^2\mathrm{d}t, & \sqrt{a^2+b^2+c^2}<R\end{cases}\\
&=\begin{cases}\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, & \sqrt{a^2+b^2+c^2}\geqslant R\\ 2\pi R^2-\frac{2\pi}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right), & \sqrt{a^2+b^2+c^2}<R\end{cases}.
\end{aligned}$$

Step 2 现在我们来算极限, 此时我们给出不直接计算积分的情况下计算这个极限的方法.

当 $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, 当 R 充分小, 我们由积分中值定理有

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{4\pi}{3}\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2}}$$

$$\to\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\left(R\to 0^+\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)\to(0,0,0)\right).$$

当 $(a,b,c)=(0,0,0)$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^3}\int_0^R\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2}\frac{\mathrm{d}S}{r}\\
&=\lim_{R\to 0^+}\frac{4\pi}{R^3}\int_0^R r\mathrm{d}r=\lim_{R\to 0^+}\frac{2\pi}{R}=+\infty.
\end{aligned}$$

例题 20.55 设 $a,b,c>0$, 计算 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ 在 $x,y,z\geqslant 0$ 部分围成的体积.

证明 考虑参数方程

$$x=ar\cos^2\psi\sin\varphi,y=br\sin^2\psi\sin\varphi,z=cr\cos\varphi,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\psi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

这里注意 φ 范围由 $x,y,z\geqslant 0$ 确定, ψ 的范围注意只需要 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 就能遍历所有可能的点 (x,y,z).

于是

$$\begin{aligned}\iiint 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left|\det\left(\begin{pmatrix}\cos^2\psi\sin\varphi & -2\cos\psi\sin\psi\sin\varphi & \cos^2\psi\cos\varphi\\ r\sin^2\psi\sin\varphi & 2r\sin\psi\cos\psi\sin\varphi & r\sin^2\psi\cos\varphi\\ r\cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{pmatrix}\right)\right|\mathrm{d}r\\ &= abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\psi)\,\mathrm{d}\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r = \frac{abc}{3}.\end{aligned}$$

例题 20.56 设

$$V\triangleq\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x,y,z>0,x+y+z<1\right\},$$

计算

$$I=\iiint_V\sin\frac{z}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证明 两次运用余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\iiint_V\sin\frac{z}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\mathrm{d}t\iint_{x+y+z=t,x,y,z>0}\sin\frac{z}{t}\mathrm{d}S\\ &\overset{\text{曲面积分换元法}}{=}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\iint_{x+y+z=1,x,y,z>0}\sin z\mathrm{d}S\\ &=\frac{1}{3\sqrt{3}}\iint_{x+y\leqslant1,x,y>0}\sin(1-x-y)\sqrt{1+1+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^1\sin(1-u)\,\mathrm{d}u\int_{x+y=u,x,y>0}1\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{3}\int_0^1 u\sin(1-u)\,\mathrm{d}u=\frac{1-\sin1}{3}.\end{aligned}$$

例题 20.57 设 $R>0$ 以及

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\right\},$$

计算 $\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\mathrm{d}z\\ &=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\mathrm{d}r^2\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^{\frac{3}{4}R^2}\mathrm{d}t\int_{R-\sqrt{R^2-t}}^{\sqrt{R^2-t}}z^2\mathrm{d}z\\ &\overset{t=R^2-u^2}{=}2\pi\int_{\frac{1}{2}R}^R u\mathrm{d}u\int_{R-u}^u z^2\mathrm{d}z\\ &=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}R}^R u\left(u^3-(R-u)^3\right)\mathrm{d}u\\ &=\frac{59\pi}{480}R^5.\end{aligned}$$

例题 20.58 $x^2+y^2+z^2\leqslant1,x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant1$ 的公共部分的体积为?

证明 我们有

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}1\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}r^2\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}1\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}t\int_{1-\sqrt{1-t}}^{\sqrt{1-t}}1\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^{\frac{3}{4}}\left(2\sqrt{1-t}-1\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

例题 20.59 设 Ω 是由平面

$$x=0,x=y,y=z,z=1,z=2$$

围成的空间区域. 计算

$$\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

证明 采用先二后一的方法, 固定好 z 之后, 我们有截面

$$D_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant z\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{y^2+z^2}}=\int_1^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+z^2}}\\&=\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{y^2+z^2}}=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y^2+z^2}}\\&=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^z\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\mathrm{d}y=\left(\sqrt{2}-1\right)\int_1^2z\mathrm{d}z\\&=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}.\end{aligned}$$

20.4 第一类曲线积分

例题 20.60 设 $a>0$, 计算

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s,L是x^2+y^2=a^2,y=x,y=0围成区域的整个边界.$$

证明 直接分段计算有

$$\begin{aligned}\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}e^{\sqrt{2x^2}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t+\int_0^a e^x\mathrm{d}x\\&=e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1=e^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2.\end{aligned}$$

例题 20.61 设 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的周长为 $a>0$, 计算 $\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1}\left(2xy+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s$.

证明 由对称性[5], 我们有

$$\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1}\left(2xy+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s=\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1}\left(3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s$$
$$=12\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s=12\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1}1\mathrm{d}s=12a.$$

例题 20.62 设 $a>0$, 空间区间 $\Gamma\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}(a>0)$, 计算 $\int_\Gamma(1+x)^2\,\mathrm{d}s$.

证明 利用对称性, 我们有

$$\int_\Gamma(1+x)^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma\left(1+2x+x^2\right)\mathrm{d}s=\int_\Gamma1\mathrm{d}s+\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$$
$$=\int_\Gamma1\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_\Gamma\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}s=\left(1+\frac{a^2}{3}\right)\int_\Gamma1\mathrm{d}s$$
$$\overset{\text{注意圆的半径就是球面的半径}}{=}2\pi a\left(1+\frac{a^2}{3}\right).$$

例题 20.63 计算 $I=\int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)}|y|\,\mathrm{d}s\,(a>0)$.

证明 注意到极坐标 $r^2=a^2\cos(2\theta)$, 为了有更自然的区间和对称性, 我们可以猜出范围为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 当然可以直接作图. 然后参数方程为

$$x=r\cos\theta=a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta,y=r\sin\theta=a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta.$$

直接计算有

$$I=\int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)}|y|\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta\sqrt{\left|\left[a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta\right]'\right|^2+\left|\left[a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta\right]'\right|^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

例题 20.64 设 $\begin{cases}(z+2)^2-x^2=4\\(z-2)^2+y^2=4\end{cases}$ 在 XOY 平面投影曲线是 L, 计算 $\int_L|y|\,\mathrm{d}s$.

证明 把 x,y 用 $\pm x,\pm y$ 代替不改变表达式和要计算的, 因此不妨设 $x,y>0$ 进行计算. 视为参数方程

$$\begin{cases}x=\sqrt{(z+2)^2-4}\\y=\sqrt{4-(z-2)^2}\end{cases},z\in[0,4],$$

这里参数范围可以由表达式有意义确定. 于是

$$\int_L|y|\,\mathrm{d}s=4\int_0^4\sqrt{4-(z-2)^2}\sqrt{|x'(z)|^2+|y'(z)|^2}\mathrm{d}z$$
$$=16\sqrt{2}\int_0^4\sqrt{\frac{1}{4+z}}\mathrm{d}z=128-64\sqrt{2}.$$

20.5 第二类曲线积分

例题 20.65 求简单正定向光滑闭曲线 L 使得积分 $\int_C\left(y^3-y\right)\mathrm{d}x-2x^3\,\mathrm{d}y$ 值最大, 并计算最大值.

证明 格林公式表明

$$\int_C\left(y^3-y\right)\mathrm{d}x-2x^3\,\mathrm{d}y=\iint\left(-6x^2-3y^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要让上式尽可能大, 就要让被积函数尽可能非负, 于是所求 L 为 $6x^2+3y^2=1$.

[5]再次重申, 对称性的本质是换元法, 拿不准的时候就用换元法验证.

于是

$$\iint_{6x^2+3y^2\leqslant 1}\left(-6x^2-3y^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{18}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}.$$

例题 20.66 设 C 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 从 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的弧, 计算积分

$$\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}.y$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y\\&=\int_C\mathrm{d}\left(x^2y^3-y^2\sin x+y\right)=\left(x^2y^3-y^2\sin x+y\right)|_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}\\&=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

例题 20.67 计算 $I=\oint_{(x-1)^2+y^2=100}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 这里方向取逆时针.

证明 此类问题就是标准的挖洞, 猜都能猜到挖洞之后与路径无关. 直接计算得

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}.$$

取 $\epsilon>0$ 充分小, 作 $x^2+y^2=\epsilon^2$, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\oint_{(x-1)^2+y^2=100}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{x^2+y^2=\epsilon^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{x^2+y^2=\epsilon^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\epsilon^2}\\&=\frac{1}{\epsilon^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\epsilon^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\epsilon^2}\cdot\pi\epsilon^2=2\pi.\end{aligned}$$

例题 20.68 计算

$$\int_L\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y,$$

这里 L 是连接 $(0,0)$ 到 a,b 的任意简单光滑曲线.

证明 求原函数有

$$\begin{aligned}&\int_L\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y\\&=\int_L\mathrm{d}\left(x^2\cos y+y^2\cos x\right)=\left(x^2\cos y+y^2\cos x\right)|_{(0,0)}^{(a,b)}\\&=a^2\cos b+b^2\cos a.\end{aligned}$$

例题 20.69 设 $\mathbf{l}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个常向量, C 是简单光滑闭曲线且取逆时针方向, $\mathbf{n}$ 是 C 的单位外法向量, 证明

$$\oint_C\cos\left(\mathbf{l},\mathbf{n}\right)\mathrm{d}s=0.$$

笔记 注意格林公式也可以写成 Gauss 公式的样子, 即设沿曲线 C 的切向量为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 那么单位外法向量[6]为 $(\sin\alpha,-\cos\alpha)$. 于是利用两类曲线积分的关系 $\mathrm{d}x=\cos\alpha\mathrm{d}s,\mathrm{d}y=\sin\alpha\mathrm{d}s$, 我们就有

$$\int(f,g)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s=\int\left(f\mathrm{d}y-g\mathrm{d}x\right)=\iint\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明

$$\oint_C\cos\left(\mathbf{l},\mathbf{n}\right)\mathrm{d}s=\oint_C\frac{\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{l}|\cdot|\mathbf{n}|}\mathrm{d}s=\oint_C\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathrm{d}x=\iint 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

[6]作图.

这里 $\mathbf{l}=(a,b)$.

例题 20.70 证明

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}=0.$$

证明

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty}\left|\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\right|=\lim_{R\to+\infty}\left|\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\cos\theta-x\sin\theta}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\left|\frac{y\cos\theta-x\sin\theta}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\right|\mathrm{d}s\leqslant\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\right|\mathrm{d}s\\
&=\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\left|\frac{R}{\left(R^2+xy\right)^2}\right|\mathrm{d}s\leqslant\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\left|\frac{R}{\left(R^2-\frac{1}{2}R^2\right)^2}\right|\mathrm{d}s\\
&=\lim_{R\to+\infty}4\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{1}{R^3}\mathrm{d}s=\lim_{R\to+\infty}8\pi\frac{1}{R^2}=0.
\end{aligned}$$

结论 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$ 面积是 πab. 椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$ 体积是 $\frac{4}{3}\pi abc$. 椭球表面积, 椭圆周长无初等表达式.

证明 证明的想法仅仅只是针对圆的面积和球体积做一个简单的换元法.

空间第二类曲线积分可以采用无脑代入法转化为平面第二类曲线积分, 这是非常强大的技巧. 来看 2024 年让人闻之色变的数学一真题.

例题 20.71 设 $x^2+y^2+z^2=2x$ 和 $2x-z-1=0$ 交线为 L. 计算

$$\int_L\left(6xyz-yz^2\right)\mathrm{d}x+2x^2z\mathrm{d}y+xyz\mathrm{d}z,$$

这里方向为从 z 轴正向往负向看过去为逆时针方向.

证明 直接计算有

$$\begin{aligned}
&\int_L\left(6xyz-yz^2\right)\mathrm{d}x+2x^2z\mathrm{d}y+xyz\mathrm{d}z=\int_L\left(6xy\left(2x-1\right)-y\left(2x-1\right)^2\right)\mathrm{d}x+2x^2\left(2x-1\right)\mathrm{d}y+xy\left(2x-1\right)\mathrm{d}\left(2x-1\right)\\
&=\int_{x^2+y^2+(2x-1)^2=2x}\left(6xy\left(2x-1\right)-y\left(2x-1\right)^2\right)\mathrm{d}x+2x^2\left(2x-1\right)\mathrm{d}y+2xy\left(2x-1\right)\mathrm{d}x\\
&=\iint_{5x^2+y^2\leqslant6x-1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\frac{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\leqslant1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

来看李心灿上的一个经典第二类曲线积分计算题, 由于原参考答案是错误的, 导致当年这个题驰名互联网.

例题 20.72 计算

$$\int_L\left(x^2-|x|\,y\right)\mathrm{d}x+\left(2x\,|y|+y^2\right)\mathrm{d}y+\left(3-x-y+e^{-z^2}\right)\mathrm{d}z,$$

这里从 $(0,1,1)$ 到 $(-1,0,-1)$ 到 $(0,-1,-1)$ 到 $(1,0,1)$ 沿着 $L=\begin{cases}|x|+|y|=1\\ z=\frac{4}{\pi}\arctan\left(x+y\right)\end{cases}$ 进行.

笔记 注意高斯格林公式只需要关于求导那个分量有光滑性即可, 无需整体的光滑性.

证明 $(-1,0,-1)$ 到 $(0,-1,-1)$ 部分因为 z 是常数, 因此积分 $\mathrm{d}z$ 部分是 0. 从 $(0,1,1)$ 到 $(-1,0,-1)$,$(0,-1,-1)$ 到 $(1,0,1)$ 这段对称的, 对 $\mathrm{d}z$ 来说 $3-x-y+e^{-z^2}$ 是关于 z 的偶函数, 因此同样积分是 0. 因此实际只需计算平面积分

$$\int_{L'}\left(x^2-|x|\,y\right)\mathrm{d}x+\left(2x\,|y|+y^2\right)\mathrm{d}y,$$

这里

$$L'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|+|y|=1,(x,y)\text{ 不落在第一象限}\right\}$$

且为逆时针.

于是补充

$$L''=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y=1,x,y\geqslant 0\right\},(1,0)\to(0,1),$$

我们有

$$\int_{L'+L''}\left(x^2-|x|\,y\right)\mathrm{d}x+\left(2x\,|y|+y^2\right)\mathrm{d}y=\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}\left(2\,|y|+|x|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用轮换对称性有

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}\left(2\,|y|+|x|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{3}{2}\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}\left(|x|+|y|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=6\iint_{x+y\leqslant 1,x,y\geqslant 0}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{余面积公式}20.5}{=}\frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^1\mathrm{d}t\int_{x+y=t,x,y\geqslant 0}t\mathrm{d}s\\&=6\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=2.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\int_{L''}\left(x^2-|x|\,y\right)\mathrm{d}x+\left(2x\,|y|+y^2\right)\mathrm{d}y\\&=\int_1^0\left(x^2-x\,(1-x)\right)\mathrm{d}x+\left[2x\,(1-x)+(1-x)^2\right]\mathrm{d}(1-x)\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

这给出了

$$\int_L\left(x^2-|x|\,y\right)\mathrm{d}x+\left(2x\,|y|+y^2\right)\mathrm{d}y+\left(3-x-y+e^{-z^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}.$$

例题 20.73 计算 $I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 这里

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x,y,z\geqslant 0\right\},$$

从 $(1,0,0)$ 到 $(0,0,1)$.

证明 直接化为平面积分

$$I=\int_{L'}(y-x)\,\mathrm{d}x+(1-x)\,\mathrm{d}y,L'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x^2+y^2=2x\right\}.$$

于是补充

$$L''=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=0,0\leqslant x\leqslant 1\right\},(0,0)\to(1,0),$$

我们有

$$\int_{L'+L''}(y-x)\,\mathrm{d}x+(1-x)\,\mathrm{d}y=-2\iint_{L',L''\text{围成区域}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

以及

$$\int_{L''}(y-x)\,\mathrm{d}x+(1-x)\,\mathrm{d}y=-\int_0^1 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.$$

这就给出了 $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

虽然化为平面曲线积分的方法很管用, 但我们还是用一下 Stokes 定理.

例题 20.74 计算

$$\oint_L\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz,$$

这里 $L:x+y+z=\frac{3}{2}$ 截正方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 且从 z 轴正向看下去为逆时针方向.

笔记 顺便提一提, 梯度, 旋度, 散度公式要记忆, 考试可能考.

证明 由公式

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} = (-2y-2z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(2x+2z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意定向为法向量向上, 于是运用两类曲面积分的关系, 我们有

$$\begin{aligned} &\oint \left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz \\ &=\iint (-2y-2z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(2x+2z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=\iint (-2y-2z)\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)-(2x+2z)\left(\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)+(-2x-2y)\left(\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)\mathrm{d}S \\ &=\iint (2y+2z)\,z_x+(2x+2z)\,z_y+(-2x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=-4\iint (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6\iint 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

例题 20.75 计算

$$I=\oint_\Gamma \left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z,$$

这里

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2=2z \end{cases},$$

这里从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

证明 注意到

$$x^2+y^2+\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=8\Rightarrow x^2+y^2=4\Rightarrow z=2\Rightarrow \mathrm{d}z=0,$$

于是

$$I=\oint_{x^2+y^2=4}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x\overset{\begin{cases} x=-u \\ y=-v \end{cases}}{=}-\oint_{u^2+v^2=4}\left|\sqrt{3}v-u\right|\mathrm{d}u=0.$$

例题 20.76 计算 $\oint_L (y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z)$, 这里 L 由 $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=1$ 交线围成, 方向取逆时针方向.

证明 **Method 1**

设

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=1, x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\},$$

由 Stokes 公式得

$$\oint_L (y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z)=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}y\mathrm{d}x)=\iint_S\left(\frac{-1}{\sqrt{1+1+1}}+\frac{-1}{\sqrt{1+1+1}}+\frac{-1}{\sqrt{1+1+1}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=-3\iint_{x^2+y^2+(1-x-y)^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{x^2+y^2+xy-x-y\leqslant 0}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases}x=u+v\\ y=u-v\end{cases}$$

$$=-6\iint_{2(3u^2-2u+v^2)\leqslant 0}1\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-6\iint_{9\left(u-\frac{1}{3}\right)^2+3v^2\leqslant 1}1\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=-6\pi\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Method 2

$$\oint_L (y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z)=\oint_{x^2+y^2+(1-x-y)^2=1}[(y-x)\,\mathrm{d}x+(1-2x-y)\,\mathrm{d}y]$$

$$=-3\iint_{x^2+y^2+(1-x-y)^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

来看 2025 同济大学数学分析考研真题.

例题 20.77 设 L 是 $x^2+y^2+z^2=8, x^2+y^2=2z$ 的交线, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向. 计算

$$I=\int_L\left(\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y-2z\mathrm{d}z\right).$$

证明

$$I=\int_L\left(\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y-2z\mathrm{d}z\right)$$

$$=\int_{x^2+y^2+\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=8}\left(\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y-\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$=\int_{x^2+y^2+\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=8}\left[-x\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(3y-yx^2-y^3\right)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\iint_{x^2+y^2+\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2<8}(-2xy+2xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

这里考虑 $x=-u, y=-v$, 则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1>0$, 此时曲线定向不改变, 因此

$$\int_{x^2+y^2+\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=8}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x=-\int_{u^2+v^2+\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2=8}\left|-\sqrt{3}v+u\right|\mathrm{d}u=-\int_{x^2+y^2+\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=8}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x=0.$$

例题 20.78 计算

$$\oint_C\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2},$$

这里 C 是围绕原点的简单光滑闭曲线且为逆时针.

证明 首先

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^4+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{x^4+y^2}\right),\forall\,(x,y)\neq(0,0),$$

于是我们对充分小的 $\epsilon>0$ 有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}&=\oint_{x^4+y^2=\epsilon^2}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{\epsilon^2}\\&=\frac{1}{\epsilon^2}\iint_{x^4+y^2\leqslant\epsilon^2}(-2x-2x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自偶倍奇零.

我们来看陈纪修课本的一个习题, 其本来是不符合标准格林公式的叙述的.

例题 20.79 计算

$$I=\int_L\left(\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y\right),$$

其中 L 是 $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$ 与直线 $y=0,0\leqslant x\leqslant\pi$ 所围区域的正向边界[7].

注陈纪修上明确指出格林公式的使用条件是

$$\int_L(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$$

的 P,Q 在 L 围成闭区域上有连续偏导数. 因此通常版版的格林公式是不适用的.

证明 我们用我们给出的强版本的格林公式13.30.

显然区域边界满足条件且曲线积分的被积函数在 L 围成开区域内有连续偏导数且被积函数关于单变量连续到边界. 可积性条件是显然满足的, 因此自然可以使用格林公式13.30.

我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_L\left(\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y\right)\\&=\iint y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^\pi\sin^3x\mathrm{d}x=\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

例题 20.80 设 $R,a,h>0,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 计算

$$\int_L(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z,$$

这里

(1) :

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=R^2,\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\right\}.$$

从 z 轴正向看过是逆时针方向.

(2) :

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=a^2,y=x\tan\alpha\right\}.$$

从 y 轴正向看过是逆时针方向.

证明

1. 直接代入计算得

$$\begin{aligned}&\int_L(y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z\\&=\int_L\left(y-h\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)\mathrm{d}x+\left(h\left(1-\frac{x}{a}\right)-x\right)\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}\left(h\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)\\&=\int_{x^2+y^2=R^2}\left(y-h\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{h(x-y)}{a}\right)\mathrm{d}x+\left(h\left(1-\frac{x}{a}\right)-x\right)\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left(-\frac{h}{a}-1-1-\frac{h}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\left(1+\frac{h}{a}\right)\pi R^2.\end{aligned}$$

[7] 即逆时针方向.

2. 直接代入计算得

$$\begin{aligned}&\int_L (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z\\&=\int_L (\tan\alpha\cdot x-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}(\tan\alpha\cdot x)+(x-\tan\alpha\cdot x)\,\mathrm{d}z\\&=\int_{x^2+\tan^2\alpha\cdot x^2+z^2=a^2} (\tan\alpha\cdot z-z)\,\mathrm{d}x+(x-\tan\alpha\cdot x)\,\mathrm{d}z\\&=\iint_{\frac{x^2}{\cos^2\alpha}+z^2\leqslant a^2} (1-\tan\alpha-\tan\alpha+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=(2-2\tan\alpha)\,\pi a^2\cos\alpha\\&=(2\cos\alpha-2\sin\alpha)\,\pi a^2.\end{aligned}$$

20.6 第一类曲面积分

例题 20.81 计算

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left[x^4+y^4+z\,(z+1)^3\right]\mathrm{d}S.$$

证明 运用对称性有

$$\begin{aligned}&\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left[x^4+y^4+z\,(z+1)^3\right]\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left[x^4+y^4+z\left(z^3+3z\right)\right]\mathrm{d}S\\&=3\iint_{x^2+y^2+z^2=1} z^4\mathrm{d}S+\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S\\&\overset{\text{参数方程法20.4}}{=}3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^4\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi+4\pi=\frac{32}{5}\pi.\end{aligned}$$

命题 20.2 (圆柱之交的表面积)

设 $R>0$,

1. 求 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围立体表面积.
2. 求 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2, y^2+z^2=R^2$ 所围立体表面积.

♠

注和体积的情况不同, 要注意面额外多出一个.

证明

1. 图见20.3.3. 伸缩 R 倍, 不妨设[8]$R=1$. 我们只需计算 8 倍第一象限. 由对称性, 第一象限由二个相同面积的图形组成. 直接计算第一象限的单个面的面积有

$$\begin{aligned}\iint 1\mathrm{d}S&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}\mathrm{d}r=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=1.\end{aligned}$$

   于是我们所求表面积为 $16R^2$.

2. 图见20.3.4. 伸缩 R 倍, 不妨设[9]$R=1$. 我们只需计算 8 倍第一象限. 由对称性, 第一象限由三个相同面积的图形组成. 直接计算第一象限单个面的面积有

$$\begin{aligned}\iint 1\mathrm{d}S&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\left(2-\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

[8]回忆第一类曲面积分的换元法, 注意到最后的结果要乘微元 R^2.

[9]回忆第一类曲面积分的换元法, 注意到最后的结果要乘微元 R^2.

于是我们所求表面积为 $24\left(2-\sqrt{2}\right)R^2$.

例题 20.82 计算

$$\text{计算}\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\ln|4x+3y+5z|\,\mathrm{d}S.$$

证明

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\ln|4x+3y+5z|\,\mathrm{d}S &\overset{\text{Poisson 公式}}{=} \iint_{x^2+y^2+z^2=1}\ln\left|\sqrt{4^2+3^2+5^2}z\right|\mathrm{d}S\\ &=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\ln\left(5\sqrt{2}\right)+\ln|z|\,\mathrm{d}S=4\pi\ln\left(5\sqrt{2}\right)+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\psi\ln|\cos\psi|\,\mathrm{d}\psi\\ &=4\pi\ln\left(5\sqrt{2}\right)+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^{1}\ln|t|\,\mathrm{d}t=4\pi\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{e}\right).\end{aligned}$$

例题 20.83 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2,a>0$ 被 $x+z=0,x-z=0$ 截出来的面积.

证明 显然所求结果为 4 倍第一象限, 于是

$$\begin{aligned}S&=4\iint_{z=-x,z=x,x=1\text{围成}}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &=4a\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z=8a\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\\ &=4a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x^2=4a\int_0^{a^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=8a^2.\end{aligned}$$

例题 20.84 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在 $z=0$ 和 $z=xy$ 之间部分的面积.

笔记 计算的是柱面部分的面积, 直接往 XOY 平面投影是线, 所以不能如此投影. 我们这里介绍一种仍往 XOY 平面投影的方法. 即形式上通过底面周长 * 高 = 表面积的方式来确定. 但这同样不是严格的, 所以仍然只需记公式即可.

证明 注意到 x,y 对称性, 只需计算四倍第一象限的表面积. 于是

$$\begin{aligned}\iint 1\mathrm{d}S=4\int_{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1,x,y\geqslant 0}xy\mathrm{d}s &\overset{\begin{cases}x=\cos^3\theta\\ y=\sin^3\theta\end{cases}}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\left|\left(\cos^3\theta\right)'\right|^2+\left|\left(\sin^3\theta\right)'\right|^2}\mathrm{d}\theta\\ &=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{9\pi}{64}.\end{aligned}$$

引理 20.1

1. 若区域 V 能表示为 $\{(x,y,z):F(x,y,z)<0\}$, 则边界外单位法向量为
$$\left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\right).$$
2. 若边界 S 有参数方程 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 表示, 则边界的法向量为[a]
$$\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

[a]方向要根据具体情况判断.

笔记 这是球的外法向量公式20.1.2的一般化, 现在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,a,b,c>0$ 的边界外法向量为

$$\left(\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\right).$$

例题 20.85 设 $a,b,c>0$, 设 $\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$, 计算

$$\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

证明 由两类曲面积分的关系和椭球面的外法向量公式20.1, 注意到

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}&=\iint_\Sigma \frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\\&=\iint_\Sigma\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\right].\end{aligned}$$

又

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0,$$

于是取充分小的 $\epsilon>0$, 就有

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\right]\\&=\frac{1}{\epsilon^3}\iint_{x^2+y^2+z^2=\epsilon^2}[xdydz+ydzdx+zdxdy]=\frac{3}{\epsilon^3}\iint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\epsilon^2}1dxdydz=4\pi.\end{aligned}$$

例题 20.86 计算

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2\right)\mathrm{d}S.$$

证明 我们介绍一种复积分技巧, 即由轮换对称性, 我们有

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\zeta^4\mathrm{d}S\overset{\zeta=e^{\frac{\pi}{4}i}\zeta}{=}-\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\zeta^4\mathrm{d}S=0,\zeta=x+iy.$$

于是

$$\begin{aligned}0&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}(x+iy)^4\,\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^4+y^4+C_4^2i^2x^2y^2\right)\mathrm{d}S\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(x^4+y^4-6x^2y^2\right)\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

即由轮换对称性知

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1}x^2y^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2+z^2=1}x^4\mathrm{d}S.$$

现在

$$\begin{aligned}&\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2\right)\mathrm{d}S\\&=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\iint_{x^2+y^2+z^2=1}z^4\mathrm{d}S\\&=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\cos^4\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi\\&=\frac{4}{5}\pi\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\right).\end{aligned}$$

例题 20.87 求 $\sin z=\sinh x\sinh y, z\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], y\geqslant 0$ 被平面 $x=1,x=2$ 所截取部分面积.

证明 曲面可以写为

$$y=\operatorname{arcsinh}\frac{\sin z}{\sinh x},1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint 1\mathrm{d}S &= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\coth x|\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_1^2 |\coth x|\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\ln\left(2\cosh 1\right).\end{aligned}$$

例题 20.88 设锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和圆柱面 $x^2+y^2=2ax\,(a>0)$. 求锥面被柱面所截面积 S_1 和圆柱面被锥面和 XOY 平面所截取部分面积 S_2.

笔记 准确判断是对哪个面积分, 不要问搞混淆. 对于柱面而言, 投影就是柱面方程本身在平面的意义. 当曲面不能往 XOY 平面投影的时候, 我们可以用第一类曲线积分来计算面积, 公式记为被积函数为高, 积分区域为往往 XOY 平面投影之后的边界.

证明 一方面

$$\begin{aligned}S_1 &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 2ax} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\pi a^2,\end{aligned}$$

另外一方面,

$$\begin{aligned}S_2 &= \oint_{x^2+y^2=2ax} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a\left(a+a\cos\theta\right)}\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 8a^2.\end{aligned}$$

例题 20.89 设 $a>0$,

1. 计算 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积;
2. 计算 $x^2+y^2=ax$ 含在 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的那部分面积.

证明

1. 显然只需计算 2 倍第一象限即可. 即

$$\begin{aligned}&2\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2a\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r \\ &= 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(a-a\left|\sin\theta\right|\right)\mathrm{d}\theta = 2\left(\pi-2\right)a^2.\end{aligned}$$

2. 显然只需计算 2 倍第一象限即可. 即

$$\begin{aligned}&2\oint_{x^2+y^2=ax}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}s = 2\oint_{x^2+y^2=ax}\sqrt{a^2-ax}\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2\theta+\frac{a^2}{4}\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\mathrm{d}\theta = a^2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 4a^2.\end{aligned}$$

例题 20.90 设 φ 是简单闭曲面 S 上任一点向径 $\mathbf{r}$ 与外法向量的夹角, V 为 S 所包围空间的体积, 证明

$$V=\frac{1}{3}\iint_S|\mathbf{r}|\cdot\cos\varphi\mathrm{d}S.$$

证明 记 $\mathbf{n}$ 为简单闭曲面 S 上任一点的单位外法向量, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\iint_S|\mathbf{r}|\cdot\cos\varphi\mathrm{d}S&=\frac{1}{3}\iint_S|\mathbf{r}|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{r}|}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_S\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\mathrm{d}S\\&\overset{\text{Gauss公式}}{=}\frac{1}{3}\iiint\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=V.\end{aligned}$$

例题 20.91 $R,H>0$, 计算

$$\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2},$$

其中 Σ 介于 $z=0,z=H$ 之间的 $x^2+y^2=R^2$ 的部分.

注 注意到曲面往 XOY 平面投影是线, 但不意味着第一类曲面积分是 0, 此时需要往另外一个平面投影使得不是线.

证明 我们往 YOZ 平面投影计算得

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}&=2\iint_{\Sigma,x\geqslant0}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}\\&=2\iint_{0\leqslant z\leqslant H,-R\leqslant y\leqslant R}\frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2R\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\int_{-R}^R\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{\frac{H}{R}}\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\&=2\pi\arctan\frac{H}{R}.\end{aligned}$$

例题 20.92 简单闭曲面 S 上任一点的单位外法向量记为 $\mathbf{n}$,$\mathbf{r}=(x,y,z)$, 记

$$I=\iint_S\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|^2}\mathrm{d}S.$$

若原点不在 S 上,

1. 若 S 包含原点, 求 I;
2. 若 S 不包含原点, 求 I.

证明

1. 取 $\epsilon>0$ 充分小使得

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\leqslant\epsilon^2\right\}$$

含在 S 围成的区域内部, 直接计算有

$$\begin{aligned}I&=\iint_S\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|^2}\mathrm{d}S=\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=\epsilon^2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\epsilon^3}\\&=\frac{1}{\epsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\epsilon^2}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi,\end{aligned}$$

这里用到了复连通区域上的 Gauss 公式以及[10]

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial z}=0. \tag{20.10}$$

2. 注意到(20.10)现在对整个 S 围成的区域内部都成立, 于是 $I=0$.

例题 20.93 计算

$$\iint_{x+y+z=1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

这里

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1\end{cases}.$$

证明 由 Poisson 公式, 即推论20.2, 我们有

$$\begin{aligned}\iint_{x+y+z=1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S&=\iint_{\sqrt{3}z=1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\ &=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{2}{3},z=\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(1-x^2-y^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}S\\ &=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{2}{3}}\left(1-x^2-y^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(\frac{2}{3}-r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{9}.\end{aligned}$$

例题 20.94 设 $a,b,c>0$, 计算

$$I=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\frac{\mathrm{d}S}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

证明 运用引理20.1, 我们知道椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的边界外法向量为

$$\left(\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\right).$$

于是对充分小的 $\epsilon>0$, 因为

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial z}=0,(x,y,z)\neq(0,0,0),$$

我们有

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\frac{x\frac{x}{a^2}+y\frac{y}{b^2}+z\frac{z}{c^2}}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\mathrm{d}S\\ &=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{\epsilon^3}\iint_{ax^2+by^2+cz^2=\epsilon^2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{3}{\epsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\leqslant\epsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\epsilon^3\sqrt{abc}}\cdot\frac{4}{3}\pi\epsilon^3=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.\end{aligned}$$

[10]此类挖洞问题, 经验的, 一定有这样的导数和为 0 来方便我们计算.

20.7 第二类曲面积分

例题 20.95 计算 $\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，这里 S 由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 和两个平面 $z=R,z=-R,R>0$ 围成立体表面外侧.

笔记 对于第二类曲面，当投影是退化的情况，意味着积分为 0.

证明 注意到

$$\iint_{z=R}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{z=-R}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0,$$

于是我们运用对称性有

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}&=\iint_{x^2+y^2=R^2,-R\leqslant z\leqslant R}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}\\&=2\iint_{x^2+y^2=R^2,-R\leqslant z\leqslant R,x\geqslant 0}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=2\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\&=8R\int_0^1\int_0^1\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}R.\end{aligned}$$

例题 20.96 计算

$$\iint_S\left(\frac{x_0}{x-x_0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y_0}{y-y_0}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z_0}{z-z_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$

这里

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\right\},\text{朝外},a,b,c>0.$$

笔记 第二类曲面积分同样有换元法，注意要验证转化的雅克比符号保持不变. 简单的平移变换当然不会改变积分方向，当然我们不鼓励大家对第二类曲面积分使用换元法.

证明 做换元 $\begin{cases}x=x_0+au\\y=y_0+bv\\z=z_0+cw\end{cases}$，我们仍用 x,y,z 代替 u,v,w 来表示积分，则有

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(\frac{x_0}{x-x_0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y_0}{y-y_0}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z_0}{z-z_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1,\text{朝外}}\left(\frac{bcx_0}{ax}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{acy_0}{by}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{abz_0}{cz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&\overset{\text{球的外法向量}20.1.2}{=}\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(\frac{bcx_0}{ax}x+\frac{acy_0}{by}y+\frac{abz_0}{cz}z\right)\mathrm{d}S\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}\left(\frac{bcx_0}{a}+\frac{acy_0}{b}+\frac{abz_0}{c}\right)\mathrm{d}S=4\pi\left(\frac{bcx_0}{a}+\frac{acy_0}{b}+\frac{abz_0}{c}\right).\end{aligned}$$

例题 20.97 计算 $\iint_S\left(xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$，这里 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$ 以及锥面 $x^2-y^2+z^2=0\,(y\geqslant 0)$ 所围空间区域 V 的边界曲面的外侧.

证明 直接高斯公式有

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&=\iiint_V\left(y+\sqrt{x^2+z^2}+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_V\left(2y+\sqrt{x^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

我们更希望把积分区域写成更自然的形式，接下来交换 y,z 得 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$ 以及锥面

$x^2-z^2+y^2=0\,(z\geqslant 0)$ 所围空间区域 V 下计算

$$\iiint_V\left(2z+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_V\left(2z+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_a^{2a}r^2\left(2r\cos\psi+r\sin\psi\right)\mathrm{d}r\\&=\frac{(2a)^4-a^4}{4}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\psi\left(2\cos\psi+\sin\psi\right)\mathrm{d}\psi\\&=\frac{15\pi^2a^4+30a^4\pi}{16}.\end{aligned}$$

例题 20.98 计算 $\iint_S\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 这里 S 由 XOY 平面的曲边梯形 D 绕 y 轴旋转形成旋转体表面外侧[11], 这里 D 由 $y=x^2,y=1,y=2,x=0$ 围成.

笔记 由课本公式, $y=x^2$ 绕 y 轴旋转形成旋转体表面的表达式为 $y=x^2+z^2$.

证明 补充平面得到积分:

$$\begin{aligned}\iint_{y=2,y=x^2+z^2,\text{朝右}}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\iint_{x^2+z^2\leqslant 2}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\pi e^{\sqrt{2}};\\\iint_{y=1,y=x^2+z^2,\text{朝左}}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\iint_{x^2+z^2\leqslant 1}\frac{e}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\pi e.\end{aligned}$$

设 S 围成区域为 V, 我们由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V,\text{外侧}}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}y\iint_{x^2+z^2\leqslant y}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\pi\int_1^2e^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}te^t\mathrm{d}t=2\pi e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right),\end{aligned}$$

于是

$$\iint_S\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\pi e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)-2\sqrt{2}\pi e^{\sqrt{2}}+2\pi e=-2e^{\sqrt{2}}\pi+2e\pi.$$

例题 20.99 计算 $\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 这里

$$S:1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\,(z\geqslant 0),$$

取上侧.

证明 正如经验谈到的, 此类挖洞问题, 往往都有

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\partial z}=0.\tag{20.11}$$

直接计算表明的确(20.11)成立.

[11]不包含顶部和底部.

我们补充 $z=0$, 下侧, 并在 0 附近做一个小的上半球面 $x^2+y^2+z^2=\epsilon^2, z\geqslant 0$, 取上侧. 则有

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \iint_{x^2+y^2+z^2=\epsilon^2,z\geqslant 0,\text{上侧}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &\quad+\iint_{\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\leqslant 1,x^2+y^2>\epsilon^2,z=0,\text{上侧}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=\epsilon^2,z\geqslant 0,\text{上侧}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\epsilon^3}\\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=\epsilon^2,z\geqslant 0,\text{上侧}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\epsilon^3}\\ &\quad+\iint_{x^2+y^2\leqslant\epsilon^2,z=0,\text{下侧}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\epsilon^3}\\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\epsilon^2,z\geqslant 0} \frac{3}{\epsilon^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi.\end{aligned}$$

例题 20.100 设 $\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1\,(z\geqslant 0)$. 点 $P(x,y,z)\in\Sigma$, $\rho(x,y,z)$ 为坐标原点到 $P(x,y,z)$ 处 Σ 的切平面的距离, 计算

$$\iint_\Sigma \frac{z^2}{\rho(x,y,z)}(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

这里 Σ 取上侧.

笔记 熟悉二次曲面切平面的写法. 见20.10.

证明 在点 $P=(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面为 $\frac{xx_0}{2}+\frac{yy_0}{2}+zz_0-1=0$, 于是

$$\rho(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{4}+z_0^2}}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma \frac{z^2}{\rho(x,y,z)}(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\iint_\Sigma z^2\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}\,(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\ &=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\left(z^2\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}\right)\left(\frac{x}{2z}+\frac{y}{2z}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\left(1-\frac{r^2}{2}\right)\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}\mathrm{d}r\\ &=\pi\int_0^2\left(1-\frac{s}{2}\right)\sqrt{1-\frac{s}{4}}\mathrm{d}s=\frac{8\pi+4\pi\sqrt{2}}{15}.\end{aligned}$$

例题 20.101 计算曲面积分 $\iint_S \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(a>0)$, 这里 S 是 $z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$ 上侧.

证明 补充 $z=0$ 向上, 则

$$\iint_{z=0,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\frac{axdydz+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=a^2\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\pi a^3.$$

我们有

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{axdydz+(z+a)^2\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{1}{a}\iint_{S,\text{朝下}}\left(axdydz+(z+a)^2\right)dxdy\\ &= \frac{1}{a}\left(\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\leqslant 0}(a+2(z+a))\,dxdydz-2\pi a^3\right)\\ &= \frac{2}{a}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\leqslant 0} z dxdydz\\ &= \frac{2}{a}\int_{-a}^{0} z dz\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2-z^2} 1dxdy\\ &= \frac{2\pi}{a}\int_{-a}^{0} z\left(a^2-z^2\right)dz\\ &= -\frac{1}{2}a^3\pi.\end{aligned}$$

例题 20.102 计算曲面积分

$$\iint_S\left(\frac{2dydz}{x\cos^2 x}+\frac{2dzdx}{\cos^2 y}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}\right),$$

这里 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

证明 由对称性, 我们有

$$\iint_S\frac{2dzdx}{\cos^2 y}=0,\iint_S\frac{dydz}{x\cos^2 x}=\iint_S\frac{dxdy}{z\cos^2 z}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_S\left(\frac{2dydz}{x\cos^2 x}+\frac{2dzdx}{\cos^2 y}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}\right)&=\iint_S\frac{dxdy}{z\cos^2 z}\\ \overset{\text{单位球面外法向量}20.1.2}{=\!=}\iint_S\frac{dS}{\cos^2 z}&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\psi d\psi}{\cos^2\cos\psi}\\ &=4\pi\tan 1,\end{aligned}$$

这里用到了球面参数方程方法计算曲面积分的方法20.4.

例题 20.103 设

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{(z-3)^2}{4}\leqslant 1\right\},\mathbf{r}=(x,y,z),\mathbf{n}\text{是单位外法向量},$$

证明

$$\iint_{\partial\Omega}\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})\,dS=\iiint_\Omega\frac{2}{|\mathbf{r}|}dxdydz.$$

证明 注意到原点不在 Ω 内, 于是

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega}\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})\,dS&=\iint_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|}dS=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial y}+\frac{\partial\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial z}\right)dxdydz\\ &=\iiint_\Omega\left(\frac{3|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^2}\right)dxdydz=\iiint_\Omega\frac{2}{|\mathbf{r}|}dxdydz.\end{aligned}$$

来看两个抽象的例子.

例题 20.104 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 计算

$$\iint_\Sigma\left(\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+zdxdy\right),$$

其中 Σ 是由 $y=x^2+z^2+6, y=8-x^2-z^2$ 所围立体 Ω 外侧表面.

证明 由 Gauss 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
=&\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{xy^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2+6}^{8-r^2}1\mathrm{d}y\\
=&2\pi\int_0^1 r\left(2-2r^2\right)\mathrm{d}r=\pi.
\end{aligned}$$

例题 20.105 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\left(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right)$, 取下侧, 则计算

$$I=\iint_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[yf(xy)+2y+x\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(xy)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注本题关键是注意 f 不具备光滑性, 所以不能直接 Gauss.

证明 法向量为

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},\frac{y}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
I=&\iint_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[yf(xy)+2y+x\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(xy)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\left[xf(xy)+2x-y\right]\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left[yf(xy)+2y+x\right]\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\left[zf(xy)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\left[\frac{(2x-y)x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{(2y+x)y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\left[\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\mathrm{d}r=\frac{14}{3}\pi.
\end{aligned}$$

例题 20.106 计算

$$I=\iint_{\Sigma}\left(2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$

这里 Σ 是曲线 $x=e^y\,(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转成旋转曲面, 取外侧.

证明 易知旋转曲面为 $x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}\left(y^2+z^2\leqslant a^2\right)$. 补充面 $x=e^a$ 朝前, 这个面上的积分为

$$\iint 2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{y^2+z^2\leqslant a^2}2\left(1-e^{2a}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi a^2\left(1-e^{2a}\right).$$

于是由 Gauss 公式, 我们有

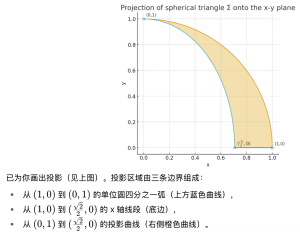
$$\begin{aligned}
I=&-2\pi a^2\left(1-e^{2a}\right)+\iint\left(2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
=&-2\pi a^2\left(1-e^{2a}\right)+\iiint\left(-4x+8x-4x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\pi a^2\left(1-e^{2a}\right).
\end{aligned}$$

例题 20.107 在球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 上取 $(1,0,0),(0,1,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为顶点的球面三角形 Σ. Σ 上的法向量满足第三个分量 $\cos\gamma>0$, 计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}.$$

注

图 20.7.1: 球面三角形在 XOY 平面投影图



证明 **Method 1**

由球面的外法向量公式20.1.2, 我们知道 $\cos\alpha = x, \cos\gamma = z$. 由两类曲面积分关系, 我们知道

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma} \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S \\
&= \iint \left(x^2+z^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint \frac{x^2+1-x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\sqrt{\frac{1}{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}}^{1} \frac{1-r^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}} r\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{1+\cos^2\theta}}^{1} \frac{1-t\sin^2\theta}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\theta\cdot\left(4+2\cos^2\theta\right)}{3\left(1+\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-\sin^2\theta\right)\cdot\left(4+2\left(1-\sin^2\theta\right)\right)}{3\left(2-\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sin\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{3-4t^2+t^4}{\left(2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t \\
&\overset{t=\sqrt{2}\sin u}{=} \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3-8\sin^2 u+4\sin^4 u}{\cos^2 u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}\left[2u+\sin\left(2u\right)-\tan u\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Method 2

补充面 $z=0, y=0$ 和 $x=z$, 因为

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}0 = 0, 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \mathrm{d}0\mathrm{d}z = 0, \mathrm{d}x\mathrm{d}0 = 0, x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = x\mathrm{d}y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

我们知道在这三个面上[12]

$$\iint \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

于是由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma} \left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) = 2\iiint 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由对称性, 注意到我们得到的区域体积是

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{12},$$

[12]第三个面也可以用两类曲面积分关系

$$\iint \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint \frac{-x+x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S = 0.$$

即

$$\iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\pi}{6}.$$

例题 20.108 设 Σ 是空间任意光滑封闭曲面, 方向朝外. 设

$$I(\Sigma) = \iint_{\Sigma} (xz - 2x^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (yz + 2y^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (3z - z^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求 $I(\Sigma)$ 的最大值.

证明 由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} (xz - 2x^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (yz + 2y^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (3z - z^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint \left(z - 6x^2 - z - 6y^2 + 3 - 3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint \left(3 - 6x^2 - 6y^2 - 3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

要使得 $I(\Sigma)$ 达到极大, 那么就要使得被积函数尽可能非负, 即所求达到最大值的曲面为 $\Sigma : 3 = 6x^2 + 6y^2 + 3z^2$.

现在对这个达到最大值的曲面, 我们计算得最大值为

$$\begin{aligned}
&\iiint_{6x^2+6y^2+3z^2 \leqslant 3} \left(3 - 6x^2 - 6y^2 - 3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{108}} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 3} \left(3 - x^2 - y^2 - z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r^2\left(3 - r^2\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} r^2\left(3 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{5}.
\end{aligned}$$

例题 20.109 计算

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$

这里 $\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$ 且方向朝外.

证明 由引理20.1得椭球面的单位外法向量公式为

$$\left(\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}, \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}, \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\mathrm{d}S\\
&=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\sqrt{1+\frac{\frac{1}{a^4}x^2}{\frac{1}{c^4}z^2}+\frac{\frac{1}{b^4}y^2}{\frac{1}{c^4}z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r\\
&=4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).
\end{aligned}$$

20.8 一般的多元积分问题

命题 20.3

记 $a(n)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $r>0$ 的球的体积为 $a(n)r^n$, 表面积为 $na(n)r^{n-1}$.

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的问题, 要求不高的读者可以只在 $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ 考虑.

例题 20.110 记 $B_r\triangleq\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n x_i^2<r^2\right\}, r>0$. 假设 $f\in C^2\left(\overline{B_r}\right), g\in C\left[0,r^2\right]$, 证明

$$\int_{B_r}\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)d\mathbf{x}=\int_0^r tg\left(t^2\right)dt\int_{B_t}\Delta f d\mathbf{x}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\int_{B_r}\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)d\mathbf{x}&\overset{\text{余面积公式20.5}}{=}\int_0^r g\left(t^2\right)dt\int_{\partial B_t}\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}dS\\
&\overset{\text{回忆球的外法向量和两类曲面积分关系}}{=}\int_0^r tg\left(t^2\right)dt\int_{B_t}\Delta f d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

特别的若 $\Delta f(\mathbf{x})=h\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r}\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g\left(x^2+y^2+z^2\right)d\mathbf{x}\\
&=\int_0^r tg\left(t^2\right)dt\int_{B_t}h\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)d\mathbf{x}\\
&\overset{\text{余面积公式20.5}}{=}\int_0^r tg\left(t^2\right)dt\int_0^t ds\int_{\partial B_s}h\left(s^2\right)dS\\
&=na(n)\int_0^r tg\left(t^2\right)dt\int_0^t s^{n-1}h\left(s^2\right)ds.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\frac{\partial\left(\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)d\mathbf{x}\right)}{\partial r}=na\left(n\right)rg\left(r^2\right)\int_0^r s^{n-1}h\left(s^2\right)ds.$$

例题 20.111 记 $B_r\triangleq\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2<r^2\right\},r>0$. 若 $u\in C^3\left(\overline{B_r}\right)$ 满足

$$u\left(\mathbf{x}\right)\Delta u\left(\mathbf{x}\right)=0,\forall\mathbf{x}\in B_r,u\left(\mathbf{x}\right)\frac{\partial u\left(\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{n}}=0,\forall\mathbf{x}\in\partial B_r,$$

这里 $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}$ 沿着外法向量的方向导数. 证明 $u\left(\mathbf{x}\right)$ 为常值函数.

证明 注意到

$$\begin{aligned}0&=\iint_{\partial B_r}u\left(\mathbf{x}\right)\frac{\partial u\left(\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{n}}dS\overset{\text{Gauss 公式}}{=}\iiint_{B_r}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+u\Delta u\right)d\mathbf{x}\\&=\iiint_{B_r}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2\right)d\mathbf{x},\end{aligned}$$

我们有 $\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial z}=0$. 于是 u 为常值函数.

笔记 我们从证明可以看到等式

$$\iint_{\partial B_r}u\left(\mathbf{x}\right)\frac{\partial u\left(\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{n}}dS=\iiint_{B_r}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+u\Delta u\right)d\mathbf{x}.\tag{20.12}$$

将在许多问题扮演重要信息.

例题 20.112 第二 Gauss-Green 公式 设 $u,v\in C^2\left(\overline{\Omega}\right),\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有光滑边界, $\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}$ 为沿着单位外法向量的方向导数. 则有

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dS=\int_\Omega\left(u\Delta v-v\Delta u\right)dV.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)dS&=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+u\Delta v-v\Delta u-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dV\\&=\int_\Omega\left(u\Delta v-v\Delta u\right)dV.\end{aligned}$$

例题 20.113 设 $a>0$ 且 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$. 若 $f\in C^2\left(D\right)$ 且在边界曲线 L 上满足 $f\left(x,y\right)=0$. 证明:

$$\iint_D\left(|f|^2+|\Delta f|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant2\iint_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 利用 f 在边界上为 0 有

$$\oint_{\partial D}\left(-f\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+f\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right)=0.$$

结合格林公式得

$$2\iint_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\left(f\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+f\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

然后由均值不等式得

$$-2\iint_D\left(f\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+f\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint_D\left(|f|^2+|\Delta f|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这就证明了

$$\iint_D \left(|f|^2+|\Delta f|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2\iint_D \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例题 20.114 设 $f\in C^2(\Omega)\bigcap C\left(\overline{\Omega}\right), f|_{\partial\Omega}=0, \Omega\subset\mathbb{R}^3$ 有分段光滑的边界, 证明对任何 $C>0$ 都有

$$2\iiint_\Omega |\nabla f|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leqslant C\iiint_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint_\Omega |\Delta f|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{20.13}$$

笔记 这种题往往可以直接用第二 Gauss-Green 公式20.112得到, 但一般不让大家记忆这公式, 所以我们给一个自然的思路.

证明 直接分部积分有

$$\begin{aligned}
2\iiint_\Omega |\nabla f|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 2\iiint_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= -2\iiint_\Omega \left(f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= \left|2\iiint_\Omega f\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| = \left|\iiint_\Omega 2\sqrt{C}f\frac{\Delta f}{\sqrt{C}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|\\
&\leqslant C\iiint_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{C}\iiint_\Omega |\Delta f|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

这就得到了(20.13).

接下来我们看一组经典考法, 此类问题不宜以一般推广形式给出, 我们聚焦于具体的例子.

例题 20.115

1. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<a^2\right\}, a>0$ 且 $f\in C^1(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right), f|_{\partial D}=a^2$ 满足在 $\overline{D}$ 上有
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\leqslant a^2. \tag{20.14}$$
证明
$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4. \tag{20.15}$$
2. 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<a^2\right\}, a>0$ 且 $f\in C^1(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right), f|_{\partial D}=0$. 证明
$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}. \tag{20.16}$$
3. 设 $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2<1\right\}, \lambda\in\mathbb{R}, a\in(-\infty,0)$ 且 $u\in C^2\left(\overline{D}\right)$ 满足
$$\Delta u(x,y)=\lambda u(x,y,z),(x,y,z)\in D, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\mathbf{n}}=au(x,y,z),(x,y)\in\partial D. \tag{20.17}$$
若 u 不恒为 0, 证明 $\lambda<0$.
4. Poincare 不等式: 设 D 是由简单闭曲线 L 围成的区域, 设 $f\in C^1\left(\overline{D}\right), f|_{\partial D}=0$, 证明:
$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\max_D\left\{x^2+y^2\right\}\cdot\iint_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{20.18}$$

笔记 此类问题同样可以通过第二 Gauss-Green 公式20.112得到, 但一般不让大家记忆这公式, 所以我们给一个自然的思路.

证明

1. 注意到
$$\begin{aligned}
\int_{\partial D}(-yf\mathrm{d}x+xf\mathrm{d}y) &= \iint_D\left(2f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= a^2\int_{\partial D}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=2a^2\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant \pi a^4 + \frac{1}{2}\iint_D \left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\overset{(20.14)}{\leqslant} \pi a^4 + \frac{a}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \pi a^4 + \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r\\ &= \pi a^4 + \frac{a}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a^4,\end{aligned}$$

这就证明了(20.15).

2. 注意到

$$0=\int_{x^2+y^2=1}(-yf\mathrm{d}x+xf\mathrm{d}y)=\iint_D\left(2f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &= \left|-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}\\ &= \frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2},\end{aligned}$$

这就证明了(20.16).

3. 由

$$\begin{aligned}0<\iiint_D|\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= -\iiint_D u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\partial D}u\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S\\ &= -\lambda\iiint_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+a\iint_{\partial D}u^2\mathrm{d}S\leqslant-\lambda\iiint_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

知(20.17)成立.

4. 注意到

$$0=\int_L(-yf^2\mathrm{d}x+xf^2\mathrm{d}y)=\iint_D\left(2f^2+2xf\frac{\partial f}{\partial x}+2yf\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &= \left|-\iint_D\left(xf\frac{\partial f}{\partial x}+yf\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint_D\left|xf\frac{\partial f}{\partial x}+yf\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant\sqrt{\iint_D|f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\cdot\sqrt{\iint_D\left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\\ &\leqslant\sqrt{\iint_D|f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\cdot\sqrt{\iint_D(x^2+y^2)\cdot\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.\end{aligned}$$

现在

$$\sqrt{\iint_D|f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\leqslant\sqrt{\max_D\{x^2+y^2\}}\cdot\sqrt{\iint_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

这就给出了(20.18).

例题 20.116 设正值函数 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1,\forall t\in\mathbb{R}.\tag{20.19}$$

证明: 对任何 $a<b$ 都有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+1. \tag{20.20}$$

笔记 此类问题本质上就是两边做二重积分之后换序.

证明 注意到在(20.20)两边积分之后交换积分顺序并压缩区间得

$$\begin{aligned} b-a &\geqslant \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b e^{-|t-x|}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b e^{-|t-x|}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \left[\int_a^x e^{t-x}\mathrm{d}t + \int_x^b e^{x-t}\mathrm{d}t\right] \\ &= \int_a^b f(x)\left[2-e^{a-x}-e^{x-b}\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,e^{a-x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,e^{x-b}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-|a-x|}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-|b-x|}\mathrm{d}x \\ &\overset{(20.20)}{\leqslant} \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{b-a}{2}+1. \end{aligned}$$

例题 20.117 设 $z=f(x,y)$ 是闭区域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x,y\leqslant 1\right\}$ 上的可微函数且满足

$$f(0,0)=0, dz|_{(0,0)}=3dx+2dy.$$

计算

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}.$$

笔记 本题改为 $f\in C(D)$ 且只在 $(0,0)$ 一点可微则无法用竞赛参考答案方法计算极限, 因为二元函数中值定理无法使用, 但我们下面给的本质方法可以.

注等价替换得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{x^4}.$$

由题目条件知 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=3, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2$, 然后我们自然期待用二元函数 Taylor 公式的 Peano 余项得

$$f(t,u)=f(0,0)+3t+2u+o\left(\sqrt{t^2+u^2}\right),$$

即把 $f(t,u)$ 用 $3t+2u$ 代替. 实际上[13]此时容易算出极限为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} (3t+2u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{x^4}=-2. \tag{20.21}$$

证明 接下来我们给出严格写法: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $(t,u)\in\left(0,\delta^2\right)$ 时有

$$3t+2u-\epsilon(t+u)\leqslant f(t,u)\leqslant 3t+2u+\epsilon(t+u), \tag{20.22}$$

[13]高手会敏锐的注意到要求极限分子积分的上下限是一致趋于 0 的, 因此显然可以替换.

这里用到了 $\frac{t+u}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{t^2+u^2} \leqslant t+u, t, u \geqslant 0$, 即 $o\left(\sqrt{t^2+u^2}\right) = o(t+u)$. 于是当 $x \in (0,\delta)$ 就有

$$\begin{aligned} 4\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{x^4} &= -4\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\int_{\sqrt{t}}^{x} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{x^4} \\ &\overset{(20.21)}{\leqslant} -4\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\int_{\sqrt{t}}^{x} (3t+2u-\epsilon t-\epsilon u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{x^4} \\ &= \frac{1}{5}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4(2\epsilon x+5\epsilon-6x-10)}{x^4} = \epsilon-2. \end{aligned}$$

类似的用(20.22)另外一侧不等式得

$$4\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{x^4} \geqslant -\epsilon-2.$$

从而由 ϵ 任意性得

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{1-\sqrt[4]{1-x^4}} = -2.$$

来看第七届非数学类预赛压轴题.

例题 20.118 设 $f \in C^2\left(\overline{D}\right), D$ 是单位开圆盘, 设 $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ 且

$$\left|f''_{xx}\right|^2 + 2\left|f''_{xy}\right|^2 + \left|f''_{yy}\right|^2 \leqslant M.$$

证明

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi}{4}\sqrt{M}. \tag{20.23}$$

证明 由二元函数 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 f''_{xx}(\theta,\eta) + 2xy f''_{xy}(\theta,\eta) + y^2 f''_{yy}(\theta,\eta)\right).$$

于是利用条件不等式得

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}\cdot\sqrt{\left|f''_{xx}\right|^2+2\left|f''_{xy}\right|^2+\left|f''_{yy}\right|^2} \leqslant \frac{\sqrt{M}}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

因此我们有

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\sqrt{M}}{2}\iint_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\sqrt{M}.$$

例题 20.119 设 $P, R \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ 且对任何上半球面 S 都有

$$\iint_S (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = 0.$$

证明 $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$.

证明 对任意固定的 $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3, r>0$, 我们做上半球 $z = z_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ 朝上和 $z = z_0$, 朝下. 于是由 Gauss 公式我们得到

$$\iint_{z=z_0} (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y) + \iint_S (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

即

$$\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

注意到左边上式得到的 r 和右式得到的 r 阶不一致, 因此由积分中值定理, 我们有

$$\begin{aligned} \iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \frac{2\pi r^3}{3}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)(\theta',\xi',\eta') \\ \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \pi r^2 R(\theta,\eta,z_0), \end{aligned}$$

从而

$$0=\lim_{r\to0^+}\frac{2\pi r}{3}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(\theta',\xi',\eta')=-\pi\lim_{r\to0^+}R(\theta,\eta,z_0)=-\pi R(x_0,y_0,z_0),$$

即 $R\equiv0$. 现在

$$\frac{2\pi r^3}{3}\frac{\partial P}{\partial x}(\theta',\xi',\eta')=0\Rightarrow0=\lim_{r\to0^+}\frac{\partial P}{\partial x}(\theta',\xi',\eta')=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),$$

即 $\frac{\partial P}{\partial x}\equiv0$.

例题 20.120 设 $f\in C[0,1]$ 满足对任何 $x,y\in[0,1]$ 都有 $xf(y)+yf(x)\leqslant1$, 证明 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

证明 我们用三角换元就有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(\cos\theta)\sin\theta+f(\sin\theta)\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]\\&\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

例题 20.121♠ 设 $\theta>0$, 计算 $\int_{[0,\theta]^n}\frac{1}{\theta^n}\max\{x_1,\cdots,x_n\}\,dx=\frac{n}{n+1}\theta$.

证明 考虑换元 $x_i=\theta y_i,i=1,2,\cdots,n$, 故可以不妨设 $\theta=1$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n}\max\{x_1,\cdots,x_n\}\,dx&=n!\int_{0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant1}x_n dx\\&=n!\int_0^1 x_n dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}dx_2\int_0^{x_2}dx_1\\&=n!\int_0^1 x_n\cdot\frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!}dx_n=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

定理 20.7 (调和函数平均值定理)

设开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 我们用 $B_r(\mathbf{x})$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $r>0$, 球心为 $\mathbf{x}$ 的开球, 则对调和函数[a] $f:\Omega\to\mathbb{R}$, 成立

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{a(n)r^n}\int_{B_r(\mathbf{x})}f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_{\partial B_r(\mathbf{x})}f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}).\tag{20.24}$$

[a] $\Delta f(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\Omega$.

♡

笔记 要求不高的同学可直接记忆结论. 特别的, 对 $n=2$, 我们有参数方程表示

$$\begin{aligned}f(x_0,y_0)&=\frac{1}{2\pi r}\int_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}f(x,y)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

证明 考虑

$$g(r)\triangleq\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_{\partial B_r(\mathbf{x})}f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})\overset{\mathbf{y}=\mathbf{x}+r\mathbf{z}}{=}\frac{1}{na(n)}\int_{\partial B_1(\mathbf{0})}f(\mathbf{x}+r\mathbf{z})\,\mathrm{d}S(\mathbf{z}),$$

则

$$\begin{aligned}g'(r)&=\frac{1}{na(n)}\int_{\partial B_1(\mathbf{0})}\sum_{i=1}^n z_i f_i'(\mathbf{x}+r\mathbf{z})\,\mathrm{d}S(\mathbf{z})\\&=\frac{1}{na(n)}\int_{B_1(\mathbf{0})}\sum_{i=1}^n r f_i''(\mathbf{x}+r\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z}=0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} g(r) &\equiv \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{na(n) r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\ &\overset{\text{积分中值定理}}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{f(\mathbf{y}_r)}{na(n) r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} 1 \mathrm{d}S(\mathbf{y}), \mathbf{y}_r \in \partial B_r(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

现在就有

$$\begin{aligned} a(n)\rho^n f(\mathbf{x}) &= \int_0^\rho na(n) r^{n-1} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}r = \int_0^\rho \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \mathrm{d}r \\ &\overset{\text{余面积公式20.5}}{=} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

于是我们有(20.24)成立.

例题 20.122 设 A 是 d 阶实正定矩阵, 记 B 的 (i,j) 元是

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j e^{-x^T Ax} dx,$$

计算 B.

证明 取实正交矩阵 $T=(t_{ij})$, 使得 $T^TAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j e^{-x^T Ax} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d \sum_{\ell=1}^d t_{ik} t_{j\ell} y_k y_\ell e^{-\sum\limits_{k=1}^d \lambda_k y_k^2} dy \\ &= \sum_{k=1}^d t_{ik} t_{jk} \int_{\mathbb{R}^d} y_k^2 e^{-\sum\limits_{k=1}^d \lambda_k y_k^2} dy = \sum_{k=1}^d t_{ik} t_{jk} \sqrt{\frac{\pi^{d-1}}{\prod\limits_{s\neq k} \lambda_s}} \int_{-\infty}^\infty y_k^2 e^{-\lambda_k y_k^2} dy_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d t_{ik} t_{jk} \frac{1}{\lambda_k} \sqrt{\frac{\pi^d}{\prod\limits_{s=1}^d \lambda_s}} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2\sqrt{\det A}} \sum_{k=1}^d t_{ik} t_{jk} \frac{1}{\lambda_k} \\ &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2\sqrt{\det A}} (T\Lambda^{-1} T^T)_{(i,j)} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2\sqrt{\det A}} \left(A^{-1}\right)_{(i,j)}, \end{aligned}$$

因此 $B = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2\sqrt{\det A}} A^{-1}$.

例题 20.123 设 $f \in C^4(D), D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\right\}, f|_{\partial D} = 0$ 且满足 $\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right| \leqslant b$, 证明

$$\left| \iint_D f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leqslant \frac{b}{144}.$$

笔记 分部积分需要零边界条件, 最简单的提供零边界条件的函数就是 $x(1-x)y(1-y)$, 读者需要准确把我分部积分时需要的零边界条件到底是哪些.

证明 我们有

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| &= \frac{1}{4} \left| \iint_D f(x,y) \frac{\partial^4 \left[x(1-x)y(1-y)\right]}{\partial x^2 \partial y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \iint_D \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f(x,y) \cdot \left[x(1-x)y(1-y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \frac{b}{4} \iint_D xy(1-x)(1-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{b}{4} \left(\int_0^1 x(1-x) \mathrm{d}x \right)^2 \\ &= \frac{b}{144}. \end{aligned}$$

考试中如上书写就够了,下面我们展示分部积分的过程以方便基础不好的读者.

首先回顾一下分部积分观点下的 Gauss-Green 公式:

$$\int_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=-\int_{\Omega} g\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega} fg\cdot n_i\mathrm{d}S, \tag{20.25}$$

这里 n_i 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量的第 i 个分量.

第一次分部积分时的边界项因为 $f|_{\partial D}=0$, 所以

$$\int_{\partial D} f(x,y)\frac{\partial^3\left[x(1-x)y(1-y)\right]}{\partial x\partial y^2}n_1\mathrm{d}s=0.$$

第二次分部积分时的边界因为 $y=0,1$ 时 $n_1=0, x=0,1$ 时 $\frac{\partial^2[x(1-x)y(1-y)]}{\partial y^2}=x(1-x)\frac{\partial^2[y(1-y)]}{\partial y^2}=0$, 所以

$$\int_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\left[x(1-x)y(1-y)\right]}{\partial y^2}n_1\mathrm{d}s=0.$$

第三次分部积分时的边界因为 $x=0,1$ 时 $n_2=0, y=0,1$ 时 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, 所以

$$\int_{\partial D}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\left[x(1-x)y(1-y)\right]}{\partial y}n_2\mathrm{d}s=0.$$

第四次分部积分时的边界因为在 ∂D 上 $x(1-x)y(1-y)=0$, 所以

$$\int_{\partial D}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\cdot x(1-x)y(1-y)n_2\mathrm{d}s=0.$$

当然读者也可以视为一元积分来分部积分, 那样处理并不方便!

例题 20.124 设 D 是 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成区域. D 在 x 轴, y 轴投影长度分别为 l_x, l_y. (α,β) 是 D 内任意点. 证明

1.
$$\left|\iint_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant l_x l_y m D;$$

2.
$$\left|\iint_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{l_x^2 l_y^2}{4}.$$

证明

1. 直接放缩有
$$\begin{aligned}\left|\iint_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|&\leqslant\iint_D\left|(x-\alpha)(y-\beta)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\iint_D l_x l_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=l_x l_y m D.\end{aligned}$$

2. 取
$$D\subset R\triangleq\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:a\leqslant x\leqslant a+l_x, c\leqslant y\leqslant c+l_y\right\}.$$
记 $b\triangleq a+l_x, d\triangleq c+l_y$, 我们有
$$\begin{aligned}&\left|\iint_D(x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint_R\left|(x-\alpha)(y-\beta)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_a^b|x-\alpha|\mathrm{d}x\int_c^d|y-\beta|\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\left[(\alpha-a)^2+(b-\alpha)^2\right]\left[(d-\beta)^2+(\beta-c)^2\right]\\&\leqslant\frac{1}{4}(b-\alpha+\alpha-a)^2(d-\beta+\beta-c)^2=\frac{l_x^2 l_y^2}{4}.\end{aligned}$$

我们来看复旦大学英才班的一个问题.

例题 20.125♠ 设 $f\in C^2(\mathbb{R}^n), \Delta f\leqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}^n$, 证明 $F(r)=\frac{1}{r^{n-1}}\int_{||\mathbf{x}||=r}f(\mathbf{x})\mathrm{d}S$ 是 $(0,+\infty)$ 的递减函数.

证明 一方面
$$F(r)=\frac{1}{r^{n-1}}\int_{||\mathbf{x}||=r}f(\mathbf{x})\mathrm{d}S\overset{\mathbf{x}=r\mathbf{y}}{=}\int_{||\mathbf{y}||=1}f(r\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y}).$$

另外一方面

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_{||\mathbf{y}||=1} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \partial_{y_i} f(r\mathbf{y}) \, \mathrm{d}S \\ &\overset{Gauss公式}{=} \int_{||\mathbf{y}||=1} \Delta f(r\mathbf{y}) \, \mathrm{d}S \leqslant 0 \end{aligned},$$

这就完成了证明.

定理 20.8 (次调和函数平均值不等式)

若 $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\Delta f \geqslant 0$, 证明: 对任何以 $\mathbf{a}$ 为心, 半径为 $r>0$ 的闭球 $B(\mathbf{a}, r) \subset \mathbb{R}^n$, 我们有

$$f(\mathbf{a}) \leqslant \frac{1}{a(n) r^n} \int_{B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}, f(\mathbf{a}) \leqslant \frac{1}{na(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{x}). \tag{20.26}$$

♡

证明 注意到

$$\begin{aligned} &\frac{d\left(\frac{1}{na(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{x})\right)}{dr} = \frac{d\left(\frac{1}{na(n)} \int_{\partial B(0,1)} f(\mathbf{a}+r\mathbf{y}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)}{dr} \\ &= \frac{1}{na(n)} \int_{\partial B(0,1)} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{a}+r\mathbf{y}) \, y_i \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{na(n) r^n} \int_{\partial B(\mathbf{a},r)} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{x}) \frac{y_i - a_i}{r} \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \\ &\overset{Gauss}{=} \frac{1}{na(n) r^n} \int_{B(\mathbf{a},r)} \Delta f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \geqslant 0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\frac{1}{na(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \geqslant \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{na(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \\ &\overset{积分中值定理}{=} \lim_{r \to 0^+} \frac{f(\theta)}{na(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(\mathbf{a},r)} 1 \mathrm{d}S(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

进一步由余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^r \rho^{n-1} f(\mathbf{a}) \, \mathrm{d}\rho &\leqslant \frac{1}{na(n)} \int_0^r \mathrm{d}\rho \int_{\partial B(\mathbf{a},\rho)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{na(n)} \int_{B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

即

$$f(\mathbf{a}) \leqslant \frac{1}{na(n)} \int_{B(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

我们证明了(20.26).

定理 20.9 (Morrey 不等式)

1. 若 u 在 $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}-\mathbf{x}| < r\}, r>0$ 上连续可微, 则

$$\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r} |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} \leqslant \frac{r^n}{n} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-1}} d\mathbf{y}. \tag{20.27}$$

2. 若 u 在 $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}-\mathbf{x}| < r\}, r>0$ 上连续可微且 $\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r} u(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} = 0$, 则

$$u(\mathbf{x}) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-1}} d\mathbf{y}. \tag{20.28}$$

♡

笔记 证明的想法即限制在每个直线上用一维的公式. 本题将反复运用定理20.5.

证明

1. 若 $\frac{r^n}{n}\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-1}}d\mathbf{y}=+\infty$ 则没什么好证的. 因此假定 $\frac{r^n}{n}\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-1}}d\mathbf{y}<+\infty$.
   固定 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 且 $|\mathbf{w}|=1$, 然后对 $s\in(0,r)$, 我们有

$$\begin{aligned}|u(\mathbf{x}+s\mathbf{w})-u(\mathbf{x})|&=\left|\int_0^s\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{w})\cdot w_i\right)dt\right|\\&\leqslant\int_0^s\left|\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{w})\cdot w_i\right)\right|dt\leqslant\int_0^s\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{w})\right|^2}dt,\end{aligned}$$

   这里第一个等号来自牛顿莱布尼兹公式和链式法则, 最后一个等号来自 Cauchy 不等式.
   于是

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{w}|=1}|u(\mathbf{x}+s\mathbf{w})-u(\mathbf{x})|\,dS(\mathbf{w})&=\int_{|\mathbf{w}|=1}\int_0^s\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{w})\right|^2}dtdS(\mathbf{w})\\&=\int_0^s\int_{|\mathbf{w}|=1}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}(\mathbf{x}+t\mathbf{w})\right|^2}dS(\mathbf{w})\,dt\\&\overset{\mathbf{x}+t\mathbf{w}=\mathbf{y}}{=}\int_0^s\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=t}\frac{1}{t^{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}dS(\mathbf{y})\,dt\\&=\int_0^s\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=t}\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}dS(\mathbf{y})\,dt\\&=\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<s}\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}dS(\mathbf{y})\\&\leqslant\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r}\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}dS(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

   又

$$\int_{|\mathbf{w}|=1}|u(\mathbf{x}+s\mathbf{w})-u(\mathbf{x})|\,dS(\mathbf{w})\overset{\mathbf{x}+s\mathbf{w}=\mathbf{y}}{=}\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=s}\frac{1}{s^{n-1}}|u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})|\,dS(\mathbf{y}).$$

   于是我们知道

$$\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=s}|u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})|\,dS(\mathbf{y})\leqslant s^{n-1}\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r}\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}dS(\mathbf{y}).$$

   两边积分得

$$\int_0^r\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=s}|u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})|\,dS(\mathbf{y})\,ds\leqslant\int_0^r s^{n-1}\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r}\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\right|^2}dS(\mathbf{y})\,ds,$$

   即得(20.27).
2. 仔细观察上面证明, 如果我们左边不提前加绝对值并利用

$$\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r}u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}r^nu(\mathbf{x})}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

   就能得到(20.28)

接下来的部分注意复习 Gauss-Green 的最强叙述13.30.

定义 20.1 (♠)

对 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\},n\geqslant 2$, 我们定义

$$\Gamma(\mathbf{x})\triangleq\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln||\mathbf{x}||, & n=2\\ \frac{1}{n(n-2)a(n)||\mathbf{x}||^{n-2}}, & n\geqslant 3\end{cases}. \tag{20.29}$$

♣

笔记 读者容易验证:

1.

$$\triangle\Gamma(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}. \tag{20.30}$$

2. 存在只依赖维数 n 的常数 $C>0$ 使得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right|^2}\leqslant\frac{C}{||\mathbf{x}||^{n-1}},\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x})\right|^2}\leqslant\frac{C}{||\mathbf{x}||^n},\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}. \tag{20.31}$$

注从(20.31)可以看到, $\sqrt{\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right|^2}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 局部可积, 但是 γ 的二阶导不一定局部可积.

命题 20.4

对 $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\Delta_{\mathbf{x}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right)=-f(\mathbf{x}),\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{20.32}$$

♠

笔记 证明的想法是, 可积的时候无脑 Gauss-Green. 不一定可积的时候挖洞取极限.

证明 我们反复分部积分得

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathbf{x}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right)=\Delta_{\mathbf{x}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\overset{\text{切换求导变量}}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{y}}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\overset{\text{可积就能 Gauss-Green}}{=}&-\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial y_i}\Gamma(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\
=&-\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{||\mathbf{y}||\geqslant\epsilon}\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial y_i}\Gamma(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\overset{\text{Gauss-Green}}{=}&\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{||\mathbf{y}||\geqslant\epsilon}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\Gamma(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{||\mathbf{y}||=\epsilon}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Gamma(\mathbf{y})}{\partial y_i}\cdot f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\frac{y_i}{\epsilon}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right]\\
\overset{(20.30)}{=}&-\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{||\mathbf{y}||=\epsilon}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Gamma(\mathbf{y})}{\partial y_i}\cdot f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\frac{y_i}{\epsilon}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right]=-\frac{1}{na(n)}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\epsilon^{n-1}}\int_{||\mathbf{y}||=\epsilon}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right]\\
\overset{\text{积分中值定理}}{=}&-f(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

即(20.32)成立.

例题 20.126 设有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有分段光滑的边界, $u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, 证明:

$$u(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega}\left[\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}-u(\mathbf{y})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}\right]\mathrm{d}S(\mathbf{y})-\int_\Omega\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{20.33}$$

这里 $\mathbf{n}$ 表示单位外法向量.

笔记 证明的想法是, 可积的时候无脑 Gauss-Green. 不一定可积的时候挖洞取极限.

证明 注意到

$$-\sum_{i=1}^n\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial y_i}\frac{y_i}{\epsilon}=\frac{1}{na(n)\epsilon^{n-1}}.$$

反复用 Gauss-Green 得

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Omega}\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\Delta u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial y_i}\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
&=\lim_{\epsilon\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega\setminus B(\mathbf{x},\epsilon)}\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial y_i}\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y_i}\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{\partial\Omega}\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
&=-\lim_{\epsilon\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega\setminus B(\mathbf{x},\epsilon)}\frac{\partial^2(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial y_i^2}u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{\partial\Omega}\Gamma(y-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
&\quad+\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{n}}u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})-\lim_{\epsilon\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)}\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial y_i}\frac{y_iu(\mathbf{y})}{\epsilon}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
&=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{n}}u(\mathbf{y})-\Gamma(y-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}\right]\mathrm{d}S(\mathbf{y})+\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{na(n)\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B(\mathbf{x},\epsilon)}u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
&=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial(\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{n}}u(\mathbf{y})-\Gamma(y-\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}}\right]\mathrm{d}S(\mathbf{y})+u(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

这就证明了(20.33).

例题 20.127♠

1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中考虑 $u\in C^2(B(\mathbf{0},r))\bigcap C\left(\overline{B(\mathbf{0},r)}\right)$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in B(\mathbf{0},r)\\ u(\mathbf{x})=g(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},r)\end{cases}. \tag{20.34}$$

证明:

$$u(\mathbf{0})=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s(\mathbf{x})+\frac{1}{2\pi}\int_{B(\mathbf{0},r)}(\ln r-\ln||\mathbf{x}||)f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{20.35}$$

2. 设 $n\geqslant3$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑 $u\in C^2(B(\mathbf{0},r))\bigcap C\left(\overline{B(\mathbf{0},r)}\right)$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in B(\mathbf{0},r)\\ u(\mathbf{x})=g(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},r)\end{cases}. \tag{20.36}$$

证明:

$$u(\mathbf{0})=\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x})+\frac{1}{n(n-2)a(n)}\int_{B(\mathbf{0},r)}\left(\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{20.37}$$

笔记 证明的想法是, 可积的时候无脑 Gauss-Green. 不一定可积的时候挖洞取极限.

证明

1. 设 $n=2$, 首先

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{B(\mathbf{0},r)}(\ln r-\ln||\mathbf{x}||)f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=-\frac{1}{2\pi}\int_{B(\mathbf{0},r)}(\ln r-\ln||\mathbf{x}||)\Delta u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\overset{\text{Gauss-Green}}{=}\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{B(\mathbf{0},r)}\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln r-\ln||\mathbf{x}||)\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{B(\mathbf{0},r)}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{-1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}\right)=0,$$

然后继续使用 Gauss-Green 即得

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{\partial\left(\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}\right)}{\partial x_i}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{||\mathbf{x}||=\epsilon}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}u(\mathbf{x})\cdot\frac{x_i}{\epsilon}\mathrm{d}s(\mathbf{x})-\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{||\mathbf{x}||=r}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^2}u(\mathbf{x})\cdot\frac{x_i}{r}\mathrm{d}s(\mathbf{x})\\
&=\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\epsilon}\int_{||\mathbf{x}||=\epsilon}u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s(\mathbf{x})-\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s(\mathbf{x})\\
&=u(\mathbf{0})-\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

即(20.35)成立.

2. 首先

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n(n-2)a(n)}\int_{B(\mathbf{0},r)}\left(\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{-1}{n(n-2)a(n)}\int_{B(\mathbf{0},r)}\left(\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)\Delta u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\overset{\text{Gauss-Green}}{=}\frac{1}{n(n-2)a(n)}\int_{B(\mathbf{0},r)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{-1}{na(n)}\int_{B(\mathbf{0},r)}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n}}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&=\frac{-1}{na(n)}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n}}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{-1}{na(n)}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^{n}}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^n}\right)}{\partial x_i}=0,$$

然后继续使用 Gauss-Green 即得

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{na(n)}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^{n}}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{na(n)}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon\leqslant||\mathbf{x}||\leqslant r}\frac{\partial\left(\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^n}\right)}{\partial x_i}u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{na(n)}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{||\mathbf{x}||=\epsilon}\frac{x_iu(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^{n}}\frac{x_i}{\epsilon}\mathrm{d}S(\mathbf{x})-\frac{1}{na(n)}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{||\mathbf{x}||=r}\frac{x_iu(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^{n}}\frac{x_i}{r}\mathrm{d}S(\mathbf{x})\\
&=\frac{1}{na(n)}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon^{n-1}}\int_{||\mathbf{x}||=\epsilon}u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x})-\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_{||\mathbf{x}||=r}u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x})\\
&=u(\mathbf{0})-\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(\mathbf{0},r)}g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

这就证明了(20.37).

20.9 非数学类解析几何

解析几何主要积累柱面, 锥面, 旋转曲面的求法. 我们不打算以定理的形式叙述, 而是蕴含在题目中. 更常见的考法我们放入模拟而不在讲义中叙述.

20.9.1 柱面

显然, 不含某个分量的二次曲面是一个柱面.

例题 20.128 设柱面的准线 $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ z=0\end{cases}$, 母线方向为 $(5,3,2)$, 计算柱面方程.

证明 **Step 1** 在准线上任取点 $\begin{cases} x_0^2+y_0^2=25 \\ z_0=0 \end{cases}$. 然后过 (x_0,y_0,z_0) 以 $(5,3,2)$ 为方向做直线得

$$\frac{x-x_0}{5}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z-z_0}{2}.$$

Step 2 消去参数[14](x_0,y_0,z_0) 即得柱面方程.

$$\frac{x-x_0}{5}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z-z_0}{2}=t\Rightarrow\begin{cases} x=5t+x_0 \\ y=3t+y_0 \\ z=2t+z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0=x-\frac{5z}{2},y_0=y-\frac{3z}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{5}{2}z\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}z\right)^2=25.$$

笔记 注意积累处理直线的引入临时变量 t 的手法.

例题 20.129 求半径为 2, 对称轴为 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ 的圆柱面方程.

证明 直接使用点到直线距离公式: 设圆柱面上的点 (x,y,z), $(0,0,0)$ 是直线上的点. 考虑两点连线 (x,y,z), 则距离为

$$\frac{|(x,y,z)\times(2,3,4)|}{|(2,3,4)|}=2\Rightarrow(4y-3z)^2+(4x-2z)^2+(3x-2y)^2=116.$$

例题 20.130 已知圆柱面的三条母线为 $x=y=z,x+1=y=z-1,x-1=y+1=z$, 求圆柱面的方程.

证明 注意母线方向是 $(1,1,1)$. 过 $(0,0,0)$ 做母线的垂面 $x+y+z=0$. 则垂面分别和三个直线交于 $(0,0,0),(-1,0,1),(1,-1,0)$. 下面求过这三个点的圆的圆心 (a,b,c).

解方程

$$a^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-1)^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2$$

得 $(a,b,c)=(0,-1,1)$. 我们当然可以使用准线 + 母线方向的方法计算方程, 我们这里顺便给一个用几何意义求方程的方法.

圆柱到中心轴 $\frac{x-0}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$ 的半径为 $\sqrt{2}$, 因此可以求出圆柱面为

$$(y-z+2)^2+(z-x-1)^2+(x-y-1)^2=6.$$

例题 20.131 证明曲面 $(y-z+2)^2+(z-x-1)^2+(x-y-1)^2=6$ 为柱面.

笔记 此类问题一个通用办法是回到柱面定义上去计算一遍柱面方程来证明. 积累想法: 随便取一个曲面和柱面相交, 其都是准线.

证明 考虑准线

$$\begin{cases} z=0 \\ (y-z+2)^2+(z-x-1)^2+(x-y-1)^2=6 \end{cases}.$$

我们需要猜测母线方向, 待定为 (a,b,c). 然后来以此求出柱面方程. 考虑

$$\begin{cases} z_0=0; \\ (y_0-z_0+2)^2+(z_0-x_0-1)^2+(x_0-y_0-1)^2=6; \\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}. \end{cases}$$

设 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$, 目标是消去参数 (x_0,y_0,z_0).

[14] 即对应 (x_0,y_0,z_0) 取遍整个准线.

直接计算有

$$\begin{cases} x_0 = x - at \\ y_0 = y - bt \\ z_0 = z - ct \end{cases}, (y_0+2)^2 + (x_0+1)^2 + (x_0 - y_0 - 1)^2 = 6, z = ct.$$

于是

$$(y - bt + 2)^2 + (x - at + 1)^2 + (x - at - y + bt - 1)^2 = 6, z = ct.$$

因此

$$\left(y - b\frac{z}{c} + 2\right)^2 + \left(x - a\frac{z}{c} + 1\right)^2 + \left(x - a\frac{z}{c} - y + b\frac{z}{c} - 1\right)^2 = 6.$$

取 $a = b = c$, 恰好就是 $(y - z + 2)^2 + (z - x - 1)^2 + (x - y - 1)^2 = 6$. 因此我们证明了所求曲面为柱面.

例题 20.132 设 F 是可微函数, 证明 $F\left(\frac{x}{\ell} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{\ell}\right) = 0$ 是一个柱面.

证明 **Step 1** 考虑准线方程

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{\ell} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{\ell}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Step 2 待定 (a, s, t) 为母线方向, 可计算或者猜测母线方向, 我们这里猜测母线方向 (ℓ, m, n).

Step 3 现在由

$$\begin{cases} F\left(\frac{x_0}{\ell} - \frac{y_0}{m}, \frac{y_0}{m} - \frac{z_0}{n}, \frac{z_0}{n} - \frac{x_0}{\ell}\right) = 0; \\ z_0 = 0; \\ \frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

求柱面方程. 假设 $\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = k$, 则可得

$$\begin{cases} x_0 = x - \ell k \\ y_0 = y - mk \\ z_0 = z - nk \end{cases}, k = \frac{z}{n}.$$

现在

$$\begin{aligned} 0 &= F\left(\frac{x_0}{\ell} - \frac{y_0}{m}, \frac{y_0}{m} - \frac{z_0}{n}, \frac{z_0}{n} - \frac{x_0}{\ell}\right) \\ &= F\left(\frac{x - \ell k}{\ell} - \frac{y - mk}{m}, \frac{y - mk}{m} - \frac{z - nk}{n}, \frac{z - nk}{n} - \frac{x - \ell k}{\ell}\right) \\ &= F\left(\frac{x}{\ell} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{\ell}\right), \end{aligned}$$

这就证明了 $F\left(\frac{x}{\ell} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{\ell}\right) = 0$ 是一个柱面.

例题 20.133 证明曲面 $e^{2x-z} = f(\pi y - \sqrt{2}z)$ 是柱面, 这里 f 是可微函数.

证明 我们把曲面改写成 $e^{-\left(z - \frac{x}{\frac{1}{2}}\right)} - f\left(\sqrt{2}\left(\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{\pi}} - z\right)\right) = 0$, 这是例题20.132的特例, 也即其是母线方向 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{\pi}, 1\right)$ 的柱面, 准线可取 $\begin{cases} e^{2x} = f(\pi y) \\ z = 0 \end{cases}$.

通过回到定义证明给定曲面是柱面的方程当然也适用于后面将要叙述的旋转曲面和锥面的情况, 因此我们不再对他们给出例子.

20.9.2 锥面

显然齐次的且不含常数项的二次曲面是锥面.

例题 20.134 求顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} x^2=2py \\ z=k \end{cases}$ $(k,p\neq 0)$ 的锥面方程.

证明 **Step 1** 任取准线上的点 $\begin{cases} x_0^2=2py_0 \\ z_0=k \end{cases}$, 连接 (x_0,y_0,z_0) 和顶点 $(0,0,0)$ 的母线方向为 (x_0,y_0,z_0). 于是考虑

$$\begin{cases} x_0^2=2py_0; \\ z_0=k; \\ \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}. \end{cases}$$

并消去参数[15](x_0,y_0,z_0) 即得锥面方程.

Step 2 设 $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=t$, 则

$$\begin{cases} x_0=\frac{x}{t} \\ y_0=\frac{y}{t} \\ z_0=\frac{z}{t} \\ t=\frac{z}{k} \end{cases}.$$

于是有

$$\frac{x^2}{t^2}=2p\frac{y}{t}\Rightarrow t=\frac{x^2}{2py}=\frac{z}{k}\Rightarrow kx^2=2pzy.$$

例题 20.135 求顶点 $(1,2,3)$, 轴与平面 $2x+2y-z+1=0$ 垂直, 母线和轴夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面方程.

证明 轴线方程 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$. 设圆锥面上的点 (x_0,y_0,z_0) 并连接顶点得 (x_0-1,y_0-2,z_0-3). 因此由向量夹角公式有

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{6}&=\frac{|(x_0-1,y_0-2,z_0-3)\cdot(2,2,-1)|}{|(x_0-1,y_0-2,z_0-3)|\cdot|(2,2,-1)|} \\ &\Rightarrow 4\left(2x_0+2y_0-z_0-3\right)^2=27\left[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0-3)^2\right]. \end{aligned}$$

从而求得锥面方程为

$$-11x^2+32xy-16xz+6x-11y^2-16yz+60y-23z^2+186z=342.$$

例题 20.136 求顶点 $(1,2,4)$, 轴与平面 $2x+2y+z=0$ 垂直且经过点 $(3,2,1)$ 的圆锥面方程.

证明 轴线方程 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$, 连接点 $(3,2,1),(1,2,4)$ 得到母线方向 $(2,0,-3)$. 则母线方向和轴夹角为

$$\arccos\frac{|(2,0,-3)\cdot(2,2,1)|}{|(2,0,-3)|\cdot|(2,2,1)|}=\arccos\frac{1}{3\sqrt{13}}.$$

运用例题20.135的方法可得锥面方程为

$$13\left(2x+2y+z-10\right)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2,$$

即

$$51x^2+104xy+52xz-518x+51y^2+52yz-516y+12z^2-252z+1279=0.$$

来看第七届非数学类预赛真题, 当年得分率超级低.

例题 20.137 求以三个坐标轴正半轴为母线, 顶点为坐标原点的半圆锥面方程.

[15] 即当 (x_0,y_0,z_0) 遍历整个锥面方程.

证明 取准线方程 $\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，顶点 $(0,0,0)$. 现在考虑

$$\begin{cases}x_0+y_0+z_0=1;\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=1;\\\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.\end{cases}.$$

目标消去参数 (x_0,y_0,z_0). 设 $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=t$, 则

$$\begin{cases}x+y+z=t\\x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}\Rightarrow(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2\Rightarrow xy+yz+zx=0,(x,y,z\geqslant 0).$$

20.9.3 旋转曲面求法

大家课内只背过绕坐标轴的公式, 我们这里要扩充到绕任意轴上.

例题 20.138 求 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转一周形成旋转曲面方程.

证明 **Step 1** 在旋转轴上任意取点 $(0,0,1)$, 对于旋转曲线上的点

$$\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0+1}{-1}=\frac{z_0-1}{2}. \tag{20.38}$$

过 (x_0,y_0,z_0) 做旋转轴的垂面

$$1\cdot(x-x_0)+(-1)\cdot(y-y_0)+2\cdot(z-z_0)=0. \tag{20.39}$$

连接 $(0,0,1)$,(x_0,y_0,z_0) 为半径并以 $(0,0,1)$ 为球心做球

$$x^2+y^2+(z-1)^2=x_0^2+y_0^2+(z_0-1)^2. \tag{20.40}$$

结合(20.38),(20.40),(20.39)消去参数[16](x_0,y_0,z_0), 即为所求.

Step 2 设

$$\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0+1}{-1}=\frac{z_0-1}{2}=t. \tag{20.41}$$

则

$$\begin{cases}x_0=t+1\\y_0=-t-1\\z_0=2t+1\end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+(z-1)^2=(t+1)^2+(-t-1)^2+(2t+1-1)^2;\\&x-y+2z=x_0-y_0+2z_0=2t+2+2(2t+1)=6t+4.\end{aligned},$$

即

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+(z-1)^2=2\left(\frac{x-y+2z-4}{6}+1\right)^2+4\left(\frac{x-y+2z-4}{6}\right)^2\\\Leftrightarrow\ &5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4x+4yz=4xz+4y+4z+6.\end{aligned}$$

[16]即 (x_0,y_0,z_0) 遍历整个旋转曲线.

20.9.4 杂题

定理 20.10 (二次曲面切平面的简单写法)

设二次曲面

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2a_4xy+2a_5xz+2a_6yz+2a_7x+2a_8y+2a_9z+a_{10}=0$$

上一个点为 (x_0,y_0,z_0). 则除去通用的求导计算 (x_0,y_0,z_0) 的切平面外还可以直接写出切平面

$$a_1x_0x+a_2y_0y+a_3z_0z+a_4\left(x_0y+xy_0\right)+a_5\left(xz_0+zx_0\right)+a_6\left(yz_0+zy_0\right)$$
$$+a_7\left(x+x_0\right)+a_8\left(y+y_0\right)+a_9\left(z+z_0\right)+a_{10}=0$$

♡

注这是大家高中数学中的二次曲线的切线在空间的推广.

例题 20.139 求经过 $(1,3,6)$ 且与三个坐标平面相切的球面方程.

证明 设球面为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, 则因为与三个坐标平面相切, 我们有 $a=b=c=r$. 代入 $(1,3,6)$ 得

$$(1-r)^2+(3-r)^2+(6-r)^2=r^2,$$

即 $r=5\pm\sqrt{2}$. 于是球面方程为

$$\left(x-\left(5\pm\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(5\pm\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(z-\left(5\pm\sqrt{2}\right)\right)^2=\left(5\pm\sqrt{2}\right)^2.$$

例题 20.140 求过点 $(2,-4,3)$ 且包含圆 $\begin{cases}x^2+y^2=5\\z=0\end{cases}$ 的球面方程.

证明 球心应该在过圆 $x^2+y^2=5$ 的圆心的垂线上, 因此可设球心坐标 $(0,0,z_0)$. 因此球心到圆 $x^2+y^2=5$ 上任意一点的距离应该为为球的半径, 于是由 $(2,-4,3)$ 在球面上, 我们有

$$(0-2)^2+(0+4)^2+(z_0-3)^2=5+z_0^2\Rightarrow z_0=4.$$

因此球的半径为 $\sqrt{5+4^2}=\sqrt{21}$, 故球面的方程为 $x^2+y^2+(z-4)^2=21$.

第 20 章 练习

1. (1.) 计算

$$\iiint_{[0,1]^3}\frac{1}{x+y+z}dxdydz.$$

2. (2.) 设 $u\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 且存在 $r\in\mathbb{R}$, 使得 $u(x,y)=0,\forall x^2+y^2>r$. 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,y)|^2\,dxdy\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y)|\,dxdy\right)^2.$$

3. (3.) 计算

$$\iint_D\left(xy+x^2+y^2\right)dxdy,$$

这里

$$D=\left\{(x,y):\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)^2\leqslant xy\right\}.$$

4. (4.) 计算 $\iiint_\Omega xy^2z^2dxdydz$, 其中 Ω 由 $z=xy,y=x,y=1,z=0$ 围成.
5. (5.) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个开区域并且有微分同胚

$$\Gamma:\Omega\to\Gamma(\Omega),(u,v)\to(x(u,v),y(u,v)).$$

若

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明

$$\iint_{\Gamma(\Omega)}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right]dxdy=\iint_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right]dudv. \tag{20.42}$$

6. (6.)$f\in C[-1,1]$, 证明
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dV=\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)dt.$$
7. (7.) 对 $m,n\in\mathbb{N}$, 计算 $\iint_{\Omega}(x+y)^{2n}(x-y)^{2m}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里
$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x+y|+|x-y|\leqslant 1\right\}.$$
8. (8.) 对 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}x^{2n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
9. (9.) 计算 $\iint_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里
$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x,y\geqslant 0\right\}.$$
10. (10.) 计算 $\iint_D(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这里
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}+x\right\}.$$
11. (11.) 设 D 由 $y=\sqrt{3(1-x^2)},y=\sqrt{3},x=0$ 围成, 计算 $\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
12. (12.) 计算
$$\lim_{R\to+\infty}\iiint_{\Omega_R}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
这里
$$\Omega_R\triangleq\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{1}{R^2}\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x,y,z\geqslant 0\right\}.$$
13. (13.) 计算
$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(x+y+z)|\,dxdydz.$$
14. (14.) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & x<0\text{或}x>2\end{cases}$, 然后计算
$$\iint_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\frac{f(x+y)}{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
15. (15.) 计算
$$I=\iint_{\Sigma}\left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$
这里 Σ 由柱面 $x^2+y^2=1,y^2+z^2=1$ 围成立体表面且朝外.
16. (16.) 设 $a>b>c>0$, 计算 $\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}S$.
17. (17.) 求 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\,(a,b,c>0)$ 围成立体体积.
18. (18.) 设 $F(x,y)=x^2+2\beta xy+y^2$ 是正定二次型, 计算
$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon^2\leqslant F(x,y)\leqslant 1}\ln\sqrt{F(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
19. (19.) 设 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, 计算
$$\iint_D e^{4x^2y^2-x^2-4y^2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
20. (20.) 设 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 在 XOY 平面投影区域为 D, 计算
$$\iint_D\frac{|xy|\left(1+e^{x^2}\right)}{2+e^{x^2}+e^{\frac{3}{4}y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

21. (21.) 设 $f\in C\left(\mathbb{R}\right),t>0$,
$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\sqrt{t^2-x^2-y^2}\geqslant z\geqslant x^2+y^2\right\},F\left(t\right)=\iiint_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$
计算 $F'\left(t\right)$.

22. (22.♠) 设 $N\left(x,y\right)$ 是 $\sqrt{m^2+n^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 的整数点 (m,n) 的个数. 记 $c=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k^2}$, 求
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}N\left(x,y\right)e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

23. (23.) 设曲线 C 为 $x^3+y^3-\frac{3}{2}xy=0$. 已知曲线 C 存在斜渐近线, 求其斜渐近线方程. 求曲线 C 围成图形面积.

24. (24.♠) 设 $p\in\mathbb{R}$, 讨论积分 $\iint_{[-1,1]^2}\frac{1}{|x^3+y^3+xy|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛性.

25. (25.) 计算
$$\iint_{x^2+y^2<1,x,y>0}y\sqrt{\frac{|2x-x^2-y^2|}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

26. (26.) 计算 $\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 这里取逆时针方向.

27. (27.) 设 p 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 XOY 平面垂直, 求点 P 的轨迹 C, 并计算曲面积分
$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,$$
其中 Σ 是椭球面 S 在曲线 C 上方部分.

28. (28.) 设 $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 且 $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=0,f\left(x,x\right)=x,f_x\left(x,x\right)=x^3$. 求
$$I=\iint_{D}\left[f_{xx}\left(x,x\right)-f_{yy}\left(x,x\right)\right]e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
这里 D 由 $x=0,y=1,y=x$ 围成的有界区域.

29. (29.♠) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为可求面积集, $|\Omega|$ 表示 Ω 体积, w_n 表示为单位球体积. 证明:
$$\int_{\Omega}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant nw_n^{1-\frac{1}{n}}|\Omega|^{\frac{1}{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$$

30. (30.♠) 证明
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\frac{\cos t-\sin s-\cos t\sin s}{\left[3+2\left(\cos t-\sin s-\cos t\sin s\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t=-4\pi.$$

31. (31.) 设曲面 Σ 由直线 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ (t为参数) 旋转而生成. 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 介于平面 $x+y+z=0,x+y+z=1$ 之间的部份的外侧. 计算曲面积分
$$\iint_{\Sigma}\left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y+1\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

32. (32.) 计算
$$\iint_{x^2+y^2\leqslant1}\left(e^y+e^{-y}\right)\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

33. (33.) 设 $u\in C\left(\mathbb{R}^3\right)$ 且在点 (x_0,y_0,z_0) 某个邻域上有连续的二阶偏导数. 记 Σ 是以 (x_0,y_0,z_0) 为心, $R>0$ 为半径的球面. 令
$$T\left(R\right)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}u\left(x,y,z\right)\mathrm{d}S.$$
证明:
$$\lim_{R\to0^+}T\left(R\right)=u\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

且成立

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{T(R)-u(x_0,y_0,z_0)}{R^2}=\frac{1}{6}\Delta u(x_0,y_0,z_0). \tag{20.43}$$

34. (34.♠) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为非空连通开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为连续函数. 若

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r(\mathbf{x})}f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y},\forall\overline{B_r(\mathbf{x})}\subset\Omega,$$

这里

$$B_r(\mathbf{x})\triangleq\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<r\right\},r>0.$$

证明: 若 f 在 Ω 上取得最大值, 则 f 在 Ω 上是常值函数.

35. (35.♠, ∗) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为非空连通开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为连续函数. 若

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r(\mathbf{x})}f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y},\forall\overline{B_r(\mathbf{x})}\subset\Omega,$$

这里

$$B_r(\mathbf{x})\triangleq\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<r\right\},r>0.$$

证明: f 在 Ω 上是调和函数.

36. (36.♠) 设

$$B(\mathbf{0},1)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2<1\right\},$$

以及光滑单位向量场 $\mathbf{u}=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$ 满足 $u'_x+v'_y+w'_z=0$. 若还有

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})(x,y,z)=0,\forall(x,y,z)\in\partial B(\mathbf{0},1),$$

证明:

$$\iiint_{B(\mathbf{0},1)}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

这里

$$\mathbf{u}\cdot\nabla=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}.$$

37. (37.♠) 设 $u\in C^2\left(\mathbb{R}^3\right),B_r=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3:||\mathbf{x}||<r\right\}$. 若

$$H(r)=\int_{B_r}u^2(\mathbf{x})\left(r^2-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x},I(r)=\int_{B_r}||\nabla u(\mathbf{x})||^2\left(r^2-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}\mathbf{x},\alpha\geqslant 2,$$

证明:

$$H'(r)=2\alpha r\int_{B_r}u^2(\mathbf{x})\left(r^2-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

进一步地, 若 u 为调和函数, 证明:

$$H'(r)=\frac{2\alpha+3}{r}H(r)+\frac{1}{(\alpha+1)r}I(r).$$

38. (38.♠) 设 $a>0$, 求曲面 $y^2+z^2=4ax$ 和 $x^2+y^2=2ax$ 所围立体体积.

39. (39.♠) 计算六重积分

$$\int_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}}{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||},$$

这里 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的单位球且 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$.

40. (40.) 设 $L=\{(x,\sqrt[3]{x}):0\leqslant x\leqslant 1\}$, 计算

$$\int_L ye^{y^2}\mathrm{d}y+\left(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2}\right)\mathrm{d}x.$$

41. (41.) 设 $B_R\triangleq\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2:||\mathbf{x}||<R\right\},R>0,f\in C(B_R)$ 满足

$$\sup_{||\mathbf{x}||<R}|f(\mathbf{x})|=A,\ \sup_{||\mathbf{x}||<R}\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^{\frac{1}{2}}}=B.$$

证明:

(a).

$$\int_{||\mathbf{x}||<\epsilon} \frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2} \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant 4\pi B\sqrt{\epsilon}, \forall \epsilon \in (0, R).$$

(b).

$$\int_{\epsilon<||\mathbf{x}||<R} \frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2} \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant 2\pi A \ln \frac{R}{\epsilon}, \forall \epsilon \in (0, R).$$

(c). 若 $R > \frac{A^2}{B^2}$, 则

$$\int_{||\mathbf{x}||<R} \frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2} \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant 2\pi A \left(2 + \ln \frac{RB^2}{A^2}\right).$$

42. (42.) 设椭球面 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1$. 求过点 $(0, 0, 1)$ 的平面与该椭球面的截面积最大值为 I.

43. (43.) 设 $\rho \in (0, 1)$, 计算

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

44. (44.[17]♠, ∗) 设 $n \geqslant 3$, 求最佳常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^2} \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}, \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

45. (45.) 设 f 在单位闭圆域上有连续的偏导数且在边界上值恒为 0. 证明:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{2\pi} \iint_{\epsilon^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] = f(0, 0).$$

46. (46.) 设 C 是一条正向封闭的简单光滑曲线. 求

$$\oint_C \left(x^2 y + y^3\right) \mathrm{d}x + x\left(4 + y^2\right) \mathrm{d}y$$

最大值.

47. (47.) 设曲面 $\Omega : x^4 + y^4 + z^4 = 1$ 围城区域体积为 V. 证明

$$V = \frac{1}{3} \iint_\Omega \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}.$$

48. (48.) 计算

$$I = \int_{[0,1]^n} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\ln x_i\} \mathrm{d}V.$$

49. (49.♠) 设

$$n \geqslant 2, p_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n,$$

以及

$$\Sigma = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n\right\}.$$

计算

$$\int_\Sigma \frac{\mathrm{d}S(\mathbf{x})}{\left(\sum\limits_{i=1}^n p_i x_i\right)^n}.$$

50. (50.) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的单位闭圆盘且 $f \in C^2(D) \bigcap C\left(\overline{D}\right)$ 满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x + x^2 + y^2, (x, y) \in D.$$

求

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[17] 本题应试角度, 只需要对 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 证明 $C = \frac{4}{(n-2)^2}$ 时候的不等式即可.

51. (51.) 设

$$\Omega \triangleq \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1, x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n\right\}.$$

计算

$$\int_{\Omega} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

52. (52.) 设 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ 对任何 $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}^n$, 计算

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1 a_2 \cdots a_n} \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - y_j}{a_j}\right) \frac{y_i}{a_i} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{2a_j^2}} \mathrm{d}\mathbf{y} \right|.$$

53. (53.) 设 $u_i = u_i(x_1, x_2), i = 1, 2$ 是关于每个分量周期 1 的连续可微函数. 计算

$$\iint_{0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1} \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

54. (54.) 设 $p, q, s, r > 0$, 计算

$$\iiint_{\Omega} x^p y^q z^s (1 - x - y - z)^r \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里 Ω 由 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 围成区域.

55. (55.♠) 设 $p_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 判断 $\int_{\Omega} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^{p_i}} \mathrm{d}V$ 收敛性. 这里考虑如下两种情况区域

$$\Omega = \left\{\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1\right\};$$

$$\Omega = \left\{\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| > 1\right\}.$$

56. (56.) 求定义在区域 $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} \leqslant 1\right\}$ 上满足 $f(1, 0) = 1$ 的正值连续函数 f 使得 $\iint_{\Omega} \frac{f(y,x)}{f(x,y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 达到最小, 并求出最小值.

57. (57.) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的单位闭圆盘且 H 是 D 上调和函数. 若

$$H(x, y) = 1, \forall (x, y) \in \partial D,$$

证明:

$$H(x, y) = 1, \forall (x, y) \in D.$$

58. (58.♠) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的有光滑边界的有界单连通区域且

$$f \in C^1\left(\overline{D}\right), f|_{\partial D} = 0.$$

证明:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\iint_{D, x^2 + y^2 \geqslant \epsilon^2} \frac{x f'_x + y f'_y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] = -2\pi f(0, 0).$$

59. (59.) 设 L 是椭圆 $x^2 + 3y^2 = 1$ 上从 $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 沿着逆时针方向到 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 计算曲线积分

$$\int_L \left(e^{x^2} \sin x - 2xy\right) \mathrm{d}x + \left(6x - x^2 - y\cos^4 y\right) \mathrm{d}y.$$

60. (60.) 设

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x\right\},$$

计算

$$I = \iiint_D \frac{x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

61. (61.) 设 D 是平面区域且 $u \in C^2(D)$. 证明: 在 D 上有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
的充要条件是对任何含于 D 且内部 O 也含于 D 的圆周 L, 都有 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = 0$, 这里 $\mathbf{n}$ 表示单位外法向量.

62. (62.) 设 Ω 是有界单连通区域, 其边界 S 是一个光滑封闭曲面,$\mathbf{n}$ 是 S 上的点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 的单位外法向量. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为不在 S 上一点,
$$r = \sqrt{(\xi-x_0)^2 + (\eta-y_0)^2 + (\zeta-z_0)^2}.$$
证明:
$$\iiint_\Omega \frac{1}{r} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2} \iint_S \cos\angle(PQ,\mathbf{n})\,\mathrm{d}S.$$

63. (63.) 设 B 是 $\mathbb{R}^3$ 的单位开球, $u \in C^2(B) \bigcap C\left(\overline{B}\right)$ 满足对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立
$$\Delta u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in B, u(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial B.$$
证明 $\lambda < 0$ 且
$$\int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \lambda \int_B |u|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

64. (64.♠) 设
$$D \triangleq \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0, x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant 1\}.$$
对 $p_1,p_2,\cdots,p_n > 0$, 计算
$$\int_D x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

65. (65.) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为边界光滑的单连通区域. 若 q, ϵ_0 为常数, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 对 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$, 计算
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^3} \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S.$$

66. (66.) 考虑
$$B_\rho \triangleq \left\{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 < \rho^2\right\}, \rho > 0.$$
若
$$f \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right), f|_{\partial B_r} = 0, r > 0$$
证明:
$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \iiint_{B_r\setminus B_\epsilon} \frac{\sum\limits_{i=1}^3 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}V = -4\pi f(\mathbf{0}).$$

67. (67.♠) 设 $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 满足
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$
记
$$v_\pm(t) \triangleq u(t,\pm t), E(t) \triangleq \int_{-t}^t \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 + |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \right).$$
(a). 用 $v_\pm$ 和导数表示 $\frac{dE}{dt}(t)$ 并证明 $E(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 递增.
(b). 若 $\sup\limits_{t\geqslant 0} E(t) < \infty$, 证明
$$\lim_{t\to+\infty} v_\pm(t) = 0.$$

68. (68.♠) 计算
$$I \triangleq \iiint_{x,y,z>0} \left[\ln x \ln y \ln z \cos\left(x^2+y^2+z^2\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

69. (69.♠) 设 $n \geqslant 2, p \in [1, n)$, 证明:
$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\mathbf{x})|^p}{||\mathbf{x}||^p} \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \left(\frac{p}{n-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^p \mathrm{d}\mathbf{x}, \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

70. (70.) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有分段光滑边界的区域. 若 $u, v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ 满足
$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$
证明:
$$\iiint_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \iiint_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}\mathbf{x},$$
这里 u 是 Ω 上的调和函数.

71. (71.♠) 设 $f \in C(\mathbb{R}^2), L$ 是一个分段光滑闭曲线. 令
$$u(x, y) \triangleq \oint_L f(\xi, \eta) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}\right) \mathrm{d}s,$$
证明:
$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} \frac{u(x, y)}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} = -\oint_L f(\xi, \eta) \mathrm{d}s.$$

72. (72.) 设 $f \in C^1\left([0, 1]^2\right)$ 且在边界上为 0. 证明:
$$\left|\int_{[0,1]^2} f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{6} \max_{[0,1]^2} \left(\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}\right).$$

73. (73.) 设不全为 0 的实数 α, β, γ, 考虑
$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}.$$
计算 $\int_C y(y - x) \mathrm{d}s$.

74. (74.∗) 设 $B \subset \mathbb{R}^3$ 是单位球, 证明:
$$\int_{\partial B} |f|^2 \mathrm{d}S \leqslant \frac{e^2 - 1}{2} \left(\int_B |f|^2 \mathrm{d}V + \int_B |\nabla f|^2 \mathrm{d}V\right), \forall f \in C^\infty(\overline{B}),$$
并证明系数不可改进.

75. (75.) 设 p_m 是三元齐 m 次多项式且满足
$$\Delta p_m = 0, m = 1, 2, \cdots.$$
设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 单位球表面, 证明:
$$\iint_S p_m p_n \mathrm{d}S = 0, \forall m > n \geqslant 1.$$

76. (76.) 设 $h \in C^2(\mathbb{R})$. 对任何 $d > r > 0$, 证明存在一个半径为 r, 圆心到圆点距离为 d 的圆盘 S 使得
$$\iint_S \left(y \frac{\partial h}{\partial x} - x \frac{\partial h}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

77. (77.) 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n, B \subset \mathbb{R}^n$ 是单位开球. 证明: 对 $f \in C^1(\overline{B})$ 有
$$\int_{\partial B} |f|^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}} \mathrm{d}S \leqslant n \int_B \left(|f|^2 + \sum_{j=1}^n a_j^2 |\partial_j f|^2\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

第 21 章 非数学类决赛线性代数 ♠

内容提要

❑ 非数学类决赛线性代数基本结论 21.1　　❑ 非数学类决赛线性代数训练集 21.2

线性代数在非数学类决赛中一般会有两个题, 一个填空题一个大题, 填空题难度比较低. 课内知识的熟练应用. 大题属于高等代数, 往往属于智力游戏题. 解决的几率对非数学专业来说较低. 对自己要求不高的同学可以不看.

21.1 非数学类决赛线性代数基本结论

由哈密顿凯莱定理, 我们知道方阵的特征多项式是其零化多项式[1]. 首 1 的次数最低的零化多项式会有非常好的性质, 我们定义

定义 21.1 (极小多项式)

给定数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 A, 我们称 $m \in \mathbb{F}[x]$ 是 A 的极小多项式, 如果 m 是 A 的首 1 的次数最低的零化多项式.

♣

笔记 计算矩阵的极小多项式一般只能按照定义, 比较复杂, 所以不会尝试针对具体矩阵计算其极小多项式.

我们给出下面的关于极小多项式的结果, 以后他们可以直接使用:

命题 21.1 (极小多项式的性质)

设 $m \in \mathbb{F}[x]$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 A 的极小多项式, 则

1. m 是存在唯一的且 $\deg m \geqslant 1$;
2. 设 $g \in \mathbb{F}[x]$ 是 A 的零化多项式, 则 $m|g$.
3. 相似矩阵有相同的极小多项式, 反之不然.
4. A 的极小多项式和 A 的特征多项式在数域 $\mathbb{F}$ 上有相同的根[a].
5. 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ 是分块对角矩阵且对角线上的矩阵都是方阵. 若 $A_i, i = 1, 2, \cdots, s$ 的极小多项式是 m_i, 则 A 的极小多项式是 $m_1, m_2 \cdots, m_s$ 的最小公倍式.
6. 数域 $\mathbb{F}$ 上和矩阵可对角化的充要条件是其极小多项式可分解为一次式的积.

[a]重数可能不一致.

♠

例题 21.1 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$, 证明 A 可对角化.

证明 注意到 A 有零化多项式 $x^2 - x = x(x-1)$, 而由命题21.1的第二点我们知道 A 的极小多项式只有三种可能:$x, x-1, x(x-1)$, 他们都是一次式的积. 从而由命题21.1的最后一条我们知道 A 可对角化.

[1]方阵 A 的零化多项式定义为一个多项式 f, 其满足 $f(A) = 0$.

定义 21.2 (Jordan 块)

设 $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$, 我们称

$$J_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$

为 Jordan 块.

直接考察矩阵乘法, 我们可得

命题 21.2 (jordan 块的性质)

1. $J_n(a)$ 的特征多项式和极小多项式都是 $(x-a)^n$.
2. 设 $f \in \mathbb{C}[x]$, 则

$$f(J_n(a)) = \begin{pmatrix} f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \frac{f''(a)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ & f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \frac{f''(a)}{2!} & \ddots & \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} \\ & & f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & & f(a) & \ddots & \frac{f''(a)}{2!} \\ & & & & \ddots & \frac{f'(a)}{1!} \\ & & & & & f(a) \end{pmatrix}. \tag{21.1}$$

特别的,

$$J_n^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, J_n^3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, J_n^{n-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 和 $J_n(a)$ 乘法可交换的矩阵一定是 $J_n(a)$ 的多项式.
4. 当 $\lambda \neq 0$, 有

$$J_n^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \cdots & (-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda^n} \\ & \frac{1}{\lambda} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -\frac{1}{\lambda^2} \\ & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

练习 21.1 设 $a \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N}$, 计算 $J_n(a)X = XJ_m(a)$ 的解矩阵.

笔记 用矩阵乘法自行计算找规律即可.

定理 21.1 (Jordan 标准型定理)

设 A 是 n 阶复矩阵, 则存在可逆复矩阵 P 和 Jordan 块 $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)$, 使得

$$A \sim \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\},$$

且 $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)$ 不计次序是唯一的. 我们称 $\operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}$ 是 A 的 Jordan 标准型.

注我们不给予 Jordan 标准型定理21.1证明. 读者可以直接记忆并且以后直接使用.

笔记 特别的, 若所有 $n_j, 1 \leqslant j \leqslant s$ 都是 1, 本结果就是矩阵的对角化. 显然 $\lambda_j, 1 \leqslant j \leqslant s$ 是 A 的特征值.

笔记 实际上矩阵的相似不随域扩张而改变, 这个结果可以直接使用, 例如矩阵 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果存在复矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$, 则存在可逆 $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $Q^{-1}AQ = B$. 注意到如果 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且相似, 谈在更小的域上相似将无意义.

命题 21.3 (Jordan 标准型的计算)

设 A 是复数域上的 n 阶矩阵且有极小多项式

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

且 $\lambda_j, 1 \leqslant j \leqslant s$ 互不相同. 那么 A 的主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的块数为 $N_j = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_j I)$. 并且其中 $t, 1 \leqslant t \leqslant n_j$ 级 Jordan 块个数为

$$N_j(t) = \operatorname{rank}(A - \lambda_j I)^{t+1} + \operatorname{rank}(A - \lambda_j I)^{t-1} - 2\operatorname{rank}(A - \lambda_j I)^t.$$

笔记 显然 N_j 就是 λ_j 的几何重数且由 Jordan 标准型显然知道几何重数小于等于代数重数. 实际应用中我们不会真正的去算具体矩阵的 Jordan 标准型, 有兴趣的读者可以自己参考丘维声编著的高等代数下册学习.

实际做题中我们几乎不会真正的按照(21.3)去计算 Jordan 标准型, 而是:

例题 21.2 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型, 并求一个可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型.

证明 注意到矩阵的特征多项式是 $(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ 且属于特征值 3 的线性无关特征向量最大个数是 1. 于是矩阵的 Jordan 标准型由 1 个特征值 1 的 1 阶块和 1 个特征值 3 的块组成, 只能是

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

设

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix} P = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \alpha_1 = \alpha_1, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \alpha_2 = 3\alpha_2.$$

求特征向量的方法可取

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \alpha_3 = \alpha_2 + 3\alpha_3$$

可取

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

直接验证可以发现 $P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$ 可逆且

$$\begin{pmatrix}2&3&2\\1&8&2\\-2&-14&-3\end{pmatrix}P=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

命题 21.4 (A 和 A^T 相似)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则有 $A\sim A^T$, 从而 A 和 A^T 有完全一样的特征多项式和特征值.

笔记 积累矩阵

$$H=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\iddots&0\\\vdots&\iddots&\cdots&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}. \tag{21.2}$$

它能实现 Jordan 块转置的作用, 则 $H=H^T=H^{-1}$ 且

$$H^{-1}J_n(a)H=J_n^T(a).$$

证明 实际上我们无需 $A\sim A^T$ 就可以很简单的说明 A 和 A^T 有完全一样的特征多项式和特征值. 这是因为

$$|\lambda E-A|=\left|\lambda E^T-A^T\right|=\left|\lambda E-A^T\right|.$$

而 $A\sim A^T$ 就需要稍微超出非数学类的结果. 取可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}(a_1),J_{n_2}(a_2),\cdots,J_{n_s}(a_s)\right\},$$

则

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}\{H,H,\cdots,H\}\cdot P^{-1}AP\cdot\operatorname{diag}\{H,H,\cdots,H\}=\operatorname{diag}\{HJ_{n_1}(a_1)H,HJ_{n_2}(a_2)H,\cdots,HJ_{n_s}(a_s)H\}\\&=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}^T(a_1),J_{n_2}^T(a_2),\cdots,J_{n_s}^T(a_s)\right\}=\left(P^{-1}AP\right)^T=P^TA^TP^{-T},\end{aligned}$$

从而 $A\sim A^T$.

命题 21.5 ($AX=XB$ 经典结论)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n},B\in\mathbb{C}^{m\times m},m,n\in\mathbb{N}$, 则矩阵方程 $AX=XB$ 有非 0 解 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 的充分必要条件是 A,B 至少有一个相同的特征值.

证明 必要性: 设 $AX=XB$ 有非 0 解 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 则对任何多项式 f, 我们直接由矩阵乘法计算有

$$f(A)X=Xf(B). \tag{21.3}$$

特别的在(21.3)中取 f 是 B 的特征多项式, 则由哈密顿凯莱定理知 $f(A)X=0$. 故 $f(A)$ 有 0 特征值. 根据经典课内结论: $f(A)$ 的特征值全体就是 A 的特征值全体在 f 下的像知 A 的某个特征值是 f 的根. 从而 A,B 至少有一个相同的特征值.

充分性: 设 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 A,B 的相同的特征值, 则 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 A,B^T 的相同的特征值. 于是存在非 0 的 $\alpha\in\mathbb{C}^n,\beta\in\mathbb{C}^m$ 使得

$$A\alpha=\lambda\alpha,B^T\beta=\lambda\beta. \tag{21.4}$$

于是取 $X=\alpha\beta^T$, 就有

$$A\alpha\beta^T=\lambda\alpha\beta^T=\alpha\beta^T\left(B^T\right)^T=\alpha\beta^TB.$$

若 $X=0$, 则

$$|\alpha|^2\beta^T=\alpha^T\alpha\beta^T=0,|\alpha|\neq0\Rightarrow\beta=0,$$

矛盾! 因此我们证明了充分性.

命题 21.6 (与所有可逆矩阵可交换的矩阵是数量矩阵)

与所有可逆矩阵可交换的矩阵是数量矩阵.

笔记 本结果纯背,

证明 记 e_i 表示第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的矩阵, 取 $\operatorname{diag}\{1,2,\cdots,n\},(e_n,e_1,\cdots,e_{n-1})$ 做矩阵乘法验证即可.

分块矩阵初等变换技巧[2].

定义 21.3 (分块矩阵的初等变换)

我们称 $\mathbb{F}^{n\times m}$ 中的矩阵的如下操作为分块矩阵初等变换:

1. 交换行 (列);
2. 用某一行 (列) 矩阵左 (右) 乘一个矩阵加到另外一行 (列);
3. 某一行 (列) 左 (右) 倍乘一个可逆矩阵.

注和通常的矩阵初等变换一致, 分块矩阵的初等变换定义21.3也对应左 (右) 乘一个分块初等矩阵[3]

笔记 分块矩阵初等变换有着不改变矩阵秩, 保持行列式信息[4], 计算逆或者伴随的效果. 运用矩阵秩不等式 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$ 和可逆矩阵乘矩阵不改变矩阵的秩, 显然有定义21.3中的第 3 条如果略去可逆则矩阵秩变小[5].

来看一个典型应用, 其结论应该牢记于心.

命题 21.7 (行列式重要等式)

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times m},\lambda\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$, 则

$$|\lambda E_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|. \tag{21.5}$$

证明 不妨设 $\lambda=1$, 否则用 $\frac{A}{\lambda}$ 代替 A. 于是只需证明

$$|E_m-AB|=|E_n-BA|. \tag{21.6}$$

证明的想法即运用分快矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix}E_n&0\\0&E_m-AB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_n&B\\0&E_m-AB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_n&B\\A&E_m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_n-BA&0\\A&E_m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E_n-BA&0\\0&E_m\end{pmatrix}.$$

注意上述矩阵初等变换只是左乘或者右乘

$$\begin{pmatrix}E_n&\\*&E_m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E_n&*\\0&E_m\end{pmatrix},$$

其行列式都为 1. 因此上述初等变换不改变矩阵的行列式, 所以我们证明了(21.6), 从而得到了(21.5). 这就完成了证明.

由式(21.5)知

[2]线性代数矩阵技巧的核心.

[3]对初等矩阵做一次分块矩阵初等变换得到的矩阵.

[4]具体需要时具体分析.

[5]但可能相等.

推论 21.1

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times m},B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则 AB 和 BA 有完全一样的非 0 特征值且重数也相同.

练习 21.2 设 A 是 n 阶矩阵, D 是 m 阶矩阵,

1. $|A|\neq 0,\left|D-CA^{-1}B\right|\neq 0$, 计算逆矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}$.
2. 计算伴随矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}^{*}$.

笔记 注意积累摄动的思想.

证明

1. 注意到

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ -CA^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A^{-1}B\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}&=\begin{pmatrix}E & -A^{-1}B\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ -CA^{-1} & E\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\\ 0 & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ -CA^{-1} & E\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\\ -\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. 当 A,C 都可逆, 由第一问结论得

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix}|C|A^{*} & -A^{*}BC^{*}\\ 0 & |A|C^{*}\end{pmatrix}.$$

因为 $|A+\lambda E|,|C+\lambda E|$ 都是关于 λ 的首 1 多项式, 所以都只有限个 λ 使得 $|A+\lambda E|=0,|C+\lambda E|=0$. 于是当 $\lambda\to 0,\lambda\neq 0$ 时有 $A+\lambda E$ 和 $C+\lambda E$ 可逆. 因此我们得

$$\begin{pmatrix}A+\lambda E & B\\ 0 & C+\lambda E\end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix}|C+\lambda E|(A+\lambda E)^{*} & -(A+\lambda E)^{*}B(C+\lambda E)^{*}\\ 0 & |A+\lambda E|(C+\lambda E)^{*}\end{pmatrix}.$$

因为取伴随和取行列式本质上是对矩阵的元素做多项式操作, 所以是连续的. 让 $\lambda\to 0$ 得

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix}|C|A^{*} & -A^{*}BC^{*}\\ 0 & |A|C^{*}\end{pmatrix}.$$

直接考察初等变换对应的初等矩阵, 我们有

定理 21.2 (初等变换和合同的关系)

设 A 是 n 阶矩阵, 则如下初等变换得到的矩阵和原本的矩阵合同.

1. 把 A 的第 i 行 (列) 和第 j 行 (列) 交换, 同时把第 i 列 (行) 和第 j 列 (行) 交换;
2. 把 A 的第 i 行 (列) 乘以一个数字 c 之后加到第 j 行 (列), 同时把第 i 列 (行) 乘以一个数字 c 之后加

到第 j 列 (行);

3. 把 A 的第 i 行 (列) 乘以一个非 0 数字 c, 同时把第 i 列 (行) 乘以一个非 0 数字 c.

♡

笔记 即同时对行列做初等变换.

定理 21.3 (初等变换和相似的关系)

设 A 是 n 阶矩阵, 则如下初等变换得到的矩阵和原本的矩阵相似.

1. 把 A 的第 i 行 (列) 和第 j 行 (列) 交换, 同时把第 i 列 (行) 和第 j 列 (行) 交换;
2. 把 A 的第 i 行 (列) 乘以一个数字 c 之后加到第 j 行 (列), 同时把第 j 列 (行) 乘以 $-c$ 之后加到第 i 列 (行);
3. 把 A 的第 i 行 (列) 乘以一个非 0 数字 c, 同时把第 i 列 (行) 乘以一个非 0 数字 $\frac{1}{c}$.

♡

笔记 可以看到定理21.2和定理21.3的第一条对于实矩阵也都是正交变换, 但遗憾的是并不是所有正交变换都能通过上述初等变换来刻画.

我们还需要分块矩阵的初等变换和相似和合同的关系.

定理 21.4 (分块初等变换和合同的关系)

设 A 是分块矩阵, 则如下初等变换[a]得到的矩阵和原本的矩阵合同.

1. 把 A 的第 i 行 (列) 和第 j 行 (列) 交换, 同时把第 i 列 (行) 和第 j 列 (行) 交换;
2. 把 A 的第 i 行 (列) 左 (右) 乘以一个矩阵 C 之后加到第 j 行 (列), 同时把第 i 列 (行) 右 (左) 乘以 C^T 之后加到第 j 列 (行);
3. 把 A 的第 i 行 (列) 左 (右) 乘以一个可逆矩阵 C, 同时把第 i 列 (行) 右 (左) 乘以一个可逆矩阵 C^T.

[a]当然初等变换要有意义.

♡

定理 21.5 (分块初等变换和相似的关系)

设 A 是分块矩阵, 则如下初等变换[a]得到的矩阵和原本的矩阵相似.

1. 把 A 的第 i 行 (列) 和第 j 行 (列) 交换, 同时把第 i 列 (行) 和第 j 列 (行) 交换;
2. 把 A 的第 i 行 (列) 左 (右) 乘以一个矩阵 C 之后加到第 j 行 (列), 同时把第 j 列 (行) 右 (左) 乘以 $-C$ 之后加到第 i 列 (行);
3. 把 A 的第 i 行 (列) 左 (右) 乘以一个可逆矩阵 C, 同时把第 i 列 (行) 右 (左) 乘以一个可逆矩阵 C^{-1}.

[a]当然初等变换要有意义.

♡

笔记 同样的, 定理21.4和定理21.5的第一种变换对应着正交变换.

例题 21.3 证明

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

证明 以 $n=4$ 为例, 其于情况是一致的. 由定理21.3得

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\overset{\text{同时}}{\to}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&2&2&2\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\\0&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\overset{\text{同时}}{\to}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&2&2\\0&0&3&3\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&2&2\\0&0&3&3\\0&0&4&4\end{pmatrix}\overset{\text{同时}}{\to}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&2\\0&0&0&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

这就证明了

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

要注意初等变换和向量组线性表出的关系.

例题 21.4 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n},\mathbb{F}$ 是域. 证明: 若 $\det A=0$, 则只用初等行变换可以把 A 的某一行变成 0.

证明 注意到 A 的任一行都可以表示为 A 极大无关的行向量组的线性组合. 而做初等行变换相当于对行向量组的线性组合, 因此只用初等行变换总可以把 A 的某一行变成 0.

例题 21.5 设 $\mathbb{K}$ 是一个数域, $A\in\mathbb{K}^{n\times n},\beta\in\mathbb{K}^{n\times1},B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}$, 证明

1. 若 A 的秩为 n, 则 B 可逆的充要条件是 $\beta^TA^{-1}\beta\neq0$.
2. 若 A 对称且秩为 r, 则 B 秩也为 r 的充要条件是方程组 $\begin{cases}Ax=\beta\\\beta^Tx=0\end{cases}$ 有解.
3. 若 A 对称且秩为 $n-1$, 则 B 可逆的充要条件是方程组 $Ax=\beta$ 无解.

笔记 以后我们不会再写出初等变换对应的初等矩阵, 但考试尽量写出来.

证明

1. 做初等变换

$$\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}\overset{\text{第一行的}-\beta^TA^{-1}\text{倍加到第二行}}{\to}\begin{pmatrix}A&\beta\\0&-\beta^TA^{-1}\beta\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}E_n&0\\-\beta^TA^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\beta\\0&-\beta^TA^{-1}\beta\end{pmatrix}.$$

现在由 $\det A\neq0$, 我们有

$$r\left(\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}\right)=n+1\Leftrightarrow\det\begin{pmatrix}A&\beta\\0&-\beta^TA^{-1}\beta\end{pmatrix}\neq0\Leftrightarrow\beta^TA^{-1}\beta\neq0.$$

2. 由线性方程组解和秩的关系得方程组 $\begin{cases}Ax=\beta\\\beta^Tx=0\end{cases}$ 有解充分必要条件是

$$r\left(\begin{pmatrix}A\\\beta^T\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}\right).$$

又由秩不等式

$$r\left(\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}A\\\beta^T\end{pmatrix}\right)\geqslant r(A),$$

即

$$r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)=r(A)\Rightarrow r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}\right).$$

反之, 若 $\begin{cases}Ax=\beta\\ \beta^Tx=0\end{cases}$ 有解 x, 则

$$\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一列的}-x\text{倍加到第二列}}\begin{pmatrix}A & 0\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行的}-x^T\text{倍加到第二行}}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -x^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

这就证明了

$$r(B)=r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)=r(A).$$

3. 注意到

$$r(B)=r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}\right)\geqslant r(A).$$

若 $Ax=\beta$ 无解, 则由线性方程组解和秩的关系得

$$r(B)=r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}\right)>r(A), r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}\right)=n.$$

若

$$r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}\right),$$

则存在 x 使得 $\beta^T=x^TA, 0=x^T\beta$, 取转置就和 $Ax\neq\beta$ 矛盾! 因此我们得到了 $r(B)=n+1$.
反之若 $Ax=\beta$ 有解 x, 我们有

$$\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一列的}-x\text{倍加到第二列}}\begin{pmatrix}A & 0\\ \beta^T & -\beta^Tx\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行的}-x^T\text{倍加到第二行}}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -\beta^Tx\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -x^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -\beta^Tx\end{pmatrix}.$$

于是

$$r(B)=r\left(\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -\beta^Tx\end{pmatrix}\right)=r(A)+r\left(-\beta^Tx\right)\leqslant n,$$

即 B 不可逆.
我们完成了证明.

来看形式幂级数技巧, 注意所谓 “形式”, 即不严谨的, 属于先猜后证范畴.

例题 21.6 设 $n>1$, 记 J 为元素全为 1 的 n 阶矩阵且 1_n 表示元素全为 1 的 n 维列向量. 计算 $(aI+bJ)^{-1}$.

证明 因为推论21.1, 我们知道 $J=1_n1_n^T$ 有特征值 n 和 $n-1$ 个 0, 于是 $aI+bJ$ 有特征值 $a+bn$ 和 $n-1$ 个 a. 故 $a\neq0, a+bn\neq0$ 时有 $aI+bJ$ 可逆. 注意到

$$J=1_n1_n^T\Rightarrow J^k=1_n\underbrace{\left(1_n^T1_n\right)\cdots\left(1_n^T1_n\right)}_{k-1\text{个}}1_n^T=n^{k-1}J, k=1,2,\cdots,$$

因此

$$\frac{1}{aI+bJ}=\frac{1}{a}\frac{1}{I+\frac{b}{a}J}=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}J\right)^k=\frac{1}{a}\left(I+J\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^k n^{k-1}\right)=\frac{1}{a}\left(I-\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}n}J\right)=\frac{1}{a}I-\frac{b}{a\left(a+bn\right)}J.$$

注意上述过程也不必考虑收敛性等问题, 本来就是先猜后证.

于是呈现在卷子上的严格证明:

$$(aI+bJ)\cdot\left(\frac{1}{a}I-\frac{b}{a\left(a+bn\right)}J\right)=\left(\frac{1}{a}I-\frac{b}{a\left(a+bn\right)}J\right)\cdot(aI+bJ)=I,$$

这就证明了

$$(aI+bJ)^{-1}=\frac{1}{a}I-\frac{b}{a\left(a+bn\right)}J.$$

例题 21.7 设 A 为 n 阶可逆矩阵且 X,Y 为 n 维列向量, 如果 $Y^TA^{-1}X\neq -1$, 证明 $A+XY^T$ 可逆且求其逆.

笔记 注意到 $\frac{1}{A}$ 可猜左乘或者右乘, 总有一个是对的. 都试试即可.

证明 首先对每个 $k\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left(XY^TA^{-1}\right)^k=X\underbrace{\left(Y^TA^{-1}X\right)\left(Y^TA^{-1}X\right)\cdots\left(Y^TA^{-1}X\right)}_{k-1\text{个}}Y^TA^{-1}=XY^TA^{-1}\left(Y^TA^{-1}X\right)^{k-1}. \tag{21.7}$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(A+XY^T\right)^{-1}&=\frac{1}{A+XY^T}=\frac{1}{I+XY^TA^{-1}}\frac{1}{A}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-XY^TA^{-1}\right)^k\right)\frac{1}{A}\\&\overset{(21.7)}{=}\left(1-XY^TA^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-Y^TA^{-1}X\right)^{k-1}\right)\frac{1}{A}=A^{-1}-\frac{A^{-1}XY^TA^{-1}}{1+Y^TA^{-1}X},\end{aligned}$$

读者可以自行验证

$$\left(A+XY^T\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}XY^TA^{-1}}{1+Y^TA^{-1}X}.$$

命题 21.8 ($r\left(A^TA\right)=r\left(A\right)$)

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $r\left(A^TA\right)=r\left(A\right)$.

证明 设 $Ax=0,x\in\mathbb{R}^n$, 则 $A^TAx=0$. 反之设 $A^TAx=0,x\in\mathbb{R}^n$, 则

$$0=x^TA^TAx=\left(Ax\right)^T\left(Ax\right)\Rightarrow Ax=0.$$

故线性方程组 $Ax=0$ 和 $A^TAx=0$ 同解. 于是有 $r\left(A^TA\right)=r\left(A\right)$.

此类技巧还有一个应用:

例题 21.8 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $r\left(A^k\right)=r\left(A^{k+1}\right),k\in\mathbb{N}_0$, 则 $r\left(A^k\right)=r\left(A^{k+s}\right),\forall s\in\mathbb{N}_0$. 特别的 $r\left(A^n\right)=r\left(A^{n+1}\right)$.

笔记 这里涉及秩不等式链的应用.

证明 注意到

$$r\left(A^{n+1}\right)\leqslant r\left(A^n\right)\leqslant\cdots\leqslant r\left(A\right)\leqslant n.$$

注意到关于非负整数的上述不等式链必然有一个等号取等, 即对某个 $0\leqslant k\leqslant n$. 有

$$r\left(A^k\right)=r\left(A^{k+1}\right).$$

现在我们知道线性方程组 $A^kx=0,A^{k+1}x=0$ 同解. 又设 $A^{k+1}x=0$, 我们有 $A^{k+2}x=0$. 设 $A^{k+2}x=0$, 我们有 $A^{k+1}Ax=0$, 即

$$A^{k+1}x=A^kAx=0.$$

现在 $A^{k+2}x=0, A^{k+1}x=0$ 同解, 我们就有

$$r\left(A^{k+2}\right)=r\left(A^{k+1}\right)=r\left(A^{k}\right).$$

类似的操作下去得 $r\left(A^{k}\right)=r\left(A^{k+s}\right), \forall s\in\mathbb{N}_0$, 特别的 $r\left(A^{n}\right)=r\left(A^{n+1}\right)$.

定理 21.6 (经典秩不等式总结)

当下面运算有意义时[a], 必有

1.
$$r(A)+r(B)-m\leqslant r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}. \tag{21.8}$$

2.
$$r(A\pm B)\leqslant r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B), r(A\pm B)\leqslant r\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B). \tag{21.9}$$

3.
$$r\begin{pmatrix}A & 0\\C & B\end{pmatrix}\geqslant r(A)+r(B).$$

[a]未必是方阵.

♡

注这里前两条来自课本, 可以直接使用. 最后一条的证明应该烂熟于心. 即取 A 和 B 的非 0 子式合并在一起构成一个更大的非 0 子式[6]. 第二三条还有各种变形和类似的版本, 也应该积累方法.

大家在课内学过正定矩阵, 那么类似的有半正定矩阵

定义 21.4 (半正定矩阵)

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 我们称 A 半正定的, 如果对任何 $x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $x^TAx\geqslant 0$.

♣

笔记 设 $-A$ 是实半正定矩阵, 我们称 A 是半负定的. 既不是半正定也不是半负定的实矩阵我们称为不定矩阵. 显然 $\mathbb{R}$ 上一个矩阵是 $*$ 定矩阵是合同不变量.

我们来看半正定矩阵的刻画.

命题 21.9

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则下列条件等价.

1. A 半正定;
2. A 所有主子式非负;
3. A 的所有特征值都是非负实数;
4. 存在 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $A=C^TC$.

♠

证明 证明同正定矩阵的情况, 以后读者可以直接运用命题(21.9)而无需证明.

命题 21.10

设 $\mathbb{F}$ 是一特征不为 2 的域, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $A=-A^T$ 的充要条件是对任何 $\mathbf{x}\in\mathbb{F}^n$ 都有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$.

♠

证明 若 $A=-A^T$, 则

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\left(\mathbf{x}^TA\mathbf{x}\right)^T=\mathbf{x}^TA^T\mathbf{x}=-\mathbf{x}^TA\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0.$$

若对任何 $\mathbf{x}\in\mathbb{F}^n$ 都有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$, 则设

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

[6]此时是下三角的, 因此容易说明行列式非 0.

取 $\mathbf{x}=e_i, i=1,2,\cdots,n$, 有 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$. 取 $\mathbf{x}=e_i+e_j, i,j=1,2,\cdots,n$, 有 $a_{ij}+a_{ji}=0, i,j=1,2,\cdots,n$. 因此我们证明了 $A=-A^T$.

命题 21.11 (逆和伴随都是多项式)

设 $\mathbb{F}$ 是数域且 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 是 A 的多项式;
2. A^* 是 A 的多项式.

♠

证明 设 A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0.$$

1. 若 A 可逆, 则 $a_0\neq 0$, 于是由哈密顿凯莱定理知

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0,$$

即

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1E\right).$$

2. 当 A 可逆, 注意到

$$(-1)^n a_0=\det A, A^*=|A|A^{-1}=(-1)^n a_0A^{-1},$$

于是

$$A^*=(-1)^{n-1}\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1E\right), \tag{21.10}$$

注意到 $a_i, 0\leqslant i\leqslant n-1$ 由矩阵 A 的元素经过多项式层面的操作得到, 因此由摄动法我们知道对一般的非可逆矩阵 A, 也有(21.10)成立. 这就完成了证明.

回忆课本结论

命题 21.12 (伴随矩阵的秩)

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}.$$

♠

接下来计算矩阵和逆矩阵的特征值.

推论 21.2 (逆和伴随矩阵的特征值.)

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, 则

1. 若 A 可逆, 则 A^{-1} 特征值是 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$;
2. A^* 特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中任意 $n-1$ 个的积.

♡

证明 设 A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0.$$

1. 若 A 可逆, 则

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1E\right).$$

代入 A 的特征值易知 A^{-1} 特征值.

2. 若 A 可逆, 由命题21.11知 A 满足(21.10). 故容易看到将 λ_i 代入 $(-1)^{n-1}\left(\lambda^{n-1}+a_{n-1}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1E\right)$

得到

$$\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda_i}, i=1,2,\cdots,n.$$

于是 A^* 的特征多项式形如

$$(-1)^{n-1}\left(\lambda-\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_2\cdots\lambda_n\right).$$

现在对一般的 A, 考虑 $t\to 0$ 使得 $A+tE$ 可逆, 则 $(A+tE)^*$ 的特征多项式将逐点收敛到[7] $A+tE$ 的特征多项式且 $(A+tE)^*$ 的特征多项式为

$$\left(\lambda-(\lambda_1+t)\cdots(\lambda_{n-1}+t)\right)\cdots\left(\lambda-(\lambda_2+t)\cdots(\lambda_n+t)\right),$$

让 $t\to 0$ 知 A^* 的特征多项式形如

$$\left(\lambda-\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_2\cdots\lambda_n\right).$$

我们完成了证明.

例题 21.9 设 $\mathbb{F}\subset\mathbb{K}$ 都是数域, 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两族 n 阶矩阵. 若存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}A_\alpha P=B_\alpha,\forall\alpha\in\Lambda,$$

证明存在可逆矩阵 $Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$Q^{-1}A_\alpha Q=B_\alpha,\forall\alpha\in\Lambda.$$

证明 定义

$$U_{\mathbb{F},\alpha}\triangleq\left\{X\in\mathbb{F}^{n\times n}:A_\alpha X=XB_\alpha,\right\},\alpha\in\Lambda,U_{\mathbb{F}}\triangleq\bigcap_{\alpha\in\Lambda}U_{\mathbb{F},\alpha};$$

$$U_{\mathbb{K},\alpha}\triangleq\left\{X\in\mathbb{K}^{n\times n}:A_\alpha X=XB_\alpha,\right\},\alpha\in\Lambda,U_{\mathbb{K}}\triangleq\bigcap_{\alpha\in\Lambda}U_{\mathbb{K},\alpha}.$$

由例题23.24, 我们知道存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$ 使得

$$U_{\mathbb{F}}=\bigcap_{i=1}^{n}U_{\mathbb{F},\alpha_i},U_{\mathbb{K}}=\bigcap_{i=1}^{n}U_{\mathbb{K},\alpha_i}.$$

注意到 $U_{\mathbb{F}},U_{\mathbb{K}}$ 可以视为线性方程组的解空间, 所以维数不随域扩张而改变且存在

$$X_1,X_2,\cdots,X_s\in U_{\mathbb{F}}$$

是 $U_{\mathbb{F}}$ 和 $U_{\mathbb{K}}$ 的基.

注意到

$$f\left(t_1,t_2,\cdots,t_s\right)\triangleq\left|t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_sX_s\right|,\left(t_1,t_2,\cdots,t_s\right)$$

是 $\mathbb{K}$ 上非 0 多项式, 因此也是 $\mathbb{F}$ 上非 0 多项式. 现在存在 $\left(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0\right)\in\mathbb{F}$ 使得

$$f\left(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0\right)\neq 0,$$

即

$$Q\triangleq t_1^0X_1+t_2^0X_2+\cdots+t_s^0X_s\in\mathbb{F}^{n\times n}$$

为所求满足

$$Q^{-1}A_\alpha Q=B_\alpha,\forall\alpha\in\Lambda$$

的矩阵.

[7] 注意特征多项式的系数是矩阵元素的连续函数.

命题 21.13 (最简单的同时合同对角化)

设 B 实 n 阶对称矩阵, A 是实 n 阶正定矩阵, 则存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$$C^TAC=E, C^TBC=\operatorname{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}, b_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n.$$

♠

证明 先取可逆矩阵 $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $D^TAD=E$. 设正交矩阵 $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$T^TD^TBDT=\operatorname{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}.$$

于是我们知道 $C=DT\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为所求.

命题 21.14 (Fischer 不等式)

设 $A\in\mathbb{R}^{p\times p}, C\in\mathbb{R}^{q\times q}$, 考虑半正定矩阵 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & C\end{pmatrix}$, 则

$$\det M\leqslant\det A\cdot\det C.$$

♠

证明 因为 M 半正定, 所以所有主子式非负, 因此 A,C 半正定. 考虑 $M+tI_{p+q}, A+tI_p, B+tI_q, t>0$ 并让 $t\to0^+$ 可以不妨设 A,C 都是正定的.

利用正定矩阵存在正定平方根[8]注意到

$$W=\begin{pmatrix}A^{-\frac12} & 0\\ 0 & C^{-\frac12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B^T & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-\frac12} & 0\\ 0 & C^{-\frac12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_p & A^{-\frac12}BC^{-\frac12}\\ C^{-\frac12}B^TA^{-\frac12} & I_q\end{pmatrix},$$

对特征值用均值不等式我们有

$$\frac{\det M}{\det A\cdot\det C}=\det W\leqslant\left(\frac{\operatorname{tr}(W)}{p+q}\right)^{p+q}=1,$$

现在就有

$$\det M\leqslant\det A\cdot\det C.$$

例题 21.10 半正定矩阵的行列式小于等于对角线的积

1. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵, 则 $\det A$ 小于等于 A 的对角线的积.
2. 设实数域上的 n 级矩阵 $A=(B,C), B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 则

$$|A|^2\leqslant\left|B^TB\right|\cdot\left|C^TC\right|.$$

证明

1. 不妨设 $A=(aij)$ 正定, 否则考虑 $A+tE, t>0$ 且让 $t\to0$ 即可.

   当 $n=1$ 命题显然成立, 假定命题对 $n-1$ 成立, 对 n 时, 注意到下述保持合同的初等变换

   $$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix},$$

   这里考虑顺序主子式知 A_{n-1} 是正定矩阵. 我们知道

   $$\det A=\det\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}=\det A_{n-1}\cdot\left(a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\right)\leqslant a_{nn}\det A_{n-1},$$

   由归纳假设即得

   $$\det A\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 和第一问想法一致, 本题不过是分块对角版本. 注意到

   $$|A|^2=\left|A^TA\right|=\left|\begin{pmatrix}B^T\\ C^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & C\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}B^TB & B^TC\\ C^TB & C^TC\end{vmatrix}.$$

[8] 正交相似对角化之后把对角线开方就得到构造.

由 Fischer 不等式21.14得

$$|A|^2 \leqslant |B^TB| \cdot |C^TC|.$$

推论 21.3 (哈达马不等式)

1. 设 $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则有

$$\sqrt{\det(A^TA)} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\det(AA^T)} \leqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

特别的, 当 $m=n$ 就有

$$|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2\right)^{\frac{1}{2}}, |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. 设 $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\sqrt{\det(A^*A)} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} |a_{ki}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\det(AA^*)} \leqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

特别的, 当 $m=n$ 就有

$$|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

♡

证明

1. 利用例题21.10即得.
2. 利用例题21.10的复版本即得.

定理 21.7 (舒尔不等式 ♠)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2, \tag{21.11}$$

且等号成立条件当且仅当 A 是复正规矩阵, 即 $AA^*=A^*A$.

♡

注非数学类只掌握 A 为实矩阵的情况, 此时 $A^*=A^T$.

证明 注意到(21.11)右边是 $\mathrm{tr}(AA^*)$, 其不随着酉相似而改变, 左边是特征值, 当然也不随酉相似而改变. 由每个复矩阵都可以酉相似上三角化23.3, 我们知道可不妨设 A 为上三角矩阵, 其对角线恰为其特征值. 现在显然有

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2,$$

且等号成立条件是 A 除对角线外都是 0. 现在我们得到了(21.11)且等号成立条件当且仅当 A 是复正规矩阵.

我们来看主对角占优的理论.

定理 21.8 (主对角占优定理)

设数域上的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$ 满足

$$s \leqslant n, |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, i=1,2,\cdots,s. \tag{21.12}$$

证明 A 行满秩.

♡

证明 设 $A=\begin{pmatrix}A_s & B\end{pmatrix}$，这里 A_s 是 s 阶矩阵. 然后考虑 $\begin{pmatrix}A_s & B\\ 0 & E\end{pmatrix}$，它仍然是主对角占优的. 于是我们只需断言 $n=s$ 的情况.

设不全为 0 的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n}c_ja_{ij}=0,i=1,2,\cdots,n.$$

假设 $|c_{j_0}|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|c_j|>0,1\leqslant j_0\leqslant n$，则

$$a_{j_0j_0}=-\sum_{j\neq j_0}\frac{c_j}{c_{j_0}}a_{j_0j}\Rightarrow|a_{j_0j_0}|\leqslant\sum_{j\neq j_0}\left|\frac{c_j}{c_{j_0}}a_{j_0j}\right|\leqslant\sum_{j\neq j_0}|a_{j_0j}|,$$

这和(21.12)矛盾! 于是我们证明了 A 列向量组线性无关，从而行向量组也线性无关. 我们完成了证明.

当然我们有更初等的形式:

推论 21.4

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的元素为 (a_{ij})，则

1. 若 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$，则 $\det A\neq0$;
2. 若 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$，则 $\det A>0$.

证明

1. 这就是定理21.8的特殊情况.
2. 我们采用一点简单的摄动思想，考虑 $f(t)=|tI_n+A|$，则 $tI_n+A,t\geqslant0$ 仍然满足题目条件，因此 $|tI_n+A|\neq0,\forall t\geqslant0$. 但是 f 是首 1 多项式，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$，从而由介值性知当 $t=0$ 必有 $\det A>0$.

来看瑞丽商

命题 21.15 (瑞丽商)

设 A,B 是 n 阶实对称矩阵，则有

$$\min_{x\neq0}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\lambda_{\min}(A),\max_{x\neq0}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\lambda_{\max}(A).\tag{21.13}$$

以及

$$\lambda_{\min}(A)+\lambda_{\min}(B)\leqslant\lambda(A+B)\leqslant\lambda_{\max}(A)+\lambda_{\max}(B).\tag{21.14}$$

笔记 这里 $\lambda_{\max}$ 表示最大特征值，$\lambda_{\min}$ 表示最小特征值，λ 表示任一特征值.

证明 设 T 是实 n 阶正交矩阵使得

$$T^TAT=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}.\tag{21.15}$$

于是对 $x\neq0$，就有

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{y^TT^TATy}{y^TT^TTy}=\frac{y^TT^TATy}{y^Ty}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}\begin{cases}\leqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}\lambda_{\max}(A)\\ \geqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}\lambda_{\min}(A)\end{cases}.$$

这就证明了(21.13).

此外运用基本不等式知

$$\min_{x\neq0}\frac{x^TAx}{x^Tx}+\min_{x\neq0}\frac{x^TBx}{x^Tx}\leqslant\min_{x\neq0}\frac{x^T(A+B)x}{x^Tx}\leqslant\max_{x\neq0}\frac{x^T(A+B)x}{x^Tx}\leqslant\max_{x\neq0}\frac{x^TAx}{x^Tx}+\max_{x\neq0}\frac{x^TBx}{x^Tx},$$

于是由(21.13)知

$$\lambda_{\min}(A)+\lambda_{\min}(B)\leqslant\lambda_{\min}(A+B)\leqslant\lambda_{\max}(A+B)\leqslant\lambda_{\max}(A)+\lambda_{\max}(B),$$

这就证明了(21.14).

来看瑞丽商的一般推广.

定理 21.9 (♠Courant-Fischer 的 Hermite 特征值极大极小原理)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵,

$$\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$$

是 A 的特征值, 则对 $k=1,2,\cdots,n$ 成立

$$\lambda_k(A)=\max_{S\subset\mathbb{C}^n,\dim S=k}\min_{x\in S,||x||=1}x^*Ax=\min_{S\subset\mathbb{C}^n,\dim S=n-k+1}\max_{x\in S,||x||=1}x^*Ax,\tag{21.16}$$

这里 S 是子空间.

♡

笔记 本结果自然类似有实对称矩阵的版本.

证明 设 $\lambda_j\triangleq\lambda_j(A),j=1,2,\cdots,n$, 考虑 $-A$ 我们只需证明(21.16)中第一个等号. 设标准正交向量组 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是从属于 A 特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量.

对子空间 $S\subset\mathbb{C}^n,\dim S=k$, 我们有

$$\dim S+\dim\operatorname{span}\{u_k,u_{k+1},\cdots,u_n\}=n+1\Rightarrow S\bigcap\operatorname{span}\{u_k,u_{k+1},\cdots,u_n\}\neq\{0\},$$

于是可取 $x=\sum\limits_{j=k}^{n}c_ju_j\in S$ 使得 $\sum\limits_{j=k}^{n}|c_j|^2=1$. 现在

$$x^*Ax=\left(\sum_{j=k}^{n}c_j\lambda_ju_j,\sum_{j=k}^{n}c_ju_j\right)=\sum_{j=k}^{n}|c_j|^2\lambda_j\leqslant\sum_{j=k}^{n}|c_j|^2\lambda_k=\lambda_k,$$

即

$$\max_{S\subset\mathbb{C}^n,\dim S=k}\min_{x\in S,||x||=1}x^*Ax\leqslant\lambda_k.\tag{21.17}$$

取 $S_0=\operatorname{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$ 和 $x=\sum\limits_{j=1}^{k}c_ju_j\in S_0$, 我们有

$$x^*Ax=\sum_{j=1}^{k}|c_j|^2\lambda_j.$$

容易看到

$$\min_{\sum\limits_{j=1}^{k}|c_j|^2=1}\sum_{j=1}^{k}|c_j|^2\lambda_j=\lambda_k.$$

于是我们结合(21.17)即得(21.16).

定理 21.10 (Cauchy 交错定理)

设 Hermite 矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$. B 是 A 的任意 m 阶主子式, 其特征值为

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_m.$$

证明:

$$\lambda_j\geqslant\mu_j\geqslant\lambda_{j+n-m},j=1,2,\cdots,m.\tag{21.18}$$

♡

笔记 当 $m=n-1$, 式(21.18)变成

$$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant\lambda_2\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\lambda_n.$$

证明 同时交换行列可以不妨设主子式为左上角的 m 阶主子式, 设

$$A=\begin{pmatrix}B & C\\ C^* & D\end{pmatrix}, B\in\mathbb{C}^{k\times k}.$$

由极大极小原理21.9, 对每一个 $1\leqslant j\leqslant m$, 存在子空间 $S\subset\mathbb{C}^m$ 使得

$$\dim S=j, \mu_j=\min_{x\in S,||x||=1} x^*Bx.$$

考虑

$$\widetilde{S}\triangleq\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}:x\in S\right\},$$

我们有

$$\begin{pmatrix}x^* & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=x^*Bx.$$

于是

$$\mu_j=\min_{x\in S,||x||=1}x^*Bx=\min_{\widetilde{x}\in\widetilde{S},||\widetilde{x}||=1}\widetilde{x}^*A\widetilde{x}\leqslant\max_{T\subset\mathbb{C}^n,\dim=j}\min_{\widetilde{x}\in T,||\widetilde{x}||=1}\widetilde{x}^*A\widetilde{x}=\lambda_j.$$

对 $-A,-B$ 用此结论, 我们有

$$-\lambda_{j+n-m}\geqslant-\mu_j\Rightarrow\mu_j\geqslant\lambda_{j+n-m}, j=1,2,\cdots,m.$$

现在我们证明了(21.18).

例题 21.11 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵, 证明

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(B), \forall k=1,2,\cdots,n,$$

这里

$$\lambda_1(\cdot)\geqslant\lambda_2(\cdot)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\cdot)$$

表示矩阵的所有特征值.

证明 对 $k=1,2,\cdots,n$, 我们首先证明

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A)=\max_{U\in\mathbb{C}^{n\times k},U^*U=I_k}\operatorname{tr}(U^*AU). \tag{21.19}$$

设 $U\in\mathbb{C}^{n\times k}, U^*U=I_k$, 考虑 $(U,V)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵. 注意到 U^*AU 是 $(U,V)^*A(U,V)$ 的主子矩阵. 由 Cauchy 交错定理21.10得

$$\operatorname{tr}(U^*AU)\leqslant\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left((U,V)^*A(U,V)\right)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A).$$

再取酉矩阵 $(U,V)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$(U,V)^*A(U,V)=\operatorname{diag}\{\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)\}, U\in\mathbb{C}^{n\times k}.$$

一个直接的计算表明

$$U^*U=I_k,\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A)=\operatorname{tr}(U^*AU),$$

这就证明了(21.19).

现在对 $k=1,2,\cdots,n$, 运用(21.19)得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A+B)&=\max_{U\in\mathbb{C}^{n\times k},U^*U=I_k}\operatorname{tr}\left(U^*(A+B)U\right)\\&\leqslant\max_{U\in\mathbb{C}^{n\times k},U^*U=I_k}\operatorname{tr}\left(U^*AU\right)+\max_{U\in\mathbb{C}^{n\times k},U^*U=I_k}\operatorname{tr}\left(U^*BU\right)\\&=\sum_{j=1}^{k}\left[\lambda_j(A)+\lambda_j(B)\right],\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 21.12 设 $A,B,C,D\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $AC=CA$, 则

$$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

证明 不妨设 A 可逆, 否则用 $A+\lambda E_n$ 和行列式的连续性摄动即可.

我们直接初等变换 $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$, 于是写出分块初等矩阵即可发现

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}&=\det\begin{pmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}=\det A\cdot\det\left(D-CA^{-1}B\right)\\&=\det\left(AD-ACA^{-1}B\right)=\det\left(AD-CAA^{-1}B\right)=\det\left(AD-CB\right).\end{aligned}$$

命题 21.16

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则

1. 若 A 是反对称矩阵, 则 A 的特征值是 0 或者纯虚数.
2. 若 A 是正交矩阵, 则 A 的特征值的模长都为 1.

♠

证明

1. 设 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\lambda\in\mathbb{C}$, 则

$$\alpha^*A^*=\overline{\lambda}\alpha^*\Rightarrow-\alpha^*A\alpha=\overline{\lambda}\alpha^*\alpha=-\lambda\alpha^*\alpha.$$

即

$$\lambda\in0\bigcup\{bi:b\in\mathbb{R}\}.$$

2. 设 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\lambda\in\mathbb{C}$, 则

$$\alpha^*\alpha=\alpha^*A^*A\alpha\Rightarrow|\lambda|^2\alpha^*\alpha=\alpha^*\alpha\Rightarrow|\lambda|=1.$$

定理 21.11 (cauchy 行列式)

设 n 阶矩阵 $A=\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)$, 这里 $a_i,b_j\in\mathbb{C},a_i+b_j\neq0,\forall i,j=1,2,\cdots,n$. 则

$$\det A=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.$$

♡

笔记 本结果如果不是直接证明结论本身一般是可以直接使用的[9], 因此要求记忆. 此外一个证明可以参考.

[9]即使不能直接使用, 你可以在考场上装模作样的计算, 但实则背出计算结果.

引理 21.1

设 A,B 是实 n 阶 (半) 正定矩阵,

1. 则 AB 特征值为 (非负) 正.
2. 则 AB 也是 (半) 正定的充要条件是 $AB=BA$.

♡

证明

1. 对于正定的情况, 设可逆实矩阵 P 使得 $A=P^TP$, 则
$$\left(P^T\right)^{-1}ABP^T=\left(P^T\right)^{-1}P^TPBP^T=PBP^T\cong B.$$
故由 B 正定知 PBP^T 正定, 从而特征值都是正数. 现在就知道 AB 特征值都是正数.
♠对于半正定的情况, 由正定的情况知道 $(A+\lambda E)(B+\lambda E)$ 在 $\lambda>0$ 特征值都是正数. 故由特征值是矩阵元的连续函数23.38, 我们知道如果 AB 有不是非负数的特征值 $a\in\mathbb{C}$, 我们可取 a 的小邻域使得此邻域和 $[0,+\infty)$ 无交, 这就是一个矛盾! 于是我们证明了 AB 特征值非负.
2. 当 $AB=BA$, 我们知道 AB 对称, 故由第一问知道 AB 是 (半) 正定矩阵. 反之若 AB 是 (半) 正定的, 则
$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA,$$
这就完成了证明.

定义 21.5 (Gram 矩阵定义)

设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是欧式空间 V 中的 m 个向量, 我们称矩阵
$$G=\operatorname{Gram}(v_1,v_2,\cdots,v_m)=((v_i,v_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$
是 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 的 Gram 矩阵.

♣

定理 21.12

在定义21.5叙述下, G 是半正定矩阵且 G 正定的充要条件是 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关.

♡

证明 注意到恒等式
$$x^TGx=\left(\sum_{i=1}^m x_iv_i,\sum_{i=1}^m x_iv_i\right),x\in\mathbb{R}^m. \tag{21.20}$$
于是从(21.20)看到 G 半正定, 且 G 正定的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^m x_iv_i=0\Leftrightarrow x=0$, 即 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关.

21.2 非数学类决赛线性代数训练集

例题 21.13 设 A_1,A_2,B_1,B_2 是 n 阶矩阵且 A_1,B_1 可逆. 证明:$A_1^{-1}A_2\sim B_1^{-1}B_2$ 的充要条件是存在可逆 n 阶矩阵 P,Q 使得
$$PA_iQ=B_i,i=1,2.$$

证明 充分性: 若存在可逆 n 阶矩阵 P,Q 使得
$$PA_iQ=B_i,i=1,2,$$
则
$$A_1^{-1}A_2=QB_1^{-1}P\cdot P^{-1}B_2Q^{-1}=QB_1^{-1}B_2Q^{-1}\sim B_1^{-1}B_2.$$
必要性: 若 $A_1^{-1}A_2\sim B_1^{-1}B_2$, 设可逆 n 阶矩阵 Q 使得
$$A_1^{-1}A_2=QB_1^{-1}B_2Q^{-1}.$$

再取 n 阶可逆矩阵 $P=B_1Q^{-1}A_1^{-1}$, 于是

$$PA_1Q=B_1, PA_2Q=B_1Q^{-1}A_1^{-1}A_2Q=B_1Q^{-1}QB_1^{-1}B_2Q^{-1}Q=B_2,$$

这就完成了证明.

例题 21.14 考虑分块对角矩阵 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 其中 A 是 r 阶矩阵, M 的秩为 r 且满足

$$r\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=r.$$

证明 A 是可逆矩阵.

笔记 读者应当熟悉线性方程组的解的存在性和向量组线性表出的基本结论, 即考虑矩阵乘法定义有

1. 矩阵 A 列向量组可以被矩阵 B 列向量组线性表出的充要条件是存在矩阵 X 成立 $A=BX$;
2. 矩阵 A 行向量组可以被矩阵 B 行向量组线性表出的充要条件是存在矩阵 X 成立 $A=XB$.

证明 由 $r(M)=r\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=r$ 知 $\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}$ 行向量组可以线性表出 $\begin{pmatrix}C & D\end{pmatrix}$ 行向量组, 从而 A 行向量组可以线性表出 C 行向量组. 现在矩阵方程 $XA=C$ 有解, 由秩和线性方程组的关系得

$$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}=r,$$

即 A 可逆.

第十届决赛真题

例题 21.15 设 A 为 n 阶方阵且 $A^2=0, \operatorname{rank}(A)=r, 1\leqslant r<\frac{n}{2}$, 证明 $A\sim\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

证明 我们只需要分别计算 A 和 $\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型即可. 事实上, $Ax=0$ 解空间维数 $n-r$, 故 0 特征值对应的 Jordan 块块数为 $n-r$ 个. 又 $A^2=0$, 所以 A 的特征值全为 0 且 A 的 Jordan 块只有 1 阶和 2 阶. 假设 s 个 1 阶, t 个二阶, 则 $s+t=n-r, 2t+s=n$, 故有 $t=r, s=n-2r>0$. 于是满足题目 A 性质的 Jordan 标准型是唯一确定的. 显然 $\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 也满足 A 满足的性质, 因此我们证明了 $A\sim\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

例题 21.16 设 n 为奇数, 证明行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2\\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n\end{vmatrix}$$

不为 0.

笔记 行列式 $\bmod p$ 技巧, 基本固定套路, 应该练成肌肉反应. 行列式是元素的多元多项式操作, 因此求余数也会保持.

证明 我们将行列式 D 的元素 $\bmod 2$, 因为 $(n+1)^n$ 是偶数, 所以

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & 0\\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ n^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

这个行列式当然就是对角线之积 $n\cdot n^2\cdot\cdots\cdot n^n$ 且至多差个符号, 当然还是奇数, 因此行列式 D 也是奇数, 所以 D 不为 0. 证毕!

来看一个用 tr 证明矩阵恒等的例题.

例题 21.17 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 若 $\operatorname{tr}\left(A^TA\right)=0$, 则 $A=0$.

笔记 显然对于 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 把转置改成共轭转置之后这个结果也是对的.

证明 设 $A=(a_{ij})$, 则由 $\operatorname{tr}\left(A^TA\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ki}^2=0$ 知 $A=0$.

例题 21.18 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^TA=A^2$ 或者 $AA^T=A^2$, 证明 A 是实对称矩阵.

证明 对于 $A^TA=A^2$, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\left(A^T-A\right)\left(A-A^T\right)\right)&=\operatorname{tr}\left(A^TA-\left(A^T\right)^2-A^2+AA^T\right)\\&=\operatorname{tr}\left(A^TA-(A)^2-A^2+A^TA\right)=0,\end{aligned}$$

于是由例题21.17知 A 是实对称矩阵. 对于 $AA^T=A^2$ 是类似的. 我们完成了证明.

例题 21.19 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, 证明: 对 $m=2,3$ 有

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^m\right)\geqslant\operatorname{tr}\left(A^m\right)+\operatorname{tr}\left(B^m\right).\tag{21.21}$$

证明 因为 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$, 我们有

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^m\right)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\operatorname{tr}\left(A^kB^{m-k}\right).$$

由引理21.1知两个正定矩阵之积特征值为正数, 故其 tr 为特征值之和是正数. 然后[10]

$$\sum_{k=0}^{m}C_m^k\operatorname{tr}\left(A^kB^{m-k}\right)\geqslant C_m^m\operatorname{tr}\left(A^mB^{m-m}\right)+C_m^0\operatorname{tr}\left(A^0B^{m-0}\right)=\operatorname{tr}\left(A^m\right)+\operatorname{tr}\left(B^m\right),$$

这就完成了证明.

例题 21.20 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, 证明: 对任何 $\alpha\in(0,1)$ 有

$$\ln\left(|\alpha A+(1-\alpha)B|\right)\geqslant\alpha\ln|A|+(1-\alpha)\ln|B|.$$

证明 由命题21.13得可逆矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$C^TAC=E_n,C^TBC=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\},\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

因此

$$\begin{aligned}&\ln\left(|\alpha A+(1-\alpha)B|\right)\geqslant\alpha\ln|A|+(1-\alpha)\ln|B|\\&\Leftrightarrow\ln\left(|\alpha A+(1-\alpha)B|\right)+\ln|C|^2\geqslant\alpha\ln|A|+(1-\alpha)\ln|B|+\ln|C|^2\\&\Leftrightarrow\ln\left(\left|\alpha C^TAC+(1-\alpha)C^TBC\right|\right)\geqslant\alpha\ln\left|C^TAC\right|+(1-\alpha)\ln\left|C^TBC\right|\\&\Leftrightarrow\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\alpha+(1-\alpha)\lambda_i\right)\right)\geqslant(1-\alpha)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\\&\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\alpha+(1-\alpha)\lambda_i\right)\geqslant(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i.\end{aligned}$$

由 ln 的上凸性, 我们有

$$\ln\left(\alpha+(1-\alpha)x\right)\geqslant\alpha\ln1+(1-\alpha)\ln x,\forall x>0,$$

从而有

$$\ln\left(|\alpha A+(1-\alpha)B|\right)\geqslant\alpha\ln|A|+(1-\alpha)\ln|B|.$$

[10]注意这个等式只在 $m=2,3$ 成立, $m>3$ 未必成立, 因为会有

$$\operatorname{tr}(ABAB)\neq\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right).$$

例题 21.21 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $AB=BA$, 证明

$$r(A)+r(B)\geqslant r(A+B)+r(AB),\tag{21.22}$$

笔记 注意到虽然分块矩阵的初等变换中的倍乘变换的倍乘的矩阵需要可逆, 但如果倍乘的矩阵不可逆, 此时的变换仍然可以用分块初等矩阵写出来, 因此秩可能变小.

注[♠] 借用空间的语言能得到更简洁的证明和更强的结果, 见132..

证明 注意到

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&B\\0&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+B&B\\B&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+B&B\\-A&0\end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{退化}}{\to}\begin{pmatrix}A+B&B(A+B)\\-A&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&(A+B)B\\-A&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+B&0\\-A&AB\end{pmatrix},$$

于是

$$r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\geqslant r\begin{pmatrix}A+B&0\\-A&AB\end{pmatrix}\overset{\text{经典秩不等式第三条21.6}}{\geqslant} r\begin{pmatrix}A+B&0\\0&AB\end{pmatrix}=r(A+B)+r(AB),$$

这就证明了不等式(21.22).

例题 21.22 设 A,B,C 都是使得下述运算有意义的矩阵, 证明

$$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B).\tag{21.23}$$

证明 注意到

$$\begin{pmatrix}ABC&0\\0&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}ABC&0\\BC&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-AB\\BC&B\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}-AB&0\\B&BC\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}AB&0\\B&BC\end{pmatrix},$$

于是利用定理21.6第三条, 我们有

$$r\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\geqslant r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B),$$

这就证明了不等式(21.23).

第 21 章 练习

1. (1.) 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都是正定矩阵, 证明
$$\det A\cdot\det B\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}b_{ij}}{n}\right)^n.$$
2. (2.) 设 A,B 都是 n 级实对称矩阵, 若 B 正定, 证明
$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}=\lambda_{\max}\left(AB^{-1}\right).\tag{21.24}$$
这里 $\lambda_{\max}$ 表示最大特征值.
3. (3.) 设方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$, 求 $B=A^3+A^2$ 的逆矩阵.
4. (4.) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且
$$x_i>0,a_{ij}=\frac{x_i}{x_j},\forall i,j=1,2,\cdots,n.$$
求 A 全部非 0 特征值.

5. (5.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 n 阶实对称的幂等矩阵. 若 $C=A-B$ 是半正定的且 $\operatorname{rank}(A)<n$, 证明: $AB=BA$ 且 C 为幂等矩阵.
6. (6.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定的. 证明:
$$\sqrt[n]{\det(A+B)}\geqslant\sqrt[n]{\det A}+\sqrt[n]{\det B}. \tag{21.25}$$
并指出等号成立条件.
7. (7.) 设
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},A^*=\begin{pmatrix}a_{11}^2&a_{12}^2&a_{13}^2\\a_{21}^2&a_{22}^2&a_{23}^2\\a_{31}^2&a_{32}^2&a_{33}^2\end{pmatrix},$$
这里 A^* 是 A 的伴随矩阵. 证明: 若 A 是实数域上不可逆矩阵, 则 $A=0$.
8. (8.)
设 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $r(A)+r(B)+r(C)=r(ABC)+2n$. 给出下列结论:
$$1:r(ABC)+n=r(AB)+r(C);$$
$$2:r(AB)+n=r(A)+r(B);$$
$$3:r(A)=r(B)=r(C)=n;$$
$$4:r(AB)=r(BC)=n.$$
正确的是?
9. (9.) 设 3 阶矩阵 A,B 满足 $r(AB)=r(BA)+1$, 证明: 线性方程组 $ABAx=0,BABx=0$ 有公共非 0 解.
10. (10.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 且 $A+B,A+2B,A+3B,A+4B$ 都是幂零矩阵. 证明: A,B 都是幂零矩阵.
11. (11.) 设 $n\geqslant2$, 是否存在 n 阶实矩阵 A,B 使得 AB 可对角化但是 BA 不可对角化.
12. (12.) 设 A,B 是 n 阶实矩阵, 证明: 若 $M=\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}$ 可逆则 $A\pm B$ 可逆且计算 M^{-1}.
13. (13.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明
$$(m+1)r(A^2)\leqslant r(A^{m+2})+mr(A),\forall m\in\mathbb{N}. \tag{21.26}$$
14. (14.) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}^n$ 满足
$$|\alpha_i|,|\alpha_i-\alpha_j|\in\mathbb{Q},i,j=1,2,\cdots,n+1.$$
证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关.
15. (15.) 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$ 满足
$$\alpha\beta^T+\beta\gamma^T+\gamma\alpha^T=0.$$
求 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 可能最大秩.
16. (16.) 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得
$$(A+E)C=0,B(A^T-2E)=0,r(C)+r(B)=n.$$
证明 A 可相似对角化并求出 A 的相似标准型.
17. (17.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明:
$$r\left(\begin{pmatrix}A&BA\\0&A^TA\end{pmatrix}\right)=2r(A).$$
18. (18.) 设 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n},P\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 是正定矩阵, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. 证明:
$$0\leqslant\left|B^T\left(Q+BPB^T\right)^{-1}B\right|<\frac{1}{|P|}.$$
19. (19.) 设 $\mathbb{F}$ 是数域, $C\in\mathbb{F}^{m\times n},D\in\mathbb{F}^{n\times m}$. 若 E_m-CD 可逆, 则
$$(E_m-CD)^{-1}=E_m+C(E_n-DC)^{-1}D.$$

20. (20.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 满足

$$\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0.$$

证明:

$$\det(xA+yB) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

21. (21.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A^m = I_n, \operatorname{tr}(A) = n$. 证明:$A = I_n$.

第 22 章 非数学类微分方程

除了课本上的所有微分方程[1]都要牢记以外, 我们还要补充一些常见微分方程. 微分方程说到底就是背公式, 什么类型用什么解法. 稍微困难的题就是想办法转换成熟知的模型来求解. 微分方程一定牢记一切解法都是猜法, 猜出解之后再去验证发现的确是解, 然后再配合数学专业的解的存在唯一性定理来说明我们所求的微分方程的解的确是全部解. 当然非数学类无需要掌握存在唯一性定理. 微分方程算子法并无太大作用, 如果实在喜欢这个方法建议学习 Laplace 算子, 因为其更严谨, 更广泛适用.

内容提要

- 同济教材外微分方程解法模型 22.1
- 微分方程杂题 22.2
- 微分方程证明 22.3

22.1 同济教材外微分方程解法模型

22.1.1 黎卡提微分方程

形如 $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ 的方程叫做黎卡提微分方程, 这类方程必须先猜一个解 y_0, 然后做换元 $z=y-y_0$ 来转化为 Bernouli 方程.

例题 22.1 解微分方程

1. $y'=-e^xy^2+2e^{2x}y+e^x-e^{3x}$;
2. $y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$.

1. 猜出 $y_0=e^x$ 是一个解, 做 $y=z+e^x$, 从而原方程变为 $z'=-z^2e^x$, 故分离变量计算得
$$z=\frac{1}{e^x+C}\Rightarrow y=\frac{1}{e^x+C}+e^x.$$
2. 猜出 $y_0=1$ 是一个解, 做 $y=z+1$, 从而原方程变为 $z'=-z+(x-1)z^2$. 解 Bernouli 方程得
$$z=\frac{1}{ce^x+x}\Rightarrow y=1+\frac{1}{ce^x+x}.$$

22.1.2 克莱罗微分方程

形如 $y=xy'+f(y')$ 的微分方程叫做克莱罗微分方程.

定理 22.1

克莱罗微分方程 $y=xy'+f(y')$ 的通解为 $y=Cx+f(C)$. 此外, 克莱罗微分方程还有一个奇解. ♡

笔记 无需记忆定理, 只需看下述例题的计算方法.

例题 22.2 求微分方程 $y=xy'+\frac{1}{y'}$ 的全部解.

证明 设 $p=y'$, 则在 $y=xp+\frac{1}{p}$ 两边对 x 求导得
$$p=p+xp'-\frac{p'}{p^2}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{p^2}\right)p'=0\Rightarrow p'=0\text{或者}x=\frac{1}{p^2}.$$
对于第一种情况, 相当于 $y''=0$, 此时 $y=Cx+b$. 带回原方程得
$$Cx+b=Cx+f(C)\Rightarrow b=f(C),$$

[1]例如欧拉方程, 齐次微分方程, 分离变量微分方程, Bernouli 微分方程, 一阶线性微分方程等. 可能课内没讲, 但一定要自学补上.

即通解为 $y=Cx+f(C)$. 此外还有一个奇解

$$\begin{cases} x=\frac{1}{p^2} \\ y=\frac{2}{p} \end{cases} \Rightarrow y^2=4x.$$

22.1.3 y 可以解出来的类型

对于 $y=f(x,y')$, 可令 $p=y'$, 两边对 x 求导之后就是 x,p 的微分方程.

例题 22.3 求 $y=(y')^2-xy'+\frac{x^2}{2}$ 的全部解.

证明 考虑 $p=y'$ 得

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2} \Rightarrow p=2pp'-p-xp'+x \Rightarrow 2p-x=(2p-x)p',$$

因此 $p'=1$或者$2p-x=0$.

对于 $p'=1$, 则 $y=\frac{x^2}{2}+ax+b$. 带回原方程得到 $b=a^2$, 即通解为 $y=\frac{x^2}{2}+ax+a^2$.

对于 $2p-x=0$, 则有奇解 $\begin{cases} x=2p \\ y=p^2 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{x^2}{4}$.

22.1.4 x 可以解出来的类型

对于 $x=f(y,y')$, 可令 $p=y'$, 两边对 y 求导之后就是 y,p 的微分方程.

例题 22.4 求 $(y')^3+2xy'-y=0$ 的通解.

证明 首先

$$x=\frac{y-(y')^3}{2y'}=\frac{y}{2p}-\frac{p^2}{2},$$

于是

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2p}+\frac{y}{2}\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dy}-p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}-p\frac{dp}{dy}.$$

又变形得

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}-p\frac{dp}{dy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dp}+\frac{y}{p}=-2p^2,$$

这是一阶线性微分方程, 解得 $y=\frac{c}{p}-\frac{p^3}{2}$, 于是

$$x=\frac{y}{2p}-\frac{p^2}{2}=\frac{c}{2p^2}-\frac{3}{4}p^2.$$

故所求通解为参数方程 $\begin{cases} x=\frac{c}{2p^2}-\frac{3}{4}p^2 \\ y=\frac{c}{p}-\frac{p^3}{2} \end{cases}$.

22.1.5 $F(x,y')=0, F(y,y')=0$ 的类型

例题 22.5 求微分方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$ 的通解.

注注意通解并非全部解.

证明 设 $2-y'=ty$, 则

$$t^2=ty-1 \Rightarrow y=\frac{1+t^2}{t}, y'=1-t^2.$$

于是

$$1-t^2=y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{1+t^2}{t}\right)'}{x'(t)} \Rightarrow x'(t)=-\frac{1}{t^2} \Rightarrow x(t)=\frac{1}{t}+C,$$

即

$$\begin{cases} x=\frac{1}{t}+C \\ y=\frac{1+t^2}{t} \end{cases} \Rightarrow y=x-C+\frac{1}{x-C}.$$

例题 22.6 求微分方程 $x^3+(y')^3=3xy'$ 的通解.

证明 考虑 $x=ty'$, 则 $y'=\frac{3t}{1+t^3}, x=\frac{3t^2}{1+t^3}$. 于是

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{3t}{1+t^3}\cdot\left(\frac{3t^2}{1+t^3}\right)' \Rightarrow y=\frac{3}{2}\frac{2t^3-1}{(t^3+1)^2}+C,$$

即得参数方程形式的通解

$$\begin{cases} x=\frac{3t^2}{1+t^3} \\ y=\frac{3}{2}\frac{2t^3-1}{(1+t^3)^2}+C \end{cases}.$$

22.1.6 积分因子法

这个方法没啥特别大的作用.

定义 22.1

微分方程 $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ 如果存在 $r(x,y)$ 使得

$$r(x,y)M(x,y)\,dx+r(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

是全微分方程, 那么 $r(x,y)$ 叫做 $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ 的积分因子.

有许多方程的积分因子, 但个人认为没啥记忆的必要, 当作习题了解一下即可.

例题 22.7 求微分方程 $ydx+(y-x)\,dy=0$ 通解.

笔记 积分因子法只需要猜一个即可, 并不唯一.

证明 待定 μ 使得 $\frac{\partial(y\mu)}{\partial y}=\frac{\partial((y-x)\mu)}{\partial x}$, 即需要

$$y\mu_y+\mu=-\mu+\mu_x(y-x).$$

假定 μ 只和 y 有关, 那么

$$y\mu_y=-2\mu \Rightarrow \mu=\frac{1}{y^2}.$$

现在就可以求解全微分方程

$$\frac{1}{y}dx+\frac{y-x}{y^2}dy=d\left(\frac{x}{y}+\ln y\right)=0$$

得通解 $\frac{x}{y}+\ln y=C$.

22.1.7 特殊方法

来看一种关于 $y,y',y'',\cdots$ 的微分方程, 其方法就是记忆换元 $y=e^{\int z\mathrm{d}x}$.

例题 22.8 计算 $x^2yy''=(y-xy')^2$ 的通解.

笔记 考虑换元 $y=e^{\int z\mathrm{d}x}$, 则

$$y'=ze^{\int z\mathrm{d}x}, y''=\left(z'+z^2\right)e^{\int z\mathrm{d}x}. \tag{22.1}$$

证明 运用(22.1), 微分方程变为

$$x^2\left(z'+z^2\right)e^{\int 2z\mathrm{d}x}=(1-xz)^2e^{\int 2z\mathrm{d}x},$$

即

$$x^2z'=1-2xz \Rightarrow z=\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}.$$

故 $y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$.

来看分组积分的方法和猜法.

例题 22.9♠ 求微分方程 $\left(y^3+x\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+y\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

证明 注意到

$$\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)=xdx+ydy=-y^3dx-x^3dy,$$

于是

$$\frac{1}{x^3y^3}d\left(x^2+y^2\right)=-\frac{2}{x^3}dx-\frac{2}{y^3}dy=d\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right).$$

故考虑换元 $u=x^2+y^2,v=xy$, 则

$$\frac{du}{v^3}=d\left(\frac{u}{v^2}\right)\Rightarrow\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}=\frac{d\left(\frac{u}{v^2}\right)}{\left(\frac{u}{v^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow-2u^{-\frac{1}{2}}=-2\left(\frac{u}{v^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C,$$

即所求通解为

$$-2\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C.$$

例题 22.10♠ 解微分方程 $2x^4yy'+y^4=4x^6$.

笔记 注意到局部微分方程 $2yy'=0\Rightarrow y^2=c$, 猜测 $z=y^2$.

证明 考虑换元 $z=y^2$, 则方程变为 $x^4z'+z^2=4x^6$. 这是黎卡提微分方程, 猜解 $z=x^3$ 并做换元 $u=z+x^3$, 计算得 $y^2=\frac{x^8-4cx^3}{c+x^5}$ 为所求通解.

22.1.8 二阶微分方程

本节内容适用一般的高阶线性方程, 但实际上考试几乎不可能超过 2 阶. 因此我们主要以 2 阶为例, 其余高阶是类似的.

本节考虑方程

$$y''+a\left(x\right)y'+b\left(x\right)y=f\left(x\right).\tag{22.2}$$

定理 22.2 (常数变易法)

对于二阶变系数线性微分方程(22.2), 我们可以先求出齐次通解 $y\left(x\right)=c_1y_1\left(x\right)+c_2y_2\left(x\right)$, 然后把常数 c_1,c_2 改为[a] $c_1\left(x\right),c_2\left(x\right)$, 现在把

$$y\left(x\right)=c_1\left(x\right)y_1\left(x\right)+c_2\left(x\right)y_2\left(x\right).\tag{22.3}$$

代入原方程(22.2)并补充一个条件 $c_1'\left(x\right)y_1\left(x\right)+c_2'\left(x\right)y_2\left(x\right)=0$. 现在解出 $c_1\left(x\right),c_2\left(x\right)$ 就得到原微分方程的解(22.3).

[a] 正如开篇所说, 一切微分方程的解法都是猜法, 所以无需逻辑, 只需记忆方法.

例题 22.11

1. 求微分方程 $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ 通解;
2. 求微分方程 $y''+y'-2y=\frac{e^x}{1+e^x}$.

证明

1. 先求出齐次通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$, 然后利用常数变易法22.2, 我们考虑

$$y\left(x\right)=c_1\left(x\right)\cos x+c_2\left(x\right)\sin x.\tag{22.4}$$

补充

$$c_1'\cos x+c_2'\sin x=0.\tag{22.5}$$

将(22.4),(22.5)代入原方程得

$$y''+y=-c_1'\sin x+c_2'\cos x=\frac{1}{\cos x}.$$

也即考虑方程组

$$\begin{cases}c_1'\cos x+c_2'\sin x=0\\-c_1'\sin x+c_2'\cos x=\frac{1}{\cos x}\end{cases},$$

于是解方程得 $c_1'=-\tan x, c_2'=1$, 故

$$c_1=\ln|\cos x|+C_1, c_2=x+C_2.$$

因此通解为

$$y(x)=(\ln|\cos x|+C_1)\cos x+(x+C_2)\sin x.$$

2. 齐通 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^x$, 常数变易为

$$y=c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)e^x. \tag{22.6}$$

补充

$$c_1'e^{-2x}+c_2'e^x=0. \tag{22.7}$$

然后将(22.6),(22.7)代入原方程得

$$-2c_1'e^{-2x}+c_2'e^x=\frac{e^x}{1+e^x}.$$

也即考虑方程组

$$\begin{cases}-2c_1'e^{-2x}+c_2'e^x=\frac{e^x}{1+e^x}\\c_1'e^{-2x}+c_2'e^x=0\end{cases}.$$

解出 c_1', c_2' 并求原函数, 最后得到通解为

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^x+\frac{xe^x}{3}+\frac{e^{-x}}{3}-\frac{e^{-2x}}{3}\ln(1+e^x)-\frac{e^x}{3}\ln(1+e^x)-\frac{1}{6}.$$

可以看到常数变易是非常复杂的方法, 我们下面给出一种直接求特解的方法.

命题 22.1 (卷积特解法)

若(22.2)中 $a(x), b(x)$ 都是常数, 则我们可以算出其对应满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的齐次解 $g(x)$. 然后方程(22.2)的一个非齐次特解为 $\int_0^x g(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

证明 直接对 $\int_0^x g(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 用含参积分求导公式得其满足方程[2](22.2).

笔记 学习真题12.53.

对于一般的齐次[3]变系数二阶微分方程(22.2), 往往只能猜出一解, 然后用降次方法求另外一个解, 我们选用两个降次方法如下:

定理 22.3

1. 刘维尔公式: 已知一个非 0 特解 y_1, 则另外一个线性无关的的特解是 $y_1\int\frac{e^{\int(-a(t))\mathrm{d}t}}{y_1^2}\mathrm{d}x$.
2. 在方程中令 $u=\frac{y'}{y}$, 方程就会变为 1 阶黎卡提微分方程.

来看一个竞赛真题.

例题 22.12 计算 $y''-2xy'-2y=0$ 满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解.

证明 猜得 e^{x^2} 是一个非 0 解, 由刘维尔公式22.3我们知道 $e^{x^2}\int\frac{e^{\int 2t\mathrm{d}t}}{e^{2z^2}}\mathrm{d}z=\int e^{x^2-z^2}\mathrm{d}z$ 是另外一个和 e^{x^2} 线性无

[2]直接记就好, 别去浪费时间算了.

[3]即 $f=0$.

关的特解. 现在我们知道

$$y(x)=c_1e^{x^2}+c_2\int_0^x e^{x^2-z^2}\mathrm{d}z.$$

代入初值条件并利用含参积分求导公式得 $y(x)=\int_0^x e^{x^2-z^2}\mathrm{d}z$.

22.2 微分方程杂题

例题 22.13 求微分方程 $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$ 的通解.

证明 注意到

$$\frac{\partial\left(3x^2+6xy^2\right)}{\partial y}=12xy,\frac{\partial\left(6x^2y+4y^3\right)}{\partial x}=12xy,$$

即 $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$ 是全微分方程. 故对 $\left(3x^2+6xy^2\right)$ 的 x 求原函数应该为 $x^3+3x^2y^2+C(y)$. 对 y 求导之后应该有

$$6x^2y+C'(y)=6x^2y+4y^3\Rightarrow C(y)=y^4+C.$$

故我们所求通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

例题 22.14 求微分方程 $x\left(y'\right)^3=1+y'$ 的通解.

证明 这是 $F(x,y')=0$ 的类型. 注意到可设 $y'=t,x=\frac{1+t}{t^3}$, 则

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=y'=t\Rightarrow y'(t)=\left(\frac{1+t}{t^3}\right)'t=\frac{-2t-3}{t^3}.$$

求原函数得 $y(t)=\frac{4t+3}{2t^2}+C$, 故通解为参数方程的形式 $\begin{cases}x=\frac{1+t}{t^3}\\ y=\frac{4t+3}{2t^2}+C\end{cases}$.

例题 22.15 求微分方程 $y'=\frac{y^2+\sin x}{2y}$ 通解.

证明 这是 Bernouli 方程, 考虑 $z=y^2$, 于是有 $z'=z+\sin x$. 解得

$$z=ce^x-\frac{\sin x+\cos x}{2},$$

从而通解为

$$y^2=ce^x-\frac{\sin x+\cos x}{2}.$$

例题 22.16 求微分方程 $x^2+\left(y'\right)^2=1$ 的通解.

证明 这是最简单的微分方程, 我们直接解出 $y'=\pm\sqrt{1-x^2}$, 则

$$y=\pm\left(\frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)+C.$$

例题 22.17 求微分方程 $y''+\sin x\cdot y'+\frac{y}{4}\left(\sin^2x+2\cos x+4\right)=0$ 的通解.

证明 这是二阶变系数微分方程, 其基本想法是需要先猜一个特解. 我们可猜 $y_1=\sin xe^{\frac{1}{2}(\cos x-1)}$, 然后由刘维尔公式22.3知

$$\begin{aligned}y_2&=\sin xe^{\frac{1}{2}(\cos x-1)}\int\frac{e^{\int-\sin t\mathrm{d}t}}{\sin^2xe^{(\cos x-1)}}\mathrm{d}x\\&=e\sin xe^{\frac{1}{2}(\cos x-1)}\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x\\&=-\cos xe^{\frac{1}{2}(\cos x+1)},\end{aligned}$$

从而所求通解为

$$y=c_1\sin xe^{\frac{1}{2}(\cos x-1)}+c_2\cos xe^{\frac{1}{2}(\cos x+1)}.$$

例题 22.18 求微分方程 $(2x+2y-1)\,dx+(x+y-2)\,dy=0$ 的通解.

证明 考虑 $v=y+x$, 则

$$(2v-1)\,dx+(v-2)\,d(v-x)=0\Rightarrow(v+1)\,dx+(v-2)\,dv=0.$$

现在得到可分离变量的微分方程, 解得 $3\ln(1+v)-v=x+C$, 从而得通解

$$3\ln(1+y+x)-y=2x+C\Rightarrow(1+y+x)^3=C'e^{2x+y}.$$

例题 22.19 求微分方程 $xyy''-x(y')^2=yy'$ 的通解.

证明 考虑 $y=e^{\int z\mathrm{d}x}$, 则

$$y'=ze^{\int z\mathrm{d}x},y''=\left(z'+z^2\right)e^{\int z\mathrm{d}x}.$$

于是解得

$$x\left(z'+z^2\right)-xz^2=z\Rightarrow xz'=z\Rightarrow z=Cx\Rightarrow y=e^{C\int x\mathrm{d}x}=e^{C_1x^2+C_2}.$$

例题 22.20 求微分方程 $y'=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$ 的通解.

证明 这是一个齐次微分方程, 作换元 $y=ux$, 则得可分离变量微分方程 $u'x+u=\frac{u}{1-\sqrt{u}}$. 考虑微分方程 $\frac{dx}{du}=\frac{x}{\frac{u}{1-\sqrt{u}}-u}$, 解得 $x=\frac{C}{ue^{\frac{2}{\sqrt{u}}}}$, 即得通解 $ye^2\sqrt{\frac{x}{y}}=C$.

例题 22.21 求微分方程 $xy'-y=2x^2y\left(y^2-x^2\right)$ 的通解.

证明 考虑换元 $\left(x^2y=u\right)$, 则有 Bernouli 方程 $u'=\frac{3x^2-2x^6}{x^3}u+\frac{2u^3}{x^3}$. 解得

$$u^2=\frac{x^6}{1+ce^{x^4}}\Rightarrow y^2=\frac{x^2}{1+ce^{x^4}}.$$

例题 22.22 设微分方程 $\left(1+x^2\right)y''-2xy'-y\left(ax^2+bx+c\right)=0$ 有一个特解 $y=e^{-x}$, 求 a,b,c 和通解.

证明 代入特解得 $\left((1-a)x^2+(2-b)x+1-c\right)e^{-x}=0$. 于是我们有 $a=1,b=2,c=1$.

由刘维尔公式22.3得另外一个线性无关特解为

$$e^{-x}\int e^{2x+\int\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=e^{-x}\int\left(1+x^2\right)e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{e^x\left(2x^2-2x+3\right)}{4}.$$

现在我们就知道通解为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x\left(2x^2-2x+3\right).$$

例题 22.23 求微分方程 $x^2\left(y'+y^2\right)=2$ 的通解

证明 这仍然是黎卡提微分方程, 我们猜解 $y_0=\frac{2}{x}$ 并做换元 $z=y-\frac{2}{x}$ 得 Bernouli 方程

$$x^2\left(z'+\frac{2}{x^2}+z^2+\frac{4z}{x}\right)=2\Rightarrow z'+\frac{4z}{x}=-z^2.$$

于是解得通解为 $z=\frac{3}{x(cx^3-1)}$, 从而得 $y=\frac{3}{x(cx^3-1)}+\frac{2}{x}$.

例题 22.24 求微分方程 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ 的通解.

笔记 必先猜解或猜结构化简.

证明 考虑 $g(x)=\sqrt{x}y(x)$, 则代入方程得 $g''(x)+g(x)=0$. 解得 $g(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$, 即

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\cos x+c_2\sin x).$$

例题 22.25 求微分方程 $y''+y=\frac{1}{\sin^3 x}$ 的通解.

证明 齐次通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$. 使用常数变易法22.2, 考虑

$$\begin{cases}-c_1'\sin x+c_2'\cos x=\frac{1}{\sin^3 x}\\ c_1'\cos x+c_2'\sin x=0\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}c_1'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\\ c_2'(x)=\frac{\cos x}{\sin^3 x}\end{cases}$. 现在

$$c_1(x)=\cot x+C_1, c_2(x)=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_2,$$

于是得通解

$$y=(\cot x+C_1)\cos x+\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_2\right)\sin x.$$

例题 22.26 求微分方程 $\left(3y+4xy^2\right)dx+\left(4x+5x^2y\right)dy=0$ 的通解.

证明 注意到 $\left(\frac{3}{x}+4y\right)dx+\left(\frac{4}{y}+5x\right)dy=0$, 于是

$$\frac{d\ln\left(x^3y^4\right)}{xy}=-\frac{4}{x}dx-\frac{5}{y}dy=-d\ln\left(x^4y^5\right).$$

设 $u=x^3y^4, v=x^4y^5$, 则

$$\frac{d\ln u}{\frac{v}{u}}=-d\ln v\Rightarrow ud\ln u=-vd\ln v\Rightarrow du=-dv\Rightarrow u=-v+C,$$

从而得通解为 $x^3y^4+x^4y^5=C$.

例题 22.27 求微分方程 $x^2y''-xy'+2y=18x\cos(\ln x)$ 的通解.

证明 这是一个欧拉方程, 考虑 $x=e^t$, 我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{de^t}=e^{-t}\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{e^tdt}\right)}{de^t}=e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}-e^{-2t}\frac{dy}{dt}.$$

于是

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=18e^t\cos t,$$

解得

$$y\left(e^t\right)=c_1e^t\sin t+c_2e^t\cos t+9te^t\sin t,$$

从而

$$y(x)=c_1x\sin\ln x+c_2x\cos\ln x+9x\ln x\sin\ln x.$$

例题 22.28 求微分方程

$$\left(x^3-y^2\right)dx+\left(x^2y+xy\right)dy=0. \tag{22.8}$$

的通解.

证明 设 $u=y^2$, 则上述方程变为一阶线性方程

$$\frac{du}{dx}=\frac{2u}{x(1+x)}-\frac{2x^2}{x+1}.$$

解得

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2u+(1+x)^2=C,$$

即通解为

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 y^2+(1+x)^2=C.$$

22.3 微分方程证明

来看考研数学真题.

例题 22.29 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 是有界函数并且 $\int_{-\infty}^{0} f(x)e^x\mathrm{d}x$ 收敛, 证明

1. $y'+y=f(x)$ 有且只有一个解在 $\mathbb{R}$ 上有界;
2. 若 f 以 $T>0$ 为周期, 证明上述方程有且只有一个解以 T 为周期.

笔记 虽然本题不用, 但需要熟悉如下技巧. 也就是若 f 以 $T>0$ 为周期, 则由

$$y'(x+T)+y(x+T)=f(x+T)=f(x)$$

知 $y(x+T)$ 也是微分方程的一个解, 然后配合的存在唯一性定理可以给出一些性质刻画.

证明

1. 若有两个解 y_1,y_2 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 那么

$$(y_1-y_2)'+(y_1-y_2)=0\Rightarrow y_1-y_2=ce^{-x}\Rightarrow c=0.$$

从而 $y'+y=f(x)$ 至多只有一个解在 $\mathbb{R}$ 上有界.

现在我们直接写出微分方程通解为

$$y(x)=ce^{-x}+\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

注意到取 $c=0$ 有

$$|y(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}|f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\sup_{\mathbb{R}}|f|\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}\mathrm{d}y=\sup_{\mathbb{R}}|f|<\infty,$$

于是我们构造了一个有界解.

2. 首先连续周期解一定有界, 由第一问知 $y(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}f(y)\,\mathrm{d}y$. 下证 y 是周期 T 函数.

事实上

$$\begin{aligned}y(x+T)&=\int_{-\infty}^{x+T} e^{y-x-T}f(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}f(y+T)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}f(y)\,\mathrm{d}y\\&=y(x),\end{aligned}$$

这就证明了若 f 以 $T>0$ 为周期, 则方程有且只有一个解以 T 为周期.

来看清华大学 2024 微积分期末考试压轴题

例题 22.30 设 y_1,y_2 是二阶线性齐次常微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个线性无关的解. 其中 p,q 是开区间 J 上的连续函数. 证明 y_1 的两个零点之间必然有一个 y_2 的零点. 反之亦然.

证明 注意常微分方程有一个重要定理, 即

$$\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}\neq 0,\forall t\in J. \tag{22.9}$$

运用(22.9)我们知

$$y_1(t)y_2'(t)\neq y_2(t)y_1'(t),\forall t\in J. \tag{22.10}$$

又设 $y_1(a)=y_1(b)=0,a<b,a,b\in J$ 且 $y_2(t)\neq 0,\forall t\in(a,b)$. 于是由(22.10)知 $y_2(a),y_2(b)\neq 0$. 现在考虑

$F(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$, 我们由 $F(a)=F(b)=0$ 和罗尔定理知存在一个点 $c\in(a,b)$ 使得

$$F'(c)=\frac{y_1'(c)y_2(c)-y_1(c)y_2'(c)}{y_2^2(c)}=0,$$

这和(22.10)矛盾! 于是我们证明了 y_1 的两个零点之间必然有一个 y_2 的零点. 反之同理.

我们想给定理22.9一个证明, 因为确实非数学类没有学过定理22.9. 事实上, 若有某个 $t_0\in J$ 使得 $\begin{vmatrix}y_1(t_0) & y_2(t_0)\\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0)\end{vmatrix}=0$, 则存在不全为 0 的 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases}c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=0\\ c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)=0\end{cases}.$$

于是考虑 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解且 y 有初值条件 $y(t_0)=y'(t_0)=0$. 由常微分方程解的唯一性定理13.17知 $y\equiv0$. 这和 c_1,c_2 不全为 0 矛盾! 这就证明了定理22.9

例题 22.31 设 $a>0$, 求在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}$ 的全体正值函数.

证明 考虑 $g(x)\triangleq f\left(\frac{a}{x}\right)f(x),x>0$, 则

$$g'(x)=-\frac{a}{x^2}f'\left(\frac{a}{x}\right)f(x)+f\left(\frac{a}{x}\right)f'(x)=-\frac{a}{x}+\frac{a}{x}=0.$$

于是

$$f\left(\frac{a}{x}\right)f(x)=C\Rightarrow\frac{a}{xf'(x)}f(x)=C\Rightarrow f(x)=Bx^r,B,r>0.$$

代入这个表达式到原方程得 $B=\frac{1}{\sqrt{ra^r-1}}$, 故所求函数全体为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{ra^r-1}}x^r,ra^r>1.$$

第 22 章 练习

1. (1.) 解微分方程 $-xy''y^2=y'(xy'-y)^2$.
2. (2.) 解微分方程 $y''+\left(x+e^{2y}\right)(y')^3=0$.
3. (3.) 解微分方程 $x(y')^2+\left(y-2x^2\right)y'-2xy=0$.
4. (4.) 求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=y^2-\frac{4}{x^2}$ 的通解.
5. (5.) 求微分方程 $y^{(4)}-2y''+y=x^2-3$ 的通解.
6. (6.) 求微分方程 $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ 的通解.
7. (7.) 设

$$\int_0^y\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=x,\tag{22.11}$$

   求 $y(x)$.
8. (8.) 解微分方程

$$y''+(x+\sin y)(y')^3=0.$$

9. (9.) 解微分方程

$$y'-\cos x\sin^2y=\frac{1}{2}\sin(2y).$$

10. (10.) 求微分方程 $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$ 的通解.
11. (11.) 求解微分方程

$$r^3R'''(r)+2r^2R''(r)-rR'(r)+R(r)=2025,r>1,$$

    这里

$$R(1)=2025,R'(1)=0,R''(1)=1.$$

12. (12.) 求解微分方程

$$x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x.$$

13. (13.) 求微分方程

$$xy' = \sqrt{x^6 - y^2} + 3y$$

的全部解.

第 23 章 数学类线性代数

内容提要

- 线性代数结论 23.1
- 分析思想 23.2
- 非负矩阵理论 23.3
- 用矩阵的观点解题 23.4
- 用代数的观点解题 23.5
- 向量组问题 23.6
- 数学类线性代数杂题 23.7
- 组合数论类 23.8
- 行列式 23.9
- 数学类多项式 23.10

23.1 线性代数结论 ♡

线性代数是一个大量结论的学科, 他的特点是结论单独来看, 几乎是显然的. 但是解决问题往往要诸多结论共同作用, 此时难度就会无限变大. 线性代数是一个互相纠缠的整体, 不如数学分析好分类, 因此我们不做过于细致的章节划分.

23.1.1 中国剩余定理

定理 23.1 (中国剩余定理) 设 $\mathbb{F}$ 是一个域, $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{F}[x]$ 且两两互素, 则对任何 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{F}[x]$, 存在 $f \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) \equiv a_i(x) \left(\mathrm{mod} m_i(x)\right), i = 1, 2, \cdots, n,$$

即存在 $k_i \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$f(x) = k_i(x) m_i(x) + a_i(x), i = 1, 2, \cdots, n.$$

♡

笔记 本定理是抽象代数或者初等数论中的经典定理, 可以无脑直接使用, 和整数版本的证明也完全一致.

注 若

$$f_1(x), f_2(x) \equiv a_i(x) \left(\mathrm{mod} m_i(x)\right), i = 1, 2, \cdots, n,$$

我们有

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv 0 \left(\mathrm{mod} m_i(x)\right), i = 1, 2, \cdots, n,$$

这等价于

$$f_1 - f_2 \equiv 0 \left(\mathrm{mod} \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)\right).$$

即全部解为

$$\left\{f_1(x) + k(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} m_i(x) : k \in \mathbb{F}[x]\right\}.$$

证明 设

$$\varphi_i(x) = m_1(x) m_2(x) \cdots m_{i-1}(x) m_{i+1}(x) \cdots m_n(x), i = 1, 2, \cdots, n.$$

对每一个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 我们有 φ_i 和 m_i 互素, 因此由裴蜀等式知存在 $u_i, v_i \in \mathbb{F}[x]$ 使得

$$\varphi_i(x) u_i(x) + m_i(x) v_i(x) = 1.$$

考虑

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\varphi_j(x)u_j(x)\in\mathbb{F}[x],$$

我们有

$$\begin{aligned}f(x)-a_i(x)&=a_i(x)[\varphi_i(x)u_i(x)-1]+\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}a_j(x)\varphi_j(x)u_j(x)\\&=-a_i(x)v_i(x)m_i(x)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}a_j(x)\varphi_j(x)u_j(x).\end{aligned}$$

现在 m_i 是上式右边每一项的因子, 从而

$$m_i|(f-a_i),i=1,2,\cdots,n,$$

即

$$f(x)\equiv a_i(x)(\mathrm{mod}m_i(x)),i=1,2,\cdots,n.$$

来看华东师范大学 2025 的高等代数压轴题.

例题 23.1 求次数最小的 f 使得

$$\begin{cases}f(x)\equiv 6(\mathrm{mod}(x+1))\\f(x)\equiv 3x\left(\mathrm{mod}\left(x^2+x+1\right)\right)\\f(x)\equiv(x-1)^2\left(\mathrm{mod}\left(2x^3+1\right)\right)\end{cases}.$$

注 直接用中国剩余定理23.1是难算的, 我们应该具体问题具体分析.

证明 因为

$$\deg\left[(x+1)\left(x^2+x+1\right)\left(2x^3+1\right)\right]=6,$$

我们设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5.$$

不妨在 $\mathbb{Q}$ 上考虑, 因为如果还有一个 $g\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $\deg g\leqslant 5$ 为解, 则 $g-f$ 有一个六次因子, 即只能有 $f=g$.

条件第一个同余式等价于

$$f(-1)=6\Leftrightarrow a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=6.$$

对第二个同余式, 等价于若 $x^2+x+1=0$ 则 $f(x)-3x=0$. 注意到若 $x^2+x+1=0$ 则

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0\Rightarrow x^3=1,$$

我们有

$$\begin{aligned}f(x)-3x&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3+a_4x+a_5x^2-3x\\&=a_0+a_3+(a_1+a_4-3)x+(a_2+a_5)x^2\\&=a_0+a_3-a_2-a_5+(a_1+a_4-a_2-a_5-3)x,\end{aligned}$$

即容易验证等价于

$$a_0+a_3-a_2-a_5=0,a_1+a_4-a_2-a_5=3.$$

对第三个同余式, 等价于若 $2x^3+1=0$ 则 $f(x)-x^2+2x-1=0$. 现在若 $2x^3+1=0$ 则

$$f(x)-x^2+2x-1=\left(a_2-\frac{1}{2}a_5-1\right)x^2+\left(a_1-\frac{1}{2}a_4+2\right)x+\left(a_0-\frac{1}{2}a_3-1\right),$$

即容易验证等价于

$$a_2-\frac{1}{2}a_5=1,a_1-\frac{1}{2}a_4=-2,a_0-\frac{1}{2}a_3=1.$$

解线性方程组得

$$f(x)=4x^4+x^2+1,$$

这就完成了计算.

23.1.2 矩阵分解

定理 23.2 (Jordan 分解)

设 $\mathbb{F}$ 是一代数闭域[a],$n\in\mathbb{N}$

1. 对 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 存在 $C,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得:
   (1): $A=C+B$;
   (2): C 是幂零矩阵, B 是可对角化矩阵;
   (3): $BC=CB$;
   (4): 存在没有常数项的多项式 $p(x),q(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $C=q(A),B=p(A)$. 且满足 (1) − (3) 的分解 B,C 是唯一的.
2. 对可逆矩阵 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 存在 $C,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得:
   (1): $A=CB$;
   (2): C 是特征值全为单位元的矩阵, B 是可对角化的可逆矩阵;
   (3): $BC=CB$;
   (4): 存在没有常数项的多项式 $p(x),q(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $C=q(A),B=p(A)$. 且满足 (1) − (3) 的分解 B,C 是唯一的.

[a]可视为复数域.

♡

证明

1. 存在性: 注意到相似变换是同一线性变换在不同基下的表示罢了, 因此不妨设[1]

$$A=\begin{pmatrix}J_1&0&\cdots&0\\0&J_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&J_s\end{pmatrix},\tag{23.1}$$

其中 $J_i,i=1,2,\cdots,s$ 是同一个特征值对应所有 $jordan$ 块排在一起的分块对角矩阵, 设其对应特征值为 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,s$.

我们有

$$A=\begin{pmatrix}J_1-\lambda_1I&0&\cdots&0\\0&J_2-\lambda_2I&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&J_s-\lambda_sI\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1I&0&\cdots&0\\0&\lambda_2I&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_sI\end{pmatrix}=C+B.$$

由中国剩余定理23.1, 取 $s_i\in\mathbb{N}$ 是 J_i 的阶数, 则存在 $p\in\mathbb{F}[\lambda]$, 使得

$$p(\lambda)\equiv\lambda_i\,(\mathrm{mod}\,(\lambda-\lambda_i)^{s_i}),\quad i=1,2,\cdots,s.\tag{23.2}$$

如果式(23.2)中某个 $\lambda_i=0$, 此时显然有 $p(0)=0$, 从而 p 没有常数项. 如果 $\lambda_i\neq0,i=1,2,\cdots,s$, 我们可以在(23.2)中补一个方程 $p(\lambda)\equiv0\,(\mathrm{mod}\lambda)$ 使得有解 p, 此时 $p(0)=0$ 使得 p 仍然无常数项.

令 $q=x-p$, 于是注意到 $p(J_i)=\lambda_iI,i=1,2,\cdots,s$, 因此 $p(A)=B,q(A)=C$, 这就证明了存在性.

唯一性: 若还有 $A=C'+B'$ 且满足条件 (1) − (3), 则 $C'-C=B-B'$, 又 C' 和 C',B' 可交换, 所以 C'

[1]一定要准确理解为什么可以不妨设.

和 A 可交换, 所以 C' 和 C 可交换. 类似的 B, B' 可交换, 因此对充分大的 n, 利用可交换的矩阵同时对角化23.4, 我们有

$$0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\left(C'\right)^kC^{n-k}=\left(C'-C\right)^n=\left(B-B'\right)^n\Longrightarrow B=B', C=C',$$

这就证明了唯一性.

2. 存在性: 当 A 可逆时, 不妨继续设(23.1)成立, 于是我们有

$$A=\begin{pmatrix}\frac{J_1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{J_2}{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{J_s}{\lambda_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 I & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I\end{pmatrix}=CB.$$

取和第一问同样的 p, 然后因为逆矩阵是原矩阵的多项式21.11, 我们得 $\left(p\left(A\right)\right)^{-1}=h\left(A\right), h\in\mathbb{F}\left[\lambda\right]$. 然后令 $q=x\cdot h\in\mathbb{F}\left[\lambda\right]$, 就证明了存在性.

唯一性: 对 $A=C'B'$ 且满足条件 $(1)-(3)$, 我们有 $C^{-1}C'=B\left(B'\right)^{-1}$, 同样的 C, C' 和 B, B' 可交换, 因此对充分大的 n, 利用 C, C' 可同时上三角化23.2, 因此 $C^{-1}C'$ 特征值全部是 1, 故 $B\left(B'\right)^{-1}$ 特征值全为 1. 利用 B, B' 可同时对角化23.4, 因此 $B\left(B'\right)^{-1}=E$, 于是 $B=B', C=C'$, 这就证明了唯一性.

定理 23.3 (LU 分解 ♡)

设 $\mathbb{F}$ 是一域, 则对 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 存在 $C, B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A=BC$ 且 B 为主对角元都为 1 的下三角矩阵, C 为可逆上三角矩阵的充要条件是 A 的顺序主子式全不为 0. 并且这种分解是唯一的. ♡

证明 充分性: 当 $n=1$ 问题是显然的. 设命题对 $n-1$ 时成立, 当 n 时, 设

$$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}, A_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}, \alpha, \beta\in\mathbb{F}^{n-1}, a_{nn}\in\mathbb{F}.$$

利用归纳假设, 存在 $C_{n-1}, B_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得 $A_{n-1}=B_{n-1}C_{n-1}$ 且 B_{n-1} 为主对角元都为 1 的下三角矩阵, C_{n-1} 为可逆上三角矩阵. 注意到

$$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{n-1}C_{n-1} & \alpha\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B_{n-1}C_{n-1} & \alpha\\ 0 & a_{nn}-\beta^TC_{n-1}^{-1}B_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ -\beta^TC_{n-1}^{-1}B_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}B_{n-1}C_{n-1} & \alpha\\ 0 & a_{nn}-\beta^TC_{n-1}^{-1}B_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}.$$

于是我们有

$$A=\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ -\beta^TC_{n-1}^{-1}B_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}B_{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{n-1} & B_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & a_{nn}-\beta^TC_{n-1}^{-1}B_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}=BC,$$

因为 $\det A\neq 0$, 所以 C 是可逆矩阵. 这样我们就完成了 n 时的证明, 从而由数学归纳法即证.

必要性: 当 $n=1$ 命题显然成立, 假设命题对 $n-1$ 时成立, 则当 n 时, 设 $A=BC$ 且 B 为主对角元都为 1 的下三角矩阵, C 为可逆上三角矩阵.

假设

$$B=\begin{pmatrix}B'_{n-1} & 0\\ \gamma^T & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}C'_{n-1} & \eta\\ 0 & c_{nn}\end{pmatrix}, B'_{n-1}, C'_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}, c_{nn}\in\mathbb{F}\setminus\{0\}.$$

现在就有

$$A=BC=\begin{pmatrix}B'_{n-1}C'_{n-1} & B'_{n-1}\eta+c_{nn}\\ \gamma^TC'_{n-1} & \gamma^T\eta+c_{nn}\end{pmatrix}.$$

由归纳假设知 $B'_{n-1}C'_{n-1}$ 顺序主子式不为 0. 显然 $\det A\neq 0$, 这就证明了 n 的情况, 从而由数学归纳法即证.

唯一性: 若还有 $A=BC=B'C'$, 这里 B' 为主对角元都为 1 的下三角矩阵, C' 为可逆上三角矩阵. 于是

$$C\left(C'\right)^{-1}=B^{-1}B'.$$

注意到上式左边是上三角矩阵, 右边是对角线全为 1 的下三角矩阵, 故

$$C\left(C'\right)^{-1}=B^{-1}B'=E_n,$$

从而 $C=C', B=B'$, 这就完成了证明.

定理 23.4 (奇异值分解)

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}\left(\mathbb{C}^{m\times n}\right)$, 则存在实正交矩阵 (酉矩阵)$U\in\mathbb{R}^{m\times m}\left(\mathbb{C}^{m\times m}\right)$ 和 $V\in\mathbb{R}^{n\times n}\left(\mathbb{C}^{n\times n}\right)$, 使得

$$U^TAV=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

这里 Λ 是 $r(A)$ 阶对角矩阵且对角元都为正数. ♡

注如果定理23.4已经被证明, 那么

$$\left(U^TAV\right)^TU^TAV=V^TA^TAV=\begin{pmatrix}\Lambda^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 A^TA 半正定, 所以 Λ 的对角线元素是 A^TA 的非 0 特征值的算数平方根. 由 CD 和 DC 有完全一样[2]的非 0 特征值23.20, 我们知道 Λ 的对角线元素也是 AA^T 的非 0 特征值的算数平方根.

笔记 奇异值分解证明过程也是其计算过程.

证明 仅证明实矩阵的情形, 因为 A^TA 半正定, 所以存在正交矩阵 $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$V^TA^TAV=\begin{pmatrix}\Lambda^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{23.3}$$

我们设

$$V=\begin{pmatrix}V_1 & V_2\end{pmatrix}, V_1\in\mathbb{R}^{n\times r}, V_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)},$$

则有

$$V^TA^TAV=\begin{pmatrix}V_1^TA^TAV_1 & V_1^TA^TAV_2\\ V_2^TA^TAV_1 & V_2^TA^TAV_2\end{pmatrix}. \tag{23.4}$$

对比(23.3)和(23.4)得

$$0=V_2^TA^TAV_2=\left(AV_2\right)^T\left(AV_2\right)\overset{\text{命题21.8}}{\Rightarrow}AV_2=0, V_1^TA^TAV_1=\Lambda^2.$$

待定

$$U=\begin{pmatrix}U_1 & U_2\end{pmatrix}, U_1\in\mathbb{R}^{m\times r}, U_2\in\mathbb{R}^{m\times(m-r)},$$

则

$$U^TAV=\begin{pmatrix}U_1^TAV_1 & U_1^TAV_2\\ U_2^TAV_1 & U_2^TAV_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1^TAV_1 & 0\\ U_2^TAV_1 & 0\end{pmatrix}.$$

目标是

$$U_1^TAV_1=\Lambda\Leftrightarrow U_1=AV_1\Lambda^{-1}.$$

现在取定满足上述条件的 U_1, 则

$$U_1^TU_1=\Lambda^{-1}V_1^TA^TAV_1\Lambda^{-1}=E.$$

现在 U_1 列向量组是标准正交向量组, 我们可以把 U_1 扩充为正交矩阵, 此时

$$U_2^TAV_1=U_2^TU_1\Lambda=0,$$

[2]包括重数.

这就完成了证明.

定理 23.5 (半正定矩阵开方唯一)

设 A 是实 n 阶半正定矩阵, 则存在唯一的实 n 阶半正定矩阵 B, 使得 $A=B^2$.

♡

笔记 当然, 对于复版本的半正定 Hermite 矩阵, 这个结果也是对的. 显然, 证明的方法就是不妨设标准技巧, 即实对称矩阵的正交相似对角化.

证明 取正交矩阵 T, 使得

$$T^TAT=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n.$$

直接取半正定矩阵 $B=T\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right\}T^T$, 直接验证就有 $A=B^2$.

下面证明最为困难的唯一性. 事实上, 若还有半正定矩阵 C, 有 $A=C^2=B^2$. 再取正交矩阵 S,Q, 使得

$$K\triangleq S^TBS=\operatorname{diag}\left\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right\}=Q^TCQ,$$

于是

$$B=SKS^T,C=QKQ^T\Rightarrow SK^2S^T=QK^2Q^T\Rightarrow Q^TSK^2=K^2Q^TS.$$

现在假设

$$K=\begin{pmatrix}\mu_1E & & & \\ & \mu_2E & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_sE\end{pmatrix},\text{这里}\mu_i\text{互不相同}.$$

于是把 Q^TS 对应分块为 (X_{ij}), 那么就有

$$\mu_j^2X_{ij}=X_{ij}\mu_i^2.$$

于是对任何 $i\neq j$ 都有 $X_{ij}=0$. 现在

$$Q^TS=\operatorname{diag}\{X_{11},X_{22},\cdots X_{ss}\}\Rightarrow Q^TSK=KQ^TS\Rightarrow B=SKS^T=QKQ^T=C,$$

这就完成了证明.

注对于本题的 B, 存在至多 $n-1$ 次多项式[3]$p\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $B=p(A)$. 这是因为由拉格朗日插值定理, 存在至多 $n-1$ 次多项式使得

$$p(\lambda_i)=\sqrt{\lambda_i},i=1,2,\cdots,n.$$

作为半正定矩阵开方的一个经典应用, 我们有

例题 23.2 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定的. 若 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\alpha^TA\alpha=0$, 则 $A\alpha=0$.

证明 由定理23.5得半正定矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=C^2$. 于是

$$0=\alpha^TA\alpha=(C\alpha)^T(C\alpha)=0\Rightarrow C\alpha=0\Rightarrow A\alpha=C^2\alpha=0.$$

定理 23.6 (极分解)

1. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$, 则存在正交矩阵 (酉矩阵)$Q\in\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$ 和半正定矩阵 (Hermite 半正定矩阵)$T\in\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$ 使得 $A=QT$ 且 T 是唯一的. 特别的当 A 可逆, 则 Q 也是唯一的.
2. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$, 则存在正交矩阵 (酉矩阵)$Q\in\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$ 和半正定矩阵 (Hermite 半正定矩阵)$T\in\mathbb{R}^{n\times n}(\mathbb{C}^{n\times n})$ 使得 $A=TQ$ 且 T 是唯一的. 特别的当 A 可逆, 则 Q 也是唯一的.

♡

笔记 极分解对非方阵也有结果, 此时要用不完全的正交矩阵来代替, 因为不常用, 我们略去.

证明 只证明实的情况, 复的情况类似.

[3]复数版本 $p\in\mathbb{C}[x]$.

1. 由奇异值分解23.4, 我们知道存在正交矩阵 $U,V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和奇异标准型 Λ, 使得 $A=U\Lambda V$. 现在
$$A=UV\cdot V^T\Lambda V=Q\cdot T.$$
若还有 $A=Q'T'$, 这里 $Q',T'\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 分别为正交矩阵和半正定矩阵. 则
$$A^TA=(T')^2=T^2.$$
由半正定矩阵开方唯一23.5知 $T=T'$.
当 A 可逆, 由于 T 正定, 故
$$A=Q'T=QT\Rightarrow Q'=Q.$$
2. 和第一问类似.

例题 23.3 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 证明存在 $P,S\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=PS$ 且满足
1. P 的非 0 奇异值都为 1;
2. S 半正定;
3. $\ker P=\ker S$.

并证明上述分解是唯一的. 此外证明 A 正规当且仅当 $PS=SP$.

笔记 解决本题的想法就是不妨设奇异值标准型. 为了读者更容易理解, 我们写的严格一点.

证明 **Step 1** 存在性:
由奇异值分解23.4, 我们知道存在正交矩阵 $U,V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得
$$A=U^T\begin{pmatrix}\Lambda&0\\0&0\end{pmatrix}V,$$
这里 Λ 是 s 阶正定对角矩阵. 我们取
$$P=U^T\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}V,S=V^T\begin{pmatrix}\Lambda&0\\0&0\end{pmatrix}V,$$
显然 P,S 满足要求.

Step 2 唯一性:
若 $A=PS$ 是一个满足条件的分解, 则存在正交矩阵 $U,V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得
$$P=U^T\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}V.$$
对应分块得
$$S=V^T\begin{pmatrix}S_1&S_2^T\\S_2&S_3\end{pmatrix}V.$$
因为
$$\ker S=\ker P=\left\{x\in\mathbb{R}^n:Vx=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},y\in\mathbb{R}^{n-r}\right\},$$
我们知道
$$S_2^Ty=S_3y=0,\forall y\in\mathbb{R}^{n-r},$$
即 $S_2=0,S_3=0$.
现在
$$UAV^T=UPSV^T=UU^T\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}VV^T\begin{pmatrix}S_1&0\\0&0\end{pmatrix}VV^T=\begin{pmatrix}S_1&0\\0&0\end{pmatrix},$$
即
$$UAV^T=VSV^T\Rightarrow UA=VS\Rightarrow A^TA=S^2.$$
由半正定矩阵开方唯一23.5得 S 唯一确定.

现在假设 A 有两个满足条件的分解 $A=P_1S=P_2S$, 注意到 $\mathbb{R}^n=\ker S\oplus(\ker S)^\perp$ 且 $S|_{(\ker S)^\perp}$ 可逆. 于是对 $x\in(\ker S)^\perp$, 取 $\tilde{x}\in(\ker S)^\perp$ 使得 $x=S\tilde{x}$. 因此

$$P_1x=P_1S\tilde{x}=P_2S\tilde{x}=P_2x.$$

对 $x\in\ker S=\ker P_1=\ker P_2$, 我们有

$$P_1x=P_2x=0,$$

即 $P_1=P_2$.

Step 3 正规的充分性刻画:

首先 $\mathbb{R}^n=\ker S\oplus\mathrm{Im}S$, 因为 $\ker S=\ker P$ 和维数公式, 我们有

$$\dim\mathrm{Im}P=\dim\mathrm{Im}S.$$

因为 P,S 可交换, 我们有

$$\mathrm{Im}P=P(\mathrm{Im}S)\subset\mathrm{Im}S,$$

即 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}S$.

注意到

$$\ker S^T=(\mathrm{Im}S)^\perp=(\mathrm{Im}P)^\perp=\ker P^T,$$

结合 $A=PS=SP$ 知 $A^T=P^TS^T$ 是满足题目条件的分解. 此时

$$A^TA=S^2=\left(S^T\right)^2=AA^T,$$

即 A 正规.

step 4 正规的必要性刻画:

若 A 是实正规矩阵, 则由实正规矩阵相似标准型23.25可以不妨设

$$A=\mathrm{diag}\left\{A_1,A_2,\cdots,A_s\right\}.$$

对 $\lambda\in\mathbb{R}$, 一阶块有如下分解

$$\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}=(\mathrm{sgn}\lambda)\cdot\begin{pmatrix}|\lambda|\end{pmatrix}.$$

对 $a,b\in\mathbb{R},b\neq0$, 二阶块有如下分解

$$\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+b^2}&0\\0&\sqrt{a^2+b^2}\end{pmatrix}.$$

按上述分解, 对每个块 A_i 都对应一个分解 $A_i=P_i\cdot S_i$, 从而容易验证

$$P=\mathrm{diag}\left\{P_1,P_2,\cdots,P_s\right\},S=\mathrm{diag}\left\{S_1,S_2,\cdots,S_s\right\}$$

为满足条件的分解且 $PS=SP$.

定理 23.7 (满秩分解 ♡)

设 $\mathbb{F}$ 是域, 则设

1. $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 且秩为 $r\in\mathbb{N}_0$, 证明存在列满秩矩阵 P 和行满秩矩阵 Q, 使得 $A=PQ$.
2. $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 且秩为 n, 证明存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{F}^{m\times m}$, 使得 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$.
3. $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 且秩为 m, 证明存在可逆矩阵 $Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $AQ=\begin{pmatrix}E_m&0\end{pmatrix}$.
4. $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 是列满秩矩阵, 则存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{F}^{m\times m}$ 使得 $A=CB$.
5. $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 是行满秩矩阵, 则存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A=BC$.

♡

笔记 本定理的二三条可以直接使用.

证明

1. 设可逆矩阵 $P_1 \in \mathbb{F}^{m\times m}, Q_1 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得
$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
注意到
$$A = P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1^{-1} = P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q_1^{-1} = P\cdot Q,$$
这就证明了第一问.
2. 这是课本定理, 通过行变换化阶梯得到的.
3. 对 A^T 用第二问的结论即可得到行的结论.
4. 由第二问结论, 设可逆矩阵 $P_A, P_B \in \mathbb{F}^{m\times m}$ 使得 $P_BB = P_AA = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$, 则
$$A = P_A^{-1}P_BB = CB.$$
这就证明了第四问.
5. 和第四问同理.

定理 23.8 (幂等分解)
设 $\mathbb{F}$ 是域, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 证明存在幂等矩阵 $T_1, T_2 \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 可逆矩阵 $S_1, S_2 \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $A = T_1S_1 = S_2T_2$. ♡

证明 注意到
$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}PQ = T_1S_1,$$
这里 $P, Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是可逆矩阵. 类似的可得另一分解.

定理 23.9 (秩一分解 ♡)
设 $\mathbb{F}$ 是域, $r \in \mathbb{N}$, 则秩 r 矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 可以分解为 r 个 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 中秩 1 矩阵之和. ♡

证明 设可逆矩阵 $P_1 \in \mathbb{F}^{m\times m}, Q_1 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得
$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
注意到
$$A = P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1^{-1} = \underbrace{P_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}Q_1^{-1} + P_1^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}Q_1^{-1} + \cdots}_{\text{合计}r\text{个}},$$
这就完成了证明.

定理 23.10 (施密特正交化对应的矩阵分解,QR 分解)
1. 设列满秩矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geqslant n$, 则存在唯一的列向量为正交单位向量组的 $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 主对角元都为正数的上三角矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $A = QR$.
2. 此外, 在标准内积下, 对任何 $\beta \in \mathbb{R}^m$, $R^{-1}Q^T\beta$ 是矩阵方程 $A^TAx = A^T\beta$ 的唯一解.
3. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geqslant n$, 则存在列向量为正交单位向量组的 $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 主对角元都为非负数的上三角矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $A = QR$. ♡

笔记 本结果对复列满秩矩阵, 则正交矩阵改为酉矩阵, 实上三角矩阵改为复上三角矩阵之后命题也对. 此外注意

这里是任一个内积而不只是标准内积.

证明 不妨设就是标准内积, 一般情况可类似讨论.

1. 先证明存在性: 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$, 因为 A 列满秩, 所以对 A 列向量组做施密特正交化得

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\ \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\\ \vdots\end{cases}.$$

于是有

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\beta_1}{||\beta_1||} & \frac{\beta_2}{||\beta_2||} & \cdots & \frac{\beta_n}{||\beta_n||}\end{pmatrix}R=QR.$$

再证明唯一性: 若还有另外一种分解 $A=QR=Q'R'$, 则

$$Q=Q'\cdot R'R^{-1}=Q'\cdot T,$$

这里 T 是主对角元都为正数的上三角矩阵. 于是 Q,Q' 的列向量组张成空间的是一致的, 并考虑这个空间的正交补空间, 即得

$$\begin{pmatrix}Q & \tilde{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q' & \tilde{Q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & E_{m-n}\end{pmatrix}$$

且 $\begin{pmatrix}Q & \tilde{Q}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q' & \tilde{Q}\end{pmatrix}$ 都是 m 阶正交矩阵. 现在

$$\begin{pmatrix}Q' & \tilde{Q}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Q & \tilde{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & E_{m-n}\end{pmatrix}$$

且左边是正交矩阵. 直接矩阵乘法计算我们知道上三角的正交矩阵一定是单位矩阵[4]. 因此

$$\begin{pmatrix}Q' & \tilde{Q}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Q & \tilde{Q}\end{pmatrix}=E_m\Rightarrow\begin{cases}Q'=Q\\ T=E_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q'=Q\\ R'=R\end{cases},$$

这就证明了第一问.

2. 注意到

$$r(A)=r\left(A^T\right)\overset{\text{秩不等式}21.6}{\geqslant}r\left(\begin{pmatrix}A^TA & A^T\beta\end{pmatrix}\right)\overset{\text{秩不等式}21.6}{\geqslant}r\left(A^TA\right)\overset{\text{秩等式}21.8}{=}r(A),$$

我们知道 $r\left(\begin{pmatrix}A^TA & A^T\beta\end{pmatrix}\right)=r\left(A^TA\right)$, 从而线性方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 有唯一解. 显然

$$A^TAR^{-1}Q^T\beta=R^TQ^TQRR^{-1}Q^T\beta=(QR)^T\beta=A^T\beta,$$

这就完成了第二问的证明.

3. 第三问和第一问整体是类似的, 但需要细微的修改施密特正交化过程. 事实上, 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$, 定义 $\begin{cases}\beta_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}, & \alpha_1\neq 0\\ \beta_1=0, & \alpha_1=0\end{cases}$, 然后假设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 已定义好, 我们定义

$$\beta_k=\begin{cases}\frac{\alpha_k-\sum\limits_{j=1}^{k-1}(\alpha_j,\beta_j)\beta_j}{\left\|\alpha_k-\sum\limits_{j=1}^{k-1}(\alpha_j,\beta_j)\beta_j\right\|}, & \alpha_k-\sum\limits_{j=1}^{k-1}(\alpha_j,\beta_j)\beta_j\neq 0\\ 0, & \alpha_k-\sum\limits_{j=1}^{k-1}(\alpha_j,\beta_j)\beta_j=0\end{cases}.$$

[4]因为正交矩阵等价于向量组的标准正交性.

于是有

$$\alpha_k=\sum_{j=1}^{k-1}\left(\alpha_k,\beta_j\right)\beta_j+\left\|\alpha_k-\sum_{j=1}^{k-1}\left(\alpha_k,\beta_j\right)\beta_j\right\|\beta_k,k=1,2,\cdots,n,$$

这给出了一个矩阵表示

$$A=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)R. \tag{23.5}$$

将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中不为 0 的全部拿出来扩充为 n 个标准正交单位向量, 并把为 0 的 β_k 替换成扩充时加入的新向量. 此时得标准正交向量组 $\widetilde{\beta_1},\widetilde{\beta_2},\cdots,\widetilde{\beta_n}$ 且等式(23.5)变成

$$A=\left(\widetilde{\beta_1},\widetilde{\beta_2},\cdots,\widetilde{\beta_n}\right)R=QR,$$

这里 R 没有变换. 这就完成了证明.

我们知道正定矩阵 A 总能做 $A=C^TC$. 我们现在可以给 C 一个更好的刻画.

定理 23.11 (正定矩阵分解为上三角)

1. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, 则存在对角元都为正数的可逆上三角矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=C^TC$.
2. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵, 则存在对角元都为非负数的上三角矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=C^TC$. ♡

笔记 本结果对 Hermite 正定矩阵也对, 此时 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

证明

1. 由 A 正定, 存在可逆 $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=D^TD$. 由定理23.10, 我们知道存在实 n 阶正交矩阵 T 和主对角元都为正数的实 n 阶上三角矩阵 C 使得 $D=TC$, 于是

$$A=C^TT^TTC=C^TC,$$

这就完成了证明.

2. 由 A 半正定, 存在 $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=D^TD$. 由定理23.10, 我们知道存在实 n 阶正交矩阵 T 和主对角元都为非负数的实 n 阶上三角矩阵 C 使得 $D=TC$, 于是

$$A=C^TT^TTC=C^TC,$$

这就完成了证明.

定理 23.12

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A\overline{A}=I_n$, 则存在可逆复矩阵 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $A=B\left(\overline{B}\right)^{-1}$. ♡

证明 首先设 A 的所有单位圆周上互不相同的特征值为

$$-e^{i\theta_j},\theta_j\in[0,2\pi),j=1,2,\cdots,s.$$

取 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得 $\theta\neq\frac{\theta_j}{2}+k\pi,j=1,2,\cdots,s,k\in\mathbb{Z}$.

现在考虑 $B=e^{i\theta}I+e^{-i\theta}A$, 则对任何 A 的特征值 λ, 若 $e^{i\theta}+e^{-i\theta}\lambda=0$, 则 $e^{i2\theta}=-\lambda$, 两边取模知 $\lambda=-e^{i\theta_j},j\in\{1,2,\cdots,s\}$, 所以存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使得 $\theta=\frac{\theta_j}{2}+k\pi$, 这和 θ 定义矛盾! 因此 B 可逆, 此时

$$A\overline{B}=A\left(e^{-i\theta}I+e^{i\theta}\overline{A}\right)=e^{i\theta}I+e^{-i\theta}A=B,$$

因此我们证明了存在可逆复矩阵 B, 使得 $A=B\left(\overline{B}\right)^{-1}$.

竞赛真题的应用.

例题 23.4 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是对称酉矩阵, 证明存在可逆矩阵 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=\overline{Q}Q^{-1}$.

证明 注意到 $\overline{A}$ 满足定理23.12, 所以存在可逆复矩阵 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $A=Q\left(\overline{Q}\right)^{-1}$, 从而 $A=\overline{Q}Q^{-1}$.

定理 23.13

设 A 是 n 阶可逆复矩阵, 则 $A^{-1}\sim A^*$ 的充要条件是存在可逆 n 阶复矩阵 B 使得 $A=B^{-1}B^*$. ♡

证明 充分性: 若存在可逆 n 阶复矩阵 B 使得 $A=B^{-1}B^*$, 则

$$A^{-1}=\left(B^{-1}\right)^* B\sim B^*\left(B^{-1}\right)^* B\left(B^{-1}\right)^*=B\left(B^{-1}\right)^*=A^*.$$

必要性: 设可逆 n 阶复矩阵 P 使得 $A^{-1}=P^{-1}A^*P$. 因为 $\left|A^*P+\lambda^2P^*\right|$ 在 $\lambda=0$ 不为 0, 所以不是 0 多项式, 所以 $\left|A^*P+\lambda^2P^*\right|$ 在单位圆周上不能处处为 0, 因此设

$$\left|A^*P+\lambda_0^2P^*\right|\neq 0,|\lambda_0|=1,\lambda_0\in\mathbb{C},$$

于是利用 $\lambda_0^{-1}=\overline{\lambda_0}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_0^{-1}A^*P+\lambda_0P^*\right)^{-1}\left(\lambda_0^{-1}A^*P+\lambda_0P^*\right)^*=A\\ \Leftrightarrow\ &\lambda_0P^*A+\overline{\lambda_0}P=\lambda_0^{-1}A^*PA+\lambda_0P^*A\\ \Leftrightarrow\ &\lambda_0P^*A+\overline{\lambda_0}P=\lambda_0^{-1}PA^{-1}A+\lambda_0P^*A\\ \Leftrightarrow\ &\lambda_0P^*A+\overline{\lambda_0}P=\lambda_0^{-1}P+\lambda_0P^*A,\end{aligned}$$

故可取 $B\triangleq\lambda_0^{-1}A^*P+\lambda_0P^*$.

例题 23.5 任何复矩阵都能分解为两个对称矩阵之积且其中一个可逆.

笔记 证明的想法即利用使得 Jordan 转置的矩阵(21.2).

证明 对复矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 取可逆复矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=PJP^{-1}$, J 是 A 的 Jordan 标准型. 注意到若 $J=H_1H_2$ 使得 $H_1,H_2\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且对称, 并且其中一个可逆, 则

$$A=PH_1P^T\cdot\left(P^T\right)^{-1}H_2P^{-1}$$

为所求分解.

我们设

$$J=\operatorname{diag}\left\{J_1,J_2,\cdots,J_s\right\},J_i\text{是一个 Jordan 块},i=1,2,\cdots,s,$$

则回忆矩阵 H21.2, 我们有

$$\begin{aligned}J&=\operatorname{diag}\left\{J_1,J_2,\cdots,J_s\right\}=\operatorname{diag}\left\{HHJ_1,HHJ_2,\cdots,HHJ_s\right\}\\&=\operatorname{diag}\left\{H,H,\cdots,H\right\}\cdot\operatorname{diag}\left\{HJ_1,HJ_2,\cdots,HJ_s\right\}.\end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{diag}\left\{H,H,\cdots,H\right\}$ 可逆以及

$$\left(\operatorname{diag}\left\{HJ_1,HJ_2,\cdots,HJ_s\right\}\right)^T=\operatorname{diag}\left\{J_1^TH,J_2^TH,\cdots,J_s^TH\right\}=\operatorname{diag}\left\{HJ_1,HJ_2,\cdots,HJ_s\right\},$$

我们就完成了证明.

定理 23.14

设域 $\mathbb{F}$ 上对称 n 阶矩阵 A 顺序主子式全不为 0, 那么存在 $\mathbb{F}$ 上主对角元全为 1 的 n 阶上三角矩阵 B, 主对角元全不为 0 的对角矩阵 D, 使得 $A=B^TDB$, 并且这种分解是唯一的. ♡

证明 存在性: 当 $n=1$ 命题显然成立, 假设命题对 $n-1$ 成立, 当 n 时, 设

$$A=\begin{pmatrix}A_{n-1}&\alpha\\ \alpha^T&c\end{pmatrix},A_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)},c\in\mathbb{F},\alpha\in\mathbb{F}^{n-1},$$

且 A_{n-1} 是对称矩阵. 注意到

$$\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\ -\alpha^TA_{n-1}^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1}&\alpha\\ \alpha^T&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1}&-A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1}&0\\ 0&c-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}.$$

由 $\det A\neq 0$ 知 $c-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\neq 0$. 利用归纳假设, 我们有

$$A_{n-1}=K^TD_{n-1}K,K,D_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)},$$

且 K 是主对角元全为 1 的上三角矩阵, D_{n-1} 是主对角元不为 0 的对角矩阵. 于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \beta^T & c\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}K^T D_{n-1}K & 0\\ 0 & c-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ \alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K^T D_{n-1}K & 0\\ 0 & c-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ \alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{n-1} & 0\\ 0 & c-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

取

$$B=\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}D_{n-1} & 0\\ 0 & c-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix},$$

则有 $A=B^TDB$, 这就证明了存在性.

唯一性: 若还有满足条件的分解 $A=B_2^TD_2B_2$, 则

$$B^TDB=B_2^TD_2B_2\Rightarrow\left(B_2^T\right)^{-1}B^TD=D_2B_2B^{-1}.$$

又 $\left(B_2^T\right)^{-1}B^T$ 主对角元全为 1 的下三角矩阵, B_2B^{-1} 主对角全为 1 的上三角矩阵. 设

$$\left(B_2^T\right)^{-1}B^T=(b_{ij}),B_2B^{-1}=\left(b'_{ij}\right),D=\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},D_2=\operatorname{diag}\{a'_1,a'_2,\cdots,a'_n\},$$

则

$$b_{ij}a_j=a_ib'_{ij},\forall 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

当 $i<j$, 我们有 $0=a_ib'_{ij}\Rightarrow b'_{ij}=0$, 故 B_2B^{-1} 只能为对角矩阵, 因此只能有

$$B_2B^{-1}=E\Rightarrow B_2=B\Rightarrow D=D_2,$$

这就证明了唯一性.

定理 23.15 (矩阵的 CS 分解)

设 $Q_1\in\mathbb{R}^{m_1\times n_1},Q_2\in\mathbb{R}^{m_2\times n_1},Q_1^TQ_1+Q_2^TQ_2=I_{n_1}$, 这里 $\min\{m_1,m_2\}\geqslant n_1$. 则存在正交矩阵 $V_1\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1},U_1\in\mathbb{R}^{m_1\times m_1},U_2\in\mathbb{R}^{m_2\times m_2}$ 和 $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\cdots\leqslant\theta_{n_1}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 使得

$$\begin{pmatrix}U_1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}V_1=\begin{pmatrix}C\\ S\end{pmatrix},\tag{23.6}$$

这里 $C\in\mathbb{R}^{m_1\times n_1},S\in\mathbb{R}^{m_2\times n_1}$. 且

$$C=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & & & \\ & \cos\theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos\theta_{n_1}\\ & & & \end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}\sin\theta_1 & & & \\ & \sin\theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sin\theta_{n_1}\\ & & & \end{pmatrix}.$$

♡

注我们把上述 C,S 的 $\cos,\sin$ 分别称为 C,S 的对角线, 并记作[5]

$$C=\operatorname{diag}\{\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n\},S=\operatorname{diag}\{\sin\theta_1,\cdots,\sin\theta_n\}.$$

证明 由 $Q_1^TQ_1+Q_2^TQ_2=I_{n_1}$ 知 Q_1,Q_2 的奇异值分解23.4的非 0 元都在 $[0,1]$ 之间. 假设

$$C\triangleq U_1^TQ_1V_1=\begin{pmatrix}I_t & 0\\ 0 & \Sigma\end{pmatrix}.$$

[5]即使这不是方阵.

再设 $U_1^TQ_1V_1$ 的对角线为

$$1=c_1=c_2=\cdots=c_t>c_{t+1}\geqslant\cdots\geqslant c_{n_1}\geqslant 0.$$

再设 $Q_2V_1=\begin{pmatrix}W_1 & W_2\end{pmatrix}, W_1\in\mathbb{R}^{m_2\times t}$, 我们有

$$\begin{pmatrix}U_1 & 0\\ 0 & I_{m_2}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}V_1=\begin{pmatrix}U_1^TQ_1V_1\\ Q_2V_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_t & 0\\ 0 & \Sigma\\ W_1 & W_2\end{pmatrix}.$$

注意到

$$\begin{pmatrix}U_1^TQ_1V_1\\ Q_2V_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}U_1^TQ_1V_1\\ Q_2V_1\end{pmatrix}=V_1^TQ_1^TQ_1V_1+V_1^TQ_2^TQ_2V_1=I_{n_1},$$

即 $\begin{pmatrix}I_t & 0\\ 0 & \Sigma\\ W_1 & W_2\end{pmatrix}$ 的列向量应该是单位向量, 从而 $W_1=0$ 且 W_2 的列非 0 并满足

$$W_2^TW_2=I_{n_1-t}-\Sigma^T\Sigma=\operatorname{diag}\left\{1-c_{t+1}^2,\cdots,1-c_{n_1}^2\right\}$$

是可逆矩阵.

设 $s_k=\sqrt{1-c_k^2}, k=1,2,\cdots,n_1$, 然后矩阵 $Z=W_2\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{s_{t+1}},\cdots,\frac{1}{s_{n_1}}\right\}=W_2D$ 的列向量是正交规范向量组[6], 因此我们可以把 Z 扩充为正交矩阵 $U_2=\begin{pmatrix}Z & Z'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m_2\times m_2}$. 现在注意到

$$(Z')^TZ=0\Rightarrow(Z')^TW_2D=0\Rightarrow(Z')^TW_2=0,$$

于是我们有

$$S\triangleq U_2^TQ_2V_1=\left(0,U_2^TW_2\right)=\begin{pmatrix}0 & D^TW_2^TW_2\\ 0 & (Z')^TW_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & D^TW_2^TW_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\operatorname{diag}\left\{s_1,\cdots,s_{n_1}\right\}$$

满足要求, 于是我们完成了证明.

命题 23.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个域且 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}, B\in\mathbb{F}^{m\times m}, C\in\mathbb{F}^{n\times m}$.

1. 若 A,B 特征值互不相同且均可对角化, 则 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 可对角化.
2. 若 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 可对角化, 则 A,B 可对角化.

♠

证明

1. 考虑线性映射 $\varphi:\mathbb{F}^{n\times m}\to\mathbb{F}^{n\times m}, X\mapsto AX-XB$. 由命题21.5和 A,B 特征值互不相同知 $AX=XB$ 只有 0 解, 所以 φ 是单射, 从而是满射. 现在存在 $X_0\in\mathbb{F}^{n\times m}$ 使得 $C=AX_0-X_0B$, 于是利用定理21.5知

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & AX_0-X_0B\\ 0 & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & -X_0B\\ 0 & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 可对角化.

[6]注意

$$Z^TZ=D^TW_2^TW_2D=I_{n_1-t}.$$

2. 注意到 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的极小多项式 p 一定是 A,B 的零化多项式. 而 A,B 的极小多项式是 p 的因子. 注意到 p 是一次式的积, 因此 A,B 的极小多项式也是一次式的积, 因此 A,B 可对角化.

23.1.3 同时相似对角化

同时对角化主要由同时相似对角化和同时合同对角化组成.

命题 23.2 (一族两两可交换的一般域上的矩阵可同时上三角化)

给定域 $\mathbb{F}$ 和指标集 Λ, 设 $A_\lambda \in \mathbb{F}^{n\times n}, \lambda\in\Lambda$ 且两两可交换且特征值都属于 $\mathbb{F}$, 则存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$P^{-1}A_\lambda P\text{是上三角矩阵},\forall\lambda\in\Lambda.$$

♠

证明 证明的想法是对有限的量归纳, 即矩阵阶数. 本结果将综合运用几何方法和矩阵方法. 设 $V=\mathbb{F}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 和一个特征子空间 V_1 且 $1\leqslant\dim V_1<n$. 由交换性知 V_1 是所有 A_λ 不变子空间, 因此 $A_\lambda|_{V_1},\lambda\in\Lambda$ 也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

当 $n=1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leqslant n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, $A_\lambda|_{V_1},\lambda\in\Lambda$ 也是一族两两可交换的矩阵, 从而存在 V_1 的一族基, 使得在这组基下 $A_\lambda|_{V_1}$ 有上三角的表示矩阵 $\widetilde{A_\lambda},\lambda\in\Lambda$. 将这组基扩充到 $\mathbb{F}^n$ 使得构成一组基, 则在新的基下, A_λ 有表示矩阵 $\begin{pmatrix} \widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda} \\ 0 & \widetilde{C_\lambda} \end{pmatrix},\lambda\in\Lambda$. 由

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda} \\ 0 & \widetilde{C_\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{A_\mu} & \widetilde{B_\mu} \\ 0 & \widetilde{C_\mu} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \widetilde{A_\mu} & \widetilde{B_\mu} \\ 0 & \widetilde{C_\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda} \\ 0 & \widetilde{C_\lambda} \end{pmatrix}$$

知 $\widetilde{C_\lambda},\lambda\in\Lambda$ 也是两两可交换的矩阵. 因此存在可逆矩阵 $\widetilde{P}$, 使得每一个 $\left(\widetilde{P}\right)^{-1}\widetilde{C_\lambda}\widetilde{P}$ 都是上三角的. 然后我们取可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \widetilde{P} \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 就有 $P^{-1}A_\lambda P=\begin{pmatrix} \widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda} \\ 0 & \left(\widetilde{P}\right)^{-1}\widetilde{C_\lambda}\widetilde{P} \end{pmatrix},\forall\lambda\in\Lambda$ 都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

命题 23.3 (一族两两可交换的复数 (实数) 域上的矩阵可同时酉 (正交) 上三角化)

1. 给定指标集 Λ, 设 $A_\lambda\in\mathbb{C}^{n\times n},\lambda\in\Lambda$ 且两两可交换, 则存在酉矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得
$$P^{-1}A_\lambda P\text{是上三角矩阵},\forall\lambda\in\Lambda.$$
2. 给定指标集 Λ, 设 $A_\lambda\in\mathbb{R}^{n\times n},\lambda\in\Lambda$ 且两两可交换且特征值都是实数. 则存在正交矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得
$$P^{-1}A_\lambda P\text{是上三角矩阵},\forall\lambda\in\Lambda.$$

♠

证明

1. 证明的想法是对有限的量归纳, 即矩阵阶数. 本结果将综合运用几何方法和矩阵方法. 设 $V=\mathbb{C}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

   Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

   Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 和一个特征子空间 V_1 且 $1\leqslant\dim V_1<n$. 由交换性知 V_1 是所有 A_λ 不变子空间, 因此 $A_\lambda|_{V_1},\lambda\in\Lambda$ 也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

   当 $n=1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leqslant n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, $A_\lambda|_{V_1},\lambda\in\Lambda$ 也是一族两两可交

换的矩阵, 从而存在 V_1 的一族标准正交基, 使得在这组基下 $A_\lambda|_{V_1}$ 有上三角的表示矩阵 $\widetilde{A_\lambda}, \lambda\in\Lambda$. 将这组基扩充到 $\mathbb{C}^n$ 使得构成一组标准正交基, 则在新的标准正交基下, A_λ 有表示矩阵 $\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \widetilde{C_\lambda}\end{pmatrix}, \lambda\in\Lambda$. 由

$$\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \widetilde{C_\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A_\mu} & \widetilde{B_\mu}\\ 0 & \widetilde{C_\mu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{A_\mu} & \widetilde{B_\mu}\\ 0 & \widetilde{C_\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \widetilde{C_\lambda}\end{pmatrix}$$

知 $\widetilde{C_\lambda}, \lambda\in\Lambda$ 也是两两可交换的矩阵. 因此存在酉矩阵 $\widetilde{P}$, 使得每一个 $\left(\widetilde{P}\right)^{-1}\widetilde{C_\lambda}\widetilde{P}$ 都是上三角的. 然后我们取酉矩阵 $P=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & \widetilde{P}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 就有 $P^{-1}A_\lambda P=\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \left(\widetilde{P}\right)^{-1}\widetilde{C_\lambda}\widetilde{P}\end{pmatrix}, \forall\lambda\in\Lambda$ 都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

2. 设 $V=\mathbb{R}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1 和一个特征子空间 V_1 且 $1\leqslant\dim V_1<n$. 由交换性知 V_1 是所有 A_λ 不变子空间, 因此 $A_\lambda|_{V_1}, \lambda\in\Lambda$ 也是一族更低维度的两两可交换的矩阵. 于是我们就将维度降了下去, 从而可以使用归纳法来完成证明. 即:

当 $n=1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leqslant n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, $A_\lambda|_{V_1}, \lambda\in\Lambda$ 也是一族两两可交换的矩阵, 从而存在 V_1 的一族标准正交基, 使得在这组基下 $A_\lambda|_{V_1}$ 有上三角的表示矩阵 $\widetilde{A_\lambda}, \lambda\in\Lambda$. 将这组基扩充到 $\mathbb{R}^n$ 使得构成一组标准正交基, 则在新的标准正交基下, A_λ 有表示矩阵 $\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \widetilde{C_\lambda}\end{pmatrix}, \lambda\in\Lambda$. 由

$$\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \widetilde{C_\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A_\mu} & \widetilde{B_\mu}\\ 0 & \widetilde{C_\mu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{A_\mu} & \widetilde{B_\mu}\\ 0 & \widetilde{C_\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \widetilde{C_\lambda}\end{pmatrix}$$

知 $\widetilde{C_\lambda}, \lambda\in\Lambda$ 也是两两可交换的矩阵. 因此存在正交矩阵 $\widetilde{P}$, 使得每一个 $\left(\widetilde{P}\right)^{-1}\widetilde{C_\lambda}\widetilde{P}$ 都是上三角的. 然后我们取正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & \widetilde{P}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 就有 $P^{-1}A_\lambda P=\begin{pmatrix}\widetilde{A_\lambda} & \widetilde{B_\lambda}\\ 0 & \left(\widetilde{P}\right)^{-1}\widetilde{C_\lambda}\widetilde{P}\end{pmatrix}, \forall\lambda\in\Lambda$ 都是上三角矩阵, 我们完成了证明.

引理 23.1

任何域上的可对角化矩阵限制到不变子空间上仍然是可对角化矩阵. ♡

证明 注意到矩阵可对角化等价于极小多项式可以分解为一次式的积. 设 A 的极小多项式是 p, W 是矩阵 A 一个不变子空间且 p_W 是 $A|_W$ 极小多项式. 注意到 $p(A|_W)=0$, 故 $p_W|p$. 从而 p_W 也是一次式的积, 故 $A|_W$ 可对角化.

命题 23.4 (一族两两可交换的可对角化矩阵可同时相似对角化)

给定域 $\mathbb{F}$, 设 $A_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n}, \lambda\in\Lambda$ 且两两可交换. 若每一个 $A_\lambda, \lambda\in\Lambda$ 都可以在 $\mathbb{F}$ 上相似对角化, 则存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$P^{-1}A_\lambda P\text{是对角矩阵}, \forall\lambda\in\Lambda.$$

♠

证明 设 $V=\mathbb{F}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

Step 2 取某个非数量矩阵 A_1, 于是有 $V=\overset{s}{\underset{i=1}{\bigoplus}}V_i$, 这里 $s\geqslant 2$ 且 V_i 是属于 A_1 不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, V_i 是所有 A_λ 不变子空间, 且 $A_\lambda|_{V_i}, \lambda\in\Lambda$ 是一族两两可交换的矩阵, 由引理23.1知它们也是可对角化的. 注意到 $1\leqslant\dim V_i<n, i=1,2,\cdots,s$, 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

当 $n=1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leqslant n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, 对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 存在 V_i

的一个基使得 $A_\lambda|_{V_i},\lambda\in\Lambda$ 在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 于是把这些基合起来构成一个新的基, 我们就得到在这个新的基下 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 都是对角矩阵.

命题 23.5 (一族两两可交换的复正规 (实对称) 矩阵可同时酉 (正交) 相似对角化)

1. 给定指标集 Λ, 设 $A_\lambda\in\mathbb{C}^{n\times n},\lambda\in\Lambda$ 且两两可交换且复正规, 则存在酉矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得
$$P^{-1}A_\lambda P\text{是对角矩阵},\forall\lambda\in\Lambda.$$
2. 给定指标集 Λ, 设 $A_\lambda\in\mathbb{R}^{n\times n},\lambda\in\Lambda$ 且两两可交换且实对称, 则存在正交矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得
$$P^{-1}A_\lambda P\text{是对角矩阵},\forall\lambda\in\Lambda.$$

♠

笔记 注意到 $(Ax,y)=\left(x,A^Ty\right),(Ax,y)=(x,A^*y)$ 在全空间成立则在子空间也成立, 所以 $A^T|_V=(A|_V)^T,A^*|_V=(A|_V)^*$, 所以一个实对称变换限制在不变子空间也是实对称的, 一个复正规变换限制在不变子空间也是复正规的.

证明

1. 设 $V=\mathbb{C}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

   Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

   Step 2 取某个非数量矩阵 A_1, 于是有 $V=\bigoplus_{i=1}^{s}V_i$, 这里 $s\geqslant 2$ 且 V_i 是属于 A_1 不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个 $i=1,2,\cdots,s,V_i$ 是所有 A_λ 不变子空间, 且 $A_\lambda|_{V_i},\lambda\in\Lambda$ 是一族两两可交换的正规矩阵, 于是可酉对角化的. 注意到 $1\leqslant\dim V_i<n,i=1,2,\cdots,s$, 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

   当 $n=1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leqslant n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, 对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 存在 V_i 的一个标准正交基使得 $A_\lambda|_{V_i},\lambda\in\Lambda$ 在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 于是把这些基合起来构成一个新的基, 我们就得到在这个新的基下 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 都是对角矩阵.
2. 设 $V=\mathbb{R}^n$ 且 A_λ 是 V 上线性变换.

   Step 1 若 A_λ 都是数量矩阵, 则结果已经成立.

   Step 2 取某个非数量矩阵 A_1, 于是有 $V=\bigoplus_{i=1}^{s}V_i$, 这里 $s\geqslant 2$ 且 V_i 是属于 A_1 不同特征值的特征子空间. 显然由交换性, 对每一个 $i=1,2,\cdots,s,V_i$ 是所有 A_λ 不变子空间, 且 $A_\lambda|_{V_i},\lambda\in\Lambda$ 是一族两两可交换的实对称矩阵, 由引理23.1知它们也是可正交相似对角化的. 注意到 $1\leqslant\dim V_i<n,i=1,2,\cdots,s$, 所以我们的维度降下去了, 因此可使用归纳法.

   当 $n=1$, 命题显然成立, 假设命题对 $\leqslant n-1$ 都成立, 当 n 时, 由归纳假设, 对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 存在 V_i 的一个标准正交基使得 $A_\lambda|_{V_i},\lambda\in\Lambda$ 在这个基下表示矩阵是对角矩阵. 于是把这些基合起来构成一个新的基, 我们就得到在这个新的基下 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 都是对角矩阵.

引理 23.2 (根子空间维数)

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $\mathbb{F}$ 是域. 若 $\lambda\in\mathbb{F}$ 是 A 的 r 重特征值, 则我们有
$$\dim\ker(\lambda E-A)^m=r,\forall m\geqslant r. \tag{23.7}$$
♡

证明 注意到
$$\dim\ker(\lambda E-A)^r=n-\operatorname{rank}\left((\lambda E-A)^r\right).$$
而秩不随域扩张而改变, 故不妨设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域. 则 A 有 Jordan 标准型
$$\begin{pmatrix}J_{n_1}(\lambda)&&\\&\ddots&\\&&J_{n_s}(\lambda)\end{pmatrix}_J,\sum_{i=1}^{s}n_i=r,$$

这里 J 没有特征值 λ. 于是直接计算[7]有

$$(A-\lambda E)^r=\begin{pmatrix} J_{n_1}^r(0) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{n_s}^r(0) & \\ & & & (J-\lambda E_{n-r})^r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & (J-\lambda E_{n-r})^r \end{pmatrix},\det(J-\lambda E_{n-r})^r\neq 0.$$

现在知 $\operatorname{rank}(A-\lambda E)^r=n-r$, 这就得到了(23.7)的 $m=r$ 的情况. 注意到当 $m>r$ 时, 上述矩阵 0 块在次方时不会继续丢失阶数, 因此秩不会再次减少, 所以(23.7)对任何 $m\geqslant r$ 都成立, 这就完成了证明.

定理 23.16 (公共特征向量)

给定域 $\mathbb{F}$, 指标集 Λ 和 $A_\lambda\in\mathbb{F}^{n\times n},\lambda\in\Lambda$.

1. 若 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 两两可交换;
2. 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R},n$为奇数.

则 A_λ 在 $\mathbb{F}$ 上有公共特征向量. ♡

笔记 某种角度上说, 存在公共特征向量和可同时相似上三角化是等价的. 这是因为由可同时上三角化, 不妨设 $A_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 都是上三角矩阵, 注意观察第一列知他们有公共的特征向量 e_1[8].

证明 证明的关键在于奇数次实多项式必有实根, 从而奇数矩阵必有实特征值.

Step 1 取 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的极大无关组[9]$A_1,A_2,\cdots,A_k$. 如果能找到 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的公共特征向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, 则对任何 $A_\lambda=\sum\limits_{i=1}^k c_iA_i$, 都有

$$A_\lambda\alpha=\sum_{i=1}^k c_iA_i\alpha=\left(\sum_{i=1}^k c_i\lambda_i\right)\alpha,$$

这里 λ_i 是 $A_i,1\leqslant i\leqslant k$ 关于特征向量 α 的特征值. 于是问题变成只需要对有限个矩阵讨论.

Step 2 对于两两可交换的实矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$. 取 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的极大无关组[10]$A_1,A_2,\cdots,A_k$. 设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是 A_1 的奇数重特征值, 记重数为 $r\in\mathbb{N}$ 并设 $W=\ker(\lambda E-A_1)^r$. 由引理23.2知 $\dim W=r$ 且显然有 $A_j|_W,j=2,3,\cdots,k$ 两两可交换.

注意到 $r=n$ 是可能的, 真正降下去的是矩阵个数, 所以我们对矩阵个数归纳. 命题对 $k=1$ 显然成立, 假设命题对 $\leqslant k-1$ 成立, 当 k 时我们运用归纳假设知 $A_j|_W,j=2,3,\cdots,k$ 有公共特征向量, 即存在实数 $\lambda_i,2\leqslant i\leqslant k$, 使得

$$W'=\bigcap_{i=2}^k\ker(\lambda_iI-A_i|_W)\neq\{0\}.$$

Step 3 由可交换性知 W' 是 A_1 不变子空间, 所以断言 $A_1|_{W'}$ 在 $\mathbb{C}$ 上特征值只有 λ. 事实上显然 $W'\subset W$. 又设在复数域上 $A_1\beta=\mu\beta,\beta\neq 0,\mu\in\mathbb{C}$, 则

$$0=(\lambda E-A_1)^r\beta=(\lambda E-A_1)^{r-1}(\lambda\beta-A_1\beta)=(\lambda-\mu)(\lambda E-A_1)^{r-1}\beta=\cdots=(\lambda-\mu)^r\beta,$$

故 $\mu=\lambda$.

Step 4 取 W' 中 A_1 一个特征向量[11]γ, 则 γ 是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 公共特征向量, 这就完成了证明.

[7]可复习21.2.

[8]不借助不妨设观点, 即取同时上三角化的可逆过渡矩阵 P 第一列.

[9]在 $\mathbb{R}^{n\times n}$.

[10]在 $\mathbb{R}^{n\times n}$.

[11]存在性有上面对特征值的讨论保证.

引理 23.3 (牛顿公式)

设

$$s_j=\sum_{i=1}^{n}x_i^j,\sigma_j=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_j\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j},j=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0,1\leqslant k\leqslant n;$$
$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}s_{k-n+1}+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0,k>n.$$

♡

引理 23.4

对域 $\mathbb{F}$, 设 $C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $\operatorname{tr}\left(C^k\right)=0,\forall k\in\mathbb{N}$, 则 C 是幂零矩阵.

♡

证明 不妨设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的, 设 C 的全部特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 这里可能相同. 则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k=0,\forall k\in\mathbb{N},$$

即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一切幂和为 0. 由牛顿公式23.3, 我们有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 构成的所有初等对称多项式为 0. 由韦达定理, 我们有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是 $\lambda^n=0$ 的根, 这就证明了 C 的全部特征值都是 0, 故 C 是幂零矩阵.

例题 23.6 给定数域 $\mathbb{F}$, $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$,$A,B$ 特征值都在 $\mathbb{F}$ 中.

1. 若 $AB=0$, 证明存在可逆 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
2. 若 $\operatorname{rank}(AB-BA)\leqslant 1$, 证明存在可逆 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
3. 若存在 $a,b\in\mathbb{F}$ 使得 $AB-BA=aA+bB$, 证明存在可逆 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

证明

1. 若 A 可逆, 则 $B=0$, 此时因为 $AB=BA=0$, 运用可交换矩阵可同时上三角化23.2即证, 当然, 由23.16, 此时 A,B 有公共特征向量. 若 A 不可逆注意到 $\ker A$ 是 B 的不变子空间, 所以存在 $B|_{\ker A}$ 的特征向量 $\alpha\in\ker A$. 此时 α 也是 A 的特征向量. 于是我们证明了 A,B 总是有公共特征向量.
   那么我们运用归纳法, 当 $n=1$ 显然, 假定命题对 $n-1$ 时成立, 当 n 时, 设 α 是 A,B 公共特征向量, 将其扩充为 $\mathbb{F}^n$ 一组基, 在这组基下, A,B 分别有表示矩阵
   $$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}c_1&\beta_1^T\\0&A_{n-1}\end{pmatrix},\widetilde{B}=\begin{pmatrix}c_2&\beta_2^T\\0&B_{n-1}\end{pmatrix},c_1,c_2\in\mathbb{F}.$$
   由 $AB=0$ 知 $A_{n-1}B_{n-1}=0$. 故可对 A_{n-1},B_{n-1} 用归纳假设. 即存在可逆 $P_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得 $P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1},P_{n-1}^{-1}B_{n-1}P_{n-1}$ 是上三角矩阵. 于是取 $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&P_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 就有
   $$P^{-1}\widetilde{A}P=\begin{pmatrix}c_1&\beta_1^T\\0&P_{n-1}^{-1}A_{n-1}P_{n-1}\end{pmatrix},P^{-1}\widetilde{B}P=\begin{pmatrix}c_2&\beta_2^T\\0&P_{n-1}^{-1}B_{n-1}P_{n-1}\end{pmatrix}$$
   都是上三角矩阵. 这就证明了存在可逆 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.
2. 若 $\operatorname{rank}(AB-BA)=0$, 这是可交换矩阵可同时上三角化23.2的直接结果. 若 $\operatorname{rank}(AB-BA)=1$, 我们假定 A 是不可逆的, 否则用 $A-\lambda I,\lambda\in\mathbb{F}$ 代替 A. 下证 $\ker A,\operatorname{Im}A$ 必有一个是 B 的不变子空间.
   Step 1 若 $\ker A\subset\ker(AB-BA)$, 则设 $x\in\ker A$, 我们有 $ABx=BAx=0$, 这就证明了 $\ker A$ 是 B 不变子空间.
   Step 2 若 $\ker A\subset\ker(AB-BA)$ 不成立. 取 $x\in\ker A$ 使得 $y=(AB-BA)x\neq 0$. 注意到 $\operatorname{rank}(AB-BA)=1$, 故 $\operatorname{Im}(AB-BA)=\operatorname{span}\{y\}$. 但是
   $$y=(AB-BA)x=ABx-BAx=ABx\in\operatorname{Im}A,$$

这就说明 $\mathrm{Im}\left(AB-BA\right)\subset \mathrm{Im}A$. 于是对 $u=Av\in \mathrm{Im}A$, 我们有

$$Bu=BAv=ABv-\left(AB-BA\right)v\in \mathrm{Im}A,$$

从而确实了 $\mathrm{Im}A$ 是 B 不变子空间.

注意到 A,B 有一个公共非平凡不变子空间. 所以取这个不变子空间一组基扩充为全空间的基, 则 A,B 有表示矩阵

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\widetilde{B}=\begin{pmatrix}B_1 & B_3\\ 0 & B_2\end{pmatrix}.$$

注意到

$$\begin{aligned}r\left(AB-BA\right)&=r\begin{pmatrix}A_1B_1-B_1A_1 & *\\ 0 & A_2B_2-B_2A_2\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{秩不等式21.6}}{\geqslant} r\begin{pmatrix}A_1B_1-B_1A_1 & 0\\ 0 & A_2B_2-B_2A_2\end{pmatrix}\\ &=r\left(A_1B_1-B_1A_1\right)+r\left(A_2B_2-B_2A_2\right),\end{aligned}$$

我们有

$$r\left(A_1B_1-B_1A_1\right)\leqslant 1,r\left(A_2B_2-B_2A_2\right)\leqslant 1,$$

现在阶降下去了, 类似我们前面证明我们知道 A,B 可同时相似上三角化.

3. 如果 $a=b=0$, 那么这是可交换矩阵可同时上三角化23.2的直接结果. 不失一般性, 不妨设 $a\neq 0$. 我们可以用 $\frac{1}{a}B$ 代替 B 来不妨设 $a=1$. 那么记 $C=AB-BA=A+bB$, 则成立等式 $CB-BC=C$. 显然只需证明 C,B 可同时相似上三角化即可, 因为此时 A 也就被相似上角化. 注意到[12]

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(CB-BC\right)=\mathrm{tr}\left(C\right)=0,\mathrm{tr}\left(CCB-CBC\right)=\mathrm{tr}\left(C^2\right)=0,\\ &\mathrm{tr}\left(CCCB-CCBC\right)=\mathrm{tr}\left(C^3\right)=0,\mathrm{tr}\left(CCCCB-CCCBC\right)=\mathrm{tr}\left(C^4\right)=0,\\ &\vdots\end{aligned}$$

于是我们证明了 $\mathrm{tr}\left(C^k\right)=0,\forall k\in\mathbb{N}$. 由引理23.4, 我们知道 C 是幂零矩阵.

假设 B,C 没有公共特征向量且 $Bx=\lambda x,x\neq 0,\lambda\in\mathbb{F}$, 则 $Cx\neq 0$ 且

$$CBx-BCx=Cx\Rightarrow\left(B-\left(\lambda-1\right)I\right)Cx=0,$$

因此 B 有特征值 $\lambda-1$. 这样 B 也应该有特征值 $\lambda-2$, 如此下去 B 会有无穷多个特征值, 这不可能! 所以 B,C 应该有公共特征向量 α. 将 α 扩充为全空间的一组基, B,C 在这组基下有表示矩阵

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix},\widetilde{C}=\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & C_1\end{pmatrix},\lambda\in\mathbb{F},C_1\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)},$$

则 $C_1B_1-B_1C_1=C_1$. 这样阶数就降下去了. 所以可以类似前面归纳完成证明.

例题 23.7 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n},x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 满足 $AB=xBA$, 证明:

1. 若 A,B 有一个不可逆, 则 A,B 有公共特征向量.
2. 若 $x^k\neq 1,2\leqslant k\leqslant n$, 证明 A,B 可以同时相似上三角化.

注 $x=0$ 的情况在例题23.6已经讨论过.

证明

1. 不妨设 A 不可逆, 由 $AB=xBA$ 得 $\ker A$ 是 B 的非平凡不变子空间, 于是 $B|_{\ker A}$ 的特征向量就是 A,B 公共特征向量.
2. 注意到

$$\left|AB\right|=x^n\left|BA\right|\Rightarrow\left|AB\right|=0,$$

[12] 经典技巧, 积累.

我们知道 A,B 必有一个不可逆. 由 1 问, 可以不妨设

$$A=\begin{pmatrix}a & \alpha^T\\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b & \beta^T\\ 0 & B_{n-1}\end{pmatrix},a,b\in\mathbb{C},A_{n-1},B_{n-1}\in\mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

现在

$$A_{n-1}B_{n-1}=xB_{n-1}A_{n-1},$$

因此可以归纳法证明 A,B 可以同时相似上三角化. 我们完成了证明.

作为牛顿公式一个经典应用, 我们考虑如下例题:

例题 23.8 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 考虑数列

$$a_0=1,a_1=0,a_m=\frac{1}{m}\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j-1}a_{m-j}\mathrm{tr}\left((AB-BA)^j\right),m\geqslant 2.$$

证明:$AB-BA$ 特征多项式是

$$\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^n a_n.$$

注 特别的, 当 $n=3$, 我们有

$$a_2=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left((AB-BA)^2\right),a_3=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left((AB-BA)^3\right),$$

这就得到了

$$\det(AB-BA)=\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left((AB-BA)^3\right).$$

证明 记 $AB-BA$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 对应初等对称多项式为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$. 则

$$s_j\triangleq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^j=\mathrm{tr}\left((AB-BA)^j\right),j=0,1,2,\cdots.$$

由牛顿公式23.3得

$$\sigma_0=1,\sigma_m=\frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sigma_{m-j}s_j\right),1\leqslant m\leqslant n.$$

注意到

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=s_1=\mathrm{tr}(AB-BA)=0,$$

所以

$$\sigma_0=1,\sigma_1=0,\sigma_m=\frac{1}{m}\left(\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j-1}\sigma_{m-j}s_j\right),2\leqslant m\leqslant n.$$

于是就有

$$a_j=\sigma_j,j=0,1,2,\cdots,n,$$

这就完成了证明.

23.1.4 同时合同对角化

在非数学类决赛线性代数总结中, 我们证明了正定矩阵和实对称矩阵可同时合同对角化21.13. 我们给出一个另外一个更为深刻的结果.

引理 23.5 (半正定矩阵的对角线类极值性质)

设半正定矩阵[a] $A=(a_{ij})$ 的 (i,i) 元为 0, 则 A 的第 i 行和第 i 列都为 0.

[a]可实对称可复 Hermite.

♡

证明 不妨在 $\mathbb{R}$ 上考虑且不妨设 $(i,i)=(1,1)$, 否则同时交换行列使得 (i,i) 到左上角, 由合同对应的初等变换21.2, 我们知道这样得到的矩阵与原本的矩阵合同, 从而仍然是半正定矩阵.

现在利用半正定矩阵主子式非负我们有

$$-a_{12}^2=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2\geqslant 0,$$

故 $a_{12}=0$, 类似的知道 A 第一行第一列全为 0. 这就完成了证明.

定理 23.17

两个半正定矩阵 A,B[a]可同时合同对角化.

[a]可实对称可复 Hermite.

♡

证明 不妨在 $\mathbb{R}$ 上考虑. 注意到 $A+B$ 是半正定的, 所以存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$C^T(A+B)C=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=C^TAC+C^TBC. \tag{23.8}$$

注意到 C^TAC, C^TBC 都是半正定的且对角元非负. 因此 C^TAC, C^TBC 的后 $n-r$ 个对角元都为 0, 结合引理23.5和(23.8)知

$$C^TAC=\begin{pmatrix}A' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, C^TBC=\begin{pmatrix}B' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A'+B'=E_r.$$

取正交矩阵 $T'\in\mathbb{R}^{r\times r}$ 使得 $(T')^{-1}B'T'=\Lambda$ 为对角矩阵, 则 $(T')^{-1}A'T'=E_r-\Lambda$ 也为对角矩阵. 故设 $P=C\begin{pmatrix}T' & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}$, 则有

$$P^TAP=\begin{pmatrix}E_r-\Lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, P^TBP=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

命题 23.6

设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵, 则

$$|A+B|\geqslant|A|. \tag{23.9}$$

且当(23.9)等号成立并且左右都非 0 时必有 $B=0$.

♠

笔记 复 Hermite 半正定矩阵也成立, 证明类似.

证明 由定理23.17知存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix}A' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, C^TBC=\begin{pmatrix}B' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A'+B'=E_r,$$

这里 A',B' 都是半正定对角矩阵. 于是(23.9)等价于

$$\left|C^TAC+C^TBC\right|\geqslant\left|C^TAC\right|,$$

即等价于

$$|\mathrm{diag}\{E_r,0\}|\geqslant|\mathrm{diag}\{A',0\}|.$$

当 $0\leqslant r<n$, 则上式左右都是 0. 当 $r=n$, 则上述不等式左边是 1, 右边对角线每个元素都小于等于 1, 所以行列

式小于等于 1, 因此不等式成立. 此时若等号成立, 则 $B'=0$, 即 $B=0$

例题 23.9 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵, 则

$$|A+B|\geqslant|A|+|B|. \tag{23.10}$$

证明 不妨设 A,B 都是正定的, 否则考虑 $A+\lambda E,B+\lambda E,\lambda>0$ 并让 $\lambda\to0^+$ 即得.

不妨设 $A=E$, 否则做一个合同即得. 现在(23.10)等价于

$$|E+B|\geqslant1+|B|.$$

设 B 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in(0,+\infty)$, 于是我们有

$$|E+B|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\geqslant1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=1+|B|,$$

这就证明了式(23.10).

23.1.5 矩阵的哈达马积和克罗内克积

在本节, 我们没有证明的结论都可以直接使用, 其证明可以在丘维声或者白皮书找到.

定义 23.1 (克罗内克积)

设 $\mathbb{F}$ 是数域且 $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n},B=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{k\times\ell}$, 我们定义

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B\end{pmatrix}.$$

♣

笔记 抽象的写, 我们有

$$(A\otimes B)_{((t-1)k+r,(t'-1)\ell+r')}=a_{tt'}b_{rr'},1\leqslant t\leqslant m,1\leqslant t'\leqslant n,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant r'\leqslant\ell.$$

定理 23.18 (克罗内克积性质)

当下述表达式有意义时, 必有

1. $(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C,A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$;
2. $(kA)\otimes C=k(A\otimes C)=A\otimes(kC),\forall k\in\mathbb{F}$;
3. $(A\otimes C)(B\otimes D)=(AB)\otimes(CD)$;
4. $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$;
5. $I_m\otimes I_n=I_{mn}$;
6. $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$;
7. 若 $A,B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则 $\overline{A\otimes B}=\overline{A}\otimes\overline{B}$;
8. $r(A\otimes B)=r(A)\times r(B)$;
9. $A\otimes B$ 行 (列) 满秩等价于 A,B 都是行 (列) 满秩. 当 A,B 可逆, 必有 $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$;
10. 若 $A\in\mathbb{F}^{m\times m},B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $|A\otimes B|=|A|^n\cdot|B|^m,\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}(A)\cdot\operatorname{tr}(B)$. 更强的, 若 A 特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 且 B 特征值是 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$, 则 $A\otimes B$ 特征值是

$$\lambda_i\mu_j,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n.$$

11. 分块矩阵的张量积计算

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}\otimes B & A_{12}\otimes B & \cdots & A_{1s}\otimes B \\ A_{21}\otimes B & A_{22}\otimes B & \cdots & A_{2s}\otimes B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1}\otimes B & A_{t2}\otimes B & \cdots & A_{ts}\otimes B \end{pmatrix}.$$

♡

定义 23.2 (哈达马积)

设 $\mathbb{F}$ 是数域且 $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}, B=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 我们定义

$$(A\circ B)_{(i,j)}=a_{ij}b_{ij}, 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n.$$

♣

注意到[13]

$$A\circ B=\left(E_{1,1}+E_{2,m+2}+\cdots+E_{m,m^2}\right)(A\otimes B)\left(E_{1,1}+E_{n+2,2}+\cdots+E_{n^2,n}\right)=P(A\otimes B)Q, \tag{23.11}$$

这里 $P\in\mathbb{F}^{m\times m^2}, Q\in\mathbb{F}^{n^2\times n}$. 当 $m=n$, 有 $Q=P^T$, 此时 $A\circ B$ 是 $A\otimes B$ 主子阵, 于是有

定理 23.19 (哈达马积性质)

当下述表达式有意义时, 必有

1. $r(A\circ B)\leqslant r(A)\cdot r(B)$;
2. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}, B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 或 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}, B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 若 A,B 半正定或 Hermite 半正定, 我们有

$$\lambda_{\min}(A\circ B)\geqslant\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B),$$

这里 $\lambda_{\min}$ 表示最小特征值. 特别的, $A\circ B$ 半正定.

♡

证明

1. 子矩阵的秩当然不小于等于原矩阵的秩, 于是由(23.11)和定理23.18, 我们知道

$$r(A\circ B)\leqslant r(A\otimes B)=r(A)\cdot r(B).$$

2. $A\circ B$ 是 $A\otimes B$ 主子式, 不妨设在 $A\otimes B$ 左上角, 否则同时交换行列[14]即可. 现在记

$$A\otimes B=T=\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}, A\circ B=T_1.$$

我们由定理23.18知 T 最小特征值为 $\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B)$. 考虑

$$\lambda\triangleq\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B)\geqslant 0,$$

则 $T-\lambda I=\begin{pmatrix} T_1-\lambda I & T_2 \\ T_3 & T_4-\lambda I \end{pmatrix}$ 还是半正定的, 故 $T_1-\lambda I$ 半正定. 这就证明了

$$\lambda_{\min}(A\circ B)\geqslant\lambda_{\min}(A)\cdot\lambda_{\min}(B).$$

23.1.6 矩阵空间上的经典线性映射

定理 23.20 (AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致)

设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, B\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 则 AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致.

♡

[13]建议记忆, 考试直接默写.

[14]这是正交相似, 见21.2.

证明 考虑 $PAQQ^{-1}BP^{-1},Q^{-1}BP^{-1}PAQ$ 可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}E_r & 0_{r\times(n-r)}\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix},B_1\in\mathbb{C}^{r\times r},B_3\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)},$$

这里 B 的分块和 A 对应. 于是直接计算有

$$AB=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_3 & 0\end{pmatrix}. \tag{23.12}$$

从(23.12)可以看到 AB,BA 非 0 特征值都集中在 B_1 上, 所以非 0 特征值完全一致. 设 $\lambda\neq 0$ 是 AB,BA 特征值. 则回忆定理21.3, 决定 C Jordan 块分布, 我们知道只需决定 $(\lambda E-C)^k,k\in\mathbb{N}_0$ 的秩即可. 于是对每个 $k\in\mathbb{N}_0$, 我们有

$$(\lambda E_m-AB)^k=\begin{pmatrix}(\lambda E_r-B_1)^k & *\\ 0 & \lambda^k E_{m-r}\end{pmatrix},(\lambda E_n-BA)^k=\begin{pmatrix}(\lambda E_r-B_1)^k & 0\\ * & \lambda^k E_{n-r}\end{pmatrix}.$$

作初等变换

$$\begin{pmatrix}(\lambda E_r-B_1)^k & *\\ 0 & \lambda^k E_{m-r}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(\lambda E_r-B_1)^k & 0\\ 0 & \lambda^k E_{m-r}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(\lambda E_r-B_1)^k & 0\\ * & \lambda^k E_{n-r}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(\lambda E_r-B_1)^k & 0\\ 0 & \lambda^k E_{n-r}\end{pmatrix},$$

于是我们证明了

$$r\left((\lambda E_m-AB)^k\right)+n=r\left((\lambda E_n-BA)^k\right)+m,\forall k\in\mathbb{N}_0,$$

这就证明了[15] AB 和 BA 的非 0 Jordan 完全一致.

推论 23.1 ($E+MN$ 和 $E+NM$ 秩相同)

设 $M\in\mathbb{C}^{n\times n},N\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则 $E+MN$ 和 $E+NM$ 有相同的秩. ♡

证明 因为 $E+MN$ 和 $E+NM$ 的秩分别完全由 MN 和 NM 的特征值 -1 的 Jordan 块块数决定, 因此由定理23.20知推论23.1成立.

推论 23.2

设 A,B 都是 n 阶复矩阵, 则 $AB\sim BA$ 充要条件是

$$r\left((AB)^i\right)=r\left((BA)^i\right),i=1,2,\cdots,n-1. \tag{23.13}$$

♡

证明 由定理23.20, 所以由定理21.3, 只需对 0 特征值讨论秩. 因此 $AB\sim BA$ 等价于(23.13)成立.

例题 23.10

1. 已知

$$AB=\begin{pmatrix}8 & 0 & -4\\ -\frac{3}{2} & 9 & -6\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},A\in\mathbb{C}^{3\times 2},B\in\mathbb{C}^{2\times 3},$$

求 BA.

2. 设 $A\in\mathbb{C}^{4\times 2},B\in\mathbb{C}^{2\times 4}$ 满足

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

求 BA.

证明 此类问题肯定就是通过定理23.20来确定.

[15] 注意 m,n 的存在不影响, 因为定理21.3中的等式 $N_j(t)$ 会消去 m,n.

1. 计算得 $AB\sim \operatorname{diag}\{0,9,9\}$. 故 $BA\sim \operatorname{diag}\{9,9\}$. 从而 $BA=9E_2$.
2. 计算得

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

故 $BA\sim\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, 因此 $BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

例题 23.11 设 n 阶复矩阵 A,B 满足 $r(ABA)=r(B)$, 证明 $AB\sim BA$.

证明 类似定理23.20的证明, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix},B_1\in\mathbb{C}^{r\times r}.$$

则

$$r(ABA)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}\right).$$

于是

$$r(ABA)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}B_1\\B_3\end{pmatrix}\right)\geqslant r(B_1),$$

以及

$$r(ABA)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}\right)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}\right)\geqslant r(B_1).$$

故

$$r\left(\begin{pmatrix}B_1\\B_3\end{pmatrix}\right)=r(B_1)=r\left(\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}\right).$$

由线性方程组解的定理, 我们知道存在 X,Y 使得 $B_2=B_1X,B_3=YB_1$, 从而有

$$AB=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&B_1X\\0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{相似对应的初等变换21.3}}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}B_1&0\\B_3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&0\\YB_1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{相似对应的初等变换21.5}}\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

我们证明了 $AB\sim BA$.

例题 23.12 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m},B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 计算 $T:\mathbb{C}^{m\times n}\to\mathbb{C}^{m\times n},X\mapsto AX-XB$ 在基

$$\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},E_{22},\cdots,E_{2n},E_{m1},E_{m2},\cdots,E_{mn}\}$$

下的表示矩阵 $\widehat{T}$.

证明 直接计算有

$$\begin{aligned}\left(\widehat{T}\right)_{((t-1)n+r,(t'-1)n+r')}&=\left(T\left(E_{t'r'}\right)\right)_{(t,r)}=\left(AE_{t'r'}-E_{t'r'}B\right)_{(t,r)}\\&=a_{tt'}\delta_{r'r}-b_{r'r}\delta_{t't}=\left(A\otimes I_n-I_m\otimes B^T\right)_{((t-1)n+r,(t'-1)n+r')},\end{aligned}$$

这给出了 $\widehat{T}=A\otimes I_n-I_m\otimes B^T$.

定理 23.21 (Lie 映射经典性质)

给定 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义 $l_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\to AX-XA$, 我们有

1. A 所有特征值相同等价 l_A 幂零.

2. l_A 可对角化等价于 A 可对角化. ♡

笔记 一个处理本题的经典技巧是考虑 l_A 在基 $\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}\}$ 下的表示矩阵形如 $A\otimes I-I\otimes A^T$, 但我们引入的考虑自然同构的技巧可以完美且简洁的替代这个方法.

证明

1. 若 A 所有特征值相同, 则对 $\lambda\neq 0$,
$$l_AX=\lambda X\Leftrightarrow AX=X\left(\lambda E+A\right).$$
由命题21.5和 $A,A+\lambda E$ 没有公共特征值, 我们知道 $l_AX=\lambda X$ 只有 0 解. 现在 l_A 特征值全为 0 知 l_A 是幂零矩阵.
反过来, 若 A 有两个不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, 由命题21.5, 取 $X_0\in\mathbb{C}^{n\times n}\setminus\{0\}$ 使得
$$AX_0=X_0\left[\left(\lambda_2-\lambda_1\right)E+A\right].$$
于是 $l_AX_0=\left(\lambda_2-\lambda_1\right)X_0$, 这表明 l_A 有非 0 特征值, 这就是一个矛盾! 故 A 所有特征值相同.
2. 充分性, 若 A 可对角化, 可不妨设 A 是对角矩阵, 这是因为设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP=\widetilde{A}$ 为对角矩阵, 那么注意到交换图
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^{n\times n} & \xrightarrow{l_A} & \mathbb{C}^{n\times n}\\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau\\ \mathbb{C}^{n\times n} & \xrightarrow[l_{\widetilde{A}}]{} & \mathbb{C}^{n\times n}\end{array},$$
这里 $\tau(X)=P^{-1}XP,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 换言之, 在同构 τ 下, $l_A,l_{\widetilde{A}}$ 应该有相同的线性代数性质, 所以我们可以不妨设 A 为对角矩阵.
不妨设
$$A=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\},\lambda_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n.$$
于是直接计算表明
$$l_A\left(E_{ij}\right)=\left(\lambda_i-\lambda_j\right)E_{ij},\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\},$$
这就证明了 l_A 是可对角化的.
必要性: 运用 Jordan 分解23.2, 我们知道 $A=B+C,B$可对角化,C 幂零,$BC=CB$, 则 $l_A=l_B+l_C$, 由充分性知 l_B 可对角化, 由第一问知 l_C 幂零. 容易验证 $l_C\circ l_B=l_B\circ l_C$, 于是由23.2的唯一性, 我们知道 $l_A=l_B+l_C$ 这是 l_A 的 Jordan 分解. 现在 $l_A=l_A+0$ 也是一个 Jordan 分解, 故 $l_B=l_A,l_C=0$. 现在 $CX=XC,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 由命题21.6, 我们知道 C 为数量矩阵, 所以结合 C 幂零, 我们知道 $C=0$, 故 $A=B$ 可对角化, 这就完成了证明.

笔记 考虑线性映射 $l:\mathbb{C}^{n\times n}\to\operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{n\times n}\right),A\mapsto l_A$. 则从证明可以看到
$$\ker l=\left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:A\text{是数量矩阵.}\right\}.$$

接下来我们希望通过 A 的 Jordan 标准型来刻画 l_A 的 Jordan 标准型, 来看一种特殊情况:

例题 23.13* 延续定理23.21的符号, 求 $l_{J_n(0)}$ 的 Jordan 标准型.

注阅读本题答案之前可以先做习题12..

笔记 λ 矩阵来计算 Jordan 和利用秩来计算 Jordan 都是比较常用的技巧, 在不同时候可以选用不同的方法. 相对来说 λ 矩阵的方法更为直观, 秩方法更容易计算.

证明 由定理23.21知 $l_{J_n(0)}$ 是幂零的, $l_{J_n(0)}$ 在基 $\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}\}$ 下的表示

矩阵形如

$$J_n(0)\otimes I - I\otimes J_n(0)^T = \begin{pmatrix} -J_n^T(0) & I_n & & \\ & -J_n^T(0) & \ddots & \\ & & \ddots & I_n \\ & & & -J_n^T(0) \end{pmatrix}.$$

考虑其对应的 λ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n + J_n^T(0) & -I_n & & \\ & \lambda I_n + J_n^T(0) & \ddots & \\ & & \ddots & -I_n \\ & & & \lambda I_n + J_n^T(0) \end{pmatrix}.$$

相似习题12.的计算, 我们有

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n + J_n^T(0) & -I_n & & \\ & \lambda I_n + J_n^T(0) & \ddots & \\ & & \ddots & -I_n \\ & & & \lambda I_n + J_n^T(0) \end{pmatrix} \text{等价于} \operatorname{diag}\left\{ \underbrace{I_n, I_n, \cdots, I_n}_{n-1\text{个}}, \left(\lambda I_n + J_n^T(0)\right)^n \right\},$$

于是其初等因子由 $\left(\lambda I_n + J_n^T(0)\right)^n$ 的初等因子决定. 取转置不影响初等因子, 因此也可以看成由 $(\lambda I_n + J_n(0))^n$ 初等因子决定. 注意到由命题21.2的计算, 我们有

$$(\lambda I_n + J_n(0))^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & n\lambda \\ & \lambda^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

上述矩阵右上角的 k 阶子式为其对应的 k 阶行列式因子. 展开下述行列式

$$\begin{vmatrix} C_n^k\lambda^k & C_n^{k-1}\lambda^{k-1} & \cdots & n\lambda \\ & C_n^k\lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_n^{k-1}\lambda^{k-1} \\ & & & C_n^k\lambda^k \end{vmatrix},$$

得 k 阶行列式因子为 λ^{k^2}, 所以对应不变因子为 $\lambda, \lambda^{2^2-1}, \cdots, \lambda^{n^2-(n-1)^2} = \lambda, \lambda^3, \cdots, \lambda^{2n-1}$, 也即全部初等因子. 这就证明了 $l_{J_n(0)}$ 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{J_1(0), J_3(0), \cdots, J_{2n-1}(0)\}$.

例题 23.14 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}, B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 对任何 $C\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 矩阵方程 $AX-XB=C$ 在 $X\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 有唯一解的充要条件是 A, B 没有一个相同的特征值.

证明 考虑线性映射 $f:\mathbb{C}^{m\times n}\to\mathbb{C}^{m\times n}, X\to AX-XB$, 则对任何 $C\in\mathbb{C}^{m\times n}$, , $AX-XB=C$ 在 $X\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 有解的充要条件是 f 为满射. 而 f 为满射等价为单射, 因此又等价于 $f(X)=0$ 只有 0 解, 这恰好是 $AX=XB$ 只有 0 解, 故由命题21.5知对任何 $C\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $AX-XB=C$ 在 $X\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 有解的充要条件是 A, B 没有一个相同的特征值. 此外若 A, B 没有一个相同的特征值, 则 f 单射, 因此矩阵方程 $AX-XB=C$ 在 $X\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 有唯一解. 这就完成了证明.

例题 23.15

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, B\in\mathbb{C}^{k\times p}$, 考虑 $T_{A,B}:\mathbb{C}^{n\times k}\to\mathbb{C}^{m\times p}, X\mapsto AXB$, 求
$$\dim\ker T_{A,B}, \dim \operatorname{Im} T_{A,B}.$$
2. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, B\in\mathbb{C}^{k\times p}$, 求 $T_{A,B}$ 在基
$$\{E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1k}, E_{21}, \cdots, E_{2k}, \cdots, E_{n1}, \cdots, E_{nk}\}$$

和基

$$\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1p},E_{21},\cdots,E_{2p},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mp}\}$$

下的表示矩阵.

证明

1. 考虑等价标准型

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},RBS=\begin{pmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是记

$$\widetilde{T_{A,B}}=T_{\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}},\tau:\mathbb{C}^{n\times k}\to\mathbb{C}^{n\times k},X\mapsto Q^{-1}XR^{-1},\tau':\mathbb{C}^{m\times p}\to\mathbb{C}^{m\times p},X\mapsto PXS,$$

就有交换图

$$A\qquad\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^{n\times k} & \xrightarrow{T_{A,B}} & \mathbb{C}^{m\times p}\\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau'\\ \mathbb{C}^{n\times k} & \xrightarrow[\widetilde{T_{A,B}}]{} & \mathbb{C}^{m\times p}\end{array}.$$

故可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

于是对 $X=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix},X_1\in\mathbb{C}^{r\times s}$, 我们有

$$T_{A,B}(X)=\begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\dim\operatorname{Im}T_{A,B}=rs,$$

以及

$$T_{A,B}(X)=\begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{维数公式}}{\Rightarrow}\dim\ker T_{A,B}=nk-rs.$$

2. 注意到

$$\left(A\otimes B^T\right)_{((t-1)k+r,(t'-1)\ell+r')}=a_{tt'}b_{r'r},1\leqslant t\leqslant m,1\leqslant t'\leqslant n,1\leqslant r\leqslant k,1\leqslant r'\leqslant\ell.$$

现在表示矩阵 $\widehat{T_{A,B}}$ 的 $((t-1)p+r,(t'-1)k+r')$ 元为

$$\left(T_{A,B}\left(E_{t'r'}\right)\right)_{(t,r)}=\left(AE_{t'r'}B\right)_{(t,r)}=a_{tt'}b_{r'r}=\left(A\otimes B^T\right)_{((t-1)p+r,(t'-1)k+r')}.$$

因此, 我们知道 $\widehat{T_{A,B}}=A\otimes B^T$.

例题 23.16 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明: $\varphi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AXA$ 可对角化的充要条件是 A 可对角化.

证明 因为命题21.4知 $A\sim A^T$, 取

$$P=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},Q=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}\in\mathbb{C}^{n\times n}$$

是可逆矩阵并使得 $P^{-1}AP=Q^{-1}A^TQ$ 是相似标准型. 由命题23.13知 $\alpha_i\beta_j^T,1\leqslant i,j\leqslant n$ 必然线性无关.

当 A 可对角化, 设

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,A^T\beta_j=\lambda_j\beta_j,i,j=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$\varphi\left(\alpha_i\beta_j^T\right)=A\alpha_i\beta_j^TA=\lambda_i\lambda_j\alpha_i\beta_j^T,,1\leqslant i,j\leqslant n,$$

这就证明了 φ 有 n^2 个线性无关的特征向量从而可对角化.

当 A 不可对角化, 设

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1\right),J_{n_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s\right)\right\},n_1>1.$$

考虑 $U\triangleq\operatorname{span}\left\{\alpha_i\beta_j^T:1\leqslant i,j\leqslant n_1\right\}$, 注意到

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha_1\beta_1^T\right)&=A\alpha_1\beta_1^TA=\lambda_1^2\alpha_1\beta_1^T;\\
\varphi\left(\alpha_1\beta_j^T\right)&=A\alpha_1\beta_j^TA=\lambda_1\alpha_1\beta_{j-1}^T+\lambda_1^2\alpha_1\beta_j^T,2\leqslant j\leqslant n_1;\\
\varphi\left(\alpha_i\beta_1^T\right)&=A\alpha_i\beta_1^TA=\lambda_1\alpha_{i-1}\beta_1^T+\lambda_1^2\alpha_i\beta_1^T,2\leqslant i\leqslant n_1;\\
\varphi\left(\alpha_i\beta_j^T\right)&=A\alpha_i\beta_j^TA=\alpha_{i-1}\beta_{j-1}^T+\lambda_1\alpha_{i-1}\beta_1^T+\lambda_1\alpha_1\beta_{j-1}^T+\lambda_1^2\alpha_i\beta_j^T,2\leqslant i,j\leqslant n_1,
\end{aligned}$$

即 U 是 $\varphi-$ 不变子空间.

在基 $\left\{\alpha_1\beta_1^T,\alpha_1\beta_2^T,\cdots,\alpha_1\beta_{n_1}^T,\alpha_2\beta_1^T,\alpha_2\beta_2^T,\cdots,\alpha_2\beta_{n_1}^T,\cdots,\alpha_{n_1}\beta_1^T,\alpha_{n_1}\beta_2^T,\cdots,\alpha_{n_1}\beta_{n_1}^T\right\}$ 下 $\varphi|_U$ 的表示矩阵形如对角线为 λ_1^2 的上三角矩阵且不是对角矩阵, 即 $\varphi|_U$ 不可对角化[16]. 由引理23.1我们证明了 φ 不可对角化.

我们完成了证明.

例题 23.17 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n},\varphi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AX-XB$. 证明: φ 可对角化的充要条件是 A,B 可对角化.

证明 若 A,B 可对角化, 设

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,B^T\beta_i=\mu_i\beta_i,\lambda_i,\mu_i\in\mathbb{C},\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\},i=1,2,\cdots,n,$$

且 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n,\{\beta_i\}_{i=1}^n$ 是两组线性无关的向量组. 由命题23.13知 $\alpha_i\beta_j^T,1\leqslant i,j\leqslant n$ 必然线性无关.

现在

$$\varphi\left(\alpha_i\beta_j^T\right)=A\alpha_i\beta_j^T-\alpha_i\beta_j^TB=\left(\lambda_i-\mu_j\right)\alpha_i\beta_j^T,i,j=1,2,\cdots,n,$$

即我们证明了 φ 可对角化且特征值为

$$\lambda_i-\mu_j,i,j=1,2,\cdots,n.$$

若 A,B 有一个不可对角化, 不妨设 A 不可对角化. 于是可设可逆矩阵 $P=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},Q=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP&=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1\right),J_{n_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s\right)\right\},n_1>1.\\
Q^{-1}B^TQ&=\operatorname{diag}\left\{J_{m_1}\left(\mu_1\right),J_{m_2}\left(\mu_2\right),\cdots,J_{m_t}\left(\mu_t\right)\right\}.
\end{aligned}$$

设

$$L\triangleq\operatorname{span}\left\{\alpha_i\beta_j^T:1\leqslant i\leqslant n_1,1\leqslant j\leqslant m_1\right\}.$$

由命题23.13知 $\alpha_i\beta_j^T:1\leqslant i\leqslant n_1,1\leqslant j\leqslant m_1$ 是 L 的基.

现在

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha_1\beta_1^T\right)&=A\alpha_1\beta_1^T-\alpha_1\beta_1^TB=\left(\lambda_1-\mu_1\right)\alpha_1\beta_1^T;\\
\varphi\left(\alpha_1\beta_j^T\right)&=A\alpha_1\beta_j^T-\alpha_1\beta_j^TB=-\alpha_1\beta_{j-1}^T+\left(\lambda_1-\mu_1\right)\alpha_1\beta_j^T,2\leqslant j\leqslant m_1;\\
\varphi\left(\alpha_i\beta_1^T\right)&=A\alpha_i\beta_1^T-\alpha_i\beta_1^TB=\alpha_{i-1}\beta_1^T+\left(\lambda_1-\mu_1\right)\alpha_i\beta_1^T,2\leqslant i\leqslant n_1;\\
\varphi\left(\alpha_i\beta_j^T\right)&=A\alpha_i\beta_j^T-\alpha_i\beta_j^TB=\alpha_{i-1}\beta_j^T-\alpha_i\beta_{j-1}^T+\left(\lambda_1-\mu_1\right)\alpha_i\beta_j^T,2\leqslant i\leqslant n_1,2\leqslant j\leqslant m_1.
\end{aligned}$$

现在 L 是 $\varphi-$ 不变子空间且在基

$$\left\{\alpha_1\beta_1^T,\alpha_1\beta_2^T,\cdots,\alpha_1\beta_{m_1}^T,\alpha_2\beta_1^T,\alpha_2\beta_2^T,\cdots,\alpha_2\beta_{m_1}^T,\cdots,\alpha_{n_1}\beta_1^T,\alpha_{n_1}\beta_2^T,\cdots,\alpha_{n_1}\beta_{m_1}^T\right\}$$

下 $\varphi|_L$ 的表示矩阵形如对角线为 $\lambda_1-\mu_1$ 的上三角矩阵且不是对角矩阵, 即 $\varphi|_L$ 不可对角化. 由引理23.1我们证明了 φ 不可对角化.

我们完成了证明.

[16]注意 $n-r\left(\lambda_1^2I-\varphi|_U\right)$ 就是 Jordan 块的块数, 它不能为 n.

注 从证明可以看到, 如果我们逐一比较 A,B 的 Jordan 块, 那么可以计算得 φ 特征值就是

$$\lambda_i-\mu_j,i,j=1,2,\cdots,n.$$

例题 23.18 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n},\varphi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AX$. 证明: φ 可对角化的充要条件是 A 可对角化.

证明 充分性:

设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 考虑 $\psi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto PX$, 则

$$\psi^{-1}\circ\varphi\circ\psi(X)=P^{-1}APX,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

故不妨设 A 为相似标准型. 因此若

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n,$$

则 $\varphi(E_{ij})=\lambda_iE_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$. 在基

$$\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}\}$$

下的矩阵为对角矩阵.

必要性: 若 A 不可对角化, 设可逆矩阵 $P=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1),J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s)\},n_1>1.$$

设

$$L\triangleq\operatorname{span}\left\{\alpha_i\alpha_j^T:1\leqslant i,j\leqslant n_1\right\},$$

我们有

$$\begin{aligned}A\alpha_1\alpha_j^T&=\lambda_1\alpha_1\alpha_j^T,1\leqslant j\leqslant n_1;\\A\alpha_i\alpha_j^T&=\alpha_{i-1}\alpha_j^T+\lambda_i\alpha_i\alpha_j^T,2\leqslant i\leqslant n_1,1\leqslant j\leqslant n_1.\end{aligned}$$

即 L 是 φ 不变子空间.

由命题23.13知 $\alpha_i\alpha_j^T,1\leqslant i,j\leqslant n_1$ 必然线性无关.

在基 $\left\{\alpha_1\alpha_1^T,\alpha_1\alpha_2^T,\cdots,\alpha_1\beta_{n_1}^T,\alpha_2\alpha_1^T,\alpha_2\alpha_2^T,\cdots,\alpha_2\alpha_{n_1}^T,\cdots,\alpha_{n_1}\alpha_1^T,\alpha_{n_1}\alpha_2^T,\cdots,\alpha_{n_1}\alpha_{n_1}^T\right\}$ 下 $\varphi|_L$ 的表示矩阵形如对角线为 λ_1 的上三角矩阵且不是对角矩阵, 即 $\varphi|_L$ 不可对角化!. 由引理23.1我们证明了 φ 不可对角化, 我们完成了证明.

例题 23.19 设 A 是 n 阶复矩阵, 定义线性空间和线性变换

$$V=\left\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}:X^T=X\right\},F:V\to V,X\mapsto AXA^T.$$

求 $\operatorname{tr}(F),\det(F)$.

证明 当 A 可对角化, 设 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, 则对 $g:V\to V,X\mapsto PXP^T$, 我们有

$$\left(g^{-1}\circ F\circ g\right)(X)=P^{-1}A\left(PXP^T\right)^TA^TP^{-T}=\left(P^{-1}AP\right)X^T\left(P^{-1}AP\right)^T,X\in V.$$

因此可以不妨设 A 为相似标准型, 特征值全体是 $\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n$.

现在

$$F(E_{ij}+E_{ji})=\lambda_i\lambda_j(E_{ij}+E_{ji}),1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,$$

从而 F 特征值全体是 $\lambda_i\lambda_j,1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$. 现在我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(F)&=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j\lambda_i\lambda_j=\frac{\sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\lambda_j+\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^2}{2}=\frac{\operatorname{tr}^2(A)+\operatorname{tr}\left(A^2\right)}{2};\\\det(F)&=\prod_{j=1}^n\prod_{i=1}^j\lambda_i\lambda_j=\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i\right)^{n+1}=(\det A)^{n+1}.\end{aligned}\tag{23.14}$$

显然 $\operatorname{tr}(F),\det(F)$ 都是 A 元素的连续函数. 由可对角化矩阵的稠密性23.41得对一般的复矩阵 A, 仍有(23.14)成立.

23.1.7 交结数

作为化 Jordan 的最典型的运用, 我们来看

定理 23.22 (交结数)

设 $\mathbb{K}$ 为数域, 对 $A\in\mathbb{K}^{m\times m},B\in\mathbb{K}^{n\times n}$, 计算矩阵方程 $AX=XB$ 在 $X\in\mathbb{K}^{m\times n}$ 的解空间维数. ♡

证明 因为 $AX=XB$ 本质上是一个线性方程组, 线性方程组的解空间维数不随域扩张而改变. 因此我们只需在代数闭域[17]研究即可. 设

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J_1,J_2,\cdots,J_s\right\},Q^{-1}BQ=\operatorname{diag}\left\{T_1,T_2,\cdots,T_t\right\},P\in\mathbb{C}^{m\times m},Q\in\mathbb{C}^{n\times n},$$

注意到

$$P^{-1}APP^{-1}XQ=P^{-1}XQQ^{-1}BQ,$$

于是有同构 $X\to P^{-1}XQ$. 因此可不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{J_1,J_2,\cdots,J_s\right\},B=\operatorname{diag}\left\{T_1,T_2,\cdots,T_t\right\},$$

这里 $J_i,T_j,1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t$ 都是相同特征值对应所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵. 不妨设 $0\leqslant s_0\leqslant\min\{s,t\}$ 使得 $J_1,J_2,\cdots,J_{s_0}$ 分别和 $T_1,T_2,\cdots,T_{s_0}$ 特征值对应相同, 且 A,B 剩下的每一个块对应特征值都不相同.

为了解 $AX=XB$, 把 X 对应分块为 $(X_{ij}),1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t$, 于是 $AX=XB$ 等价于

$$J_iX_{ij}=X_{ij}T_j,1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t. \tag{23.15}$$

注意到由21.5, 我们知道(23.15)中只有 $1\leqslant i=j\leqslant s_0$ 时 X_{ij} 才能非 0. 于是记 $AX=XB$ 解空间为 W, 我们有

$$\dim W=\sum_{i=1}^{s_0}\dim\left\{Y:J_iY=YT_i\right\}. \tag{23.16}$$

对固定的 $1\leqslant i\leqslant s_0$, 为了计算 $\dim\{Y:J_iY=YT_i\}$, 我们设

$$J_i=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}(\lambda),J_{n_2}(\lambda),\cdots,J_{n_{s'}}(\lambda)\right\},T_i=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1'}(\lambda),J_{n_2'}(\lambda),\cdots,J_{n_{t'}'}(\lambda)\right\}.$$

做对应分块

$$Y=(Y_{i'j'}),1\leqslant i'\leqslant s',1\leqslant j'\leqslant t'.$$

同样的 $J_iY=YT_i$ 等价于

$$J_{n_{i'}}(\lambda)Y_{i'j'}=Y_{i'j'}J_{n_{j'}'}(\lambda),\forall 1\leqslant i'\leqslant s',1\leqslant j'\leqslant t'. \tag{23.17}$$

而上述方程只能通过矩阵乘法定义计算. 由21.1, 我们知道

$$\dim\left\{Y_{i'j'}:J_{n_{i'}}(\lambda)Y_{i'j'}=Y_{i'j'}J_{n_{j'}'}(\lambda)\right\}=\min\left\{n_{i'},n_{j'}'\right\},$$

于是由23.16可计算出结果. 最后我们总结一下.

设 s_0 是 A,B 公共特征值数, J_i 由 $n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{ip_i}$ 阶 Jordan 块构成, T_i 由 $t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{iq_i}$ 阶 Jordan 块构成, 则

$$\dim W=\sum_{i=1}^{s_0}\sum_{r=1}^{p_i}\sum_{\ell=1}^{q_i}\min\left\{n_{ir},t_{i\ell}\right\}. \tag{23.18}$$

笔记 式(23.17)也等价于

$$J_{n_{i'}}(0)Y_{i'j'}=Y_{i'j'}J_{n_{j'}'}(0),\forall 1\leqslant i'\leqslant s',1\leqslant j'\leqslant t'.$$

来看清华新领军真题.

[17]复数域.

例题 23.20 设整数 $m,n\geqslant 2,a,b$ 是实数. 再设

$$A=\begin{pmatrix}J&0\\0&K\end{pmatrix},J\in\mathbb{R}^{m\times m},K\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

这里

$$J=\begin{pmatrix}a&0&0&\cdots&0&0\\1&a&0&\cdots&0&0\\0&1&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&0\\0&0&0&\cdots&1&a\end{pmatrix},K=\begin{pmatrix}b&0&0&\cdots&0&0\\1&b&0&\cdots&0&0\\0&1&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&b&0\\0&0&0&\cdots&1&b\end{pmatrix},$$

计算 $\left\{X\in\mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}:AX=XA\right\}$ 的维数.

证明 注意到 J,K 都是 Jordan 块转置, 我们知道 $J\sim J_m(a),K\sim J_n(b)$. 例如可以用 $H\triangleq\begin{pmatrix}&&&1\\&&\cdots&\\&1&&\\1&&&\end{pmatrix}$ 来作为相似的过渡矩阵.

由交结数我们知道

$$\dim\left\{X\in\mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}:AX=XA\right\}=\begin{cases}m+n,&a\neq b\\m+n+2\min\{m,n\},&a=b\end{cases}.$$

例题 23.21

1. 假如 $\mathbb{F}$ 是一个域, 设 $B\in\mathbb{F}^{n\times n},A\in\mathbb{F}^{m\times m}$. 若 A,B 在域 $\mathbb{F}$ 至少有 r 个互不相同特征值, 则矩阵方程 $AX=XB$ 在 $X\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 中有秩 r 的解.
2. 假如 $\mathbb{F}$ 是一个域, 设 $B\in\mathbb{F}^{n\times n},A\in\mathbb{F}^{m\times m}$. 若矩阵方程 $AX=XB$ 在 $X\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 中有秩 r 的解, 则 A,B 在包含 $\mathbb{F}$ 的代数闭域上至少有 r 个相同特征值 (计重数).

证明

1. 设 A,B 有公共特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in\mathbb{F}$, 于是可设

$$Au_i=\lambda_iu_i,B^Tv_i=\lambda_iv_i,u_i,v_i\in\mathbb{F}^n\setminus\{\mathbf{0}\},i=1,2,\cdots,r.$$

考虑

$$X\triangleq\sum_{i=1}^r u_iv_i^T\in\mathbb{F}^{n\times n},$$

我们有

$$AX=A\left(\sum_{i=1}^r u_iv_i^T\right)=\sum_{i=1}^r u_i\lambda_iv_i^T=\left(\sum_{i=1}^r u_iv_i^T\right)B=XB.$$

又

$$\sum_{i=1}^r u_iv_i^T=(u_1,u_2,\cdots,u_r)\cdot\begin{pmatrix}v_1^T\\v_2^T\\\vdots\\v_r^T\end{pmatrix},$$

即 X 是列满秩矩阵和行满秩矩阵之积, 从而由秩不等式21.6的 1 得

$$r=r+r-r\leqslant r(X)\leqslant r\Rightarrow r(X)=r,$$

这就完成了证明.

2. 若矩阵方程 $AX=XB$ 在 $X\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 中有秩 r 的解 X_0, 则做一个等价[18]可不妨设

$$X=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix},A_1,B_1\in\mathbb{F}^{r\times r}.$$

于是

$$AX=XB\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A_3=0,B_2=0,A_1=B_1,$$

即我们有

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}.$$

于是 A_1 的特征值是 A,B 的 r 个公共特征值.

作为交结数的运用, 我们考虑

推论 23.3

计算与数域上 n 阶矩阵 A 可交换的全体矩阵空间构成的维数. ♡

笔记 $C(A)\triangleq\{X:AX=XA\}$ 本质上是一个线性方程组的解, 因此不随域扩张而改变, 所以不妨只在复数域上考虑.

证明 不妨只在复数域上考虑. 回忆定理23.22证明, 我们设 s_0 是 A 不同特征值个数, J_i 是 $n_{i,1},n_{i,2},\cdots,n_{i,m_i}$ 阶相同特征值对应 Jordan 块组成的分块对角矩阵且 $A=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_{s_0}\}$.

由定理23.22, 我们知道

$$\dim C(A)=\sum_{i=1}^{s_0}\sum_{r=1}^{m_i}\sum_{\ell=1}^{m_i}\min\{n_{i,r},n_{i,\ell}\}.$$

结论 设数域上 n 阶矩阵 A 且 $F(A)$ 是 A 的多项式空间, 显然 $F(A)\subset C(A)$ 且 $\dim F(A)=\deg m_A$, 这里 m_A 是 A 的极小多项式.

例题 23.22 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, A 是 V 上的线性变换.

1. 设 $\xi\in V$, 证明: 存在 $r\in\mathbb{N}$ 使得 $\xi,A\xi,A^2\xi,\cdots,A^{r-1}\xi$ 是包含 ξ 的最小 $A-$ 不变子空间的一组基.
2. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k\in V$, 证明: 存在 $r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_k}\in\mathbb{N}$ 使得

$$\xi_{i_1},A\xi_{i_1},A^2\xi_{i_1},\cdots,A^{r_{i_1}-1}\xi_{i_1},\xi_{i_2},A\xi_{i_2},A^2\xi_{i_2},\cdots,A^{r_{i_2}-1}\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_k},A\xi_{i_k},A^2\xi_{i_k},\cdots,A^{r_{i_k}-1}\xi_{i_k}$$

是包含 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 的最小 $A-$ 不变子空间的一组基.

证明

1. 显然包含 ξ 的最小 $A-$ 不变子空间是

$$O=\operatorname{span}\{A^j\xi:j\in\mathbb{N}_0\}.$$

记 $r\triangleq\dim O\in\mathbb{N}_0$, 下证 r 为所求.

若 $\xi,A\xi,A^2\xi,\cdots,A^{r-1}\xi$ 线性相关, 则必有 $j\in\{1,2,\cdots,r-1\}$ 使得 $A^j\xi$ 被 $\xi,A\xi,\cdots,A^{j-1}\xi$ 线性表出, 设 j 是满足这样的最小的.

现在对任何 $k\geqslant j$, 我们容易由 $A^{k+1}\xi=A\left(A^k\xi\right)$ 归纳证明 $A^k\xi$ 可以由 $\xi,A\xi,\cdots,A^{j-1}\xi$ 线性表出, 因此 $\dim O\leqslant j$. 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 r 为所求.

2. 当 $k=1$, 我们已经证完. 假设命题对 k 时成立, 存在 $r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_k}\in\mathbb{N}$ 使得

$$\xi_{i_1},A\xi_{i_1},A^2\xi_{i_1},\cdots,A^{r_{i_1}-1}\xi_{i_1},\xi_{i_2},A\xi_{i_2},A^2\xi_{i_2},\cdots,A^{r_{i_2}-1}\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_k},A\xi_{i_k},A^2\xi_{i_k},\cdots,A^{r_{i_k}-1}\xi_{i_k}$$

是包含 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 的最小 $A-$ 不变子空间 O_k 的一组基.

[18]即考虑

$$PAP^{-1}PXQ=PXQQ^{-1}BQ.$$

若 $\xi_{k+1}\in O_k$, 则 O_k 也是包含 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k+1}$ 的最小 $A-$ 不变子空间 O_{k+1} 的一组基. 若 $\xi_{k+1}\notin O_k$, 记最小的 $j\in\mathbb{N}$ 使得

$$A^j\xi_{k+1}\in\operatorname{span}\left\{O_k\bigcup\left\{\xi_{k+1},A\xi_{k+1},\cdots,A^{j-1}\xi_{k+1}\right\}\right\}.$$

由 $A^{t+1}\xi_{k+1}=A\left(A^t\xi_{k+1}\right)$ 可归纳证明

$$O_{k+1}=\operatorname{span}\left\{O_k\bigcup\left\{\xi_{k+1},A\xi_{k+1},\cdots,A^{j-1}\xi_{k+1}\right\}\right\}.$$

此时显然有

$$\xi_{i_1},A\xi_{i_1},A^2\xi_{i_1},\cdots,A^{r_{i_1}-1}\xi_{i_1},\xi_{i_2},A\xi_{i_2},A^2\xi_{i_2},\cdots,A^{r_{i_2}-1}\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_{k+1}},A\xi_{i_{k+1}},A^2\xi_{i_{k+1}},\cdots,A^{r_{i_{k+1}}-1}\xi_{i_{k+1}}$$

线性无关, 因此我们完成了证明.

定理 23.23 ($F(A)=C(A)$ 的充要条件和不变子空间刻画)

设数域上 n 阶矩阵 A, 则有下述等价刻画:

1. 存在 n 维向量 v 使得 $v,Av,\cdots,A^{n-1}v$ 是线性无关的;
2. A 相似于一个友矩阵;
3. $F(A)=C(A)$;
4. $\dim F(A)=\dim C(A)$;
5. $\sum\limits_{i=1}^{s_0}\max\left\{n_{i,1},n_{i,2},\cdots,n_{i,m_i}\right\}=\sum\limits_{i=1}^{s_0}\sum\limits_{r=1}^{m_i}\sum\limits_{\ell=1}^{m_i}\min\left\{n_{i,r},n_{i,\ell}\right\}$;
6. $m_i=1,i=1,2,\cdots,s$;
7. 每种复特征值的几何重数都是 1;
8. 对每个特征值 $\lambda\in\mathbb{C}$, 都有 $r(\lambda E-A)=n-1$;
9. 特征多项式 = 极小多项式;
10. A 的不变子空间个数有限.

并当 A 的不变子空间个数有限时, 计算 A 的所有不变子空间. ♡

证明 由课本定理和推论23.3知除第一个, 第二个和最后一个等价外, 其余都是显然的.

1. 我们来证明第 1 个和第 2 个等价. 直接在基 $v,Av,\cdots,A^{n-1}v$ 下计算 A 的表示矩阵并利用 $A^n=c_0I_n+c_1A+\cdots+c_{n-1}A^{n-1}$ 得 A 相似于一个友矩阵. 反过来若 A 相似于一个友矩阵, 不失一般性, 假设

$$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&c_0\\1&\cdots&0&c_1\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1&c_{n-1}\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

我们直接演算有

$$Av=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},A^2v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,A^{n-1}v=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

即 $v,Av,\cdots,A^{n-1}v$ 是线性无关的, 我们完成了证明.

2. 我们来证明第 2 个和第 9 个等价. 友矩阵的特征多项式和极小多项式相等, 所以第 2 条推第 9 条成立. 反过来若第 9 条成立, 即 A 特征多项式和极小多项式相等, 设为 f. 于是 A 的不变因子为[19]$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1个},f$. 而 f 的友矩阵的不变因子也为 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1个},f$, 因此我们有第 2 条成立, 我们完成了证明.

[19]所有不变因子之积是特征多项式, 最后一个不变因子是极小多项式.

3. 我们来证明最后一个和上面每一条等价并完整刻画 A 的不变子空间.

Step 1 我们先做一些讨论, 使得不变子空间问题划归到 f 特征多项式是个不可约多项式的次方.

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的线性变换, 其特征多项式有标准分解

$$f(\lambda)=p_1^{r_1}(\lambda)\,p_2^{r_2}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda),$$

这里 $r_i\in\mathbb{N},p_i(\lambda),i=1,2,\cdots,s$ 两两互素且不可约.

由课本定理[20], 我们知道有直和分解

$$V=\ker f(A)=\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}}\ker p_i^{r_i}(A). \tag{23.19}$$

任取 A 的不变子空间 U. 下证明

$$U=\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}}\left(U\bigcap\ker p_i^{r_i}(A)\right). \tag{23.20}$$

对 $x\in U$, 利用分解(23.19), 我们设

$$x=\sum_{i=1}^{s}u_i,u_i\in\ker p_i^{r_i}(A),i=1,2,\cdots,s.$$

只需证明 $u_i\in U,\forall i\in\{1,2,\cdots,s\}$, 证明的想法通过中国剩余定理23.1使得 u_i 暴露出来并让其余 $u_j,j\neq i$ 变成 0.

由中国剩余定理23.1, 取多项式 $g_i\in\mathbb{F}[x]$ 使得

$$\begin{cases}g_i\equiv 0\left(\mathrm{mod}p_j^{r_j}\right), & j\neq i\\ g_i\equiv 1\left(\mathrm{mod}p_i^{r_i}\right), & j=i\end{cases},$$

则

$$g_i(A)\,x=\sum_{j=1}^{s}g_i(A)\,u_j=u_i\in U,i=1,2,\cdots,s,$$

这就证明了(23.20).

注意到 $U\bigcap\ker p_i^{r_i}(A)$ 是 $A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$ 的不变子空间且 $A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$ 的特征多项式是 $p_i^{r_i}(\lambda)$, 这里前者是显然的, 后者注意到写成矩阵有

$$A=\mathrm{diag}\left\{A|_{\ker p_1^{r_1}(A)},A|_{\ker p_2^{r_2}(A)},\cdots,A|_{\ker p_s^{r_s}(A)}\right\}.$$

因此得到我们需要的.

现在任取 $A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$ 不变子空间 $W_i,i=1,2,\cdots,s$, 容易验证 $\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}}W_i$ 是 A 不变子空间, 因此我们的 **Step 1** 的目标完成.

Step 2 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的线性变换, 其特征多项式极小多项式都为 $f(\lambda)=p^r(\lambda)$, 这里 p 不可约且 $r\in\mathbb{N},\deg p=d>0$. 我们将完整计算出 A 不变子空间.

我们断言

$$\dim\ker p^s(A)=ds,0\leqslant s\leqslant r. \tag{23.21}$$

一方面由维数公式, 我们有

$$\dim\ker p^s(A)=\dim V-r\left(p^s(A)\right)=rd-r\left(p^s(A)\right).$$

另外一方面因为秩不随域扩张而改变, 我们在复数域结合 A 的所有特征值几何重数都是 1[21], 可设

$$A\sim\mathrm{diag}\left\{J_r(\lambda_1),J_r(\lambda_2),\cdots,J_r(\lambda_d)\right\},\lambda_i\text{两两互不相同},i=1,2,\cdots,d.$$

[20]例如丘维声的创新教材高等代数下册 p.286, 定理 3.

[21]这就是极小多项式 = 特征多项式的推论.

由

$$\begin{aligned} r\left(p^s\left(A\right)\right) &= r\left(\operatorname{diag}\left\{p^s\left(J_r\left(\lambda_1\right)\right), p^s\left(J_r\left(\lambda_2\right)\right), \cdots, p^s\left(J_r\left(\lambda_d\right)\right)\right\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} r\left(p^s\left(J_r\left(\lambda_i\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{d} r\left(\left(J_r\left(\lambda_i\right) - \lambda_i E\right)^s\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} (r-s) = d\,(r-s), \end{aligned}$$

我们知(23.21)成立.

自然的, 期望 A 不变子空间一定形如 $U = \ker p^s\left(A\right), 0 \leqslant s \leqslant r$. 事实上任取 A 不变子空间 U. 注意到 $A|_U$ 特征多项式必然是 $p^s\left(\lambda\right), 0 \leqslant s \leqslant r$. 因为 $p^s\left(A|_U\right) = 0$, 所以 $U \subset \ker p^s\left(A\right)$. 由(23.21)的维数等式知 $U = \ker p^s\left(A\right)$. 这就完整刻画清楚了 A 不变子空间.

Step 3

由 **Step 1**, 不妨设 A 特征多项式 $f\left(\lambda\right) = p^r\left(\lambda\right)$, 这里 p 不可约且 $r \in \mathbb{N}, \deg p = d > 0$. 再假设 f 极小多项式为 $p^s\left(\lambda\right), 1 \leqslant s < r$. 任取向量 $a \neq 0$ 并考虑 a 生成的最小 A 不变子空间 $V_a = \operatorname{span}\left\{a, Aa, A^2a, \cdots, A^{ds-1}a\right\}$. 若 $\dim V_a = \dim V = rd$, 则 A 在基 $\left(a, Aa, A^2a, \cdots, A^{ds-1}a\right)$ 下的矩阵是友矩阵, 其特征多项式和极小多项式应该一致. 所以必有 $\dim V_a < \dim V = rd$, 因此可以取向量 $a_2 \notin V_a$, 继续考虑 a_2 生成的最小 A 不变子空间 V_{a_2}. 由覆盖定理23.24, 非平凡真子空间的并不可能为全空间, 即 $V \neq V_a \bigcup V_{a_2}$, 于是又可取 $a_3 \in V \setminus \left(V_a \bigcup V_{a_2}\right)$. 因此这样下去就得到无穷多个不变子空间.

23.1.8 覆盖定理

定理 23.24 (覆盖定理)

1. 数域上 n 维线性空间 V 不能分解为有限个 (大于等于 2 个) 非平凡子空间[a]之并.
2. 域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 不能分解为两个非平凡子空间[b]之并.
3. 无限域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 不能分解为有限个 (大于等于 2 个) 非平凡子空间[c]之并.

[a]即不能为全空间或者空集.

[b]即不能为全空间或者空集.

[c]即不能为全空间或者空集. ♡

笔记 对于数域上的有限维线性空间, 我们给一个简单的方法, 比丘维声等更简单.

证明

1. 设有真子空间分解
$$V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots \bigcup V_m.$$
考虑 V 的基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 和一组向量
$$\alpha_i = e_1 + ie_2 + i^2e_3 + \cdots + i^{n-1}e_n, i = 1, 2, \cdots.$$
由于计算 vandermonde 行列式, 上面这组向量任何 n 个都线性无关. 而他们必有无限个落入某个 V_j 中, 从而 V_j 是 n 维, 这就得证明.
2. 设 $V = V_1 \bigcup V_2, V_1, V_2$ 都是 V 的非平凡子空间. 则存在 $v_1 \in V_1 \setminus V_2, v_2 \in V_2 \setminus V_1$. 注意到
$$v_1 + v_2 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_1, v_1 + v_2 \in V_2 \Rightarrow v_1 \in V_2,$$
从而
$$v_1 + v_2 \notin V_1 \bigcup V_2,$$
这就是一个矛盾! 因此我们证明了域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 不能分解为两个非平凡子空间[22]之并.

[22]即不能为全空间或者空集.

3. 若 $V_i \subset V, i=1,2,\cdots,n$ 是非平凡子空间. 我们归纳证明

$$V \neq \bigcup_{i=1}^{n} V_i. \tag{23.22}$$

当 $n=1$ 显然有(23.22)成立. 假设对 n 有(23.22)成立, 当 $n+1$ 时, 由归纳假设取 $\alpha \in V \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$.

如果 $\alpha \notin V_{n+1}$, 则(23.22)对 $n+1$ 已经成立.

若 $\alpha \in V_{n+1}$, 由 V_{n+1} 非平凡, 存在 $\beta \in V \setminus V_{n+1}$. 注意到

$$S = \{t\alpha + \beta : t \in \mathbb{F}\} \subset V \setminus V_{n+1},$$

这是因为若某个 $t\alpha+\beta \in V_{n+1}$ 可推出 $\beta \in V_{n+1}$ 而矛盾!. 现在若有 $t_1\alpha+\beta, t_2\alpha+\beta$ 属于同一个 $V_j, j \in \{1,2,\cdots,n\}$, 则

$$t_1\alpha+\beta-(t_2\alpha+\beta) = (t_1-t_2)\,\alpha \in V_j,$$

即 $t_1 = t_2$. 现在 S 中向量有无穷多个, 所以必然有一个不落在 $\bigcup_{j=1}^{n} V_j$, 自然也不落在 $\bigcup_{j=1}^{n+1} V_j$, 这就证明了(23.22)对 $n+1$ 也成立!.

至此我们完成了证明.

来看线性流形版的覆盖定理.

例题 23.23 设 V 是复数域上线性空间且 $V_i, i=1,2,\cdots,k$ 是 V 真子空间. 若 $\alpha_i \in V, i=1,2,\cdots,k$, 证明:

$$V \neq \bigcup_{i=1}^{k} (\alpha_i + V_i).$$

证明 考虑线性空间

$$\widetilde{V} \triangleq V \oplus \mathbb{C}, \widetilde{V_i} \triangleq \{(\beta + t\alpha_i, t) : \beta \in V_i, t \in \mathbb{C}\}, i=1,2,\cdots,k.$$

对 $i=1,2,\cdots,k$ 注意到对 $\alpha \in V \setminus V_i$, 我们有 $(\alpha,0) \notin \widetilde{V_i}$, 即 $\widetilde{V_i}$ 是 $\widetilde{V}$ 真子空间. 由覆盖定理23.24得

$$\widetilde{V} \neq (V \times \{0\}) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{V_i}\right).$$

设

$$(\mathbf{x}, t) \in \widetilde{V} \setminus \left((V \times \{0\}) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{V_i}\right)\right),$$

则

$$t \neq 0, (\mathbf{x}, t) = \left(t\left(\frac{\mathbf{x}}{t} - \alpha_i\right) + t\alpha_i, t\right) \notin \widetilde{V_i}, i=1,2,\cdots,k.$$

现在就有

$$\frac{\mathbf{x}}{t} - \alpha_i \notin V_i, i=1,2,\cdots,k,$$

即

$$\frac{\mathbf{x}}{t} \notin \bigcup_{i=1}^{k} (\alpha_i + V_i).$$

现在我们证明了

$$V \neq \bigcup_{i=1}^{k} (\alpha_i + V_i).$$

例题 23.24 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 V 的子空间. 证明存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha.$$

证明 若 $|\Lambda|<\infty$, 则已经得证明. 若 $|\Lambda|=\infty$, 取 V_{α_1}, 若

$$\dim V_{\alpha_1}=\dim \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

这已经得证.

若

$$\dim V_{\alpha_1}>\dim \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

但是对任何 $\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_1\}$, 我们有

$$V_{\alpha_1}\bigcap V_\alpha=V_{\alpha_1},$$

则

$$\dim V_{\alpha_1}=\dim \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

矛盾!, 故存在 $\alpha_2\in\Lambda\setminus\{\alpha_1\}$ 使得

$$\dim\left(V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\right)<\dim\left(V_{\alpha_1}\right).$$

此时要么

$$\dim\left(V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\right)>\dim \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

要么

$$\dim\left(V_{\alpha_1}\bigcap V_{\alpha_2}\right)=\dim \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

因此我们可以继续讨论 $\alpha_3\in\Lambda\setminus\{\alpha_1,\alpha_2\}$, 依次下去.

因为严格递减正整数列只能有限项, 所以这样的操作会经过有限次而停止, 于是我们有知道在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Lambda$ 使得

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha.$$

例题 23.25 设 V 是无限域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是 V 上两两不同的线性变换. 证明: 存在 $\alpha\in V$ 使得 $A_1\alpha,A_2\alpha,\cdots,A_s\alpha$ 两两不同.

证明 由覆盖定理23.24, 考虑真子空间的并

$$\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n}\ker\left(A_j-A_i\right)\neq V.$$

于是我们可取

$$\alpha\in V\setminus\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n}\ker\left(A_j-A_i\right)\right),$$

此时就有

$$A_j\alpha\neq A_i\alpha,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n.$$

例题 23.26 设 T 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的线性变换且 $T(AB)=T(A)T(B),T(AB)=T(B)T(A)$ 必有一个成立. 证明: 要么对所有 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有 $T(AB)=T(A)T(B)$, 要么对所有有 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有 $T(AB)=T(B)T(A)$.

证明 考虑

$$V_A=\left\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}:T(AB)=T(B)T(A)\right\};$$
$$V_A'=\left\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}:T(AB)=T(A)T(B)\right\},$$

则有 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_A\bigcup V_A'$. 由覆盖定理23.24, 我们有 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_A$ 或者 $\mathbb{R}^{n\times n}=V_A'$.

继续考虑

$$U=\left\{A:\mathbb{R}^{n\times n}=V_A\right\},U'=\left\{A:\mathbb{R}^{n\times n}=V_A'\right\},$$

则 $\mathbb{R}^{n\times n}=U\bigcup U'$. 故继续用覆盖定理23.24得 $\mathbb{R}^{n\times n}=U$ 或者 $\mathbb{R}^{n\times n}=U'$, 这就完成了证明.

例题 23.27 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $v\in V$, A 是 V 上线性变换. 记 $m_v\in\mathbb{F}[x]$ 是 $m_v(A)v=0$ 成立的最低次的首一多项式, 我们叫 m_v 为 v 的极小多项式. 证明: 存在 $v\in V$ 使得 v 的极小多项式恰好是 A 的极小多项式.

证明 设 $m\in\mathbb{F}[x]$ 是 A 的极小多项式, 那么

$$m(A)v=0,\forall v\in V.$$

容易知道 $m_v|m$, 因此考虑 m 的所有可能的作为某个向量 v 的极小多项式的因子

$$m_1,m_2,\cdots,m_N\in\mathbb{F}[x].$$

考虑

$$V_i\triangleq\{v\in V:m_i(A)v=0\},i=1,2,\cdots,N,$$

我们有 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{N}V_i$, 于是由覆盖定理23.24, 我们有某个 i 使得 $V_i=V$, 这意味着 $m|m_i$, 故 $m=m_i$, 此时就找到了一个满足题目条件的 v.

23.1.9 正规矩阵

定义 23.3

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 我们称 A 是复正规的, 如果 $A^*A=AA^*$.
2. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 我们称 A 是实正规的, 如果 $A^TA=AA^T$. ♣

笔记 实正交矩阵和实对称矩阵和实反对称矩阵都是实正规矩阵.

在经典高等代数教材中我们知道复正规矩阵是酉相似为对角矩阵的充要条件. 那么实正规矩阵呢?

引理 23.6

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正规矩阵. 若 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 A 的特征值, 则 $\overline{\lambda}$ 是 A^T 的特征值, 且 A 和 A^T 有分别属于 $\lambda,\overline{\lambda}$ 的相同的特征向量. ♡

证明 设 $\alpha\in\mathbb{C}^n$, 注意到

$$\begin{aligned}A\alpha=\lambda\alpha\Leftrightarrow(A-\lambda E)\alpha=0&\overset{\text{注意内积的性质}}{\Leftrightarrow}\alpha^*\left(A^T-\overline{\lambda}E\right)(A-\lambda E)\alpha=0\\&\overset{\text{矩阵乘法之后利用正规定义}}{\Leftrightarrow}\alpha^*(A-\lambda E)\left(A^T-\overline{\lambda}E\right)\alpha=0\Leftrightarrow\left(A^T-\overline{\lambda}E\right)\alpha=0\\&\Leftrightarrow A^T\alpha=\overline{\lambda}\alpha,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

定理 23.25 (实正规矩阵的正交相似标准型)

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实正规矩阵. 设 A 的全部特征值是

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,a_1\pm ib_1,a_2\pm ib_2,\cdots,a_t\pm ib_t,$$

这里

$$\lambda_i,a_j\in\mathbb{R},b_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\},1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t,$$

且允许相同.

则存在实正交矩阵 T, 使得

$$T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_s & & & & \\ & & & \begin{pmatrix}a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix} & & & \\ & & & & \begin{pmatrix}a_2 & -b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix} & \\ & & & & & \ddots & \end{pmatrix}. \tag{23.23}$$

♡

笔记 读者应该仔细计算(23.23)中每个块对应的特征值. 本结果如果不是被直接考察, 可以直接使用.

证明 **Step 1** 当 $n=1$ 时命题是显然的. 对 $n=2$ 时证明蕴含在下面证明中. 假定命题对于小于等于 $n-1$ 的所有实正规矩阵成立, 现在考虑实 n 阶正规矩阵. 证明的想法就是降阶之后用归纳假设.

Step 2 若 A 有实特征值 λ, 取 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 是 A 的单位特征向量, 并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, 则在这组基下[23]有

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & C\\ 0 & H\end{pmatrix}.$$

现在由 $A^TA=AA^T$ 知

$$\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda C\\ \lambda C^T & C^TC+H^TH\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+CC^T & CH^T\\ HC^T & HH^T\end{pmatrix}.$$

于

$$CC^T=0\overset{\text{命题}21.8}{\Rightarrow}C=0\Rightarrow H^TH=HH^T,$$

故 H 是 $n-1$ 阶实正规矩阵, 此时用归纳假设即得存在 $n-1$ 阶实正交矩阵 T_1, 使得 $T_1^THT_1$ 形如(23.23)右边矩阵的形状. 于是可取 $T=\operatorname{diag}\{1,T_1\}$, 即得(23.23).

Step 3 若 A 有特征值 $a+bi, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 则存在不同时为 0 的 $\beta,\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$A(\beta+i\eta)=(a+bi)(\beta+i\eta)\Leftrightarrow\begin{cases}A\beta=a\beta-b\eta\\ A\eta=a\eta+b\beta\end{cases}\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}\beta & \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}. \tag{23.24}$$

于是式(23.24)暗示我们想到 β,η 是标准正交的.

Step 4 由引理23.6, 我们知道 $A^T(\beta+i\eta)=(a-bi)(\beta+i\eta)$, 于是类似(23.24)可得

$$\begin{cases}A\beta=a\beta-b\eta\\ A\eta=a\eta+b\beta\end{cases},\begin{cases}A^T\beta=a\beta+b\eta\\ A^T\eta=a\eta-b\beta\end{cases}.$$

由此可得

$$\begin{cases}\beta^TA\beta=a\beta^T\beta-b\beta^T\eta\\ \beta^TA\beta=a\beta^T\beta+b\eta^T\beta\end{cases}\Rightarrow\beta^T\eta+\eta^T\beta=0\overset{\text{都是数字}}{\Rightarrow}\beta^T\eta=\eta^T\beta=0,$$

以及

$$\begin{cases}\eta^TA^T\beta=a\eta^T\beta+b\eta^T\eta\\ \beta^TA\eta=a\beta^T\eta+b\beta^T\beta\end{cases}\Rightarrow\eta^T\eta=\beta^T\beta.$$

因此 β,η 是想要的正交的. 不妨设为单位向量并将其扩充到全空间构成标准正交基. 则在这组基下, A 形如

[23] 切换标准正交基对应正交相似可以复习课本.

$\begin{pmatrix} a & -b & C_1 \\ b & a & C_2 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix}$. 类似实特征值的情况, 我们直接矩阵乘法可得 $C_1 = C_2 = 0, H$ 正规. 于是类似由归纳假设即可得(23.23). 我们完成了证明.

例题 23.28

1. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明:$A$ 是复正规矩阵的充要条件是 A 的共轭转置是 A 的多项式.
2. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, AB = BA$, 若 A 正规, 证明: $A^*B = BA^*$.
3. 设 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}, AC = CB$, 若 A, B 正规, 证明: $A^*C = CB^*$.

笔记 本结果没有实版本.

证明

1. 充分性显然, 下证必要性. 设 A 是复正规矩阵, 则因为复正规矩阵可以酉相似对角矩阵, 所以不妨设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 于是
$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & & & \\ & \overline{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{a_n} \end{pmatrix}.$$
由拉格朗日插值公式, 存在不超过 $n-1$ 次的多项式 $p \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $p(a_i) = \overline{a_i}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $A^* = p(A)$, 我们完成了必要性证明.
2. 由 1 问知 A^* 是 A 多项式, 这就证明了 $A^*B = BA^*$.
3. 设 $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 注意到 X 是正规矩阵, 于是由 2 问知 $X^*S = SX^*$, 也就是 $A^*C = CB^*$.

命题 23.7

1. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是正规矩阵. 若 A 和 B 相似, 则 A 和 B 必然酉相似.
2. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实正规矩阵. 若 A 和 B 相似, 则 A 和 B 必然正交相似.

证明

1. 注意到 A 和 B 相似, 因此 A 和 B 特征值完全一样, 而 A, B 都可以酉对角化, 因此 A 和 B 必然酉相似.
2. 若 A 和 B 相似, 则 A 和 B 特征值完全一样, 由实正规矩阵的正交相似标准型23.25知 A, B 都可以正交相似于其正交相似的标准型, 因此 A 和 B 必然正交相似.

例题 23.29 设 $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是正规矩阵, 证明: $C = 0$ 且 A, B 都是正规矩阵.

证明 事实上, 由
$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
得 $AA^T + CC^T = A^TA$. 取迹得 $\operatorname{tr}(CC^T) = 0$. 由例21.17知 $C = 0$. 直接计算得 A, B 都是正规矩阵.

命题 23.8

1. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是酉相似矩阵, 则 A, B 必然实正交相似.
2. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是复正交相似矩阵[a], 则 A, B 必然实正交相似.

[a]所谓复正交相似, 即存在 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $U^TU = I_n, U^{-1}AU = B$.

笔记 显然, 1 的结果从接下来的证明的构造可以看到, 本结果可以推广为, 若 $\{A_\alpha\},\{B_\alpha\}\subset\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在酉矩阵 U 使得

$$U^*A_\alpha U=B_\alpha,\forall\alpha.$$

则存在实正交矩阵 T 使得

$$T^TA_\alpha T=B_\alpha,\forall\alpha.$$

证明

1. 设酉矩阵 $U=P+iQ,P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $AU=UB$. 注意到对任何 $\lambda\in\mathbb{R}$ 都有

$$A\left(P+\lambda Q\right)=\left(P+\lambda Q\right)B,\tag{23.25}$$

因为实系数多项式 $|P+\lambda Q|$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的多项式在 $\lambda=i$ 不是 0, 所以其不是 0 多项式, 因此存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $T=P+\lambda Q$ 可逆.

注意到

$$AU=UB\Rightarrow U^*A=BU^*\Rightarrow\left(P^*+\lambda Q^*\right)A=B\left(P^*+\lambda Q^*\right)\Rightarrow T^*A=BT^*.$$

因此结合(23.25)得

$$ATT^*=TBT^*=TT^*A.\tag{23.26}$$

由极分解23.6, 我们设 $T=SO,S,O\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 这里 S 正定, O 正交. 注意 $TT^*=SS^*=S^2$, 因此由正定矩阵开方23.5的知 S 是 TT^* 的多项式, 所以由(23.26)得 $AS=SA$. 现在结合(23.25)得

$$AT=TB\Rightarrow ASO=SOB\Rightarrow SAO=SOB\Rightarrow AO=OB,$$

这就证明了 A,B 必然正交相似.

2. 设复正交矩阵 $U=P+iQ,P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $AU=UB$. 注意到对任何对任何 $\lambda\in\mathbb{R}$ 都有(23.25)成立. 因为实系数多项式 $|P+\lambda Q|$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的多项式在 $\lambda=i$ 不是 0, 所以其不是 0 多项式, 因此存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $T=P+\lambda Q$ 可逆. 注意到

$$AU=UB\Rightarrow U^TA=BU^T\Rightarrow\left(P^T+\lambda Q^T\right)A=B\left(P^T+\lambda Q^T\right)\Rightarrow T^TA=BT^T.$$

因此结合(23.25)得

$$ATT^T=TBT^T=TT^TA.\tag{23.27}$$

由极分解23.6, 我们设 $T=SO,S,O\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 这里 S 正定, O 正交. 注意 $TT^T=SS^T=S^2$, 因此由正定矩阵开方23.5的知 S 是 TT^T 的多项式, 所以由(23.26)得 $AS=SA$. 现在结合(23.25)得

$$AT=TB\Rightarrow ASO=SOB\Rightarrow SAO=SOB\Rightarrow AO=OB,$$

这就证明了 A,B 必然正交相似.

最后来看一个钓鱼结果:

定理 23.26

设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $C^*AC=B$, 则存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $P^TAP=B$. ♡

注本结果非常深刻, 无法在初等框架下证明, 一个证明见答案.

例题 23.30 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^TA=B^TB$, 证明: 存在正交矩阵 O 使得 $B=OA$.

证明 由极分解定理23.6得正交矩阵得 $Q_A,Q_B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和半正定矩阵 $S_A,S_B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$A=Q_AS_A,B=Q_BS_B.$$

于是

$$B^TB=S_B^TQ_B^TQ_BS_B=S_B^2,A^TA=S_A^TQ_A^TQ_AS_A=S_A^2.$$

由半正定矩阵开方唯一23.5得 $S_A = S_B$. 于是我们有

$$B = Q_B S_B = Q_B Q_A^T Q_A S_A = Q_B Q_A^T A.$$

现在 $O \triangleq Q_B Q_A^T$ 为所求.

注 值得注意的是存在正交矩阵 O 使得 $B = AO$ 是错的, 例如考虑

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

然后我们有

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^T B.$$

笔记 本题还能理解为记

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix},$$

则由

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), i, j = 1, 2, \cdots, n$$

可推出存在正交变换 O 使得

$$O\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

引理 23.7

设 V 是有限维实欧式空间, A 是 V 上的线性变换, 则 W 是 $A-$ 不变子空间的充要条件是 $W^\perp$ 是 A^T- 不变子空间. ♡

证明 不妨设 W 的标准正交基是 $e_1, e_2, \cdots, e_s$, $W^\perp$ 的标准正交基是 $e_{s+1}, e_{s+2}, \cdots, e_n$, 则 A 在这组基下的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, A_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}.$$

A^T 在这组基下的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}.$$

则 W 是 $A-$ 不变子空间等价于 $A_3 = 0$. $W^\perp$ 是 A^T- 不变子空间等价于 $A_3^T = 0$, 因此我们证明了 W 是 $A-$ 不变子空间的充要条件是 $W^\perp$ 是 A^T- 不变子空间.

定理 23.27

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是实矩阵, 全部特征值是

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \cdots, a_t \pm ib_t,$$

这里

$$\lambda_i, a_j \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant t,$$

且允许相同.

则存在实正交矩阵 T, 使得

$$T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & * & & & \\ & & \lambda_s & & & & \\ & & & A_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_t & \end{pmatrix}, \tag{23.28}$$

这里 A_i 是二阶实矩阵且特征值为 $a_j\pm ib_j, 1\leqslant j\leqslant t$.

♡

证明 **Step 1** 当 $n=1$ 时命题是显然的. 对 $n=2$ 时证明蕴含在下面证明中. 假定命题对于小于等于 $n-1$ 的所有实矩阵成立, 现在考虑实 n 阶矩阵. 证明的想法就是降阶之后用归纳假设.

Step 2 若 A 有实特征值 λ, 取 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 是 A 的单位特征向量, 并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, 则在这组基下[24]有

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & C\\ 0 & H\end{pmatrix}.$$

Step 3 若 A 有特征值 $a+bi, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 则存在不同时为 0 的 $\beta,\eta\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$A^T(\beta+i\eta)=(a+bi)(\beta+i\eta)\Leftrightarrow\begin{cases}A^T\beta=a\beta-b\eta\\ A^T\eta=a\eta+b\beta\end{cases}\Leftrightarrow A^T\begin{pmatrix}\beta & \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}. \tag{23.29}$$

注意到 $A^T(\beta-i\eta)=(a-bi)(\beta-i\eta)$. 由不同特征值对应的特征向量线性无关, 我们有 $\beta-i\eta,\beta+i\eta$ 线性无关, 所以 η,β 线性无关. 将 η,β 斯密特正交化并单位化得 $\epsilon_{n-1},\epsilon_n$. 取 $\{\eta,\beta\}^\perp$ 的一组标准正交基为 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_{n-2}$. 然后由引理23.7知 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_{n-2}$ 是 A 不变子空间, 所以

$$A(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\begin{pmatrix}B & *\\ 0 & C\end{pmatrix}, \tag{23.30}$$

这里 C 是二阶矩阵.

Step 4 再说明 C 的特征值为 $a\pm bi$. 事实上,

$$A^T(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\begin{pmatrix}B & *\\ 0 & C\end{pmatrix}^T=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\begin{pmatrix}B^T & 0\\ * & C^T\end{pmatrix},$$

即 $A^T(\epsilon_{n-1},\epsilon_n)=(\epsilon_{n-1},\epsilon_n)C^T$. 由(23.29)最右边的式子可知 C^T 的特征值为 $a\pm bi$, 故 C 的特征值为 $a\pm bi$.

Step 5 现在对(23.30)的 B 用归纳假设即可完成证明.

23.1.10 著名矩阵的逆矩阵

本部分结果无需记忆, 但证明的方法有学习价值.

定理 23.28 (vandermonde 矩阵逆矩阵)

设

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}, x_i\neq x_j,\forall i\neq j, i,j\in\{1,2,3,\cdots,n\}.$$

[24]切换标准正交基对应正交相似可以复习课本.

对每个 $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, 设 S_r 是 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\setminus\{x_i\}$ 的初等对称多项式, 则

$$\left(M^{-1}\right)_{(i,j)}=(-1)^{n-j}\frac{S_{n-j}}{\prod\limits_{1\leqslant p\leqslant n,p\neq i}\left(x_i-x_p\right)},j\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

♡

证明 设 $Z=(z_{ij})$ 是 M 的逆矩阵. 有关于 (z_{ij}) 的方程组

$$\sum_{j=1}^{n}z_{ij}x_k^{j-1}=\delta_{ik},i,k\in\{1,2,\cdots,n\}. \tag{23.31}$$

定义

$$L_i(t)\triangleq\frac{\prod\limits_{1\leqslant p\leqslant n,p\neq i}(t-x_p)}{\prod\limits_{1\leqslant p\leqslant n,p\neq i}\left(x_i-x_p\right)},i=1,2,\cdots,n,$$

于是 $L_i(x_k)=\delta_{ik},i,k\in\{1,2,\cdots,n\}$. 视(23.31)是作用在 x_k 的多项式, 于是我们得到了

$$L_i(t)=\sum_{j=1}^{n}z_{ij}t^{j-1},\forall t\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n. \tag{23.32}$$

现在对比系数, 展开得

$$\prod_{1\leqslant p\leqslant n,p\neq i}(t-x_p)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}S_{n-j}t^{j-1},$$

于是结合(23.32)得

$$\left(M^{-1}\right)_{(i,j)}=(-1)^{n-j}\frac{S_{n-j}}{\prod\limits_{1\leqslant p\leqslant n,p\neq i}\left(x_i-x_p\right)},j\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

定理 23.29 (Cauchy 矩阵的逆)

设

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1+y_1}&\frac{1}{x_2+y_2}&\cdots&\frac{1}{x_1+y_n}\\\frac{1}{x_2+y_1}&\frac{1}{x_2+y_2}&\cdots&\frac{1}{x_2+y_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{x_n+y_1}&\frac{1}{x_n+y_2}&\cdots&\frac{1}{x_n+y_n}\end{pmatrix},$$

则在 C 可逆时, 必有

$$\left(C^{-1}\right)_{(i,j)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x_j+y_k\right)\left(x_k+y_i\right)}{\left(x_j+y_i\right)\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n,k\neq j}\left(x_j-x_k\right)\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n,k\neq i}\left(y_i-y_k\right)},i,j=1,2,\cdots,n. \tag{23.33}$$

♡

我们先考虑引理

引理 23.8

设 $x_i\neq y_j,i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1-y_1}&\frac{1}{x_2-y_2}&\cdots&\frac{1}{x_1-y_n}\\\frac{1}{x_2-y_1}&\frac{1}{x_2-y_2}&\cdots&\frac{1}{x_2-y_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{x_n-y_1}&\frac{1}{x_n-y_2}&\cdots&\frac{1}{x_n-y_n}\end{pmatrix},$$

则 $C=-PV_x^{-1}V_yQ^{-1}$, 这里

$$V_x=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{pmatrix},V_y=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\y_1&y_2&\cdots&y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y_1^{n-1}&y_2^{n-1}&\cdots&y_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}p_1(x_1)&&&\\&p_2(x_2)&&\\&&\ddots&\\&&&p_n(x_n)\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}p(y_1)&&&\\&p(y_2)&&\\&&\ddots&\\&&&p(y_n)\end{pmatrix}$$

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),p_k(x)=\frac{p(x)}{x-x_k}=\prod_{1\leqslant i\leqslant n,i\neq k}(x-x_i),k=1,2,\cdots,n.$$

♡

笔记 证明是纯粹的矩阵乘法验证.

证明 引理证明: 设 $p_i(x)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x^{k-1},i=1,2,\cdots,n$, 则有矩阵乘法

$$(p_i(x_j))=(a_{ij})\cdot V_x=P\Rightarrow(a_{ij})=PV_x^{-1}$$
$$\Rightarrow(p_i(y_j))=(a_{ij})\cdot V_y=PV_x^{-1}V_y.$$

又

$$(p_i(y_j))=\frac{p(y_j)}{y_j-x_i}\Rightarrow(p_i(y_j))=-CQ\Rightarrow PV_x^{-1}V_y=-CQ,$$

这就给出了 $C=-PV_x^{-1}V_yQ^{-1}$.

证明 原定理证明: 我们先设 C 形如引理(23.8), 从而有 $C=-PV_x^{-1}V_yQ^{-1}$. 设 $C^{-1}=(b_{ij})$, 于是

$$b_{ij}=e_i^TC^{-1}e_j,i,j\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

于是设 $A=V_y^{-T}Q^Te_i,B=-V_xP^{-1}e_j$, 则 $b_{ij}=A^TB$.

现在我们有

$$A=p(y_i)V_y^{-T}e_i=\frac{p(y_i)}{\det V_y}\left(V_y^*\right)^Te_i=\frac{p(y_i)}{\det V_y}\begin{pmatrix}A_{1,i}^y\\A_{2,i}^y\\\vdots\\A_{n,i}^y\end{pmatrix},$$

这里 $A_{k,i}^y$ 是 V_y 对应的代数余子式.

于是我们有

$$B=-V_xP^{-1}e_j=-\frac{1}{p_j(x_j)}\begin{pmatrix}1\\x_j\\\vdots\\x_j^{n-1}\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}A^TB&=-\frac{1}{p_j(x_j)}\frac{p(y_i)}{\det V_y}\sum_{k=1}^{n}x_j^{k-1}A_{k,i}^y\\&=-\frac{1}{p_j(x_j)}\frac{p(y_i)}{\det V_y}\cdot\{y_1,\cdots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\cdots,y_n\}\text{的Vandermonde 行列式}\\&=-\frac{1}{p_j(x_j)}\frac{p(y_i)}{\det V_y}\cdot\det V_y|_{y_i=x_j}.\end{aligned}$$

现在将 C 换回定理23.29的 C, 即 y_k 换成 $-y_k$, 我们综合上面的计算就得到(23.33).

在考虑定理23.29推论之前, 我们先来看一个非常重要的计算小结论.

定理 23.30

设 $p, p_k, k=1,2,\cdots,n$ 如引理23.8所定义, 则有恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^r}{p_k(x_k)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<n-1\\ 1, & r=n-1\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_j, & r=n\end{cases}. \tag{23.34}$$

♡

证明 对整数 $0\leqslant r\leqslant n-1$, 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k^r}{p_k(x_k)}$ 是多项式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{p_k(x)x_k^r}{p_k(x_k)}$ 的 x^{n-1} 的系数. 因此由拉格朗日插值多项式的唯一性11.1, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k(x)x_k^r}{p_k(x_k)}=x^r,\forall x\in\mathbb{R},r\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}.$$

于是对比系数得(23.34)前两个式子.

当 $r=n$, 反复运用 $0\leqslant r\leqslant n-1$ 的情况我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n}{p_k(x_k)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x_k^2-x_n^2\right)x_k^{n-2}}{p_k(x_k)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x_k+x_n)x_k^{n-2}}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,i\neq k}(x_k-x_i)}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k^{n-1}}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,i\neq k}(x_k-x_i)}+x_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k^{n-2}}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,i\neq k}(x_k-x_i)}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k^{n-1}}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,i\neq k}(x_k-x_i)}+x_n\overset{\text{类似的}}{=}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{x_k^{n-2}}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-2,i\neq k}(x_k-x_i)}+x_{n-1}+x_n\\&\overset{\text{依次下去}}{=}x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n,\end{aligned}$$

这就证明了(23.34).

推论 23.4 (Cauchy 矩阵逆的元素和)

设

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1+y_1}&\frac{1}{x_2+y_2}&\cdots&\frac{1}{x_1+y_n}\\ \frac{1}{x_2+y_1}&\frac{1}{x_2+y_2}&\cdots&\frac{1}{x_2+y_n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{1}{x_n+y_1}&\frac{1}{x_n+y_2}&\cdots&\frac{1}{x_n+y_n}\end{pmatrix},$$

则在 C 可逆时, 必有 C^{-1} 元素和为 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)$.

♡

笔记 积累 n 阶矩阵 X 的元素和为 $1_n^TX1_n$.

证明 我们还是把 C 考虑成引理23.8的 C, 回忆引理23.8的符号, 我们有 C^{-1} 元素和 $s=1_n^TC^{-1}1_n$ 为 A^TB, 这里

$$A=-V_y^{-T}Q^T1_n,B=V_xP^{-1}1_n.$$

于是

$$V_y^TA=-Q^T1_n\Rightarrow\begin{pmatrix}1&y_1&\cdots&y_1^{n-1}\\ 1&y_2&\cdots&y_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&y_n&\cdots&y_n^{n-1}\end{pmatrix}A=-\begin{pmatrix}p(y_1)\\ p(y_2)\\ \vdots\\ p(y_n)\end{pmatrix}.$$

设

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=x^n+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{i-1},q(x)=\prod_{i=1}^{n}(y-y_i)=y^n+\sum_{i=1}^{n}b_iy^{i-1},$$

我们有

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\,y_j^{i-1},j=1,2,\cdots,n,$$

这给出了 $A=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\\vdots\\b_n-a_n\end{pmatrix}$. 因此

$$B=V_x\begin{pmatrix}\frac{1}{p_1(x_1)}\\\frac{1}{p_2(x_2)}\\\vdots\\\frac{1}{p_n(x_n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k(x_k)}\\\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{p_k(x_k)}\\\vdots\\\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{n-1}}{p_n(x_n)}\end{pmatrix}\overset{\text{定理23.30}}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

现在我们就知道

$$s=A^TB=a_n-b_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k).$$

把 C 换回来即得 C^{-1} 元素和为 $\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)$.

23.1.11 矩阵级数

定义 23.4

设 f 在 $z=0$ 邻域内可以展开为幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,a_n\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}_0$, 对矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, 当 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n$ 收敛, 我们可定义 $f(A)$ 为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n. \tag{23.35}$$

♣

注类似的, 我们可以在 $a\in\mathbb{C}$ 处展开来定义矩阵级数. 在未指出在哪点展开的时候一般默认为在 $z=0$ 展开.

定义 23.5 (矩阵范数的定义)

函数 $||\cdot||:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C},X\mapsto||X||$ 被称为一个矩阵范数, 如果满足

1. $$||\lambda X||=|\lambda|\cdot||X||,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n},\lambda\in\mathbb{C};$$
2. $$||X+Y||\leqslant||X||+||Y||,\forall X,Y\in\mathbb{C}^{n\times n}; \tag{23.36}$$
3. $||X||\geqslant0,\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且等号成立条件为 $X=0$;
4. $$||X\cdot Y||\leqslant||X||\cdot||Y||,\forall X,Y\in\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{23.37}$$

♣

注不具备(23.37)但具备另外三条的函数 $||\cdot||$ 被称为范数. (23.36)可推出

$$|||X||-||Y|||\leqslant||X-Y||,\forall X,Y\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

笔记

矩阵空间[25]的所有范数[26]等价, 即对任何两个范数 $||\cdot||_1,||\cdot||_2$, 都存在 $c_1,c_2>0$ 使得[27]

$$c_1||\cdot||_2\leqslant||\cdot||_1\leqslant c_2||\cdot||_2,$$

因此矩阵的收敛性和范数的选取无关. 矩阵空间作为有限维空间一定是完备空间[28].

我们给出一个构造矩阵范数的方式.

命题 23.9

设 $||\cdot||$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的范数, 则

$$||A||\triangleq\sup_{||\mathbf{x}||=1}||A\mathbf{x}||$$

是矩阵范数. ♠

证明 定义自明.

注 标准范数 $||A||\triangleq\sup_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{C}^n}=1}||A\mathbf{x}||_{\mathbb{C}^n}$ 是矩阵范数. 在本节的后续计算中, $||\cdot||$ 如未特别指出都是标准范数.

显然的, 我们有如下结果.

定理 23.31

设 $||\cdot||$ 是矩阵空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的任一矩阵范数, $a\in\mathbb{C},r>0$ 且 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,z\in(a-r,a+r)$. 则当 $||A-aI||<r$, 我们有 $f(A)$ 有意义. ♡

笔记 希望有兴趣的读者可以学习 Bochner 积分理论, 矩阵级数可以看做计数测度下的 Bochner 积分, 从而真正的视觉看待矩阵级数. 因此矩阵级数将享有测度论的几乎所有好的性质, 例如控制收敛定理, Fubini 定理等, 从应用角度, 读者可以直接使用.

证明 因为

$$\sum_{n=m}^{m+p}||a_n(A-aI)^n||=\sum_{n=m}^{m+p}|a_n|\cdot||(A-aI)^n||\leqslant\sum_{n=m}^{m+p}|a_n|\cdot||A-aI||^n,$$

我们知道 $\left\{\sum_{n=1}^{m}a_n(A-aI)^n\right\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个 Cauchy 列, 因此有 $f(A)$ 有意义.

设

$$A=P\mathrm{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1),J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s)\}P^{-1},\lambda_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,s,P\in\mathbb{C}^{n\times n},$$

我们有

$$f(A)=P\mathrm{diag}\{f(J_{n_1}(\lambda_1)),f(J_{n_2}(\lambda_2)),\cdots,f(J_{n_s}(\lambda_s))\}P^{-1}.$$

回忆 jordan 块的计算21.2的(21.1), 我们知只要 f 在 $|z|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant s}|\lambda_i|$ 的邻域可以展开为收敛的幂级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, 那么 $f(A)$ 有意义.

从应用角度, 我们给出如下好用的结果

[25]阶数要固定.

[26]不满足(23.37)的也叫范数.

[27]这个结果可以直接使用, 证明就是和标准范数做比较并利用单位球面的紧性.

[28]即任何 Cauchy 列必然收敛.

命题 23.10

设 $A\in\mathbb{C}^{k\times k}$, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $|z|<r$, g 是整函数[a]. 若存在一矩阵范数 $||\cdot||$, 使得 $||A||<r$, 证明

$$(g\circ f)(A)=g(f(A)).$$

[a]幂级数收敛半径为 ∞.

♠

证明 注意到 $g\circ f$ 在 $|z|<r$ 解析, 因此

$$(g\circ f)(A)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nA^n,$$

设 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$, $z\in\mathbb{C}$, 我们有

$$\begin{aligned}g(f(A))&=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_mA^m\right)^n\\&=b_0E+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}b_na_{m_1}a_{m_2}\cdots a_{m_n}A^{m_1+m_2\cdots+m_n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nA^n,\end{aligned}$$

其中无脑换序来自如下的绝对收敛级数

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\left|\left|b_na_{m_1}a_{m_2}\cdots a_{m_n}A^{m_1+m_2\cdots+m_n}\right|\right|\\\leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}|b_n|\cdot|a_{m_1}a_{m_2}\cdots a_{m_n}|\cdot||A||^{m_1+m_2+\cdots+m_n}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\left(\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|\cdot||A||^m\right)^n<\infty,\end{aligned}$$

且重排之后的系数是 c_n 可来自 $k=1$ 就是正常的级数.

笔记 一个自然的问题是, 如果 g 是整函数, 那么在不同点展开定义的矩阵函数是否一致? 注意到 $g(z-a)$ 可以看成命题23.10的 $g\circ f$, 因此如果 g 是整函数, 那么在不同点展开定义的矩阵函数是一致的.

很多时候用矩阵范数不如用特征值方便, 事实上我们有如下特征值和矩阵范数的关系.

命题 23.11 (矩阵范数和特征值关系)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 特征值全体为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n.$$

则

1. 对任何矩阵范数 $||\cdot||$, 都有
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|\leqslant||A||.$$
2. 对任何 $\epsilon>0$, 存在矩阵范数 $||\cdot||_\epsilon$ 使得
$$||A||_\epsilon\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|+\epsilon.$$

♠

证明

1. 设
$$Av=\lambda v,v\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\lambda\in\mathbb{C},$$

注意到

$$\begin{aligned}|\lambda|\cdot\left|\left|\begin{pmatrix}v & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right|\right| &= \left|\left|\begin{pmatrix}\lambda v & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right|\right| \\ &= \left|\left|A\begin{pmatrix}v & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right|\right| \leqslant ||A||\cdot\left|\left|\begin{pmatrix}v & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right|\right|,\end{aligned}$$

即 $|\lambda|\leqslant||A||$, 这就证明了

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|\leqslant||A||.$$

2. 用 $||\cdot||_{\mathbb{C}^n}$ 表示标准向量范数或标准矩阵范数.

设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP=J$ 是 A 的 Jordan 标准型, 于是考虑

$$D_t\triangleq\operatorname{diag}\left\{1,t,t^2,\cdots,t^n\right\},t>0,||\mathbf{x}||_t\triangleq\left||D_t^{-1}P^{-1}\mathbf{x}|\right|_{\mathbb{C}^n},\mathbf{x}\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

现在

$$\begin{aligned}||A||_t &\triangleq \max_{||\mathbf{x}||_t=1}||A\mathbf{x}||_t=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\left||D_t^{-1}P^{-1}A\mathbf{x}|\right|_{\mathbb{C}^n}}{\left||D_t^{-1}P^{-1}\mathbf{x}|\right|_{\mathbb{C}^n}} \\ &=\max_{\mathbf{y}\neq0}\frac{\left||D_t^{-1}P^{-1}APD_t\mathbf{y}|\right|_{\mathbb{C}^n}}{||\mathbf{y}||_{\mathbb{C}^n}} \\ &=\left||D_t^{-1}P^{-1}APD_t|\right|_{\mathbb{C}^n} \\ &=\left||D_t^{-1}JD_t|\right|_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

直接计算表明

$$\lim_{t\to0^+}||A||_t=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|,$$

即对任何 $\epsilon>0$, 存在矩阵范数 $||\cdot||_\epsilon$ 使得

$$||A||_\epsilon\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|+\epsilon.$$

笔记 现在我们可以减弱命题23.10的条件, 即把 $||A||<r$ 用

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|<r. \tag{23.38}$$

代替. 这是因为当(23.38)成立, 由命题23.11可取矩阵范数 $||\cdot||$ 使得

$$||A||\leqslant\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|+r}{2}<r,$$

从而仍然可以用命题23.10得证.

来看十一届大学生数学竞赛真题:

例题 23.31 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明

1. $\sin^2A+\cos^2A=I_n$.
2. 若 $||A||<1$, 则 $\sin\arctan A=A\cos\arctan A$, 这里

$$\arctan z\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1},|z|<1.$$

证明

1. 注意到 $\sin^2z+\cos^2z=1,z\in\mathbb{C}$, 由命题23.10, 我们知道 $\sin^2A+\cos^2A=I_n$.
2. 由 $\sin\arctan z=z\cos\arctan z,|z|<1$ 和命题23.10知 $\sin\arctan A=A\cos\arctan A$.

来看清华求真直博士考试线性代数题.

例题 23.32 证明或否定满足下述条件的 $n,n\geqslant2$ 阶矩阵存在性.

1. $Ae^A=I$;
2. A 特征值都为实数.

证明 取 $xe^x=1$ 的实根 $x_0\in(0,1)$, 我们考虑 $A=x_0I$, 则

$$Ae^A=x_0e^{x_0I}=x_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_0I)^n}{n!}=x_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_0^nI}{n!}=x_0e^{x_0}I=I.$$

来看丘赛真题:

例题 23.33

1. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足
$$e^{t(A+B)}=e^{tA}e^{tB},\forall t\in\mathbb{R},$$
证明 $AB=BA$.
2. 设 $\gamma\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$ 满足
$$\gamma(0)=I_n,\gamma'(0)=A,$$
证明
$$\lim_{n\to\infty}\gamma^n\left(\frac{t}{n}\right)=e^{At}.$$

笔记 矩阵函数求导理论也可以融入一般的抽象空间中的微分理论, 即定义13.3.

证明

1. 读者不难用 $e^{x+y}=e^xe^y$ 证明, 若 $AB=BA$, 则 $e^Ae^B=e^{A+B}$. 反过来, 我们考虑
$$\frac{d}{dt}e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^nA^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\frac{A^n}{n!}=e^{tA}A.$$
于是
$$\begin{aligned}(A+B)e^{t(A+B)}&=\frac{d}{dt}e^{t(A+B)}=Ae^{tA}e^{tB}+e^{tA}e^{tB}B\\(A+B)^2e^{t(A+B)}&=\frac{d^2}{dt^2}e^{t(A+B)}=A^2e^{tA}e^{tB}+2Ae^{tA}Be^{tB}+e^{tA}e^{tB}B^2\end{aligned}.$$
让 $t=0$ 即得
$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\Rightarrow AB=BA.$$
2. 我们先说明 $\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n},A\to e^A$ 是连续的, 这其实是显然的, 但我们不引入任何高级的观点来证一次. 对任何 $m\in\mathbb{N}$, 当 $||X-A||\leqslant||A||$, 我们有
$$\begin{aligned}||e^X-e^A||&\leqslant\sum_{n=0}^{m}\frac{||X^n-A^n||}{n!}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{||X^n-A^n||}{n!}\\&\leqslant\sum_{n=0}^{m}\frac{||X^n-A^n||}{n!}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{||X||^n+||A||^n}{n!}\\&\leqslant\sum_{n=0}^{m}\frac{||X^n-A^n||}{n!}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(2^n+1)||A||^n}{n!},\end{aligned}$$
因此
$$\overline{\lim_{X\to A}}||e^X-e^A||\leqslant\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(2^n+1)||A||^n}{n!},$$
于是由 m 任意性即得
$$\lim_{X\to A}||e^X-e^A||=0.$$
我们取
$$B(t)=\ln(I_n+\gamma(t)-I_n),t\in(-\delta,\delta),$$

这里 $\delta>0$ 充分小使得

$$||\gamma(t)-I_n||<\frac{1}{2},||\gamma(t)-I_n-At||<|t|,\forall t\in(-\delta,\delta).$$

我们知道 $e^{\ln(1+z)}=1+z,\forall|z|<1$, 从而考虑左右两边的幂级数展开, 我们由23.10知道 $e^{B(t)}=\gamma(t),t\in(-\delta,\delta)$.

我们再断言 $B(t)\in C((-\delta,\delta),\mathbb{R}^{n\times n})$ 且 $B(0)=0,B'(0)=A$.

事实上, 一方面因为

$$B(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(\gamma(t)-I_n)^k}{k},\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left|(-1)^{k-1}\frac{(\gamma(t)-I_n)^k}{k}\right|\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^kk}<\infty,$$

即 $B(t)$ 定义级数一致收敛, 所以 $B(t)$ 连续且 $B(0)=0$, 另外一方面我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left|(-1)^{k-1}\frac{(\gamma(t)-I_n)^k}{tk}\right|\right|&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||\gamma(t)-I_n||}{|t|\,k\cdot2^{k-1}}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||\gamma(t)-I_n-At||}{|t|\,k\cdot2^{k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||At||}{|t|\,k\cdot2^{k-1}}\\&\leqslant(||A||+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot2^{k-1}}<\infty,\end{aligned}$$

由控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{t\to0}\frac{B(t)}{t}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\lim\limits_{t\to0}\frac{\gamma(t)-I_n}{t}\cdot\lim\limits_{t\to0}(\gamma(t)-I_n)^{k-1}}{k}=A.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\gamma^n\left(\frac{t}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{nB\left(\frac{t}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}nB\left(\frac{t}{n}\right)}=e^{At},$$

例题 23.34 设 f 是整函数, A 是 n 阶矩阵, 则存在多项式 p, 使得 $f(A)=p(A)$.

证明 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix},$$

这里 $J_i,i=1,2,\cdots,s$ 是特征值相同的 Jordan 块组成的分块对角矩阵, 且每个 J_i 特征值两两不同, 由中国剩余定理23.1, 我们只需证明 $s=1$ 的情形. 当然, 我们仍然给出不妨设的细节, 对每个 $j=1,2,\cdots,s$, 取多项式 $p_j\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $f(J_j)=p_j(J_j)$. 则可取 $p\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$p\equiv p_j\,(\mathrm{mod}m_j),j=1,2,\cdots,s,$$

这里 $m_j\in\mathbb{C}[x]$ 是 J_j 极小多项式, 则此时 $p(A)=f(A)$.

因此我们无妨把上述 A 的形状假设为每个 J_i 都是特征值相同的 Jordan 块, 且特征值为 λ, 那么由考虑在 λ 处的 Taylor 展开, 因为命题23.10知在不同的地方展开的幂级数定义的矩阵函数一致, 因此我们可以不妨设 $\lambda=0$, 此时因为 $A^j=0,\forall j\geqslant n+1$, 所以存在多项式 p, 使得 $f(A)=p(A)$. 我们完成了证明.

来看第九届真题.

例题 23.35 设 $\alpha\in(1,2),f(x)=(1-x)^{\alpha}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k,A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是幂零矩阵. 设

$$G(x)=(g_{ij}(x))=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(xI+A)^k,0\leqslant x<1,$$

证明 $\int_0^1G(x)\,\mathrm{d}x$ 存在的充要条件是 $A^3=0$.

证明 注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI+A)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j} A^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} a_k C_k^j x^{k-j} A^j \overset{\text{一种组合数的求和方法18.1.5}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A^j.$$

我们有

$$\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}x\text{存在} \Leftrightarrow \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A^j \mathrm{d}x\text{存在}.$$

而 $f^{(j)}(x) \sim (1-x)^{\alpha-j}, x \to 1^-$, 因此当 $0 \leqslant j \leqslant 2$ 有 $\int_0^1 f^{(j)}(x)\,dx$ 存在. 当 $j \geqslant 3$ 就需要 $A^3 = 0$ 才能保证 $\int_0^1 G(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

例题 23.36 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆的, 证明存在 n 阶复矩阵 B 使得 $e^B = A$.

证明 不妨设 $A = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}$, 待定 $B = \operatorname{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$. 于是

$$e^B = \operatorname{diag}\left\{e^{B_1}, e^{B_2}, \cdots, e^{B_s}\right\}.$$

因此可以不妨设 $A = J_n(\lambda), \lambda \neq 0$.

选取 $c \in \mathbb{C}$ 使得 $|c\lambda - 1| < 1$. 再取 $c' \in \mathbb{C}$ 使得 $e^{c'} = c$. 于是取 $B = \ln(I + cA - I) - c'I$, 利用命题23.10就有

$$e^B = cAe^{-c'I} = ce^{-c'}A = A.$$

定理 23.32 (谱映射定理)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, f(A)$ 有意义, A 的全体特征值[a]为 $\mu_1, \cdots, \mu_n$, 则 $f(A)$ 的特征值为 $f(\mu_1), \cdots, f(\mu_n)$.

[a]可能相同.

♡

笔记 于是我们有 $\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

证明 不妨设 $A = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \cdots, J_{n_s}(\lambda_s)\}$, 则

$$f(A) = \operatorname{diag}\{f(J_{n_1}(\lambda_1)), f(J_{n_2}(\lambda_2)), \cdots, f(J_{n_s}(\lambda_s))\}.$$

注意到 $f(J_{n_i}(\lambda_i)), 1 \leqslant i \leqslant s$ 有意义.

不失一般性, 设 $A = J_n(a)$. 在 x 的小邻域内, 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, f_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, n \in \mathbb{N}.$$

于是由21.2的(21.1), 我们知道下述极限存在

$$\lim_{m\to\infty} f_m(J_n(a)) = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} f_m(a) & \frac{f_m'(a)}{1!} & \frac{f_m''(a)}{2!} & \cdots & \frac{f_m^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} & \frac{f_m^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ & f_m(a) & \frac{f_m'(a)}{1!} & \frac{f_m''(a)}{2!} & \ddots & \frac{f_m^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} \\ & & f_m(a) & \frac{f_m'(a)}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & & f_m(a) & \ddots & \frac{f_m''(a)}{2!} \\ & & & & \ddots & \frac{f_m'(a)}{1!} \\ & & & & & f_m(a) \end{pmatrix}.$$

于是我们知道 $\lim_{m\to\infty} f_m(a)$ 存在, 因此 $f(a)$ 有定义. 于是我们知道 $f(J_n(a))$ 的特征值为 $\underbrace{f(a), f(a), \cdots, f(a)}_{n\text{个}}$,

这就完成了证明.

例题 23.37 证明

$$|I + tA| = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{tr}(A^k) t^k},$$

这里

$$A\in\mathbb{C}^{n\times n},|t|<\frac{1}{||A||}.$$

证明 当 $|t|<\frac{1}{||A||}$, 由命题23.10和谱映射定理23.32知道

$$|I+tA|=\left|e^{\ln(I+tA)}\right|=\left|e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}A^k}\right|=e^{\operatorname{tr}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}A^k\right)}=e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{tr}\left(A^k\right)t^k}.$$

定理 23.33 (Baker–Campbell–Hausdorff 公式)

设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义 $[A,B]=AB-BA$, 则

$$e^ABe^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots. \tag{23.39}$$

♡

证明 考虑

$$L_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AX,R_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto XA.$$

注意到

$$L_A\left(R_AX\right)=L_A\left(XA\right)=AXA=R_A\left(AX\right)=R_A\left(L_AX\right),$$

即 $L_AR_A=R_AL_A$. 现在

$$\begin{aligned}e^ABe^{-A}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kBe^{-A}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_A^k\left(Be^{-A}\right)}{k!}=e^{L_A}\left(Be^{-A}\right)\\&=e^{L_A}\left(B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-A)^k}{k!}\right)=e^{L_A}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kR_A^k\left(B\right)}{k!}\right)\\&=e^{L_A}\left(e^{-R_A}\left(B\right)\right)=e^{L_A-R_A}\left(B\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(L_A-R_A\right)^k\left(B\right)}{k!},\end{aligned}$$

这就得到了(23.39).

例题 23.38 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵且

$$A^2=B^2=(AB)^2. \tag{23.40}$$

证明: $A^4=B^4=E_n$.

证明 由(23.40)知

$$A=BAB=B^2AB^2=A^5,$$

即 $A^4=E_n$, 类似可得 $B^4=E_n$.

例题 23.39* 设 $A,B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义 $[A,B]=AB-BA$. 若有

$$[A,B]=C,[B,C]=A,[C,A]=B,$$

证明: $e^{4\pi A}=I_n$.

注本题答案来自Miklós Schweitzer 2012 P6.

证明 由 Baker–Campbell–Hausdorff 公式23.33, 对 $S,T\in\mathbb{C}^{n\times n},\lambda\in\mathbb{C}$ 有

$$e^{\lambda S}Te^{-\lambda S}=T+\lambda[S,T]+\frac{\lambda^2}{2!}[S,[S,T]]+\frac{\lambda^3}{3}[S,[S,[S,T]]]+\cdots. \tag{23.41}$$

取 $S=A,T=B$, 则有

$$\begin{aligned}e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}&=B+\lambda[A,B]+\frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]]+\frac{\lambda^3}{3}[A,[A,[A,B]]]+\cdots\\&=B+\lambda C+\frac{\lambda^2}{2!}[A,C]+\frac{\lambda^3}{3}[A,[A,C]]+\cdots\\&=B+\lambda C-\frac{\lambda^2}{2!}B-\frac{\lambda^3}{3}C+\cdots\\&=\left(1-\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}-\cdots\right)B+\left(\lambda-\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^5}{5!}-\cdots\right)C\\&=\frac{e^{i\lambda}+e^{-i\lambda}}{2}B+\frac{e^{i\lambda}-e^{-i\lambda}}{2i}C.\end{aligned}$$

上式取 $\lambda=\frac{\pi}{2},\pi$ 得 $e^{\frac{\pi}{2}A}B=Ce^{\frac{\pi}{2}A},e^{\pi A}B=-Be^{\pi A}$. 于是

$$e^{\frac{\pi}{2}A}B^k=C^ke^{\frac{\pi}{2}A},e^{\pi A}B^k=(-B)^ke^{\pi A},\forall k\in\mathbb{N}_0\Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}A}e^{\frac{\pi}{2}B}=e^{\frac{\pi}{2}C}e^{\frac{\pi}{2}A},e^{\pi A}e^{\frac{\pi}{2}B}=e^{-\frac{\pi}{2}B}e^{\pi A}.$$

现在记 $X=e^{\frac{\pi}{2}A},Y=e^{\frac{\pi}{2}B},Z=e^{\frac{\pi}{2}C}$, 则有 $XY=YZ,X^2Y=Y^{-1}X^2$, 从而 $YX^2Y=X^2$. 由轮换对称性, 可得 $XY^2X=Y^2$, 从而

$$\begin{aligned}\left(X^2Y^2\right)^2&=X\cdot XY^2X\cdot XY^2=XY^2XY^2=Y^4;\\\left(X^2Y^2\right)^2&=X^2Y\cdot YX^2Y\cdot Y=X^2YX^2Y=X^4.\end{aligned}$$

由例题23.38得 $e^{4\pi A}=X^8=I_n$, 这就完成了证明.

23.1.12 杂例

来看一个秩不等式取等条件:

命题 23.12

设 $\mathbb{F}$ 是一个域, $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 满足

$$r(A+B)=r(A)+r(B),$$

证明: 存在可逆 $P\in\mathbb{F}^{m\times m},Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},PBQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&E_s&0\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{23.42}$$

这里的分块矩阵是对应分块的.

证明 如果 A,B 有一个是 0 矩阵, 则命题是平凡的, 下设

$$r\triangleq r(A)\in\mathbb{N},s\triangleq r(B)\in\mathbb{N}.$$

取可逆 $P\in\mathbb{F}^{m\times m},Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},PBQ=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},B_{11}\in\mathbb{F}^{r\times r},$$

则由题目条件得

$$r\left(\begin{pmatrix}E_r+B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\right)=s+r.$$

首先

$$r\left(\begin{pmatrix}B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\right)\leqslant r\left(\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\right)=s,$$

然后我们有

$$r\left(\begin{pmatrix}E_r+B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\right)\leqslant r\left(\begin{pmatrix}E_r+B_{11} & B_{12}\end{pmatrix}\right)+r\left(\begin{pmatrix}B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\right)\leqslant r+r\left(\begin{pmatrix}B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\right),$$

即 $r\left(\begin{pmatrix}B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\right)\geqslant s$, 从而 $r\left(\begin{pmatrix}B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\right)=s$. 类似的可证 $r\left(\begin{pmatrix}B_{12}\\ B_{22}\end{pmatrix}\right)=s$. 由行向量组 $\begin{pmatrix}B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$ 存在 B 的行向量组的极大线性无关组, 考虑

$$\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换,这种行变换对应的初等矩阵为}P_1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

此时有

$$P_1A=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由 B_{22} 列向量组存在 $\begin{pmatrix}B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$ 的列极大无关组, 我们考虑

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换, 这种变换对应的矩阵}Q_1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix},$$

此时有

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因为 $r(B_{22})=s$, 所以可以对 B_{22} 做若干列变换就得到

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E_s & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

注意到这没变动前 r 行, 因此在此变换下 A 是保持不动的, 所以我们证明了存在可逆 $P\in\mathbb{F}^{m\times m},Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得(23.42)成立.

定理 23.34

设 X 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $f_1,f_2,\cdots,f_n\in X^*$, 记 $N=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\ker f_i$, 则下述条件等价

1. $f\in X^*$ 可被 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性表出;
2. $N\subset\ker f$.

♡

证明 1 推 2 是显然的, 我们来看 2 推 1.

构造线性映射

$$\pi:X\to\mathbb{F}^n,\mathbf{x}\mapsto(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\cdots,f_n(\mathbf{x})),$$

于是 $\ker\pi=N$. 定义

$$g:\pi(X)\to\mathbb{F},\pi(\mathbf{x})\mapsto f(\mathbf{x}),$$

我们有 g 是良定义的线性映射[29], 即设 $\pi(\mathbf{x})=0$, 则

$$\mathbf{x}\in N\Rightarrow\mathbf{x}\in\ker f\Rightarrow f(\mathbf{x})=0.$$

现在 g 线性延拓到 $\mathbb{F}^n$ 上, 故存在 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i.$$

[29] $N\subset\ker f$ 用来保证良定义.

现在我们注意到

$$f(\mathbf{x})=g(\pi(\mathbf{x}))=\sum_{i=1}^{n}c_if(x_i),\forall\mathbf{x}=\{x_i\}_{i=1}^{n}\in X,$$

这就证明了 f 可被 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性表出.

推论 23.5

n 维线性空间的 n 个线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关的充要条件是他们可分点, 即对任何 $a\neq0$, 存在某个 $k=1,2,\cdots,n$, 使得 $f_k(a)\neq0$.

♡

证明 注意到由定理23.34知 n 个线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关的充要条件是

$$\bigcap_{i=1}^{n}\ker f_i\subset\bigcap_{f\in X^*}\ker f=\{0\},$$

即等价于[30] $\bigcap_{i=1}^{n}\ker f_i=\{0\}$. 这就证明了推论23.5.

来看一个应用, 他是四川大学高等代数考研压轴题.

例题 23.40 设 V 是有限维线性空间且 A 是 V 上的线性变换. 定义

$$B:V^*\to V^*,g\mapsto g\circ A,$$

证明 $f,Bf,B^2f,\cdots,B^{n-1}f$ 构成 V^* 的基的充要条件是 A 的任一非 0 不变子空间都不是 $\ker f$ 的子空间.

笔记 积累 $\operatorname{span}\{x,Ax,A^2x,\cdots\}$ 是包含 x 的最小 $A-$ 不变子空间.

证明 由定理23.34知 $f,Bf,B^2f,\cdots,B^{n-1}f$ 构成 V^* 的基等价于

$$\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker B^kf=\{0\}.\tag{23.43}$$

于是由

$$\begin{aligned}x\in\bigcap_{k=0}^{n-1}\ker B^kf&\Leftrightarrow f\left(A^ix\right)=0,\forall i=0,1,2,\cdots,n-1\\&\Leftrightarrow A^ix\in\ker f,\forall i=0,1,2,\cdots,n-1\\&\overset{\text{哈密顿凯莱定理,高次可以用低次表示}}{\Leftrightarrow}A^ix\in\ker f,\forall i\in\mathbb{N}_0\\&\Leftrightarrow\operatorname{span}\{x,Ax,A^2x,\cdots\}\subset\ker f\\&\Leftrightarrow\text{包含}x\text{的最小}A-\text{不变子空间}\subset\ker f\end{aligned}$$

知(23.43)成立等价于含于 $\ker f$ 的不变子空间只能是 $\{0\}$, 这就等价于 A 的任一非 $\{0\}$ 不变子空间都不是 $\ker f$ 的子空间.

定理 23.35

函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关的充要条件是: 存在 m 个数 $x_i,i=1,2,\cdots,m$, 使得

$$\begin{vmatrix}f_1(x_1)&f_2(x_1)&\cdots&f_m(x_1)\\f_1(x_2)&f_2(x_2)&\cdots&f_m(x_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(x_m)&f_2(x_m)&\cdots&f_m(x_m)\end{vmatrix}\neq0.\tag{23.44}$$

♡

注本题并未指出 f 定义域, 因此其定义域未必是数字.

[30] 因为 $a=0\Leftrightarrow f(a)=0,\forall f\in X^*$.

证明 充分性: 设存在 m 个数 $x_i, i=1,2,\cdots,m$, 使得(23.44)成立. 考虑关于 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 的齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x_j)=0, j=1,2,\cdots,m,$$

我们由(23.44)知其系数矩阵可逆, 因此线性方程组只有 0 解, 这就证明了 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关.

必要性: 假定 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关, 不妨设定义域有不少于 m 个不同的点, 否则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性相关.

我们用归纳法, $m=1$ 命题显然成立, 假设命题对不超过 $m-1$ 时成立, 则考虑 m 时, 对 $f_1,f_2,\cdots,f_{m-1}$ 用归纳假设找好 $x_i, i=1,2,\cdots,m-1$ 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{m-1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{m-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{m-1}) & f_2(x_{m-1}) & \cdots & f_{m-1}(x_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

将

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \end{vmatrix}$$

按最后一行展开知 $f_m(x)$ 系数不为 0. 因为 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 线性无关知 $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \end{vmatrix}$ 不恒等于 0, 这就证明了存在 x_m 使得(23.44)成立, 我们完成了证明.

作为应用, 来看一个丘赛真题.

例题 23.41 设 $X\subset C[0,1]$ 的有限维子空间, 证明 X 中函数列逐点收敛蕴含一致收敛.

笔记 证明的想法是把函数列逐点收敛转化为系数的收敛, 从而一致收敛.

证明 设 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是 X 的一组基, 由定理23.35, 我们知道存在 m 个数 $x_i, i=1,2,\cdots,m$, 使得(23.44)成立.

对 $f^{(k)}\in X, k=1,2,\cdots,$, 我们知道有表示

$$f^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j^{(k)} f_j(x), \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x)=f(x), \forall x\in[0,1].$$

于是由(23.44)知

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(k)}(x_1) \\ f^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_m) \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f^{(k)}(x_1) \\ f^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x_m) \end{pmatrix}.$$

因此存在 c_j 使得

$$\lim_{k\to\infty} c_j^{(k)}=c_j, j=1,2,\cdots,m.$$

现在就有

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j f_j(x),\forall x\in[0,1].$$

又

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]}\left|f^{(k)}(x)-f(x)\right| &\leqslant \sup_{x\in[0,1]}\sum_{j=1}^{n}\left|c_j^{(k)}-c_j\right|\cdot|f_j(x)|\\ &\leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant m,x\in[0,1]}|f_j(x)|\cdot\sum_{j=1}^{n}\left|c_j^{(k)}-c_j\right|\to 0,k\to\infty,\end{aligned}$$

这就证明了 X 中函数列逐点收敛蕴含一致收敛.

定义 23.6

对集合 $K\subset\mathbb{R}^n$, 我们定义集合 K 的凸包为

$$\operatorname{co}(K)=\left\{\sum_{i=1}^{m}c_ix_i:m\in\mathbb{N},x_i\in K,c_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m,\sum_{i=1}^{m}c_i=1\right\}.$$

♣

笔记 容易证明 $\operatorname{co}(K)$ 是包含 K 的最小凸集. 我们称 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_ix_i,c_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m,\sum\limits_{i=1}^{m}c_i=1$ 是一个凸组合.

引理 23.9

集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 的凸包中的元素可以用项数不超过 $n+1$ 的 K 中元素的凸组合表示出来.

♡

证明 对 $x\in\operatorname{co}(K)$, 设

$$x=\sum_{i=1}^{k+1}c_ix_i,k\in\mathbb{N}_0,c_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k+1,\sum_{i=1}^{k+1}c_i=1.$$

若 $k\leqslant n$, 则命题已经成立.

当 $k>n$, 构造

$$\Lambda_x:\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^{n+1},(t_1,t_2,\cdots,t_{k+1})\mapsto\left(\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i,\sum_{i=1}^{k+1}t_i\right),$$

则 Λ_x 不能是单射. 现在存在不全为 0 的 $(t_1,t_2,\cdots,t_{k+1})$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i=0,\sum_{i=1}^{k+1}t_i=0.$$

于是取 $\lambda\in\mathbb{R}$, 使得 $\lambda t_i\leqslant c_i,1\leqslant i\leqslant n$ 且存在某个 $j\in\mathbb{N}$ 使得 $\lambda t_j=c_j$. 再令 $x=\sum\limits_{i=1}^{k+1}(c_i-\lambda t_i)x_i$, 注意到此时仍然是凸组合且必有一个系数为 0. 如果此时项数还是超过 $n+1$, 则可继续操作一次. 这样依此下去, 我们证明了集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 的凸包中的元素可以用项数不超过 $n+1$ 的 K 中元素的凸组合表示出来.

下述定理是可以直接使用的.

定理 23.36

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, A 是 V 上线性变换, $f,f_i\in\mathbb{F}[x],i=1,2,\cdots,s$ 满足 $f=f_1f_2\cdots f_s$ 并有 $f_1,f_2,\cdots,f_s$ 两两互素, 则

$$\ker f(A)=\ker f_1(A)\oplus\ker f_2(A)\oplus\cdots\oplus\ker f_s(A).$$

♡

证明 当 $s=2$, 此时由裴蜀等式得 $p_1,p_2\in\mathbb{F}[x]$ 使得 $p_1f_1+p_2f_2=1$. 于是对 $\alpha\in\ker f(A)$, 我们有

$$\alpha=p_1(A)f_1(A)\alpha+p_2(A)f_2(A)\alpha=\alpha_1+\alpha_2,$$

这里

$$f_1(A)\alpha_1 = p_2(A)f_1(A)f_2(A)\alpha = p_2(A)f(A)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \ker f_1(A);$$
$$f_2(A)\alpha_2 = p_1(A)f_1(A)f_2(A)\alpha = p_1(A)f(A)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_2 \in \ker f_2(A).$$

因此我们的确有

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) + \ker f_2(A).$$

现在设 $\alpha \in \ker f_1(A) \bigcap \ker f_2(A)$, 于是 $\alpha = p_1(A)f_1(A)\alpha + p_2(A)f_2(A)\alpha = 0$, 即

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A).$$

对 $s > 2$, 我们考虑归纳法. 假设命题对 $s-1$ 已经成立, 设 $g(x) \triangleq f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$, 则 f_1, g 互素. 由 $s = 2$ 的结论知

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker g(A).$$

对 g 用归纳假设得

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(A).$$

接下来给一个最基本的应用.

例题 23.42 设数域 $\mathbb{F}$ 和 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 证明:$A^2 = A$ 的充要条件是

$$r(A) + r(I-A) = n.$$

证明 必要性: 若 $A^2 = A$, 由定理23.36, 我们知道

$$\mathbb{F}^n = \ker\left(A^2 - A\right) = \ker A \oplus \ker(I-A),$$

即

$$n = \dim\ker A + \dim\ker(I-A) = 2n - r(A) - r(I-A),$$

这就证明了

$$r(A) + r(I-A) = n.$$

充分性: 若

$$r(A) + r(I-A) = n,$$

则

$$\dim\ker\left(A^2 - A\right) = \dim\ker A + \dim\ker(I-A) = n,$$

即

$$\ker\left(A^2 - A\right) = \mathbb{F}^{n\times n} \Rightarrow A^2 = A.$$

例题 23.43 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, A 是 V 上线性变换. 设 $f, f_i \in \mathbb{F}[x], i = 1,2,\cdots,s$ 且 $f_i, i = 1,2,\cdots,s$ 两两互素满足 $f = f_1f_2\cdots f_s$, f 是 A 的零化多项式. 证明:

$$V = \mathrm{Im}\frac{f(A)}{f_1(A)} \oplus \mathrm{Im}\frac{f(A)}{f_2(A)} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\frac{f(A)}{f_s(A)}.$$

证明 由定理23.36, 我们有

$$\ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A) \oplus \cdots \oplus \ker f_s(A).$$

设

$$\alpha=\frac{f(A)}{f_i(A)}\beta\in\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_i(A)},$$

我们有

$$f_i(A)\alpha=f(A)\beta=0\Rightarrow\alpha\in\ker f_i(A),$$

这给出了

$$\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_1(A)}+\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_2(A)}+\cdots+\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_s(A)}$$

是直和.

注意到 $\frac{f}{f_i},i=1,2,\cdots,s$ 互素, 由裴蜀等式我们知道存在 $u_i\in\mathbb{F}[x],i=1,2,\cdots,s$ 使得

$$\sum_{i=1}^{s}u_i\frac{f}{f_i}=1.$$

于是对 $\alpha\in V$, 我们有

$$\alpha=\sum_{i=1}^{s}\frac{f(A)}{f_i(A)}(u_i(A)\alpha)\in\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_1(A)}\oplus\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_2(A)}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_s(A)}.$$

现在我们知道

$$V=\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_1(A)}\oplus\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_2(A)}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}\frac{f(A)}{f_s(A)}.$$

命题 23.13

设 $\mathbb{K}$ 是一数域, $\alpha_i\in\mathbb{K}^m,i=1,2,\cdots,p$ 是线性无关的, $\beta_j\in\mathbb{K}^n,j=1,2,\cdots,q$ 线性无关的, 则

$$\left\{\alpha_i\beta_j^T:1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q\right\}$$

是线性无关的.

证明 设 $c_{ij}\in\mathbb{K},i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{q}\sum\limits_{i=1}^{p}c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=0$. 记 $C=(c_{ij})\in\mathbb{K}^{p\times q}$, 然后

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)C\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_q^T\end{pmatrix}=0.$$

由秩不等式21.6的 1 得

$$r((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)C)=r((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)C)+r\left(\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_q^T\end{pmatrix}\right)-q$$

$$\leqslant r\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)C\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_q^T\end{pmatrix}\right)\leqslant r((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)C),$$

即

$$r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)C\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \vdots\\ \beta_q^T\end{pmatrix}\right)=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)C\right).$$

继续类似用秩不等式21.6的 1 得

$$0=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)C\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \vdots\\ \beta_q^T\end{pmatrix}\right)=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)C\right)=r\left(C\right),$$

这就证明了 $C=0$, 从而

$$\left\{\alpha_i\beta_j^T:1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q\right\}$$

是线性无关的.

来看多个子空间和的维数公式:

定理 23.37 (子空间和的维数公式)

设 $W_i,i=1,2,\cdots,n$ 是域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的有限维子空间, 则

$$\dim\left(\sum_{j=1}^{n}W_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\dim W_j-\sum_{j=2}^{n}\dim\left[\left(W_1+W_2+\cdots+W_{j-1}\right)\bigcap W_j\right].$$

♡

笔记 本结果证明就是反复用两个子空间和的维数公式.

证明 证明.

例题 23.44 结式的秩 设 $\mathbb{K}$ 是一个数域, $f,g\in\mathbb{K}\left[x\right]$ 且

$$\deg f=m,\deg g=n,n,m\geqslant 1.$$

令 $\mathrm{Res}\left(f,g\right)$ 对应矩阵的秩是 r, f,g 最大公因子次数为 d, 则 $r=n+m-d$.

注设

$$f=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,g=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

回忆 $\mathrm{Res}\left(f,g\right)$ 是

$$\begin{vmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_m&&&\\ &a_0&a_1&\cdots&a_m&&\\ &&\ddots&&&\ddots&\\ &&&a_0&a_1&\cdots&a_m\\ b_0&b_1&\cdots&b_n&&&\\ &b_0&b_1&\cdots&b_n&&\\ &&\ddots&&&\ddots&\\ &&&b_0&b_1&\cdots&b_n\end{vmatrix}.$$

证明 记 $\mathbb{K}_n\left[x\right]$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上不超过 n 次的多项式全体, 我们考虑

$$T:\mathbb{K}_{n-1}\left[x\right]\times\mathbb{K}_{m-1}\left[x\right]\to\mathbb{K}_{m+n-1}\left[x\right],(u,v)\mapsto uf+vg.$$

设

$$d\left(x\right)\triangleq\left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right),f=\widetilde{f}d,g=\widetilde{g}d,$$

注意到

$$(u,v)\in\ker T\Leftrightarrow uf=-vg\Leftrightarrow u\widetilde{f}=-v\widetilde{g}\Leftrightarrow(u,v)=k\left(\widetilde{g},-\widetilde{f}\right),k\in\mathbb{K}_{d-1}[x],$$

于是我们有

$$\dim\ker T=d\Rightarrow r=\dim\mathrm{Im}T=n+m-d.$$

考虑 $\mathbb{K}_{n-1}[x]\times\mathbb{K}_{m-1}[x]$ 中的基

$$\left(x^{n-1},0\right),\left(x^{n-2},0\right),\cdots,(1,0),\left(0,x^{m-1}\right),\left(0,x^{m-2}\right),\cdots,(0,1)$$

和 $\mathbb{K}_{m+n-1}[x]$ 中的基

$$x^{n+m-1},x^{n+m-2},\cdots,1.$$

我们有 T 在基下的矩阵是 $\mathrm{Res}(f,g)$ 对应矩阵的转置, 我们就证明了 $r=n+m-d$.

例题 23.45 广义 Jordan 设 $p,q\in\mathbb{R}$ 使得 $x^2+px+q=0$ 没有实根. 对 $s\in\mathbb{N}$, 设 $\left(x^2+px+q\right)^s$ 对应的友矩阵为 A, 证明:

$$A\sim\begin{pmatrix}0&-q&&&&&&\\1&-p&&&&&&\\&1&0&-q&&&&\\&&1&-p&&&&\\&&&1&\ddots&&&\\&&&&&0&-q\\&&&&&1&-p\end{pmatrix}.$$

证明 注意到

$$\begin{pmatrix}0&-q&&&&&&\\1&-p&&&&&&\\&1&0&-q&&&&\\&&1&-p&&&&\\&&&1&\ddots&&&\\&&&&&0&-q\\&&&&&1&-p\end{pmatrix}^2+p\begin{pmatrix}0&-q&&&&&&\\1&-p&&&&&&\\&1&0&-q&&&&\\&&1&-p&&&&\\&&&1&\ddots&&&\\&&&&&0&-q\\&&&&&1&-p\end{pmatrix}+qI=\left[J_{2s}^T(0)\right]^2.$$

记

$$B\triangleq\begin{pmatrix}0&-q&&&&&&\\1&-p&&&&&&\\&1&0&-q&&&&\\&&1&-p&&&&\\&&&1&\ddots&&&\\&&&&&0&-q\\&&&&&1&-p\end{pmatrix},$$

于是

$$\left(B^2+pB+qI\right)^j\neq0,0\leqslant j\leqslant s-1,\left(B^2+pB+qI\right)^s=0,$$

即 B 极小多项式为 $\left(x^2+px+q\right)^s$. 现在 A,B 都是同一个多项式为极小多项式和特征多项式, 其不变因子都是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2s-1\text{个}},\left(x^2+px+q\right)^s,$$

因此 $A\sim B$.

笔记 实际上我们还有

$$\begin{pmatrix} 0 & -q & & & & & \\ 1 & -p & & & & & \\ & a & 0 & -q & & & \\ & & 1 & -p & & & \\ & & & a & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -q \\ & & & & & 1 & -p \end{pmatrix}^2 + p \begin{pmatrix} 0 & -q & & & & & \\ 1 & -p & & & & & \\ & a & 0 & -q & & & \\ & & 1 & -p & & & \\ & & & a & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -q \\ & & & & & 1 & -p \end{pmatrix} + qI = a \left[J_{2s}^T (0) \right]^2 .$$

所以当一切 $a \neq 0$, 都有

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & -q & & & & & \\ 1 & -p & & & & & \\ & a & 0 & -q & & & \\ & & 1 & -p & & & \\ & & & a & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -q \\ & & & & & 1 & -p \end{pmatrix}.$$

但是 $a = 0$, 我们有

$$A \nsim \begin{pmatrix} 0 & -q & & & & & \\ 1 & -p & & & & & \\ & a & 0 & -q & & & \\ & & 1 & -p & & & \\ & & & a & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -q \\ & & & & & 1 & -p \end{pmatrix}.$$

命题 23.14

设 V 是数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\varphi : V \to V$ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性变换, 行列式为 $\det\limits_{\mathbb{C}} \varphi$.
我们可以把 V 视为 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 维线性空间, $\varphi : V \to V$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性变换, 行列式为 $\det\limits_{\mathbb{R}} \varphi$.
证明:

$$\det_{\mathbb{R}} \varphi = \left| \det_{\mathbb{C}} \varphi \right|^2 .$$

♠

证明 设

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$$

是 V 作为复线性空间的基, 则

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, i\eta_1, i\eta_2, \cdots, i\eta_n$$

是是 V 作为实线性空间的基. 于是设复空间表示矩阵

$$\varphi(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)(A + iB), A, B \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

我们有

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,i\eta_1,i\eta_2,\cdots,i\eta_n\right)=\left(\varphi\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right),i\varphi\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right)\right)\\&=\left(\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right)(A+iB),\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\right)(iA-B)\right)\\&=\left(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,i\eta_1,i\eta_2,\cdots,i\eta_n\right)\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即实空间表示矩阵为 $\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}$.

现在初等变换得

$$\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+iB&-B+iA\\B&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+iB&0\\B&A-iB\end{pmatrix},$$

显然算初等矩阵知这里的初等变换不改变矩阵行列式. 现在我们有

$$\det_{\mathbb{R}}\varphi=\det\left(A+iB\right)\det\left(A-iB\right)=\left|\det\left(A+iB\right)\right|^2=\left|\det_{\mathbb{C}}\varphi\right|^2.$$

23.2 分析思想

定理 23.38 (多项式的根是多项式系数的连续函数)

设复系数多项式 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$, 假定 $z_1,z_2,\cdots,z_t$ 分别是 $f(z)$ 的 $s_1,s_2,\cdots,s_t$ 重根.

那么对任意充分小的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 只要 $|a_k-b_k|<\eta$, 那么多项式 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kz^k$ 的根恰好分布在 $\bigcup\limits_{j=1}^{t}\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$ 内, 且对 $j=1,2,\cdots,t$, g 在 $\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$ 内恰有 s_j 个根[a].

[a]计重数.

♡

笔记 本结果如果基础知识不足可以直接使用, 本定理是多项式根是多项式系数连续函数的准确叙述. 因为多项式系数到特征值不是一个单值函数, 所以连续性要准确叙述.

证明 * 给定多项式 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$, 设全部根分布在 $|z|<r,r>0$. 现在对任何 $\varepsilon>0,j=1,2,\cdots,t$, 取 z_j 的充分小的且闭包含于 $|z|<r$ 的邻域 c_j 即

$$c_j=\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$$

再取

$$0<\delta<\inf_{\bigcup\limits_{j=1}^{t}\partial c_j\bigcup\{z:|z|=r\}}|f(z)|,$$

那么对所有 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kz^k$, 只要

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k-b_k|\leqslant\frac{\delta}{(n+1)\sum\limits_{j=0}^{n}r^j},$$

就有

$$|f(z)-g(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|r^k\leqslant\delta<|f(z)|,\forall|z|=r.$$

因此由儒歇定理, $f(z),g(z)$ 在 $|z|<r$ 零点数完全相同, 并且由最大模定理, 有

$$|f(z)-g(z)|\leqslant\delta,\forall|z|\leqslant r.$$

于是在每个 c_j 上再用一次儒歇定理知对 $j=1,2,\cdots,t$, $f(z),g(z)$ 在 c_j 内根完全相同. 因此我们证明了 g 的根恰好分布在 $\bigcup_{j=1}^{t}\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$ 内, 且对 $j=1,2,\cdots,t$, g 在 $\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$ 内恰有 s_j 个根.

以下两个结果可以直接使用.

定理 23.39 (多元多项式的重要性质)

1. 设 $\mathbb{K}$ 是实数域或者复数域, f 是一个 $\mathbb{K}^n$ 上的多项式且满足 f 在一个开集上恒为 0, 则 f 是 0 多项式.
2. 设 $\mathbb{K}$ 是一个数域, f 是一个 $\mathbb{K}^n$ 上的函数且满足对每一个分量都是多项式, 则 f 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一个多项式.

♡

注证明的想法来自标准的现代数学教科书.

证明

1. 设 f 在连通开集 U 上为 0. 任意取定 $\mathbf{a}\in U,\mathbf{b}\in\mathbb{K}^n$, $g(\lambda)=f(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})$ 在开集 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\in U\}$ 上为 0. 因为 $f(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})$ 是关于 λ 的一元多项式, 所以 $f(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})$ 是关于 λ 的 0 多项式. 特别的取 $\mathbf{b}=e_j,j=1,2,\cdots,n$, 我们知道 $\frac{\partial f}{\partial x_j}=0,j=1,2,\cdots,n$, 于是 f 为常数, 从而 f 恒为 0.
2. 不妨假定 $\mathbb{K}$ 是复数域. 命题对 $n=1$ 显然成立, 假设命题对 n 成立, 当 $n+1$ 时, 考虑

$$A_m\triangleq\{\mu\in\mathbb{K}:f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\mu)\text{是关于}\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\text{的不超过}m\text{次多项式}\},m\in\mathbb{N}_0.$$

于是 $\mathbb{K}=\bigcup_{m=0}^{\infty}A_m$ 且 A_m 递增. 考虑两边集的势我们知道必然有某个 A_{m_0} 是无穷集.

现在取 m_0+1 个不同的点 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{m_0}\in\mathbb{K}$. 由拉格朗日插值公式, 对每个 $k=0,1,2,\cdots,m_0$, 都存在唯一的不超过 m_0 次的多项式[31] L_k 使得

$$L_k(\xi_j)=\delta_{kj},\forall j=0,1,2,\cdots,m_0. \tag{23.45}$$

现在我们定义

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\mu)=\sum_{0\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant m_0}L_{k_1}(\lambda_1)\cdots L_{k_n}(\lambda_n)f(\xi_{k_1},\cdots,\xi_{k_n},\mu).$$

然后可以看到 Q 是一个多项式.

接下来断言 $Q=f$. (23.45)表明

$$Q(\xi_{j_1},\cdots,\xi_{j_n},\mu)=f(\xi_{j_1},\cdots,\xi_{j_n},\mu),\forall\mu\in\mathbb{K},0\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_n\leqslant m_0. \tag{23.46}$$

如果固定 $\mu\in A_{m_0}$, 那么注意到 f,Q 都是关于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中任何一个不超过 m_0 次多项式. 然后由(23.46)和 m_0 次多项式被 m_0+1 个点的值唯一确定知道

$$Q(\lambda_1,\xi_{j_2},\cdots,\xi_{j_n},\mu)=f(\lambda_1,\xi_{j_2},\cdots,\xi_{j_n},\mu),\forall0\leqslant j_2,\cdots,j_n\leqslant m_0,\lambda_1\in\mathbb{K}.$$

进一步确定

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\xi_{j_3},\cdots,\xi_{j_n},\mu)=f(\lambda_1,\lambda_2,\xi_{j_3},\cdots,\xi_{j_n},\mu),\forall0\leqslant j_3,\cdots,j_n\leqslant m_0,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}.$$

依次下去我们得到

$$Q(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu)=f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu),\forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K},\mu\in A_{m_0}.$$

现在 A_{m_0} 是无限集, Q,f 都是关于 μ 的多项式, 于是我们有 $Q=f$, 这就完成了证明.

例题 23.46

1. 设 $A=\left(a_j^{\lambda_k}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 这里 $a_j,\lambda_k\in(0,+\infty)$ 且都是严格递增的. 证明 $\det A>0$.

[31] 即拉格朗日插值多项式中 $f(\xi_j)$ 系数的那个多项式.

2. 给定一列实数 $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n, 1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$, 证明

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1}+1 & \alpha_1^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}+1 \\ \alpha_2^{\beta_1}+1 & \alpha_2^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1}+1 & \alpha_n^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1}-1 & \alpha_1^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}-1 \\ \alpha_2^{\beta_1}-1 & \alpha_2^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1}-1 & \alpha_n^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}-1 \end{vmatrix} > 0.$$

证明

1. 若 $\det A = 0$, 那么线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_j^{\lambda_k} = 0, j = 1, 2, \cdots, n \text{有非0解} \left(c_1^0, c_2^0, \cdots, c_n^0\right).$$

现在考虑 $f(x) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^{\lambda_k}$ 有 n 个不同的正零点. 故

$$f_1(x) = x^{-\lambda_1} f(x) = c_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k x^{\lambda_k - \lambda_1}$$

也有 n 个不同的正零点. 因此 $f_1'(x)$ 有 $n-1$ 个不同的正零点且只有 $n-1$ 项. 然后考虑 $x^{\lambda_1-\lambda_2} f_1'(x)$ 继续罗尔, $\left(x^{\lambda_1-\lambda_2} f_1'(x)\right)'$ 有 $n-2$ 个不同的正零点且只有 $n-2$ 项. 依次下去我们得到某个 cx^{λ} 有一个正零点, 这是矛盾! 因此 A 可逆.

现在我们把 $\det A$ 视为 $\{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n\}$ 上的连续函数. 注意到 $\det A$ 取不到 0, 故要么 $\det A > 0$ 恒成立要么 $\det A < 0$ 恒成立. 又考虑 $A = \left(a_j^k\right)$, 我们有

$$\det A = a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) > 0,$$

这就证明了 $\det A > 0$.

2. 运用行列式的多重线性性质, 我们有

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1}+1 & \alpha_1^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}+1 \\ \alpha_2^{\beta_1}+1 & \alpha_2^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1}+1 & \alpha_n^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} & \alpha_1^{\beta_2} & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} \\ \alpha_2^{\beta_1} & \alpha_2^{\beta_2} & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} & \alpha_n^{\beta_2} & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} \\ \alpha_2^{\beta_1} & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} \end{vmatrix}}_{\text{第}j\text{列}}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1}-1 & \alpha_1^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}-1 \\ \alpha_2^{\beta_1}-1 & \alpha_2^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1}-1 & \alpha_n^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} & \alpha_1^{\beta_2} & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} \\ \alpha_2^{\beta_1} & \alpha_2^{\beta_2} & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} & \alpha_n^{\beta_2} & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} & \cdots & -1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} \\ \alpha_2^{\beta_1} & \cdots & -1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} & \cdots & -1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} \end{vmatrix}}_{\text{第}j\text{列}}.$$

再注意到由 Vandermonde 行列式, 我们有

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i) > 0.$$

另外一方面考虑定义在 $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 \geqslant 1$ 上的连续函数

$$f(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\beta_1} & \alpha_1^{\beta_2} & \cdots & \alpha_1^{\beta_n} \\ \alpha_2^{\beta_1} & \alpha_2^{\beta_2} & \cdots & \alpha_2^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\beta_1} & \alpha_n^{\beta_2} & \cdots & \alpha_n^{\beta_n} \end{vmatrix}.$$

若对某个 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 有 $f(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=0$, 则由线性方程组解的定理知存在不全为 0 的一组实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得 $g(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\lambda^{\beta_i}$ 有 n 个互不相同的正实根 $\alpha_j,1\leqslant j\leqslant n$. 则 $\lambda^{-\beta_1}g(\lambda)=c_1+\sum\limits_{i=2}^{n}c_i\lambda^{\beta_i-\beta_1}$ 也有 n 个互不相同的正实根. 由罗尔中值定理知 $\left[\lambda^{-\beta_1}g(\lambda)\right]'$ 至少有 $n-1$ 个互不相同正实根. 进一步考虑 $\lambda^{1+\beta_1-\beta_2}[\lambda^{-\beta_1}g(\lambda)]'=c_2(\beta_2-\beta_1)+\sum\limits_{i=3}^{n}c_i(\beta_i-\beta_1)\lambda^{\beta_i-\beta_1-1}$ 也有 $n-1$ 个互不相同的正实根, 继续求导并用罗尔中值定理, 我们发现幂和的项继续减少一项且至少的不同正零点数少 1. 依次下去知某个 $k\lambda^{\gamma}$ 必有一个正实根, 矛盾! 于是我们证明了 $f(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\neq 0$, 由连续函数的介值定理我们知道只能有 $f(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)>0$. 于是

$$\begin{vmatrix}\alpha_1^{\beta_1}+1 & \alpha_1^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}+1\\ \alpha_2^{\beta_1}+1 & \alpha_2^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}+1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^{\beta_1}+1 & \alpha_n^{\beta_2}+1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_1^{\beta_1}-1 & \alpha_1^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}-1\\ \alpha_2^{\beta_1}-1 & \alpha_2^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}-1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^{\beta_1}-1 & \alpha_n^{\beta_2}-1 & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}-1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\alpha_1^{\beta_1} & \alpha_1^{\beta_2} & \cdots & \alpha_1^{\beta_n}\\ \alpha_2^{\beta_1} & \alpha_2^{\beta_2} & \cdots & \alpha_2^{\beta_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^{\beta_1} & \alpha_n^{\beta_2} & \cdots & \alpha_n^{\beta_n}\end{vmatrix}>0.$$

例题 23.47 设 A,B,A^m-B^m 是 n 阶实对称正定矩阵且 $m\in\mathbb{N}$, 证明对任何 $1\leqslant k\leqslant m,k\in\mathbb{N}$, A^k-B^k 是 n 阶实对称正定矩阵.

笔记 证明的想法是寻求一种积分表示, 技术性颇高.

证明 我们先证明设 $A,B,A-B$ 是 n 阶实对称正定矩阵, 则 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是 n 阶实对称正定矩阵, 事实上注意到

$$B^{-1}-A^{-1}\cong E_n-B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}}\sim E_n-BA^{-1}.$$

设 n 阶实可逆矩阵 C 使得 $A=C^TC$, 则

$$E_n-BA^{-1}=(A-B)C^{-1}C^{-T}\sim C^{-T}(A-B)C^{-1}\cong A-B.$$

因此 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定.

作为推论, 我们有 A^m-B^m 正定, 因此 $B^{-m}-A^{-m}$ 正定, 从而对任何 $x>0$ 都有 $E_n+xB^{-m}-(E_n+xA^{-m})$ 正定, 进一步 $(E_n+xA^{-m})^{-1}-(E_n+xB^{-m})^{-1}$ 正定.

注意到

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^b(1+ax)}dx=\frac{\pi a^{b-1}}{\sin(b\pi)},b\in(0,1),a\in(0,+\infty).$$

当 $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(E_n+xA^{-m})^{-1}}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx\\ =&\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{1+x\lambda_1^{-m}},\frac{1}{1+x\lambda_2^{-m}},\cdots,\frac{1}{1+x\lambda_m^{-m}}\right\}}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx\\ =&\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\operatorname{diag}\left\{\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{k}{m}}\left(1+x\lambda_1^{-m}\right)}dx,\cdots,\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{k}{m}}\left(1+x\lambda_n^{-m}\right)}dx\right\}\\ =&\operatorname{diag}\left\{\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k\right\}=A^k.\end{aligned}$$

对一般情况, 设正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵, 则

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}AT\right)^k&=\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\left(E_n+x\left(T^{-1}AT\right)^{-m}\right)^{-1}}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx\\ &=\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{T^{-1}\left(E_n+xA^{-m}\right)^{-1}T}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx\\ &=T^{-1}\left(\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(E_n+xA^{-m})^{-1}}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx\right)T,\end{aligned}$$

因此

$$A^k=\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^\infty\frac{\left(E_n+xA^{-m}\right)^{-1}}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx.$$

现在对任何 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, 我们都有

$$\begin{aligned}&\alpha^T\left(A^k-B^k\right)\alpha\\=&\frac{\sin\left(\left(1-\frac{k}{m}\right)\pi\right)}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha^T\left[\left(E_n+xA^{-m}\right)^{-1}-\left(E_n+xB^{-m}\right)^{-1}\right]\alpha}{x^{1-\frac{k}{m}}}dx\\\geqslant&0.\end{aligned}$$

且等号成立条件显然是被积矩阵函数恒为 0, 即只能有 $\alpha=0$, 因此我们证明了 A^k-B^k 是 n 阶实对称正定矩阵.

定理 23.40 (圆盘定理)

设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且

$$R_i(A)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}|a_{ij}|,1\leqslant i\leqslant n.$$

则

$$G(A)=\bigcup_{i=1}^n\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leqslant R_i(A)\}$$

包含 A 的所有特征值.

此外若这 n 个圆盘中有 k 个并形成连通区域, 它与剩下 $n-k$ 个圆盘都不相交, 则这个区域恰好有 k 个特征值 (计重数).

♡

注 $\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leqslant R_i(A)\}$ 叫做盖尔圆盘.

笔记 本结果可直接使用. 只需掌握前半部分叙述的证明. 值得注意的是, 圆盘定理和主对角占优21.8是等价的. 当然, 对称的, 有列和的版本, 读者自行叙述.

证明 先来看第一部分论述. 设 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 即

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^n a_{1j}x_j\\\sum\limits_{j=1}^n a_{2j}x_j\\\vdots\\\sum\limits_{j=1}^n a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}\Rightarrow(\lambda-a_{ii})x_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}a_{ij}x_j.$$

于是取某个 $x_i,i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$|x_i|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|>0.$$

现在就有估计

$$|(\lambda-a_{ii})x_i|=\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}a_{ij}x_j\right|\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}|a_{ij}x_j|\Rightarrow|\lambda-a_{ii}|\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}|a_{ij}|,$$

这就证明了第一部分的论述.

* 来看第二部分的论述[32]. 考虑

$$A=D+B,D是A的对角线,A_\epsilon=D+\epsilon B,\epsilon\in[0,1].$$

注意到

$$R_i(A_\epsilon)=\epsilon\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}|a_{ij}|,$$

[32]这部分不够严格, 但属于教科书证明.

我们有

$$\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leqslant R_i(A_\epsilon)\}\subset\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leqslant R_i(A)\}.$$

因此

$$G(A_\epsilon)\subset G(A),\forall\epsilon\in[0,1].$$

现在不妨设前 k 个圆盘构成一个连通分支, 我们只需要证明这 k 个连通分支的并至少含有 A 的 k 个特征值. 记这个连通分支为 G. 设 $A_0=D=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$, 且 G 包含 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{kk}$.

现在从每个 $a_{ii},i=1,2,\cdots,k$ 出发, 特征值连续变化到 $A_1=A$ 的特征值. 则终点 k 个特征值仍然落在这个连通分支内[33]. 因此这个连通分支至少有 k 个特征值.

作为圆盘定理的应用, 我们来看竞赛真题.

例题 23.48 设 A 是实方阵且 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$. 若还有

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|<4a,$$

求 $f=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的规范型.

证明 注意把 f 写成对称矩阵的二次型 $f=\mathbf{x}^T\frac{A+A^T}{2}\mathbf{x}$. 由圆盘定理23.40, $\frac{A+A^T}{2}$ 的特征值 z 满足

$$|z-a|=\left|z-\frac{a_{ii}+a_{ii}}{2}\right|\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}\left|\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|-2|a_{ii}|\right]<a,$$

于是 $z>0$, 故 f 正定. 因此 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

定理 23.41 (可对角化矩阵稠密)

设复矩阵

$$A(s)=\begin{pmatrix}a_{11}+s&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}+s^2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}+s^n\end{pmatrix},$$

则存在正数 δ, 使得对任何 $0<|s|<\delta$, $A(s)$ 均可以对角化.

笔记 对于矩阵元解析的函数, 要么恒有重特征值, 要么有重特征值的点是孤立的.

证明 我们只需证明存在正数 δ, 使得对任何 $0<|s|<\delta$, $A(s)$ 均有 n 个不同的特征值, 事实上相当于 $A(s)$ 特征多项式无重根, 即 $A(s)$ 特征多项式和其导数的结式在 $0<|s|<\delta$ 不为 0.

注意到结式是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 那么由零点孤立性, 我们只需证明[34]结式不恒为 0 即可, 这等价于存在 $s\in\mathbb{C}$, 使得 $A(s)$ 有 n 个不同的特征值, 考虑 n 个盖尔圆盘

$$A_i=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{ii}-s^i\right|\leqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\},$$

当 s 充分大, A_i 两两不交, 因此由盖尔圆盘定理23.40知 $A(s)$ 有 n 个不同特征值, 我们完成了证明.

例题 23.49 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明, 存在 $\alpha>0$, 使得对 $0<|\lambda|<\alpha$, $A+\lambda B$ 常秩.

证明 考虑 $A+\lambda B$ 所有 $k=1,2,\cdots,n$ 阶子式, 他们都是整函数, 考虑阶数最高的不恒为 0 的子式, 那么由解析

[33] 否则连续变化中会有一点落在 $G(A)$ 外.

[34] 如果满足题目条件的 δ 不存在, 那么存在 $z_n\to0$ 使得 $A(z_n)$ 的特征多项式和其导数的结式在 z_n 上为 0, 解析函数零点孤立性表明这个结式会恒为 0.

函数零点孤立性, 存在 $\alpha>0$, 使得对 $0<|\lambda|<\alpha$, $A+\lambda B$ 的这个子式不为 0, 因此在 $0<|\lambda|<\alpha$, $A+\lambda B$ 常秩.

如果 $A+\lambda B$ 所有子式都恒 0, 那么考虑 1 阶子式, 就有 $A=B=0$, 此时 $A+\lambda B$ 常秩.

我们完成了证明.

例题 23.50 设 $T:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 是线性映射, 并满足 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆当且仅当 $T(A)$ 可逆. 证明存在 $c\in\mathbb{C}$ 使得

$$\det T(A)=c\det A,\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

证明 注意到

$$\det(\lambda E-A),\det(T(\lambda E-A))=\det(\lambda T(E)-T(A)).$$

同时为 0 或者同时不为 0. 注意两个式子都是关于 λ 的不超过 n 次的多项式, 因此两者有相同的复根[35].

若 A 有 n 个不同特征值, 则 $\frac{\det(\lambda T(E)-T(A))}{\det(\lambda E-A)}$ 是常数. 又

$$\frac{\det(\lambda T(E)-T(A))}{\det(\lambda E-A)}=\frac{\det\left(\lambda E-T(A)T^{-1}(E)\right)}{\det(\lambda E-A)}\det T(E),\frac{\det\left(\lambda E-T(A)T^{-1}(E)\right)}{\det(\lambda E-A)}\text{是首1多项式的商,}$$

于是我们有

$$\frac{\det(\lambda T(E)-T(A))}{\det(\lambda E-A)}\equiv\det T(E),$$

即

$$\det T(A)=\det T(E)\cdot\det A.$$

由可对角化矩阵的稠密性23.41的证明, 我们知道对一般的矩阵 A, 考虑 $A(s),0<|s|<\delta,A(0)=A$, 则 $A(s)$ 有 n 个不同特征值. 于是由刚才讨论的情况我们知道

$$\det T(A(s))=\det T(E)\cdot\det A(s).$$

让 $s\to0^+$ 即得

$$\det T(A)=c\det A,\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

来看一个当年让人闻风色变的四川大学高等代数考研压轴题.

例题 23.51 n 维欧式空间 V 中 s 个向量 $\alpha_i,i=1,2,\cdots,s$ 满足

$$\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i=0,c_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,s\Rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_s=0.\tag{23.47}$$

证明: 存在 $\alpha\in V$, 使得 $(\alpha,\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,s$.

笔记 本题颇有背景, 有许多观点都可以用来解决问题, 我们给一个纯高代的证明.

证明 考虑 $f(t_1,t_2,\cdots,t_s)=||t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s||^2_{\mathbb{R}^n}$ 是紧集

$$K=\left\{(t_1,t_2,\cdots,t_s)\in\mathbb{R}^s:\sum_{i=1}^{s}t_i=1,t_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,s\right\}$$

上的连续函数, 故存在 $\left(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0\right)\in\mathbb{R}^s$ 使得 f 在 $\left(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0\right)\in\mathbb{R}^s$ 上达到 f 在 K 上的最小值. 因为条件23.47, 我们知道 f 在 K 上的最小值为正数. 下证 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{s}t_i^0\alpha_i\neq0$ 为所求.

事实上, 对 $i=1,2,\cdots,n$, 我们有[36]

$$||(1-t)\alpha+t\alpha_i||^2\geqslant||\alpha||^2,\forall t\in[0,1].$$

展开计算就有

$$\left(t^2-2t\right)(\alpha,\alpha)+2t(1-t)(\alpha,\alpha_i)+t^2(\alpha_i,\alpha_i)\geqslant0,\forall t\in[0,1],$$

[35]不计重数.

[36]动机来源于变分法, 之前我们在16.47遇到过类似的思路.

即

$$(t-2)(\alpha,\alpha)+2(1-t)(\alpha,\alpha_i)+t(\alpha_i,\alpha_i)\geqslant 0,\forall t\in[0,1].$$

让 $t\to 0^+$ 就有

$$(\alpha,\alpha_i)\geqslant(\alpha,\alpha)>0,$$

这就证明了 $(\alpha,\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,s.$

来看一个 artin 代数上的题, 我们借助了泛函分析的凸集分离定理, 其想法是泛函延拓定理的几何形式[37].

例题 23.52* 设 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 是 n 维欧式空间的一个子集, 证明下述三个结论等价:

1. S 不包含在 V 的半空间之中;
2. V 中每一个向量都可以表示为 S 中所有向量的正线性组合;
3. S 张成 V 且 0 可以表示为 S 中所有向量的正线性组合.

注 所谓 V 的半空间指的是可以写成形如

$$\{v\in V:(v,w)\geqslant 0\},w\neq 0.$$

所谓 V 的超平面指的是可以写成形如

$$\{v\in V:(v,w)=0\},w\neq 0.$$

证明 先来看 1 推 2: 首先 $S^\perp=\{\mathbf{0}\}$, 否则 S 落在某个超平面上, 自然在半空间之中. 现在 S 张成了 V.

若 $\mathbf{0}$ 不能表示为 S 中所有向量的正线性组合, 则考虑开凸集

$$C\triangleq\left\{\sum_{i=1}^k\lambda_iv_i:\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,k\right\}.$$

我们注意到 $\mathbf{0}\notin C$, 则由凸集分离定义知存在 V 上非 0 线性函数 f 使得

$$f\left(\sum_{i=1}^k\lambda_iv_i\right)\geqslant f(\mathbf{0})=0,\forall\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,k.$$

里斯表示定理表明存在 $w\neq\mathbf{0}$ 使得

$$f(v)=(v,w),v\in V.$$

现在

$$\sum_{i=1}^k\lambda_i(v_i,w)\geqslant 0,\forall\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,k,$$

显然这等价于

$$(v_i,w)\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k.$$

于是 S 包含在

$$\{v\in V:(v,w)\geqslant 0\},$$

这就是一个矛盾!

因此 $\mathbf{0}$ 表示为 S 中所有向量的正线性组合. 设

$$\sum_{i=1}^k\lambda_iv_i=\mathbf{0},\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,k.$$

对 V 中向量

$$\alpha=\sum_{i=1}^kc_iv_i,c_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,k,$$

[37] 见张恭庆泛函分析上册 114 页定理 2.4.14.

取足够大的 $T>0$, 我们有

$$\alpha=\sum_{i=1}^{k}\left(c_i+T\lambda_i\right)v_i$$

是 S 中所有向量的正线性组合, 这就得证.

2 推 3: 平凡.

3 推 1: 1 推 2 的证明我们可以看到如果 S 张成 V 且 $\mathbf{0}$ 可以表示为 S 中所有向量的正线性组合, 则 V 中每一个向量都可以表示为 S 中所有向量的正线性组合. 假设 S 包含在 V 的半空间

$$\{v:(v,w)\geqslant 0\},w\neq 0.$$

我们对任何

$$v=\sum_{i=1}^{k}c_iv_i\in V,c_i>0,i=1,2,\cdots,k,$$

都有

$$(v,w)=\sum_{i=1}^{k}c_i\left(v_i,w\right)\geqslant 0.$$

因此

$$V=\{v:(v,w)\geqslant 0\},$$

这显然不可能!, 因此我们证明了 S 不包含在 V 的半空间之中.

23.3 非负矩阵理论 *

在非负矩阵这一节, 我们用 $|A|$ 表示 A 所有元素绝对值之和而不是行列式. 记

$$\mathbb{R}_n^+=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\}.$$

回忆置换矩阵的定义为: 初等矩阵交换行或者列得到的矩阵. 置换矩阵 P 有性质 $PP^T=I$.

定义 23.7

设 $n\geqslant 2,A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足存在 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 和置换矩阵 P 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix}A_m & 0\\ C & B\end{pmatrix},A_m\in\mathbb{C}^{m\times m},$$

则我们称 A 是可约的. ♣

注 换句话, 一个复矩阵 A 被称为可约的, 如果同时交换行列式可以使得 A 变成 $\begin{pmatrix}A_m & 0\\ C & B\end{pmatrix},A_m\in\mathbb{C}^{m\times m}$. 显然, A 可约的充要条件是 A 恰好有一个行数列数都不相同且行数 + 列数为 n 的子矩阵为 0.

定义 23.8

设 $n\geqslant 2,A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足所有元素非负, 则我们称 A 为非负矩阵, 记作 $A\geqslant 0$. 若 A 的元素都为正, 则记 $A>0$. ♣

引理 23.10

设 $n\geqslant 2,A\geqslant 0$ 且不可约, $y\in\mathbb{R}_n^+$, 则有

1. $(I+A)y$ 的 0 分量个数会减少或者不变;
2. y 有 0 分量可推出 $(I+A)y$ 的 0 分量个数会严格减少. ♡

证明

1. 用对 $i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$0=((I+A)y)_i=y_i+(Ay)_i\Leftrightarrow y_i=0,(Ay)_i=0.$$

这就证明了 1.

2. $(I+A)y$ 的 0 分量个数不变等价于 $y_i=0$ 必有 $(Ay)_i=0$. 取置换矩阵 P 使得

$$x=Py=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},x_j\neq 0,j=1,2,\cdots,k.$$

故 $(I+A)y$ 的 0 分量个数不变等价于 $Py_i=0$ 则必有 $(PAy)_i=0$, 这也等价于 $x_i=0$ 则必有 $\left(PAP^Tx\right)_i=0$.

若 $(I+A)y$ 的 0 分量个数不变, 则 $\left(PAP^Tx\right)_i=0,i=k+1,\cdots,n$. 因此

$$\left(PAP^Tx\right)_i=\sum_{j=1}^{k}\left(PAP^T\right)_{ij}x_j=0,i=k+1,\cdots,n.$$

故 $\left(PAP^T\right)_{ij}=0,j=1,2,\cdots,k$. 现在 PAP^T 恰好有一个行数列数都不相同且行数 + 列数为 n 的子矩阵为 0, 因此 PAP^T 可约! 这就是一个矛盾! 故 y 有 0 分量可推出 $(I+A)y$ 的 0 分量个数会严格减少.

引理 23.11

设 $n\geqslant 2,A\geqslant 0$ 且不可约, $y\in\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}$, 则必有 $(I+A)^{n-1}y>0$. ♡

证明 y 至多只有 $n-1$ 个分量, 由引理23.10知每乘一次 $I+A$, 则至少严格减少一个 0 分量. 因此最多减少 $n-1$ 次就没有 0 分量了.

引理 23.12

设 $n\geqslant 2,A\geqslant 0$, 则 A 不可约等价于 $(I+A)^{n-1}>0$. ♡

证明 充分性: 若 A 可约, 设置换矩阵 P 使得 $PAP^T=\begin{pmatrix}A_m & 0\\ C & B\end{pmatrix}$, 则

$$P(I+A)^{n-1}P^T=\begin{pmatrix}* & 0\\ * & *\end{pmatrix},$$

这和 $(I+A)^{n-1}>0$ 矛盾. 因此我们完成了充分性证明.

必要性: 若 A 不可约, 由引理23.11, 对 $y\in\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}$, 必有 $(I+A)^{n-1}y>0$. 因此取 $y=e_i,i=1,2,\cdots,n$ 知 $(I+A)^{n-1}$ 的第 i 列元素为正. 现在我们就知道 $(I+A)^{n-1}>0$, 这就完成了必要性证明.

例题 23.53 设 $n\geqslant 2,A\geqslant 0$ 且不可约, 证明: A 的非负特征向量是正向量.

证明 设 $Ax=\lambda x,x\geqslant 0,x\neq 0$. 若 x 有 0 分量, 则由引理23.10知 $(I+A)x=(1+\lambda)x$ 的左边 0 元素个数严格减少. 但是右边 0 元素个数不变, 因此这就是一个矛盾! 所以 $x>0$.

例题 23.54 设 $n\geqslant 2,A\geqslant 0$, 证明:$A$ 不可约当且仅当对每个 $1\leqslant i,j\leqslant m$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\left(A^k\right)_{(i,j)}>0$.

证明 假设 A 不可约, 从而 A 没有一列恒为 0. 由引理23.12, 我们知道 $(I+A)^{n-1}>0$. 记 $B=(I+A)^{n-1}A$, 由引理23.11, 我们有 $B>0$, 设

$$B=A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_2A^2+c_1A,$$

则

$$B_{(i,j)}=\left(A^n\right)_{(i,j)}+c_{n-1}\left(A^{n-1}\right)_{(i,j)}+\cdots+c_2\left(A^2\right)_{(i,j)}+c_1A_{(i,j)}.$$

注意到 $c_i>0, i=1,2,\cdots,n-1$, 于是要让 $B_{(i,j)}>0$, 必须存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\left(A^k\right)_{(i,j)}>0$. 这就完成了必要性的证明.

假设 A 可约, 则存在置换矩阵 P 使得 $P^TAP=\begin{pmatrix}B & 0\\ C & D\end{pmatrix}$, 其中 B 为 m 阶矩阵. 我们有 $P^TA^kP=\begin{pmatrix}B^k & 0\\ * & D^k\end{pmatrix}$. 可见对 $1\leqslant i\leqslant m, m+1\leqslant j\leqslant n, k\in\mathbb{N}$, 都有 $\left(P^TA^kP\right)_{(i,j)}=0$, 这就证明了充分性.

接下来我们将证明本节最深刻的定理, 它刻画了不可约非负矩阵的最大特征值.

定理 23.42 (Perron-Frobenius 定理)

设 $n\geqslant 2$, A 是一个不可约非负矩阵, 则下面结果成立:

(1): A 的谱半径[a] $\rho(A)>0$, 且 $\rho(A)$ 恰好是 A 的一个单特征值;

(2): A 有一个对应特征值 $\rho(A)$ 的正特征向量;

(3): A 的所有非负特征向量都对应特征值 $\rho(A)$.

[a]即特征值模的最大值.

♡

证明 **Step 1**

构造 Collatz-Wielandt 函数

$$f_A:\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\min_{x_i\neq 0}\frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i}.$$

显然

$$f_A(tx)=f_A(x),\forall t>0, f_A(x)=\max\{\rho\in\mathbb{R}:Ax-\rho x\geqslant 0\}. \tag{23.48}$$

注意到

$$A(I+A)^{n-1}x-f_A(x)(I+A)^{n-1}x=(I+A)^{n-1}(Ax-f_A(x)x).$$

由(23.48)知 $Ax-f_A(x)x\geqslant 0$. 若 $Ax-f_A(x)x\neq 0$, 则由引理23.11知

$$A(I+A)^{n-1}x-f_A(x)(I+A)^{n-1}x>0.$$

若 $Ax-f_A(x)x=0$, 则

$$A(I+A)^{n-1}x-f_A(x)(I+A)^{n-1}x=0,$$

故 $f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\geqslant f_A(x)$. 现在我们证明了

$$f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\geqslant f_A(x),\forall x\in\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}. \tag{23.49}$$

由矩阵乘法, 显然有 $f_A(x)$ 小于等于 A 的最大行和且非负.

Step 2

记紧集 $\Omega_n\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}_n^+:\sum_{j=1}^n x_j=1\right\}, n\in\mathbb{N}$. 因为分母可能取到 0, 所以 f_A 不一定连续. 回忆引理23.11有 $(I+A)^{n-1}y>0,\forall y\in\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}$. 考虑 $\Gamma\triangleq(I+A)^{n-1}(\Omega_n)$, 则 Γ 里都是正向量. 由于 f_A 在 Γ 上连续. 于是存在 $y^0\in\Gamma$ 使得 f_A 在 Γ 上达到最大值. 注意到

$$\frac{y^0}{\sum_{j=1}^n y_j^0}\in\Omega_n, f_A\left(\frac{y^0}{\sum_{j=1}^n y_j^0}\right)=f_A\left(y^0\right).$$

结合(23.49)得

$$f_A(x)\leqslant f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\leqslant f_A\left(y^0\right),\forall x\in\Omega_n.$$

现在 f_A 在 Ω_n 达到最大值, 由 f_A 正齐性(23.48)得 f_A 在 $\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}$ 达到最大值.

Step 3

设

$$r \triangleq f_A\left(x^0\right)=\max_{x\in\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}} f_A(x), x^0\in\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}.$$

首先有 $r>f_A\left(1_n\right)>0$, 然后假设 $(I+A)^{n-1}\left(Ax^0-rx^0\right)>0$. 此时有

$$A\left[(I+A)^{n-1}x^0\right]-r\left[(I+A)^{n-1}x_0\right]>0\overset{\text{连续性}}{\Rightarrow} f_A\left((I+A)^{n-1}x^0\right)>r,$$

这和 r 最大性矛盾! 因此 $Ax^0-rx^0=0$. 由例题23.53知 x^0 是正向量.

笔记 从上面证明可以看到, 对任何一个 $\mathbb{R}_n^+\setminus\{0\}$ 中使得 f_A 达到最大的向量都是属于 f_A 最大特征值的特征向量, 并且是正向量.

设 $\lambda\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 满足 $Ax=\lambda x$, 则有

$$A|x|-|\lambda||x|\geqslant 0\Rightarrow f_A(x)\geqslant|\lambda|\Rightarrow r\geqslant f_A(x)\geqslant|\lambda|\Rightarrow r=\rho(A).$$

若 x 还是非负的, 则由例题23.53知 $x>0$. 因为 A^T 也是非负不可约的, 所以存在 $y>0$ 使得 $A^Ty=ry$. 从而

$$y^TAx=ry^Tx=\lambda y^Tx, y^Tx>0\Rightarrow r=\lambda,$$

即所有非负特征向量 x 都是属于特征值 $r=\rho(A)$ 的.

Step 4

下证 r 的几何重数是 1. 设 $y\neq 0$ 使得 $Ay=ry$, 类似 **Step 3** 的步骤得 $A|y|=r|y|, |y|>0$, 即 A 对应 r 的特征向量不含 0 分量. 设 y,z 都是对应 r 的 A 的特征向量. 考虑 z_1y-y_1z, 如果它非 0, 则是 A 对应 r 的特征向量且第一个分量为 0, 这就是一个矛盾! 故 $z_1y-y_1z=0$. 因此 $z_1y-y_1z=0$, 即 y,z 线性相关, 因此特征值 r 的几何重数是 1.

Step 5

下证 r 代数重数也是 1.

引理 23.13 (特征多项式求导)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\frac{d}{d\lambda}\det(\lambda I_n-A)=\operatorname{tr}\left((\lambda I_n-A)^*\right). \tag{23.50}$$

证明 设 $A=(a_{ij})$, 则

$$\frac{d}{d\lambda}\det(\lambda I_n-A)=\sum_{j=1}^n\det\begin{pmatrix}\lambda-a_{11}&\cdots&-a_{1j}&\cdots&-a_{1n}\\ \vdots&&&&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&&&&\vdots\\ -a_{n1}&\cdots&-a_{nj}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^n\left[(\lambda I_n-A)^*\right]_{jj}=\operatorname{tr}\left((\lambda I_n-A)^*\right);$$

这就证明了(23.50).

回到原题, 由(23.50), 我们只需证明 $\operatorname{tr}\left((rI_n-A)^*\right)\neq 0$, 就那个说明 r 是特征多项式的单根.

首先因为 r 几何重数为 1, 我们有

$$(rI_n-A)(rI_n-A)^*=0, r((rI_n-A))=n-1.$$

因此由命题21.12知道 $r\left((rI_n-A)^*\right)=1$. 注意到 $(rI_n-A)^*$ 的非 0 列向量 b 必然也是 A 属于特征值 r 的特征向量并且不能有 0 分量[38], 所以 $b<0, b>0$ 必居其一. A^T 也有类似的性质, 对应的 $(rI_n-A)^*$ 的行向量要么是正向量, 要么是负向量. 这告诉我们要么 $(rI_n-A)^*>0$, 要么 $(rI_n-A)^*<0$, 这就告诉我们 $\operatorname{tr}\left((rI_n-A)^*\right)\neq 0$,

[38] 回忆例题23.53.

因此 r 代数重数 1. 我们完成了证明.

例题 23.55 没有 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 成立 A^2 元素都是负数.

证明 假设 $-A^2>0$, 从而 $-A^2>0$ 是非负的不可约矩阵且由定理23.42知 $-A^2$ 有单的正特征值 a, 于是存在 A 的特征值 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 使得 $-\lambda^2=a$. 此时 $-\overline{\lambda}^2=a$. 但是 $\overline{\lambda}$ 也是 A 特征值, 所以 a 的代数重数至少是 2, 矛盾! 这就完成了证明.

定理 23.43

设 $n\geqslant 2, A$ 是一个 n 阶非负矩阵, 则 $\rho(A)$ 是 A 的特征值, 且 A 有一个对应 $\rho(A)$ 的非负特征向量. ♡

证明 考虑非负不可约矩阵 $A_k=A+\frac{1}{k}J, k\in\mathbb{N}$, 由定理23.42的证明, 存在对应于 $\rho(A_k)$ 的 A_k 的正特征向量 $x^k\in\Omega_n$. 注意 Ω_n 是紧集, 由聚点定理, 存在严格递增的 $\{k_i\}\subset\mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty}x^{k_i}=x\in\Omega_n, A_{k_i}x^{k_i}=\rho\left(A_{k_i}\right)x^{k_i}.$$

由特征值是多项式系数某种意义下的连续函数定理23.38, 我们知

$$Ax=\lim_{i\to\infty}A_{k_i}x^{k_i}=\lim_{i\to\infty}\rho\left(A_{k_i}\right)x^{k_i}=\rho\left(A\right)x,$$

即 x 为所求非负特征向量[39].

命题 23.15 (非负矩阵谱半径估计)

设 $n\geqslant 2$ 阶矩阵 A 非负, r_i 是 A 的第 i 行行和, c_i 是 A 的第 i 列列和, 这里 $i=1,2,\cdots,n$, 那么有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}r_i\leqslant\rho\left(A\right)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}r_i;$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}c_i\leqslant\rho\left(A\right)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}c_i.$$

并且当 A 不可约, 上面第一排不等式有一个等号成立当且仅当所有行和相同; 上面第二排不等式有一个等号成立当且仅当所有列和相同. ♠

证明 设 $x\geqslant 0$ 是 A^T 对应 $\rho(A)$ 的特征向量, 即 $A^Tx=\rho\left(A\right)x$. 设 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right), A=\left(a_{ij}\right)$, 我们有

$$\rho\left(A\right)x_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}x_k, i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\rho\left(A\right)x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}x_k\Rightarrow\rho\left(A\right)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}r_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k},$$

这就容易得到需要的不等式. 列和同理可得.

若 A 不可约, 则由例题23.53知 $x>0$, 因此上述放缩都是严格的. 所以有一个等号成立只能等价于所有行和相同. 列类似可得, 这就完成了证明.

来看数学类补赛真题.

例题 23.56 设 $n\geqslant 2$ 阶矩阵 A 每行都是和为 1 的正数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 排列. 求 A 特征值 1 的代数重数几何重数以及属于 1 的特征子空间.

证明 显然 $A>0$ 且不可约. 由所有行和相同为 1 知 1_n 是一个属于特征值 1 的特征向量且由命题23.15知 $\rho(A)=1$. 由定理23.42知 1 的代数重数和几何重数都是 1 且特征子空间为 $\{c1_n:c\in\mathbb{R}\}$.

我们来看用非负矩阵来估计矩阵的谱.

[39] 不用担心 $x=0$, 因为 Ω_n 不含有 0 向量.

定理 23.44

设 $n\geqslant 2, B\in\mathbb{C}^{n\times n}, A\geqslant 0$ 且不可约且成立 $|B|\leqslant A$, 则 $\rho(B)\leqslant\rho(A)$. 并且等号成立的充要条件是存在对角酉矩阵 D 和 $\theta\in\mathbb{R}$ 使得 $B=e^{i\theta}DAD^{-1}$, 这里 $\rho(A)e^{i\theta}$ 是 B 的特征值. ♡

证明 设 $Bx=\lambda x, x\neq 0, \lambda\in\mathbb{C}$, 则有

$$A|x|\geqslant|B||x|\geqslant|\lambda||x|\Rightarrow\rho(A)\geqslant f_A(|x|)\geqslant|\lambda|, \tag{23.51}$$

即 $\rho(B)\leqslant\rho(A)$.

再来看等号成立条件, 充分性显然! 只需证明必要性: 若 $\rho(B)=\rho(A)>0$ 且存在 $\theta\in\mathbb{R}$ 使得 $\rho(A)e^{i\theta}$ 是 B 的特征值. 在(23.51)中取 $\lambda=\rho(A)e^{i\theta}$ 得

$$f_A(|x|)=\rho(A), x>0, A|x|=\rho(A)|x|, A=|B|.$$

取 $D=\operatorname{diag}\left\{\frac{x_1}{|x_1|},\frac{x_2}{|x_2|},\cdots,\frac{x_n}{|x_n|}\right\}$, 于是 $Bx=BD|x|=\lambda D|x|$. 结合这些等式得

$$BD|x|=e^{i\theta}DA|x|\Rightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD|x|=A|x|\Rightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD|x|=|B||x|,$$

即

$$\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right|=|B|\Rightarrow\left(\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right|-e^{-i\theta}D^{-1}BD\right)|x|=0.$$

注意上面可以推出

$$\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right|=e^{-i\theta}D^{-1}BD.$$

由初等计算[40]知 $e^{-i\theta}D^{-1}BD=A$.

笔记

1. 从证明可以看到如果 λ 是 B 的模长为 $\rho(A)$ 的特征值, 那么设为 $\rho(A)e^{i\theta}$. 取这个特征值对应的一个特征向量 x 和上面证明中的 D, 就有 $B=e^{i\theta}DAD^{-1}$.
2. 对于结果 $\rho(B)\leqslant\rho(A)$, 不需要不可约条件, 因此我们可以逼近来得到.

推论 23.6

设 $n\geqslant 2, A$ 是 n 阶非负不可约矩阵且 $\rho(A)e^{i\theta_j}, \theta_j\in[0,2\pi), j=1,2,\cdots,t$ 是 A 全部模长为 $\rho(A)$ 的不同特征值, 则

1. A 全部模长为 $\rho(A)$ 的特征值都是单特征值;
2. $\left\{e^{i\theta_j}:1\leqslant j\leqslant t\right\}$ 恰好是全体 t 次单位根且 A 全体特征值逆时针旋转 $\frac{2\pi}{t}$ 不改变, 但逆时针旋转少于 $\frac{2\pi}{t}$ 时, 模长为 $\rho(A)$ 的特征值发生改变;
3. 设

$$f(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n_1}+\cdots+a_k\lambda^{n_k}, n>n_1>n_2>\cdots>n_k, a_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k,$$

则

$$t=\gcd\{n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_k\}=\gcd\{n-n_1,n_1-n_2,\cdots,n_{k-1}-n_k\}. \tag{23.52}$$ ♡

证明

1. 由定理23.44知 $A=e^{i\theta_j}D_jAD_j^{-1}\Rightarrow A\sim e^{i\theta_j}A$, 这就证明了 1.
2. 由

$$A=e^{i\theta_j}D_jAD_j^{-1}=e^{i(\theta_j+\theta_k)}D_jD_kA(D_jD_k)^{-1}$$

40

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}x_j=\sum_{j=1}^n|c_{ij}x_j|\Rightarrow c_{ij}x_j\geqslant 0\Rightarrow c_{ij}\geqslant 0.$$

得

$$e^{i(\theta_j+\theta_k)} \in \left\{e^{i\theta_j} : 1 \leqslant j \leqslant t\right\},$$

这就证明了 2.

3. 对正整数 $m \in \mathbb{N}$, 设 $e^{\frac{i2\pi}{m}}A$ 特征多项式是

$$g(\lambda) = \lambda^n + a_1 z^{n-n_1}\lambda^{n_1} + \cdots + a_k z^{n-n_k}\lambda^{n_k}, z = e^{\frac{i2\pi}{m}}.$$

于是 A 和 $e^{\frac{i2\pi}{m}}A$ 特征值完全相同等价于

$$f(\lambda) = g(\lambda) \Leftrightarrow z^{n-n_j} = 1, j = 1, 2, \cdots, k \Leftrightarrow m \mid (n-n_j), j = 1, 2, \cdots, k.$$

由 $2, t$ 是使得 A 和 $e^{\frac{i2\pi}{m}}A$ 的特征值完全相同的最大整数 m, 所以得(23.52).

这就完成了证明.

23.4 用矩阵的观点解题

不妨设矩阵为各种标准型, 通过直接计算来解决问题是一种重要的思路. 交结数部分就是这个例子的一个典型操作.

例题 23.57 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵, 证明 $AB = 0$ 的充要条件是 $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

证明 必要性显然, 我们来证明充分性. 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, B_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}.$$

于是

$$\operatorname{tr}(AB) = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(B_1) = 0 \overset{\text{半正定矩阵对角线非负}}{\Rightarrow} B_1\text{对角线元素全为}0.$$

由引理23.5, 我们知道 $B_1, B_2, B_3 = 0$, 这就证明了 $AB = 0$.

例题 23.58 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的且 $|A| \neq 0$. 证明 A 正定的充要条件是对所有正定矩阵 B 都有 $\operatorname{tr}(AB) > 0$.

证明 必要性: 若 A 正定, 则存在正交矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} = \Lambda, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是对所有正定矩阵 B 都有

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(C^{-1}\Lambda CB) = \operatorname{tr}(\Lambda CBC^{-1}) > 0,$$

这里 CBC^{-1} 是正定矩阵所以对角线为正, 对角线每个元素乘以正数再求和当然也为正.

充分性: 若 A 不正定, 类似必要性证明可不妨设 $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 为对角矩阵. 取 $B = E$ 知 A 对角线有元素为正. 如果 A 不正定, 那么不妨设 $\lambda_1 < 0$. 于是取 $B = \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}, \mu_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i > 0.$$

让 $\mu_1 \to +\infty$ 可得矛盾! 我们完成了证明.

例题 23.59 设 V 是有限维线性空间, T_2, T_1 是 V 上的线性变换, 证明 $\operatorname{Im} T_2 = \operatorname{Im} T_1$ 的充分必要条件是存在 V 上的可逆变换 S 使得 $T_2 = T_1S$.

证明 充分性: 若可逆变换 S 使得 $T_2 = T_1S$, 则 $\operatorname{Im} T_2 \subset \operatorname{Im} T_1$. 又 $T_2S^{-1} = T_1$, 故 $\operatorname{Im} T_1 \subset \operatorname{Im} T_2$, 这给出了 $\operatorname{Im} T_2 = \operatorname{Im} T_1$.

必要性: 若 $\operatorname{Im} T_2 = \operatorname{Im} T_1$, 则以 $\operatorname{Im} T_1$ 的一组基扩充为全空间的基并且 T_1 在这组基下的矩阵为 $T_1 = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A 是 s 阶可逆矩阵. 对 T_1 做初等列变换把 C 变成 0, A 变成 E_s, 此时 T_1 相当于右乘了可逆矩阵, 因此不妨设 $C = 0, A = E_s$. 因为 $\operatorname{Im} T_2 = \operatorname{Im} T_1$, 于是 T_2 在这个基下的的一个矩阵为 $T_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B_1 & B_2\end{pmatrix}=s$, 这里 B_1 是 s 阶的. 对 T_2 做交换列的初等列变换使得 B_1 可逆, 然后再做初等列变换使得 $B_1=E_s$, 然后再继续初等列变换把 $B_2=0$, 此时就得到 $T_2=T_1$. 于是我们完成了证明.

例题 23.60 双中心化子定理 设 A 数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, $C(A)$ 表示所有与 A 可交换的矩阵, 如果一个矩阵 X 和所有 $C(A)$ 中的矩阵可交换, 证明存在 $\mathbb{F}$ 上的多项式 p 使得 $X=p(A)$.

证明 显然可以在 $\mathbb{C}$ 上考虑而不失一般性[41].

当 A 是幂零矩阵时, 不妨设 $A=\begin{pmatrix}J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_s\end{pmatrix}$, 这里 $J_i, i=1,2,\cdots,s$ 是 $jordan$ 块. 则取 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}J_1+E & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2+2E & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_s+sE\end{pmatrix}\in C(A)$.

设 $X\tilde{A}=\tilde{A}X, X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss}\end{pmatrix}$, 这给出了

$$(J_i+iE)X_{ij}=X_{ij}(J_j+jE),\forall i,j=1,2,\cdots,s.$$

因此由命题21.2知存在多项式 $p_i(x)\in\mathbb{F}[x], i=1,2,\cdots,s$, 使得

$$X_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ p_i(J_i), & i=j\end{cases}.$$

对任意 $J_1B_{12}=B_{12}J_2$, 使得 $A'=\begin{pmatrix}J_1 & B_{12} & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_s\end{pmatrix}\in C(A)$, 那么根据 $XA'=A'X$, 必有

$$p_1(J_1)B_{12}=B_{12}p_2(J_2).$$

我们断言 $p_1=p_2$, 设 p_1,p_2 的 $0,1,\cdots,s-1$ 次系数都相同, 考虑 s 次系数, 那么因为对任意 $p(x)\in\mathbb{F}[x]$, 都有 $p(J_1)B_{12}=B_{12}p(J_2)$ 知, 可设 p_1,p_2 的 $0,1,\cdots,s-1$ 次系数都为 0, 设

$$p_1=q_1\cdot x^s, p_2=q_2\cdot x^s, q_1,q_2\in\mathbb{F}[x].$$

可让[42]$s\leqslant\min\{J_1\text{阶数},J_2\text{阶数}\}-1$, 以及 $J_1^sB_{12}=B_{12}J_2^s$. 直接计算知存在满足 $J_1B_{12}=B_{12}J_2$ 的 B_{12}, 使得 $J_1^sB_{12}=B_{12}J_2^s\neq 0$. 因此 q_1,q_2 常数项一致[43], 因此我们有 $p_1=p_2$, 类似的所有 $p_i, i=1,2,\cdots s$ 都相同.

于是 $X=p_1(A)$, 我们完成了最麻烦的一部分的证明.

对于一般情况, 不妨设 $A=\begin{pmatrix}T_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & T_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & T_s\end{pmatrix}$, 这里 $T_i, i=1,2,\cdots,s$ 特征值互不相同[44].

[41]本质上是一个线性方程组求解问题, 所以不随数域扩张而改变.

[42]注意矩阵多项式空间的维数23.1.7.

[43]来自命题21.5.

[44]从而每个块的极小多项式互素.

设 $X\tilde{A}=\tilde{A}X, X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix}$, 类似上面可知 $X_{ij}=0, \forall i\neq j$, 因此由单特征值时[45]的结论, 我们知道, 存在多项式 $p_i(x)\in\mathbb{F}[x], i=1,2,\cdots,s$, 使得

$$X_{ij}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ p_i\left(T_i\right), & i=j \end{cases}.$$

设 T_i 的极小多项式为 $m_i\in\mathbb{F}[x], i=1,2,\cdots,s$, 则由中国剩余定理23.1, 存在多项式 $p(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得

$$p\equiv p_i\left(\operatorname{mod} m_i\right), i=1,2,\cdots,s.$$

直接验证就有 $X=p(A)$, 我们完成了证明.

例题 23.61 设 V,U 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\varphi: V\to U$ 是线性映射, 求证: 存在线性映射 $\psi: U\to V$ 使得 $\varphi\psi=0$, 且 $\varphi(V)=\ker\psi, \psi(U)=\ker\varphi$.

证明 不妨设 (也就是选好一组基使得有马上将要叙述的性质)$V=U=\mathbb{F}^n$, φ 是一个 n 阶矩阵, 假设 $\ker\varphi$ 的一组基为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$, 那么我们设 $\varphi=\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{pmatrix}, \varphi_1\in\mathbb{F}^{r\times r}$, 则

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow \varphi_1=0, \varphi_3=0,$$

以及

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}Z=0.$$

因为 $\ker\varphi$ 的一组基为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$, 我们知道

$$\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}Z=0\Leftrightarrow Z=0\Leftrightarrow r\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}=n-r.$$

总的来说就有

$$\varphi=\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_4 \end{pmatrix}, r\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}=n-r.$$

适当交换 $\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_4 \end{pmatrix}$ 的行, 使得行极大无关组落在后 $n-r$ 行得到 $\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2' \\ 0 & \varphi_4' \end{pmatrix}$, 如此变换得到的初等矩阵为 T, 由线性方程组解的存在定理, 可取 X' 使得 $-X'\varphi_4'=\varphi_2'$, 考虑 $\psi\triangleq\begin{pmatrix} E_r & X' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T$, 那么

$$\begin{pmatrix} E_r & X' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \varphi_2'+X'\varphi_4' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0, \begin{pmatrix} 0 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T=0.$$

容易发现

$$\ker\psi\subset\varphi(V), \ker\varphi\subset\psi(V), r(\psi)=r=\dim\ker\varphi,$$

于是

$$r(\varphi)=n-r=\dim\ker\psi,$$

因此 $\varphi\psi=0$, 且 $\varphi(V)=\ker\psi, \psi(U)=\ker\varphi$.

我们完成了证明.

例题 23.62 设非 0 的 $a\in\mathbb{C}$, 求 $J_n^k(a), k\in\mathbb{N}$ 的 Jordan 标准型. 并计算 $J_n^2(0)$ 的 Jordan 标准型. 再计算 $J_n^k(0), 1\leqslant$

[45] 和幂零情况一致.

$k\leqslant n$ 的 Jordan 标准型.

证明 $n=1$ 平凡, 当 $n>1$, 注意到由命题21.2知

$$J_n^k(a)=\begin{cases}\begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1} & \cdots & 0\\ & a^k & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & ka^{k-1}\\ & & & a^k\end{pmatrix}, & 1\leqslant k\leqslant n-1\\ \begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}x^{k-n+1}\\ & a^k & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & ka^{k-1}\\ & & & a^k\end{pmatrix}, & k\geqslant n-1\end{cases}.$$

于是当 $a\neq 0$, 我们有 $r\left(J_n^k(a)-a^kI\right)=n-1$, 从而

$$J_n^k(a)\sim J_n\left(a^k\right),\forall k\in\mathbb{N}.$$

注意到 $J_{2m}^2(0),m\in\mathbb{N}$ 的幂零指数 m 且秩为 $2m-2$, 故 $J_{2m}^2(0)$ 的 Jordan 标准型只有两个块且其中一个是 m 阶块. 因此我们证明了

$$J_{2m}^2(0)\sim\operatorname{diag}\{J_m(0),J_m(0)\}.$$

注意到 $J_{2m+1}^2(0),m\in\mathbb{N}$ 的幂零指数 $m+1$ 且秩为 $2m-1$, 故 $J_{2m+1}^2(0)$ 的 Jordan 标准型只有两个块且其中一个是 $m+1$ 阶块. 因此我们证明了

$$J_{2m+1}^2(0)\sim\operatorname{diag}\{J_{m+1}(0),J_m(0)\}.$$

现在来计算最困难的情况, 即 $J_n^k(0),1\leqslant k\leqslant n$ 的 Jordan 标准型.

首先 $r\left(J_n^k(0)\right)=n-k$ 以及更强的 $r\left(J_n^{kt}(0)\right)=\begin{cases}n-kt, & 1\leqslant kt\leqslant n-1\\ 0, & kt\geqslant n\end{cases}$, 于是我们有

$$r\left(J_n^{k(t+1)}(0)\right)+r\left(J_n^{k(t-1)}(0)\right)-2r\left(J_n^{kt}(0)\right)=\begin{cases}0, & k(t-1)<n-2k\\ -n+kt+k, & n-2k\leqslant k(t-1)<n-k\\ n-kt+k, & n-k\leqslant k(t-1)<n\\ 0, & k(t-1)\geqslant n\end{cases}.$$

由命题21.3, 我们知道当 $\frac{n}{k}-1\leqslant t<\frac{n}{k}$, 有 $-n+kt+k$ 个 t 级 Jordan 块. 当 $\frac{n}{k}\leqslant t<\frac{n}{k}+1$, 有 $n-kt+k$ 个 t 级 Jordan 块. 写的更清楚一点, 若 $n=qk+r,0\leqslant r<k$, 则

$$J_n^k(0)\sim\operatorname{diag}\left\{\underbrace{J_n^{q+1}(0),J_n^{q+1}(0),\cdots,J_n^{q+1}(0)}_{r个},\underbrace{J_n^q(0),J_n^q(0),\cdots,J_n^q(0)}_{k-r个}\right\}.$$

例题 23.63 $A\sim\overline{A}$ 的充要条件 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明:

1. A 和 $\overline{A}$ 相似的充要条件是 A 的特征值 λ 对应的全部 jordan 块和特征值 $\overline{\lambda}$ 对应的 Jordan 块结构一致[46].
2. A 和 $\overline{A}$ 相似的充要条件是 A 复相似于一个实矩阵.

证明

1. 由 Jordan 标准型和相似的传递性, 不妨设

$$A=\operatorname{diag}\{J_{n_1}(a_1),J_{n_2}(a_2),\cdots,J_{n_s}(a_s)\},$$

[46]即每种阶数的块个数一致.

则

$$\overline{A}=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\overline{a_1}\right),J_{n_2}\left(\overline{a_2}\right),\cdots,J_{n_s}\left(\overline{a_s}\right)\right\}.$$

因此:A 和 $\overline{A}$ 相似的充要条件是 A 的特征值 λ 对应的全部 jordan 块和特征值 $\overline{\lambda}$ 对应的 Jordan 块结构一致.

2. 充分性: 若 A 复相似于一个实矩阵, 而实矩阵和自己的共轭相似, 因此容易得到 $A\sim\overline{A}$.
必要性: 若 A 和 $\overline{A}$, 由第 1 问得 A 的特征值 λ 对应的全部 jordan 块和特征值 $\overline{\lambda}$ 对应的 Jordan 块结构一致. 对于 A 的非实特征值 λ 对应的 Jordan 块 $J_k(\lambda),J_k\left(\overline{\lambda}\right)$, 我们可以用 $(x-\lambda)\left(x-\overline{\lambda}\right)$ 的友矩阵来相似

$$\operatorname{diag}\left\{J_n(\lambda),J_n\left(\overline{\lambda}\right)\right\}.$$

因此我们有 A 复相似于一个实矩阵.

例题 23.64

1. 任意可逆复矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都有 $k\in\mathbb{N}$ 次方根.
2. 不可逆复矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 2 次方根的充要条件是 A 特征值 0 对应的 Jordan 块只有 1 阶块可以单独出现, 其余块按照 $\operatorname{diag}\{J_{m+1}(0),J_m(0)\}$ 或者 $\operatorname{diag}\{J_m(0),J_m(0)\}$ 成对出现, 这里 $m\in\mathbb{N}$.
3. 设 $A\in\mathbb{R}^n$ 是 n 阶可逆实矩阵, m 为偶数. 若对 A 的任一负特征值 λ, 满足其对应的 A 的同一型 Jordan 块个数为偶数个, 证明: 存在 $B\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A=B^m$.

证明

1. 不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}(\lambda_1)J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s)\right\},$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 都非 0. 任意取定一组[47] $\sqrt[k]{\lambda_1},\sqrt[k]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[k]{\lambda_s}$, 此时由例题(23.62)知

$$\left(\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\sqrt[k]{\lambda_1}\right)J_{n_2}\left(\sqrt[k]{\lambda_s}\right),\cdots,J_{n_s}\left(\sqrt[k]{\lambda_s}\right)\right\}\right)^k\sim A.$$

从而存在可逆复矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}\left(\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\sqrt[k]{\lambda_1}\right)J_{n_2}\left(\sqrt[k]{\lambda_s}\right),\cdots,J_{n_s}\left(\sqrt[k]{\lambda_s}\right)\right\}\right)^kP=A,$$

即

$$P^{-1}\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\sqrt[k]{\lambda_1}\right)J_{n_2}\left(\sqrt[k]{\lambda_s}\right),\cdots,J_{n_s}\left(\sqrt[k]{\lambda_s}\right)\right\}P$$

为一个所求 k 次方根.

2. 充分性: 和第一问类似并利用例题23.62即可完成构造.
必要性: 设 $B^2=A$, 设 B 的所有 0 特征值对应的 Jordan 块为 $J_{n_1}(0),J_{n_2}(0),\cdots,J_{n_t}(0)$. 则由例题23.62知 $J_{n_1}^2(0),J_{n_2}^2(0),\cdots,J_{n_t}^2(0)$ 的 Jordan 标准型一定要么是 $\operatorname{diag}\{J_{m+1}(0),J_m(0)\}$, 要么是 $\operatorname{diag}\{J_m(0),J_m(0)\}$, 要么是 1 阶块 0. 而 B 的其他 Jordan 块都是非 0 特征值对应的 Jordan 块, 因此平方之后考虑 Jordan 标准型不会产生其他的 0 特征值的对应的 Jordan 块, 所以我们完成了证明.
3. 相似前 2 问和相似不随域扩张而改变, 只需找实矩阵 B, 使得在复数域上有 $B\sim A^m$. 不妨设 A 为 Jordan 标准型且只有一个或者两个 Jordan 块, 否则分块考虑即可.
对于正特征值 λ, 设 $A\sim J_n(\lambda)$, 则利用例题23.62知 $J_n\left(\sqrt[m]{\lambda}\right)^m\sim A$, 即取 $B=J_n\left(\sqrt[m]{\lambda}\right)$.
对于负特征值 λ 或者共轭复特征值 $\lambda,\overline{\lambda}$, 由例题23.63知实矩阵 A 属于共轭复特征值 $\lambda,\overline{\lambda}$ 的 Jordan 块成对出现, 于是设

$$A\sim\begin{pmatrix}J_s(\lambda)&\\&J_s\left(\overline{\lambda}\right)\end{pmatrix}.$$

取 B 是实多项式 $\left(\lambda-\sqrt[m]{\lambda}\right)^s\left(\lambda-\overline{\sqrt[m]{\lambda}}\right)^s$ 对应的友矩阵, 则

$$B\sim\begin{pmatrix}J_s\left(\sqrt[m]{\lambda}\right)&\\&J_s\left(\overline{\sqrt[m]{\lambda}}\right)\end{pmatrix},$$

[47]注意开 k 次方多值性, 我们随便取其中一个即可.

利用例题23.62知 $B^m\sim A$.

这就完成了证明.

来看真题.

例题 23.65 设 $n\geqslant 3$ 且 A 为 n 阶可逆矩阵. 若 $A^k\sim A,k=1,2,\cdots,n!-1,n!$, 证明对一切正整数 k, 都有 $A^k\sim A$.

证明 设 $A\sim \operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1\right),J_{n_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s\right)\right\}$, 这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 且可以相同.

接下来对每个 $j=1,2,\cdots,s$, 我们计算 $J_{n_j}^k\left(\lambda_j\right),k\in\mathbb{N}$ 的 Jordan 标准型. 事实上由命题21.2, 我们知道

$$J_{n_j}^k\left(\lambda_j\right)=\begin{pmatrix}\lambda_j^k & k\lambda_j^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda_j^{k-2} & \cdots & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}\lambda_j^{k-n+1}\\ & \lambda_j^k & k\lambda_j^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda_j^{k-2} & \ddots & \vdots\\ & & \lambda_j^k & k\lambda_j^{k-1} & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_j^k & \ddots & \frac{k(k-1)}{2}\lambda_j^{k-2}\\ & & & & \ddots & k\lambda_j^{k-1}\\ & & & & & \lambda_j^k\end{pmatrix}.$$

于是

$$n_j-\operatorname{rank}\left(J_{n_j}^k\left(\lambda_j\right)-\lambda_j^kI\right)=n_j-\left(n_j-1\right)=1,$$

这给出了 $J_{n_j}^k\left(\lambda_j\right)\sim J_{n_j}\left(\lambda_j^k\right)$.

于是对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有

$$A^k\sim\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1^k\right),J_{n_2}\left(\lambda_2^k\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s^k\right)\right\}.\tag{23.53}$$

注意到 $\lambda_1^k,k=1,2,\cdots,n+1$ 都是 A 特征值, 我们知道

$$\lambda_1^{k_1}=\lambda_1^{k_2},1\leqslant k_1<k_2\leqslant n+1\Rightarrow\lambda_1^{k_2-k_1}=1,1\leqslant k_2-k_1\leqslant n.$$

类似的存在 $m_i\in\{1,2,\cdots,n\},i=1,2,\cdots,s$ 使得 $\lambda_i^{m_i}=1$. 注意到 $m=[m_1,m_2,\cdots,m_s]\in\{1,2,\cdots,n!\}$, 我们有 $\lambda_i^m=1,i=1,2,\cdots,s$. 又 $A^m\sim A$, 我们知道 A 特征值全为 1, 从而由(23.53)知

$$A^k\sim\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1\right),J_{n_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s\right)\right\}\sim A,\forall k\in\mathbb{N}.$$

命题 23.16 (迹 0 矩阵性质)

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则 A 相似于对角线全为 0 的矩阵的充要条件是 $\operatorname{tr}(A)=0$.
2. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则存在 $B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=BC-CB$ 的充要条件是 $\operatorname{tr}(A)=0$.
3. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则 A 正交相似于对角线全为 0 的矩阵的充要条件是 $\operatorname{tr}(A)=0$.

注由 2 知能表示为 $BC-CB$ 的全体矩阵空间的维数是迹 0 矩阵空间[48]的维数 n^2-1.

证明

1. 必要性显然, 我们来证明充分性, 直接利用相似和初等变换的关系21.3来做初等变换.

   充分性:

   Case 1 若 A 有一个对角元为 0, 同时交换行列使得其恰好为左上角. 设 $A=\begin{pmatrix}0&\beta^T\\ \eta&A'\end{pmatrix}$, 于是 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A')=0$. 归纳[49]即知存在可逆的 P 使得 $P^{-1}A'P$ 对角线全为 0. 现在取 $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&P\end{pmatrix}$, 直接计算就有 $C^{-1}AC$ 对角线全为 0.

   Case 2 如果 A 没有一个对角元为 0, 我们的目标是强行初等变换把对角线搞出 0. 首先如果所有非对角元都

[48] 由线性函数 tr 的核确定.

[49] 读者可以自行规范书写归纳细节.

为 0, 注意到对角线和为 0, 所以必然有两个对角线元素不同, 不妨设为第一个和第二个[50]. 我们把第一列加到第二列并同时做初等行变换使得是相似变换, 于是可以不妨设某个非对角元 $a_{ij}\neq 0$. 则用 $-\frac{a_{ii}}{a_{ij}}$ 倍 j 列加到第 i 列并同时做初等行变换使得是相似变换. 此时就有 $a_{ii}=0$. 由 **Case 1** 即得充分性.

2. 必要性显然, 下证充分性. 事实上, 由 1 可不妨设 A 对角线全为 0,

Method 1

我们归纳证明[51].

设 $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha^T\\ \beta & A'\end{pmatrix}$. 由归纳假设可设 $A'=B'C'-C'B'$. 不妨设 B' 可逆, 否则用 $B'+\lambda E$ 代替 B' 即可. 现在我们做分解

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}0 & \alpha^T\\ \beta & B'C'-C'B'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\alpha^T(B')^{-1}\\ (B')^{-1}\beta & C'\end{pmatrix}\\&\quad-\begin{pmatrix}0 & -\alpha^T(B')^{-1}\\ (B')^{-1}\beta & C'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix},\end{aligned}$$

这就完成了证明.

Method 2

记 $A=(a_{ij})$, 取

$$b_{ij}=\begin{cases}\frac{a_{ij}}{j-i}, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases},i,j=1,2,\cdots,n,B=(b_{ij}),C=\operatorname{diag}\{1,2,\cdots,n\},$$

则

$$b_{ij}j-ib_{ij}=a_{ij},i,j=1,2,\cdots,n,$$

即 $BC-CB=A$.

3. 和复版本类似, 必要性显然, 只需证明充分性.

Case 1 若 A 有一个对角元为 0, 同时交换行列使得其恰好为左上角. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & \beta^T\\ \alpha & A'\end{pmatrix}$, 于是 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A')=0$. 归纳[52]即知存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}A'P$ 对角线全为 0. 现在取 $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}$, 直接计算就有 $C^{-1}AC$ 对角线全为 0 且 C 为正交矩阵.

Case 2 如果 A 没有一个对角元为 0, 注意到能保持正交相似的初等变换只有同时交换行列, 因此我们需要能够做更多的"初等变换". 不妨设[53]A 的二阶右下角为 $\begin{pmatrix}a_{n-1} & x\\ y & a_n\end{pmatrix}$, $a_{n-1}a_n<0$. 考虑正交矩阵 $\begin{pmatrix}E_{n-2} & & \\ & -b & a\\ & a & b\end{pmatrix}$, $a^2+b^2=1$, 则

$$\begin{pmatrix}E_{n-2} & & \\ & -b & a\\ & a & b\end{pmatrix}^T A\begin{pmatrix}E_{n-2} & & \\ & -b & a\\ & a & b\end{pmatrix}$$

[50]否则同时交换行列.

[51]规范书写读者自行补充.

[52]读者可以自行规范书写归纳细节.

[53]否则同时交换行列, 因为对角线总有两个元素不同号.

的二阶右下角为

$$\begin{pmatrix}-b & a\\ a & b\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a_{n-1} & x\\ y & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & a\\ a & b\end{pmatrix}.$$

期望右下角为 0, 于是变成能否找到 $a^2+b^2=1$ 使得 $a^2a_{n-1}+ab(x+y)+b^2a_n=0$.

考虑

$$a=\cos\theta, b=\sin\theta, f(\theta)=\cos^2\theta\cdot a_{n-1}+\cos\theta\sin\theta\cdot(x+y)+\sin^2\theta\cdot a_n.$$

注意到 $f(0)=a_{n-1}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a_n$, 于是由零点定理知道这样的 a,b 存在. 于是由 **Case 1** 即得充分性.

命题 23.17 (反对称矩阵的合同标准型)

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的反对称矩阵, 证明存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 C 使得

$$C^TAC=\operatorname{diag}\left\{0,\cdots,0,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}. \tag{23.54}$$

♠

证明 注意因为数域的问题我们不能直接使用定理23.25.

利用合同和初等变换的关系21.2, 接下来归纳证明(23.54), (23.54)对 $n=1$ 显然成立, 假设 (23.54) 对小于 n 成立, 则 n 时设 $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha^T\\ -\alpha & A_{n-1}\end{pmatrix}$, $A_{n-1}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ 是反对称的. 我们自然可以对 A_{n-1} 用归纳假设从而不妨设

$$A=\begin{pmatrix}
0 & a_1 & \cdots & a_s & \begin{pmatrix}a_{s+1} & a_{s+2}\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}a_{n-1} & a_n\end{pmatrix}\\
-a_1 & 0 & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
-a_s & & & 0 & & & \\
\begin{pmatrix}-a_{s+1}\\ -a_{s+2}\end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
\begin{pmatrix}-a_{n-1}\\ -a_n\end{pmatrix} & & & & & & \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}
\end{pmatrix}.$$

现在做初等变换[54]得

$$\begin{pmatrix}
0 & a_1 & \cdots & a_s & \begin{pmatrix} a_{s+1} & a_{s+2} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \\
-a_1 & 0 & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
-a_s & & & 0 & & & \\
\begin{pmatrix} -a_{s+1} \\ -a_{s+2} \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
\begin{pmatrix} -a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix} & & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}
a_{s+2}a_{s+1} & a_1 & \cdots & a_s & \begin{pmatrix} a_{s+1} & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \\
-a_1 & 0 & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
-a_s & & & 0 & & & \\
\begin{pmatrix} -a_{s+1} \\ -a_{s+2} \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
\begin{pmatrix} -a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix} & & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}
0 & a_1 & \cdots & a_s & \begin{pmatrix} a_{s+1} & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \\
-a_1 & 0 & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
-a_s & & & 0 & & & \\
\begin{pmatrix} -a_{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
\begin{pmatrix} -a_{n-1} \\ -a_n \end{pmatrix} & & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\to \begin{pmatrix}
0 & a_1 & \cdots & a_s & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\
-a_1 & 0 & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
-a_s & & & 0 & & & \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}.$$

[54]具体变换方法见视频.

于是我们只需处理

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_s \\ -a_1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_s & & & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $a_i=0, i=1,2,\cdots,s$ 则命题已经得证明. 现在不妨设 $a_1\neq 0$, 否则可以同时交换行列. 于是

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_s \\ -a_1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_s & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_s & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\cdots\to \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

这就完成了(23.54)的证明.

来看竞赛决赛真题:

例题 23.66 证明任何 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都可以分解为 $A=A_0+A_1+A_2$, 其中 $A_0=aI, a\in\mathbb{C}, A_1, A_2$ 都是幂零矩阵.

证明 取 $a=\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}$, 则由命题23.16知可不妨设 $A-aA_0$ 为对角线全为 0 的矩阵. 于是取 A_1 为 $A-aA_0$ 的下三角部分, 其余部分为 0, A_2 为 $A-aA_0$ 的上三角部分, 其余部分为 0. 此时 , A_1, A_2 都是幂零矩阵. 因此我们证明了 $A=A_0+A_1+A_2$.

例题 23.67 设 $A,B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$AB-BA=C, AC=CA, BC=CB. \tag{23.55}$$

证明 C 是幂零的且 A,B,C 可同时相似上三角矩阵. 此外若 $C\neq 0$, 求 n 的最小值.

笔记 求反例这种问题考场可以简单思考之后优先跳过.

证明 **Step 1** 我们的想法是利用引理23.4. 类似例题23.6的操作可得 C 是幂零.

Step 2 由(23.55)知 $\ker C$ 是 A,B 的不变子空间. 由命题23.2和 $A|_{\ker C}B|_{\ker C}-B|_{\ker C}A|_{\ker C}=0$ 知 $A|_{\ker C}, B|_{\ker C}$ 可同时上三角化. 于是取 $\ker C$ 的一组基并扩充为全空间的一组基且 $A|_{\ker C}, B|_{\ker C}$ 都是上三角矩阵. 此时 A,B,C 有表示矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}, A_1, B_1\text{是上三角矩阵.}$$

显然

$$A_2B_2-B_2A_2=C_2, C_2A_2=A_2C_2, C_2B_2=B_2C_2,$$

于是可以用归纳法证明 A,B,C 可同时相似上三角矩阵.

Step 3 当 $n\geqslant 3$, 取 $A=E_{12}, B=E_{23}, C=E_{13}$, 则 A,B,C 满足题意. 对于 $n=2$, 不妨设考虑 C 的 Jordan 型, 即 $C=E_{12}$, 则由 $AC=CA, BC=CB$ 得

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

现在 $AB-BA=0$ 而矛盾! 故 n 的最小值为 3.

来看丘赛 2016 真题和 CMC 真题:

例题 23.68 设 $\varphi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 是非 0 线性变换且满足

$$\varphi(XY)=\varphi(YX),\forall X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}. \tag{23.56}$$

定义双线性函数 $(X,Y)\mapsto\varphi(XY)$, 证明

1. $(\cdot,\cdot)$ 是非退化的双线性函数.
2. 设 $\{A_i\}_{i=1}^{n^2}$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 一组基, $\{B_i\}_{i=1}^{n^2}\subset\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\{A_i\}_{i=1}^{n^2}$ 的对偶基, 即

$$(A_i,B_j)=\delta_{ij},\forall 1\leqslant i,j\leqslant n. \tag{23.57}$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n^2}A_iB_i$ 是数量矩阵.

证明

1. 由 tr 的公理化定义23.92, 我们知道存在唯一的非 0 的 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$\varphi(X)=a\mathrm{tr}(X),\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

现在若

$$(X,Y)=a\mathrm{tr}(XY)=0,\forall Y\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

则取 $Y=X^T$ 并利用例题21.17知 $X=0$, 故 $(\cdot,\cdot)$ 是非退化的双线性函数.

2. **Step 1** 先断言对偶基一定线性无关: 事实上即模仿傅立叶级数的证明思想利用(23.57). 设 $\sum\limits_{i=1}^{n^2}c_iB_i=0$, 则

$$0=\left(\sum_{i=1}^{n^2}c_iB_i,A_j\right)=\sum_{i=1}^{n^2}c_i(B_i,A_j)=\sum_{i=1}^{n^2}c_i\delta_{ij}=c_j,j=1,2,\cdots,n^2,$$

这就证明了对偶基一定线性无关.

此外注意到对 $C=\sum\limits_{i=1}^{n^2}c_iA_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 我们有

$$(C,B_j)=\sum_{i=1}^{n^2}c_i(A_i,B_j)=c_j,$$

故 $C=\sum\limits_{i=1}^{n^2}(C,B_i)A_i$. 类似的有 $C=\sum\limits_{i=1}^{n^2}(C,A_i)B_i$.

Step 2 由命题21.6知只需证明 $\sum\limits_{i=1}^{n^2}A_iB_i$ 与所有矩阵可交换. 事实上对任何 $\ell=1,2,\cdots,n^2$, 我们都有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n^2}A_jB_j\right)A_\ell&=\sum_{i=1}^{n^2}A_iB_iA_\ell=\sum_{i=1}^{n^2}A_i\sum_{j=1}^{n^2}(B_iA_\ell,A_j)B_j\\&=\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2}(B_iA_\ell,A_j)A_iB_j\overset{\text{tr的性质}}{=}\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2}(A_\ell A_j,B_i)A_iB_j\\&=\sum_{j=1}^{n^2}A_\ell A_jB_j=A_\ell\left(\sum_{j=1}^{n^2}A_jB_j\right),\end{aligned}$$

因此我们证明了 $\sum\limits_{i=1}^{n^2}A_iB_i$ 是数量矩阵.

例题 23.69 设 E 是 $\mathbb{R}^n,n\geqslant 2$ 上欧式空间, 内积为 $(\cdot,\cdot)$. 若 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 是 E 的基, $\{v_i\}_{i=1}^n\subset E$ 是 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 的对偶基, 则证明:

1. 若 $(u_i,u_j)\leqslant 0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$, 必有一组正交基 $\{u_i'\}_{i=1}^n\subset E$ 满足对每一个 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 u_i' 是 $u_1,u_2,\cdots,u_i$ 非负系数的线性组合.
2. 若 $(u_i,u_j)\leqslant 0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$, 必有 $(v_i,v_j)\geqslant 0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$.
3. 若 $n\geqslant 3$, 举例说明 $(u_i,u_j)\geqslant 0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$ 不能推出 $(v_i,v_j)\leqslant 0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$.

笔记 本题的核心是翻译成矩阵语言.

证明

1. 设 $A=\operatorname{Gram}\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right)$ 是 $(\cdot,\cdot)$ 在基 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 下的度量矩阵. 从而条件 $(u_i,u_j)\leqslant 0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$ 意味着 A 是主对角元为正, 非主对角元非正数的矩阵. 要证明的结果就是说让我们找一个所有元素非负的实可逆上三角矩阵 C 使得
$$\left(u_1',u_2',\cdots,u_n'\right)=\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right)C,$$
并且 $\operatorname{Gram}\left(u_1',u_2',\cdots,u_n'\right)$ 是对角矩阵. 也即存在元素非负的实可逆上三角矩阵 C 使得 C^TAC 为对角矩阵. 由初等变换的过程, 这是显然的. 例如[55]
$$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix},$$
其合同变换对应的初等矩阵[56]显然满足 C 的要求.
2. 设
$$C=\operatorname{Gram}\left(v_1,v_2,\cdots,v_n\right)=\left(c_{ki}\right),c_{ki}=\left(v_k,v_i\right),$$
则有
$$\delta_{ki}=\left(v_k,u_j\right)=\left(\sum_{i=1}^n c_{ki}u_i,u_j\right)=\sum_{i=1}^n c_{ki}\left(u_i,u_j\right)=\sum_{i=1}^n\left(v_k,v_i\right)\left(u_i,u_j\right),$$
即 $CA=E$. 现在我们知道对偶基对应的度量矩阵互为逆矩阵. 于是要证明的转化为实对称矩阵所有对角元为正数, 其余元为非正数, 那么其逆矩阵所有元都非负. 直接由初等变换[57]就能得到[58]. 例如, 考虑 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, 则
$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-1&2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}.$$
3. 即问当 $n\geqslant 3$, 实对称正定矩阵 A, 对角元为正, 非对角元为非负, 那么是否一定有其逆矩阵所有非对角元非正, 对角元为正. 这可举
$$\begin{pmatrix}3&2&3\\2&4&0\\3&0&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2&3\\2&4&0\\3&0&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-\frac{5}{2}&-3\\-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-3&\frac{3}{2}&2\end{pmatrix},$$
这就是一个反例.

例题 23.70 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明 $r\left(AB\right)-r\left(BA\right)\leqslant\frac{n}{2}$.

证明 注意到
$$r\left(AB\right)\leqslant\min\left\{r\left(A\right),r\left(B\right)\right\}\leqslant\frac{r\left(A\right)+r\left(B\right)}{2}\leqslant\frac{n+r\left(BA\right)}{2}\leqslant\frac{n+2r\left(BA\right)}{2},$$
则 $r\left(AB\right)-r\left(BA\right)\leqslant\frac{n}{2}$.

例题 23.71 直接通过行列式计算规范型 设实对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 二次型 $f\left(x\right)=x^TAx$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式 $A_i,i=1,2,\cdots,n-1$ 都非 0. 现在定义 $A_n=\det A$, 证明: 经过可逆线性变换后 f 可以变为
$$f=A_1y_1^2+\frac{A_2}{A_1}y_2^2+\cdots+\frac{A_n}{A_{n-1}}y_n^2.\tag{23.58}$$

证明 考虑分块
$$A=\begin{pmatrix}C&\alpha\\\alpha^T&a_{nn}\end{pmatrix},C=C^T,C\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},\alpha\in\mathbb{R}^n,a_{nn}\in\mathbb{R},$$

[55]为了方便我们举一个例子, 严格书写手写画出一般的矩阵就可以了.

[56]注意我们只是把第一行操作弄到第二行, 对应的初等矩阵当然是上三角的, 并且乘的是非负数, 过度矩阵元素当然是非负的.

[57]操作过程中都是非负倍数的操作.

[58]为了方便我们举一个例子, 严格书写手写画出一般的矩阵就可以了.

则做同时的初等变换

$$\begin{pmatrix} C & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & \alpha \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T C^{-1} a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T C^{-1}\alpha \end{pmatrix}.$$

由定理21.5, 我们知道

$$A \cong \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T C^{-1} a \end{pmatrix}, \det A = \det C \cdot \left(a_{nn}-\alpha^T C^{-1}\alpha\right) = A_{n-1}\cdot\left(a_{nn}-\alpha^T C^{-1}\alpha\right).$$

于是我们有 $a_{nn}-\alpha^T C^{-1}\alpha = \frac{A_n}{A_{n-1}}$, 对 C 继续类似操作最后可得(23.58).

例题 23.72 初等变换将正负惯性指数都减少 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}, C=(c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 A 是实对称的. 证明 C^TAC 的正惯性指数小于等于 A 的正惯性指数, C^TAC 的负惯性指数小于等于 A 的负惯性指数.

证明 不妨设 A 为规范型, 否则做一个合同即可. 设

$$f(x) = x^TAx = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k+s} x_i^2, k+s \leqslant m.$$

在 $x=Cy$ 下, 即 $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}y_j, i=1,2,\cdots,m$, 我们设关于 y 的二次型 $f(Cy)$ 的规范型为

$$\sum_{i=1}^{p} z_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} z_i^2, p+q \leqslant n,$$

这里可逆线性变换是 $y=Pz, P\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

设 $x=Cy, z=P^{-1}y$, 于是我们有

$$\sum_{i=1}^{p} z_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} z_i^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k+s} x_i^2.$$

若 $p>k$, 则考虑关于 y 的齐次线性方程组

$$z_i = 0, p+1 \leqslant i \leqslant n, x_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant k,$$

我们注意这里有 $n-p+k<n$ 个方程, 故必然存在非 0 解 y_0, 记 $x_0=Cy_0, z_0=P^{-1}y_0$. 于是由

$$\sum_{i=1}^{p} (z_0)_i^2 = -\sum_{i=k+1}^{k+s} (x_0)_i^2 \Rightarrow (z_0)_i = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

知矛盾! 故 $p\leqslant k$, 类似可证 $q\leqslant s$, 这就完成了证明.

例题 23.73 一个 n 元实二次型可以分解为两个实系数一次齐次多项式的积当且仅当它秩等于 2, 符号差为 0 或者秩为 1.

证明 由

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\beta\alpha^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\frac{\beta\alpha^T+\alpha\beta^T}{2}\mathbf{x},$$

我们知道 n 元实二次型可以分解为两个实系数一次齐次多项式的积当且仅当其矩阵 A 可以写成 $\frac{\beta\alpha^T+\alpha\beta^T}{2}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 的形式. 这也可以看到这种表示存在性不随 A 合同而改变.

充分性: 不妨设 A 为对角线是 $\pm1, 0$ 的对角矩阵. 当 A 秩等于 2, 符号差为 0 或者秩为 1, 由

$$x_1^2 = x_1\cdot x_1, x_1^2-x_2^2 = (x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

我们知充分性得证.

必要性: 设

$$A = \frac{\beta\alpha^T+\alpha\beta^T}{2}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\},$$

此时 $\operatorname{span}\{\alpha,\beta\}$ 是 A 不变子空间.

当 α,β 线性相关, 我们设

$$\beta = \lambda\alpha, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

此时 $A=\lambda\alpha\alpha^T$ 是半正定或者半负定的秩 1 矩阵.

当 α,β 线性无关, $A|_{\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}}$ 在基 α,β 下有表示矩阵 $\begin{pmatrix}\frac{\beta^T\alpha}{2} & \frac{\beta^T\beta}{2}\\ \frac{\alpha^T\alpha}{2} & \frac{\alpha^T\beta}{2}\end{pmatrix}$. 由 Cauchy 不等式我们知道

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\beta^T\alpha}{2} & \frac{\beta^T\beta}{2}\\ \frac{\alpha^T\alpha}{2} & \frac{\alpha^T\beta}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left((\alpha,\beta)^2-(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\right)<0,$$

即 $A|_{\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}}$ 必有一正一负特征值, 从而 A 必有一正一负特征值. 因为 A 可对角化, 所以非 0 特征值个数和秩相等. 注意到 A 秩至多为 2, 因此 A 秩等于 2, 符号差为 0.

例题 23.74 设 V 是数域上的有限维线性空间, 证明任意 V 的真子空间 U 都有无穷多个补空间.

证明 取 U 的基扩充为 V 的一组基, 考虑在这组基下的坐标可以不妨设 U 的基为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$. 考虑 $r\times(n-r)$ 阶矩阵 Y, 我们知道 $\begin{pmatrix}E_r & Y\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}$ 的列向量组张成的空间就是 V. 显然 $\begin{pmatrix}Y\\ E_{n-r}\end{pmatrix}$ 的列向量组张成的空间是 U 的补空间. 我们证明随着 Y 选取的不同, 我们可以得到 U 的无穷多组不同的补空间. 事实上, 如果对 $Y_1\neq Y_2$, 若 $\begin{pmatrix}Y_1\\ E_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_2\\ E_{n-r}\end{pmatrix}C$, 则

$$\begin{pmatrix}Y_1\\ E_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_2C\\ C\end{pmatrix}\Rightarrow Y_1=Y_2,$$

矛盾! 于是我们证明了 $\begin{pmatrix}Y\\ E_{n-r}\end{pmatrix}$ 的列向量组张成的空间随着 Y 选取不同而不同, 这就完成了证明.

例题 23.75 设 V 是数域上的有限维线性空间, 证明任意 V 的真子空间 W 是若干 V 的 $n-1$ 维子空间之交.

证明 不妨设 $W=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_r\}$, 于是取

$$V_j=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_{j-1},e_{j+1},\cdots,e_n\},j=r+1,r+2,\cdots,n,$$

我们断言

$$W=\bigcap_{j=r+1}^{n}V_j. \tag{23.59}$$

事实上显然 $W\subset\bigcap\limits_{j=r+1}^{n}V_j$. 另外一方面我们设 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_ke_k\in\bigcap\limits_{j=r+1}^{n}V_j$, 则对每个 $j=r+1,r+2,\cdots,n$ 都有

$$\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\in V_j\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}c_ke_k=\sum_{k\neq j}d_ke_k\Rightarrow c_je_j+\sum_{k\neq j}(c_k-d_k)e_k=0.$$

于是我们知道 $c_j=0$, 这就证明了 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_ke_k\in W$, 从而证明了(23.59). 我们完成了证明.

例题 23.76 设 φ,ψ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 上的幂等线性变换. 证明

1. $\varphi+\psi$ 也是幂等变换的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$;
2. $\varphi-\psi$ 也是幂等变换的充要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$.

证明

1. 若 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$, 则

$$(\varphi+\psi)^2=\varphi^2+\psi^2+\varphi\psi+\psi\varphi=\varphi+\psi,$$

即 $\varphi+\psi$ 也是幂等变换.

反之若 $\varphi+\psi$ 也是幂等变换, 则

$$\varphi+\psi=(\varphi+\psi)^2=\varphi^2+\psi^2+\varphi\psi+\psi\varphi=\varphi+\psi+\varphi\psi+\psi\varphi,$$

即 $\varphi\psi+\psi\varphi=0$. 不妨设

$$\varphi=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\psi=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},A\in\mathbb{K}^{r\times r}.$$

于是我们有

$$\varphi\psi+\psi\varphi=\begin{pmatrix}2A & B\\ C & 0\end{pmatrix}=0,$$

即

$$A=0,B=0,C=0,\psi=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}.$$

现在我们就证明了 $\varphi\psi=\psi\varphi=0$.

2. 若 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$, 则

$$(\varphi-\psi)^2=\varphi^2+\psi^2-\varphi\psi-\psi\varphi=\varphi+\psi-\varphi\psi-\psi\varphi=\varphi-\psi,$$

即 $\varphi-\psi$ 也是幂等变换.

反之若 $\varphi-\psi$ 也是幂等变换, 则

$$\varphi-\psi=(\varphi-\psi)^2=\varphi^2+\psi^2-\varphi\psi-\psi\varphi=\varphi+\psi-\varphi\psi-\psi\varphi,$$

即 $\varphi\psi+\psi\varphi=2\psi$.

不妨设

$$\varphi=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\psi=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},A\in\mathbb{K}^{r\times r}.$$

于是我们有

$$\varphi\psi+\psi\varphi=\begin{pmatrix}2A & B\\ C & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2A & 2B\\ 2C & 2D\end{pmatrix},$$

即

$$B=0,C=0,D=0,\psi=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

现在我们就证明了 $\varphi\psi=\psi\varphi=\psi$.

例题 23.77 设 $A_i\in\mathbb{C}^{n\times n},i=1,2,\cdots,m$ 适合条件

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=I_n. \tag{23.60}$$

证明下述条件等价

1. $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 都是幂等矩阵;
2. $r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_m)=n$;
3. $A_iA_j=0,\forall i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n.$

证明 1 推 2: 事实上由引理23.15知幂等矩阵 tr = rank, 我们知道

$$n\overset{(23.60)}{=}\operatorname{tr}(I)=\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{tr}(A_i)=\sum_{i=1}^{m}r(A_i).$$

2 推 3: 做初等变换有

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & A_2 & \cdots & A_m \\ A_2 & A_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_m & & & A_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & A_2 - A_2^2 & -A_2A_3 & \cdots & -A_2A_m \\ A_3 & -A_3A_2 & A_3 - A_3^2 & \cdots & -A_3A_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m & -A_mA_2 & -A_mA_3 & \cdots & A_m - A_m^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 - A_2^2 & -A_2A_3 & \cdots & -A_2A_m \\ 0 & -A_3A_2 & A_3 - A_3^2 & \cdots & -A_3A_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -A_mA_2 & -A_mA_3 & \cdots & A_m - A_m^2 \end{pmatrix},$$

这就蕴含

$$\begin{pmatrix} A_2 - A_2^2 & -A_2A_3 & \cdots & -A_2A_m \\ -A_3A_2 & A_3 - A_3^2 & \cdots & -A_3A_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_mA_2 & -A_mA_3 & \cdots & A_m - A_m^2 \end{pmatrix} = 0,$$

即 $A_iA_j = 0, \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

3 推 1: 利用(23.60), 注意到

$$A_i \left(A_1 + A_2 + \cdots + A_m\right) = A_i \Rightarrow A_i^2 = A_i, i = 1, 2, \cdots, m,$$

这就完成了证明.

例题 23.78 设可对角化矩阵 $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}, i = 1, 2, \cdots, 2n$ 满足

$$A_kA_j = 0, \forall 1 \leqslant k < j \leqslant n.$$

证明 $A_i, 1 \leqslant i \leqslant 2n$ 中至少有 n 个零矩阵.

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2A_1 & A_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n}A_1 & A_{2n}A_2 & \cdots & A_{2n}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{2n} \end{pmatrix},$$

于是由基本的秩不等式21.6的 3 有

$$n \geqslant r\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{2n} \end{pmatrix}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{2n} r\left(A_j^2\right) \Rightarrow \text{至少} n \text{个} A_j^2 = 0.$$

对每个 $j = 1, 2, \cdots, 2n$, 因为 A_j 可对角化, 所以存在可逆矩阵 P_j 使得 $P_j^{-1}A_jP_j = \Lambda_j$ 为对角矩阵. 由 $P_j^{-1}A_j^2P_j =$

$\Lambda_j^2=0$ 知 $A_j=P_j\Lambda_jP_j^{-1}=0$, 这就完成了证明.

例题 23.79 设可交换矩阵 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明

$$\det\left(4A^2+4AB+5B^2\right)\geqslant 0. \tag{23.61}$$

证明 在复数域分解因式

$$4x^2+4xy+5y^2=(2x+y+2yi)(2x+y-2yi).$$

于是

$$\begin{aligned}\det\left(4A^2+4AB+5B^2\right)&=\det(2A+B+2Bi)\cdot\det(2A+B-2Bi)\\&=|\det(2A+B+2Bi)|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

例题 23.80 设 n 为偶数, 证明存在 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得对任何非 0 的 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, 都有 $A\alpha,B\alpha$ 线性无关.

证明 我们考虑

$$A=E,B=\begin{pmatrix}0&-1&&&\\1&0&&&\\&&0&-1&\\&&1&0&\\&&&&\ddots\end{pmatrix}.$$

则对任何 $0\neq\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\a_2\\b_2\\\vdots\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$A\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\a_2\\b_2\\\vdots\end{pmatrix},B\alpha=\begin{pmatrix}-b_1\\a_1\\-b_2\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}.$$

然后 $\begin{pmatrix}a_1&-b_1\\b_1&a_1\\a_2&-b_2\\b_2&a_2\\\vdots&\vdots\end{pmatrix}$ 的二阶子式

$$\begin{vmatrix}a_i&-b_i\\b_i&a_i\end{vmatrix}=a_i^2+b_i^2,i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$$

显然有一个非 0, 于是我们知道了 $A\alpha,B\alpha$ 线性无关.

例题 23.81 设 A 为数域上 n 维线性空间 V 上的的线性变换, 证明存在整数 $1\leqslant k\leqslant n$ 使得 $V/\mathrm{Im}\,A^k\cong\ker A^k$, 并求最小的 k.

证明 由维数公式,

$$\dim\ker A^k=\dim V-\dim\mathrm{Im}\,A^k=\dim\left(V/\mathrm{Im}\,A^k\right).$$

所以这个同构对任何整数 $1\leqslant k\leqslant n$ 都成立. 其出题目的是是求最小的正整数 k 使得

$$V=\ker A^k\oplus\mathrm{Im}\,A^k. \tag{23.62}$$

不妨设 A 为有理标准型且记 $A=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$, 其中 B 可逆, C 幂零, 从而 $A^k=\begin{pmatrix}B^k&0\\0&C^k\end{pmatrix}$. 设 k 是 C 的幂零指数, 则

$$\ker A^k=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},\operatorname{Im}A^k=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},$$

这里向量 y 的阶数和 C 的阶数一致, x 的阶数和 B 的阶数一致, 这就给出了(23.62). 当正整数 $\ell<k$, 我们知道 $r\left(C^{\ell+1}\right)<r\left(C^{\ell}\right)$, 否则会和下述通过线性方程组同解导出的秩等式矛盾

$$r\left(C^{\ell}\right)=r\left(C^{\ell+1}\right)=r\left(C^{\ell+2}\right)=\cdots=r\left(C^{k}\right)=0.$$

于是线性方程组 $C^{\ell}x=0, C^{\ell+1}x=0$ 不同解, 因此存在 $z\neq0$, 使得 $C^{\ell}z\neq0, C^{\ell+1}z=0$. 现在 $\begin{pmatrix}0\\C^{\ell}z\end{pmatrix}\in\ker A^k\bigcap\operatorname{Im}A^k$ 知(23.62)不成立. 故最小的 k 是 C 的幂零指数, 即 A 的 0 特征值对应的 Jordan 块的最大阶数, 即 A 的极小多项式的 x 的幂次.

例题 23.82 设 $\mathbb{F}$ 为一数域且 $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 证明同构

$$\ker\left(A+B-ACB\right)\cong\ker\left(A+B-BCA\right).\tag{23.63}$$

证明 **Method 1** 本方法由竞赛班前学员 CharyChim 给出.

注意到初等变换

$$\begin{pmatrix}E&0\\0&A+B-BCA\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E&A\\0&A+B-BCA\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E&A\\-E+BC&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E-AC&A\\-E&B\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}AC-E&A\\E&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E&B\\AC-E&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E&B\\0&B+A-ACB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E&0\\0&B+A-ACB\end{pmatrix}.$$

于是我们证明了 $\operatorname{rank}\left(A+B-ACB\right)=\operatorname{rank}\left(A+B-BCA\right)$, 这恰好由维数公式是(23.63).

Method 2 不妨设 $A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 否则用可逆矩阵 $P,Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}$, 然后用 PAQ 代替 A, PBQ 代替 B, $Q^{-1}CP^{-1}$ 代替 C. 我们对应分块

$$B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&C_4\end{pmatrix}.$$

注意到恒等式

$$\begin{pmatrix}E_r&C_2\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}\left(A+B-ACB\right)=E_n+\begin{pmatrix}E_r-C_1&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4-E_{n-r}\end{pmatrix}$$
$$\left(A+B-BCA\right)\begin{pmatrix}E_r&0\\C_3&E_{n-r}\end{pmatrix}=E_n+\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4-E_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r-C_1&0\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}.$$

利用经典结论: 可逆矩阵乘矩阵不改变矩阵的秩和推论23.1知 $\operatorname{rank}\left(A+B-ACB\right)=\operatorname{rank}\left(A+B-BCA\right)$, 这恰好由维数公式是(23.63). 我们完成了证明.

例题 23.83 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是实矩阵且满足下列条件

1. $i\neq j, a_{ij}<0$,
2. 所有顺序主子式为正.

证明 A^{-1} 所有元素为正.

证明 当 $n=1$ 显然正确, 假设命题对一般的 n 也对, 当 $n+1$ 时考虑 $A=\begin{pmatrix}A_n&\beta\\\alpha^T&a\end{pmatrix}$, $A_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 这里 A_n 也满足题目条件. 注意到

$$\begin{pmatrix}E_n&0\\-\alpha^TA_n^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_n&\beta\\\alpha^T&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n&-A_n^{-1}\beta\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_n&0\\0&a-\alpha^TA_n^{-1}\beta\end{pmatrix}.\tag{23.64}$$

因此(23.64)两边取行列式得 $a-\alpha^TA_n^{-1}\beta>0$. 因此(23.64)两边取逆得

$$\begin{pmatrix}A_n & \beta\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}E_n & -A_n^{-1}\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_n^{-1} & 0\\ 0 & \left(a-\alpha^TA_n^{-1}\beta\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n & 0\\ -\alpha^TA_n^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

由归纳假设知 A_n^{-1} 元素全为正, 由条件知 α,β 元素全为负, 因此上式矩阵每个元素都为正. 这就说明了 $\begin{pmatrix}A_n & \beta\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}^{-1}$ 每个元素都为正, 因此我们证明了 A^{-1} 所有元素为正.

引理 23.14

设 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则 $BX^T=XB^T$ 一定存在可逆解.

证明 回忆矩阵 H 的定义(21.2), 我们用 H_i 表示可能不同阶数的 H.

设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}BP=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_s\}=J$, 这里 $J_i,i=1,2,\cdots,s$ 都是 Jordan 块. 于是

$$BX^T=XB^T\Leftrightarrow PJP^{-1}X^T=XP^{-T}J^TP^T\Leftrightarrow JP^{-1}X^TP^{-T}=P^{-1}XP^{-T}J^T.$$

现在不妨设 B 就是 Jordan 标准型, 从而只需解方程 $JX^T=XJ^T$. 即

$$\begin{aligned}J&=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_s\}=\operatorname{diag}\left\{H_1J_1^TH_1,H_2J_2^TH_2^T,\cdots,H_sJ_s^TH_s^T\right\}\\&=\operatorname{diag}\{H_1,H_2,\cdots,H_s\}\operatorname{diag}\left\{J_1^T,J_2^T,\cdots,J_s^T\right\}\operatorname{diag}\left\{H_1^T,H_2^T,\cdots,H_s^T\right\}\\&=\operatorname{diag}\{H_1,H_2,\cdots,H_s\}\operatorname{diag}\left\{J_1^T,J_2^T,\cdots,J_s^T\right\}\operatorname{diag}\{H_1,H_2,\cdots,H_s\},\end{aligned}$$

故 $X=\operatorname{diag}\{H_1,H_2,\cdots,H_s\}$ 为所求.

例题 23.84 辛矩阵行列式 设 $S\in\mathbb{C}^{2n\times2n}$ 满足

$$S\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix}S^T=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix}.\tag{23.65}$$

证明 $|S|=1$.

证明 设 $S=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 利用(23.65)直接得

$$BA^T-AB^T=0,DA^T-CB^T=E_n,DC^T-CD^T=0.\tag{23.66}$$

若 A 可逆, 则

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}.$$

显然这种初等变换不改变行列式, 于是

$$\begin{aligned}|S|&=|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|=\left|D-CA^{-1}B\right|\cdot\left|A^T\right|=\left|DA^T-CA^{-1}BA^T\right|\\&=\left|DA^T-CA^{-1}AB^T\right|=\left|DA^T-CB^T\right|=|E_n|=1.\end{aligned}$$

如果 A 不可逆, 则有引理23.14知可取可逆矩阵 X 使得 $BX^T=XB^T$, 于是由 $|A+\lambda X|=\left|AX^{-1}+\lambda E_n\right|\cdot|X|$ 知 $|A+\lambda X|$ 不是 0 多项式. 从而可以找到 $\lambda\to0$ 使得 $A_\lambda\triangleq A+\lambda X$ 可逆且由(23.66)知成立

$$BA_\lambda^T-A_\lambda B^T=0,DA_\lambda^T-CB^T=E_n+\lambda DX^T.\tag{23.67}$$

于是重复 A 可逆时的行列式计算过程有

$$\begin{vmatrix}A_\lambda & B\\ C & D\end{vmatrix}=\left|E_n+\lambda DX^T\right|.$$

现在让 $\lambda\to0$ 知

$$|S|=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|E_n|=1.$$

例题 23.85 设 V 是数域上的有限维线性空间, T 是 V 上的线性变换. 证明:

1. 若每一个 $\dim V-1$ 维 V 的子空间都是 T 的不变子空间, 则 T 是恒等算子的标量倍.
2. 若 $\dim V \geqslant 3$, 若每一个二维 V 的子空间都是 T 的不变子空间, 则 T 是恒等算子的标量倍.

证明

1. 设 $\dim V=n$, T 在一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下的矩阵为 A. 考虑 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\setminus\{e_j\},1\leqslant j\leqslant n$ 张成的 $\dim V-1$ 维空间是 T 不变子空间, 所以当 $i\neq j$ 时, Ae_i 的第 j 个分量为 0. 现在我们知道 A 是对角矩阵, 不妨设 $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$.

   考虑 $\{e_1+e_2,e_3,\cdots,e_n\}$ 张成的 $\dim V-1$ 维空间是 T 不变子空间, 我们有 $A(e_1+e_2)=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$, 为了这个向量落在 $\{e_1+e_2,e_3,\cdots,e_n\}$ 张成的子空间中, 必须有

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2=c(e_1+e_2)+\sum_{i=3}^{n}c_ie_i.$$

   但是 $\{e_1+e_2,e_3,\cdots,e_n\}$ 线性无关告诉我们 $\lambda_1=\lambda_2=c$. 类似的我们有所有 $\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n$ 都相等, 因此 T 是恒等算子的标量倍.

2. 设 $\dim V=n$, T 在一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下的矩阵为 A. 考虑 $\{e_i,e_j\},1\leqslant i<j\leqslant n$ 张成的 2 维空间是 T 不变子空间, 所以当 $i\neq j$ 时, Ae_i 的除了第 i,j 个分量都为 0. 现在我们知道 A 是对角矩阵, 不妨设 $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$.

   考虑 $\{e_1+e_2,e_3\}$ 张成的 2 维空间是 T 不变子空间, 我们有 $A(e_1+e_2)=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$, 为了这个向量落在 $\{e_1+e_2,e_3\}$ 张成的子空间中, 必须有

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2=c(e_1+e_2)+c_3e_3.$$

   但是 $\{e_1+e_2,e_3\}$ 线性无关告诉我们 $\lambda_1=\lambda_2=c$. 类似的我们有所有 $\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n$ 都相等, 因此 T 是恒等算子的标量倍.

例题 23.86 假设 T 是数域上的线性空间 V 上的线性变换且存在 $v\in V$ 使得 $v,Tv,\cdots,T^{n-1}v$ 是 V 的一组基, T 的极小多项式为 $m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, 这里 $\{\lambda_i\}$ 互不相同, 证明: 该数域上的多项式 p 满足存在 $u\in V$ 使得 $u,p(T)u,\cdots,p^{n-1}(T)u$ 也是 V 的一组基当且仅当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时 $p(\lambda_i)\neq p(\lambda_j)$ 且 $n_i>1$ 时 $p'(\lambda_i)\neq 0$.

注 一个好用的推论是设 X 幂零矩阵, 则对满足 $p(0)=0,p'(0)\neq 0$ 的多项式 p 或者解析函数 p, 我们有 $p(X)\sim X$. 证明是容易的, 你可以不妨设 X 就是 Jordan 标准型, 然后对每个块用例题23.86. 对于解析的情况, 因为 $X^n=0$, 所以 p 可以等同多项式的效果.

证明 **Step 1**

由命题21.2, 我们知道

$$p(J_m(\mu))=\begin{pmatrix} p(\mu) & p'(\mu) & \cdots & \frac{p^{(m-1)}(\mu)}{(m-1)!} \\ & p(\mu) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & p'(\mu) \\ & & & p(\mu) \end{pmatrix}.$$

即当且仅当[59]$p'(\mu)\neq 0$ 时成立

$$p(J_m(\mu))\sim J_m(p(\mu)).$$

所以条件 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时 $p(\lambda_i)\neq p(\lambda_j)$ 且 $n_i>1$ 时 $p'(\lambda_i)\neq 0$ 的充要条件是若 T 有 Jordan 标准型

$$\operatorname{diag}\{J_{m_1}(\mu_1),J_{m_2}(\mu_2),\cdots,J_{m_t}(\mu_t)\},$$

则 $p(T)$ 有 Jordan 标准型

$$\operatorname{diag}\{J_{m_1}(p(\mu_1)),J_{m_2}(p(\mu_2)),\cdots,J_{m_t}(p(\mu_t))\}.$$

[59]秩决定 Jordan 块块数21.3.

Step 2

注意到 T 在基 $v, Tv, \cdots, T^{n-1}v$ 下的矩阵是一个友矩阵, 所以特征多项式和极小多项式相等, 所以每种特征值只有 1 个 Jordan 块. 由定理23.23知存在 $u \in V$ 使得 $u, p(T)u, \cdots, p^{n-1}(T)u$ 也是 V 的一组基当且仅当 $p(T)$ 每种特征值只有 1 个 Jordan 块. 由 **Step 1** 知这当且仅当 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时 $p(\lambda_i) \neq p(\lambda_j)$ 且 $n_i > 1$ 时 $p'(\lambda_i) \neq 0$.

定义 23.9 (向量的极小多项式定义)

设 $\mathbb{F}$ 是一个域且 $\alpha \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}, A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 我们称 $p \in \mathbb{F}[x]$ 是 α 的 $A-$ 零化多项式, 如果 $p(A)\alpha = 0$. 我们把 α 的次数最低的首 1 的 $A-$ 零化多项式称为 α 的 $A-$ 极小多项式.

注 我们要断言非 0 零化多项式存在性, 实际上 A 的特征多项式就是一个 α 的 $A-$ 零化多项式.

命题 23.18

设 $\mathbb{F}$ 是一个域且 $\alpha \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}, A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, m 是 α 的 $A-$ 极小多项式, p 是 α 的 $A-$ 零化多项式, 则 $m|p$.

笔记 本结果可以直接使用, 注意未必有 m 可约.

证明 由带余除法得 $p = qm + r, \deg r < \deg m$, 即

$$r(A)\alpha = p(A)\alpha - q(A)m(A)\alpha = 0,$$

故由 m 次数最低得 $r = 0$, 从而 $m|p$.

例题 23.87 设 $\mathbb{K}$ 为一数域, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ 的特征多项式分解为

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} p_j(\lambda),$$

这里所有 p_j 是首 1 的次数大于等于 1 的互不相同的不可约多项式. 设

$$\alpha_i \in \ker p_i(A) \setminus \{0\}, i = 1, 2, \cdots, k, \alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j,$$

证明 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 是 $\mathbb{K}^n$ 的基.

证明 因为矩阵相似不改变条件和要证的结论, 所以不妨设

$$A = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_k\},$$

这里 A_j 对应 p_j 的友矩阵. 现在

$$p_i(A) = \operatorname{diag}\left\{\underbrace{p_i(A_1)}_{\text{可逆}}, \cdots, \underbrace{0}_{\text{第}i\text{个}}, \cdots, \underbrace{p_i(A_k)}_{\text{可逆}}\right\}, i = 1, 2, \cdots, k,$$

即

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \eta_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_i \in \mathbb{K}^{\deg p_i} \setminus \{0\}, i = 1, 2, \cdots, k.$$

设

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i \alpha = 0, c_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, q = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i,$$

即直接计算矩阵乘法得

$$q(A)\alpha = 0 \Rightarrow q(A_i)\eta_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k.$$

因为 η_i 的 A_i- 极小多项式是 p_i 的因子, 而 p_i 不可约, 所以 p_i 是 η_i 的 A_i- 极小多项式. 现在由命题23.18得

$$p_i|q, i=1,2,\cdots,k \Rightarrow q=0,$$

因此 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关, 从而是 $\mathbb{K}^n$ 的基.

23.5 用代数的观点解题

23.5.1 公理化专题

所谓公理化, 即可把满足某种性质的类定义好, 去证明这个类只能是我们熟知的某个东西.

来看行列式的公理化定义.

例题 23.88 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 上的 n 重反对称线性函数, 证明:

$$f(A)=\det A\cdot f(E), \forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{23.68}$$

笔记 这里 f 作用在 A 表明 f 作用在 A 的 n 个列向量上.

证明 如果 $f(E)=0$, 即 $f(e_1,e_2,\cdots,e_n)=0$. 则利用 f 反对称性, 对任何 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 都有 $f(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})=0$. 因此 f 在一组基上为 0 知 f 恒为 0.

如果 $f(E)\neq 0$, 用 $\frac{f}{f(E)}$ 代替 f, 不妨设 $f(E)=1$. 下证 $f(A)=\det A$, 显然 f 被 $f(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 值唯一确定. 现在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mapsto\det(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的反对称 n 重线性函数. 而 $\det(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1=f(E)$, 因此我们证明了

$$f(A)=\det A, \forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

例题 23.89 证明域 $\mathbb{F}$ 上矩阵环是单环, 也即设 $M\subset\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 M 对加法和乘法封闭且对任何 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}, B\in M$, 都有 $AB\in M, BA\in M$, 则 $M=\{0\}$ 或者 $M=\mathbb{F}^{n\times n}$.

笔记 对任何 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}, B\in M$, 都有 $AB\in M, BA\in M$ 被称为吸收性.

证明 注意到经典恒等式

$$E_{kl}AE_{ij}=a_{li}E_{kj}. \tag{23.69}$$

假设 $M\neq\{0\}$.

如果已经证明某个 $E_{ij}\in M$, 运用(23.69)中 $A=E$ 的情况, 我们容易用吸收性知道

$$E_{il}\in M, \forall i,l\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

又

$$\lambda E\cdot E_{ij}=\lambda E_{ij}\in M, \forall\lambda\in\mathbb{F}, i,j\in\{1,2,\cdots,n\},$$

即 M 对数乘运算封闭, 故此时就有 $M=\mathbb{F}^{n\times n}$.

现在取 $A_0\in M$ 使得其 (l,i) 元非 0. 在(23.69)中取 $A=A_0$, 我们有

$$E_{kl}A_0E_{ij}=(A_0)_{(l,i)}E_{kj}\in M\Rightarrow E_{kj}\in M,$$

这就完成了证明.

我们可以把例23.89推广到环上的情况, 其也是 2024-2025 北京大学第一学期高等代数期末考试压轴题.

例题 23.90* 设 R 为含幺交换环, 则 $R^{n\times n}$ 的每个理想都形如 $I^{n\times n}$, 这里 I 是 R 的某个理想. 并且成立环同构

$$R^{n\times n}/I^{n\times n}\cong(R/I)^{n\times n}. \tag{23.70}$$

证明 **Step 1**

设 J 是 $R^{n\times n}$ 的理想, I 是 J 中矩阵元的集合, 则 $J\subset I^{n\times n}$.

设 $a\in I$, 我们设 $B=(b_{ij})\in J$ 使得 $b_{st}=a$, 则对任何 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 都有

$$E_{is}BE_{tj}=aE_{ij}\in J.$$

现在利用 J 对加法封闭得 $I^{n\times n}\subset J$, 从而 $J=I^{n\times n}$.

对 $a,b\in I$ 得

$$aE_{ij}\in J, bE_{ij}\in J\Rightarrow (a-b)E_{ij}\in J\Rightarrow a-b\in I.$$

对 $a\in I, b\in R$, 我们有

$$aE_{ij}\in J\Rightarrow bE\cdot aE_{ij}=baE_{ij}\in J\Rightarrow ba=ab\in I,$$

从而 I 是 R 的理想.

Step 2

设自然同态 $\tau: R\to R/I$ 并考虑同态

$$\pi: R^{n\times n}\to (R/I)^{n\times n}, (a_{ij})\mapsto (\tau(a_{ij})).$$

显然 π 是满同态且 $\ker\pi=I^{n\times n}$. 由环同态基本定理得(23.70)成立.

例题 23.91 设 p 是 $\mathbb{R}[x]$ 上线性函数且满足若 $p(fg)=0$, 则必有 $p(f)=0$ 或者 $p(g)=0$, 证明存在 $x_0,c\in\mathbb{R}$ 使得

$$p(f)=cf(x_0), \forall f\in\mathbb{R}[x].$$

证明 如果 $p\neq 0$, 则存在 $f_0\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $p(f_0)\neq 0$. 取 $t\in\mathbb{R}$ 使得

$$p((f_0-t)f_0)=p(f_0^2)-tp(f_0)=0,$$

于是

$$p(f_0-t)=0\Rightarrow p(f_0)=tp(1)\neq 0\Rightarrow p(1)\neq 0.$$

用 $\frac{p}{p(1)}$ 代替 p 可不妨设 $p(1)=1$, 下证 $p(f)=f(x_0), \forall f\in\mathbb{R}[x]$.

不妨设 $p(x)=0$, 否则用 $p(f)=f(x-p(x))$ 代替 $p(f)$, 于是只需证明

$$p(f)=f(0), \forall f\in\mathbb{R}[x]. \tag{23.71}$$

对 $n\in\mathbb{N}$, 假设已经证明了 $p(x), p(x^2), \cdots, p(x^{n-1})=0$, 则

$$p(x^n-p(x^n))=0\Rightarrow p\left((x-p(x^n))(x+1)^{n-1}\right)=p(x^n-p(x^n))=0, p\left((x+1)^{n-1}\right)=1\neq 0,$$

这就给出了

$$p(x-p(x^n))=0\Rightarrow p(x^n)=0,$$

因此就给出了(23.71), 从而我们完成了证明.

例题 23.92 设 $f: \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 是线性函数, 解答下列问题

1. 证明存在唯一的 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $f(A)=\mathrm{tr}(AC)$;
2. 若 $f(AB)=f(BA), \forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(A)=\lambda\mathrm{tr}(A), \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

笔记 显然本结果不依赖数域.

证明

1. 取 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得其 (i,j) 元为 $f(E_{ji})$, 则

$$f(E_{ij})=C_{ji}=\mathrm{tr}(E_{ij}C). \tag{23.72}$$

显然, 为了使得(23.72)成立, C 被唯一确定.

2. 设 f 有第一问叙述的表达式, 注意到

$$\delta_{jk}f(E_{il})=f(E_{ij}E_{kl})=f(E_{kl}E_{ij})=\delta_{li}f(E_{kj}). \tag{23.73}$$

在(23.73)中取 $k\neq j, l=i$ 知 $f(E_{kj})=0\Rightarrow C_{jk}=0, \forall j\neq k$. 取 $k=j, l=i$ 知 $f(E_{ii})=f(E_{jj})\Rightarrow C_{ii}=C_{jj}$. 因此 C 是数量矩阵, 于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(A)=\lambda\mathrm{tr}(A), \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

来看 2025 年复旦大学的考研题.

例题 23.93 设 $\mathbb{K}$ 为数域且 $f:\mathbb{K}^{n\times n}\to\mathbb{K}$ 是线性映射. 若 $A\sim B\Rightarrow f(A)=f(B)$, 求所有可能的 f.

证明 由例题23.92得唯一的 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$f(A)=\operatorname{tr}(AC),\forall A\in\mathbb{K}^{n\times n}.$$

现在对任何可逆矩阵 $P\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 都有

$$f(A)=f\left(P^{-1}AP\right)=\operatorname{tr}\left(P^{-1}APC\right)=\operatorname{tr}\left(APCP^{-1}\right),\forall A\in\mathbb{K}^{n\times n}.$$

由 C 的唯一性得

$$PCP^{-1}=C\Rightarrow PC=CP.$$

由与所有矩阵可交换的矩阵是数量矩阵21.6得

$$C=aI_n,a\in\mathbb{C}\Rightarrow f(A)=a\operatorname{tr}(A),\forall A\in\mathbb{K}^{n\times n}.$$

例题 23.94 设线性映射 $f:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}$ 满足对任何半正定 Hermite 矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 都有 $f(A)\geqslant 0$. 证明: 存在半正定 Hermite 矩阵 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得

$$f(A)=\operatorname{tr}(AC),\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

证明 由例题23.92, 我们知道存在唯一的 $C=(c_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$f(A)=\operatorname{tr}(AC),\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

取半正定矩阵 $\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}\overline{x_1}x_1 & \overline{x_1}x_2 & \cdots & \overline{x_1}x_n\\ \overline{x_2}x_1 & \overline{x_2}x_2 & \cdots & \overline{x_2}x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \overline{x_n}x_1 & \overline{x_n}x_2 & \cdots & \overline{x_n}x_n\end{pmatrix}$, 我们有

$$f\left(\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\overline{x_i}\geqslant 0,$$

故 C 半正定 Hermite 矩阵.

在严格建立曲面积分的过程中, 会遇到如下命题.

例题 23.95 设 V 是 n 维实内积空间, 对 $1\leqslant k\leqslant n$, 证明存在唯一的 $f:\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{k个}\to\mathbb{R}$ 使得

(a):

$$f\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(k)}\right)=f(x_1,x_2,\cdots,x_k),\forall\sigma\in S_k,\tag{23.74}$$

这里 S_k 是 k 次对称群;

(b): 当 $i\neq j,c\in\mathbb{R}$, 用 x_i+cx_j 代替 x_i 不改变 f 的值;

(c): 当 $\lambda\in\mathbb{R}$ 有

$$f(x_1,\cdots,\lambda x_i,\cdots,x_k)=|\lambda|f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_k).\tag{23.75}$$

(d): 设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是标准正交集, 则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k)=1.\tag{23.76}$$

证明 唯一性: 断言对任何可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{k\times k}$ 必有

$$f(AP)=|\det P|\cdot f(A).\tag{23.77}$$

注意到可逆矩阵一定可分解为若干初等矩阵的积, 因此只需对 P 为初等矩阵验证(23.77). 由 $(a),(b),(c)$ 这是显然的.

事实上, 可考虑 A 列向量组的一个极大无关组, 则存在可逆矩阵 P 使得 AP 保留下极大无关组而其他列都变成 0. 此时由(23.75)知 $f(A)=0$. 若 A 列向量组线性无关, 由定理23.10我们知道存在唯一的 $Q\in\mathbb{R}^{n\times k},R\in\mathbb{R}^{k\times k}$, 这里 R 可逆, Q 列向量组是标准正交向量组[60]使得 $A=QR$, 于是由(23.77)知

$$f(A)=f(QR)=|\det R|\cdot f(Q)=|\det R|,$$

这就证明了唯一性.

存在性: 取定 V 的一组基 $\{\eta_j\}_{j=1}^n\subset V$, 设内积作为双线性函数在基 $\{\eta_j\}_{j=1}^n$ 上的度量矩阵为 C, 则考虑 $f(A)\triangleq\sqrt{\det(A^TCA)}$. 于是我们对可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{k\times k}$ 有

$$f(AP)=\sqrt{\det(P^TA^TCAP)}=\sqrt{\det(P^TP)}\cdot\sqrt{\det(A^TCA)}=|\det P|f(A).$$

特别的, 当 P 是初等矩阵, 正好有 $(a),(b),(c)$ 成立. 当 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是标准正交集, 即设 $A=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$, 我们由 $(x_i,x_j)=x_i^TCx_j=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,k$ 有 $A^TCA=E$, 因此此时有 $f(A)=1$. 这就验证了 (d) 成立.

例题 23.96* 确定 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上全部内导子, 即确定全部线性映射 $\delta:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\delta(AB)=\delta(A)B+A\delta(B),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}. \tag{23.78}$$

注一个证明方法为:

记 M 为满足题目条件的线性映射全体. 熟知 $\delta_A(X)=AX-XA,\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为满足(23.78)的线性映射. 我们来证明

$$\{\delta_A:A\in\mathbb{R}^{n\times n}\}=M. \tag{23.79}$$

事实上一方面显然有 $\{\delta_A:A\in\mathbb{R}^{n\times n}\}\subset M$ 且(23.79)左右都是线性空间.

另外一方面考虑 $T:A\mapsto\delta_A$, 则

$$A\in\ker T\Leftrightarrow\delta_A=0\Leftrightarrow AX=XA,\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

又与所有矩阵可交换的矩阵都是数量矩阵21.6, 我们知道 $\ker T$ 是全体数量矩阵, 从而由维数公式得

$$\dim\mathrm{Im}T=n^2-\dim\ker T=n^2-1.$$

于是(23.79)成立等价于

$$\dim M\leqslant n^2-1. \tag{23.80}$$

考虑 δ 在 E_{ij} 的作用可以确定(23.80), 证明见知乎.

证明 我们给出一个更代数的方法:

设 $P=E_{11}$, 我们由(23.78)有 $\delta(P)=\delta\left(P^2\right)=P\delta(P)+\delta(P)P$, 即

$$P\delta(P)P=P^2\delta(P)P+P\delta(P)P^2=P\delta(P)P+P\delta(P)P\Rightarrow P\delta(P)P=0.$$

注意到

$$\delta(P)+\{[P\delta(P)-\delta(P)P]P-P[P\delta(P)-\delta(P)P]\}=0,$$

于是用 $\delta+\delta_{P\delta(P)-\delta(P)P}$ 代替 δ 可不妨设 $\delta(P)=0$.

定义 $W_P\triangleq\{AP:A\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$, 显然 $\dim W_P=n$. 考虑

$$\tau:W_P\to W_P,AP\mapsto\delta(A)P.$$

由(23.78)知

$$AP=0\Rightarrow\delta(AP)=0=\delta(A)P\Rightarrow\tau(AP)=0,$$

从而 τ 是一个映射, 因此存在 W_P 上的线性变换 $\widetilde{h}$ 使得

$$\widetilde{h}(AP)=\delta(A)P,\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

[60]注意到依赖标准正交基.

现在继续由(23.78)知

$$\widetilde{h}(AXP)=\delta(AX)P=\delta(A)XP+A\delta(X)P=\delta(A)XP+A\widetilde{h}(XP),\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

即

$$\delta(A)(XP)=\left(\widetilde{h}\circ A\right)(XP)-\left(A\circ\widetilde{h}\right)(XP),\forall A,X\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

现在我们知道 $\delta=\delta_{\widetilde{h}}$, 这就证明了(23.79).

例题 23.97 设 $f(A)=\operatorname{tr}\left(AA^T\right),\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 若可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$f\left(PAP^{-1}\right)=f(A),\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

证明存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $P^TP=cE_n$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}f\left(PAP^{-1}\right)=f(A)&\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(PAP^{-1}P^{-T}A^TP^T\right)=\operatorname{tr}\left(AA^T\right)\\&\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(P^TPA\left(P^TP\right)^{-1}A^T\right)=\operatorname{tr}\left(AA^T\right)\\&\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(CAC^{-1}A^T\right)=\operatorname{tr}\left(AA^T\right),C=P^TP.\end{aligned}$$

现在记 C 的 (i,j) 元为 c_{ij}, C^1 的 (i,j) 元为 d_{ij}. 取 $A=E_{ij}$, 我们有

$$\operatorname{tr}\left(CAC^{-1}A^T\right)=\operatorname{tr}\left(E_{ji}CE_{ij}C^{-1}\right)=\operatorname{tr}\left(c_{ii}E_{jj}C^{-1}\right)=c_{ii}d_{jj}=1.$$

再取 $A=E_{ij}+E_{kl}$ 得

$$2+2c_{ki}d_{jl}=2+2\delta_{jl}\delta_{ik}.$$

令 $l=j,k\neq i$ 得

$$c_{ki}d_{jj}=0\Rightarrow c_{ki}=0\Rightarrow C\text{是对角矩阵}.$$

由 $c_{ii}d_{jj}=1,i,j=1,2,\cdots,n$ 知 C 是数量矩阵, 我们完成了证明.

例题 23.98 设 $m,n\in\mathbb{N}$ 且 $f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{m\times m}$ 满足

1. $f(E_n)=E_m$;
2. $f(AB)=f(A)f(B),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$;
3. $f(A+B)=f(A)+f(B),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

证明 f 单射且 $n|m$.

引理 23.15

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 n 阶幂等矩阵, 则 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$. ♡

证明 引理证明. 注意到 A 的极小多项式整除 x^2-x, 故 A 可对角化. 不妨设 A 是对角矩阵就可以直接得出.

证明 **Step 1**

由域上矩阵环是单环23.89知 f 作为环同态有 $\ker f=0$ 或者 $\ker f=\mathbb{R}^{n\times n}$. 因为 $f(E_n)=E_m$, 所以 $\ker f=0$, 从而 f 是单同态, 也是单射.

Step 2

由 $E_m=f\left(AA^{-1}\right)=f(A)f\left(A^{-1}\right)$ 知 $f\left(A^{-1}\right)=[f(A)]^{-1}$. 显然 $f\left(A^k\right)=f^k(A),\forall k\in\mathbb{N}$. 容易验证 $A\sim B$ 我们有 $f(A)\sim f(B)$.

注意到 $f(E_{ii}),i=1,2,\cdots,n$ 是两两相似的幂等矩阵且 $E_m=\sum_{i=1}^{n}f(E_{ii})$, 我们利用引理23.15有

$$m=\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}f(E_{ii})\right)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}(f(E_{ii}))=n\operatorname{rank}[f(E_{11})],$$

这就证明了 $n|m$.

来看一个南京大学考研, 大学生数学竞赛真题.

例题 23.99 设 $\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

1. $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$;
2. $\phi(0)=0$, 且存在秩 1 矩阵 W 使得 $\phi(W)\neq 0$.

证明存在可逆矩阵 $R\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1},\forall i,j=1,2,\cdots,n. \tag{23.81}$$

注本题对一切数域都成立.

证明 首先注意到设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且秩一样, 则存在可逆矩阵 $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $PAQ=B$. 则

$$\operatorname{rank}(\phi(B))=\operatorname{rank}(\phi(PAQ))=\operatorname{rank}(\phi(P)\phi(A)\phi(Q))\leqslant\operatorname{rank}(\phi(A)).$$

对称的有 $\operatorname{rank}(\phi(A))\leqslant\operatorname{rank}(\phi(B))$. 这就证明了 $\phi(A),\phi(B)$ 秩是相同的.

证明的想法是类比相似矩阵的定理的证明. 我们待定 $R=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$. 等式(23.81)等价于

$$\phi(E_{ij})(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)E_{ij}=\left(0,\cdots,\underbrace{v_i}_{\text{第}j\text{个位置}},\cdots,0\right).$$

我们的目标转化为寻求一组基 v_k 使得

$$\phi(E_{ij})v_k=\delta_{kj}v_i. \tag{23.82}$$

特别的, 在(23.82)中考虑 $i=j=k$, 则需要的是

$$\phi(E_{ii})v_i=v_i,i=1,2,\cdots,n.$$

在恒等式(23.69)中取 $A=E$, 我们知道 $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$, $\phi\left(E_{ii}^2\right)=\phi(E_{ii})=\phi^2(E_{ii})$, 即 $\phi(E_{ii})$ 是幂等矩阵. 注意到 E_{ii} 的秩为 1, 于是有

$$\operatorname{rank}(\phi(E_{ii}))=\operatorname{rank}(\phi(W))>0,$$

即 $\phi(E_{ii})$ 有特征值 1. 现在就可以取 v_i 是 $\phi(E_{ii})$ 属于特征值 1 的特征向量. 问题变为如此取的 v_i 是否满足(23.82)?

如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_iv_i=0$, 则

$$\phi(E_{kk})\left(\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\right)=0=c_k\phi(E_{kk})v_k=c_kv_k\Rightarrow c_k=0,$$

即 $v_i,i=1,2,\cdots,n$ 线性无关.

注意到当 $k\neq j$, 有

$$\phi(E_{ij})v_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})v_k=0.$$

当 $k=j$, 有

$$\phi(E_{ik})v_k=\phi(E_{ik})\phi(E_{kk})v_k=\phi(E_{ik})v_k,$$

这并没有用处, 因此我们需要改造 v_i.

现在设 $\phi(E_{ij})v_j=t_1v_1+t_2v_2+\cdots+t_nv_n$ 并取 $k\neq i$, 则有

$$\phi(E_{kk})\phi(E_{ij})v_j=t_k\phi(E_{kk})v_k=t_kv_k=0\Rightarrow t_k=0.$$

于是可设 $\phi(E_{ij})v_j=r_{ij}v_i$. 我们待定非 0 的 $c_i\in\mathbb{R}$, 注意 c_iv_i 仍然是 $\phi(E_{ii})$ 特征值 1 对应的特征向量, 所以之前推导的性质并没有改变. 现在期望 $\phi(E_{ij})c_jv_j=c_iv_i$, 即 $r_{ij}=\frac{c_i}{c_j}$. 那么 r_{ij} 能否表示为这种形式呢? 这诱使我们继续考虑 r_{ij} 的样子.

注意到

$$\phi(E_{il})\phi(E_{lj})v_j=\phi(E_{il})r_{lj}v_l=r_{il}r_{lj}v_i=r_{ij}v_i\Rightarrow r_{ij}=r_{il}r_{lj},$$

即 $r_{ij}=\frac{r_{il}}{r_{jl}}$. 于是问题转化为是否存在 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $r_{il}\neq 0,\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

事实上一定存在, 若不然, 则对任何 $l\in\{1,2,\cdots,n\}$, 存在 $i_l\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $r_{i_ll}=0$. 于是对任何 $i.j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 我们有 $r_{ij}=r_{ii_l}r_{i_ll}r_{lj}=0$, 这不可能! 现在我们就证明了存在可逆矩阵 $R\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使

得(23.81)成立.

例题 23.100 求全部满射 $f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ 使得

$$f(XY)\leqslant\min\{f(X),f(Y)\},\forall X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}. \tag{23.83}$$

证明 取 $Y=E_n$, 利用(23.83), 我们有

$$f(X)\leqslant\min\{f(X),f(E_n)\}.$$

于是我们知道 $f(X)\leqslant f(E_n)$. 现在取 X 是可逆矩阵, 则利用(23.81)知

$$f\left(X\cdot X^{-1}\right)\leqslant\min\left\{f(X),f\left(X^{-1}\right)\right\}\Rightarrow f(E_n)\leqslant f(X),$$

从而

$$f(X)=f(E_n),\forall\text{可逆实矩阵}X.$$

对任何可逆 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和一般的矩阵 $Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 继续应用(23.83), 我们有

$$f(Y)\geqslant f(XY)\geqslant f\left(X^{-1}XY\right)=f(Y)\Rightarrow f(Y)=f(XY).$$

类似我们得到 $f(Y)=f(YX)$.

现在 f 不随矩阵秩的改变而改变. 我们记

$$J_k=\begin{pmatrix}E_k&0\\0&0\end{pmatrix},k\in\{0,1,2,\cdots,n\}.$$

结合(23.83)知

$$f(J_k)=f(J_kJ_{k+1})\leqslant f(J_{k+1}),\forall k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

又 f 是满射, 于是只能有

$$f(J_k)=k,k=0,1,2,\cdots,n,$$

这就证明了 $f(X)=\mathrm{rank}X$.

例题 23.101 设 $A_{ij}\in\mathbb{C}^{n\times n},i,j=1,2,3,\cdots,n$ 是非 0 矩阵且

$$A_{ik}A_{lj}=\begin{cases}A_{ij},&k=l\\0,&k\neq l\end{cases}.$$

证明: 存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}A_{ij}P=E_{ij},i,j=1,2,3,\cdots,n.$$

证明 定义

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}E_{ij}\right)\triangleq\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}A_{ij},$$

然后

$$\begin{aligned}
&\phi\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}E_{ij}\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{i'j'}E_{i'j'}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{ij}c_{i'j'}\phi(E_{ij}E_{i'j'})\\
&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{ij}c_{i'j'}\delta_{ji'}\phi(E_{ij'})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{ij}c_{i'j'}\delta_{ji'}A_{ij'}\\
&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{ij}c_{i'j'}A_{ij}A_{i'j'}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{ij}c_{i'j'}\phi(E_{ij})\phi(E_{i'j'})\\
&=\phi\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}E_{ij}\right)\cdot\phi\left(\sum_{i'=1}^n\sum_{j'=1}^n c_{i'j'}E_{i'j'}\right).
\end{aligned}$$

注意到 $\phi(0)=0,\phi(E_{ij})\neq 0$, 于是由例题23.99知存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}A_{ij}P=P^{-1}\phi(E_{ij})P=E_{ij},i,j=1,2,3,\cdots,n.$$

例题 23.102 设 X,Y 是复线性空间, $T:X\to Y$ 是实线性映射, 证明: 存在唯一的复线性映射 $T_1:X\to Y$ 和复共轭线性映射 $T_2:X\to Y$ 使得 $T=T_1+T_2$.

注

1. 实线性映射:
$$T(ax_1+bx_2)=aTx_1+bTx_2,\forall a,b\in\mathbb{R},x_1,x_2\in X.$$
2. 复线性映射:
$$T(ax_1+bx_2)=aTx_1+bTx_2,\forall a,b\in\mathbb{C},x_1,x_2\in X.$$
3. 共轭复线性映射:
$$T(ax_1+bx_2)=\overline{a}Tx_1+\overline{b}Tx_2,\forall a,b\in\mathbb{C},x_1,x_2\in X.$$

笔记 [*] 这个看似普通的习题背后蕴含着复分析的巨大的道理.

证明 设 T_1 是复线性映射, T_2 是复共轭线性映射使得 $T=T_1+T_2$. 于是

$$\begin{cases}T(ix)=iT_1(x)-iT_2(x), & \forall x\in X\\ T(x)=T_1(x)+T_2(x), & \forall x\in X\end{cases}.$$

现在解出

$$T_1(x)=\frac{T(ix)+iT(x)}{2i},T_2(x)=\frac{iT(x)-T(ix)}{2i},\forall x\in X.$$

容易验证上式定义的 T_1,T_2 的确为所求映射.

例题 23.103* 考虑复系数多项式

$$f(x_{11},\cdots,x_{1n},x_{21},\cdots,x_{2n},x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nn})$$

满足

1. f 在 $\mathbb{C}$ 上不可约且非常值;
2. $$f(AB)=f(BA),\forall A,B\in\mathbb{C}^{n\times n};$$
3. 对任何可逆对角矩阵 $D\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 $f(D)\neq 0$;
4. $f(I_n)=1$.

证明:

$$f(A)=\det A,\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

证明 首先看到一些基本事实:

1. f 和 det 都是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的连续函数且由定理23.41知可对角化复 n 阶矩阵在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 稠密;
2. f 在相似下不变, 即设可逆 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 我们有
$$f\left(P^{-1}AP\right)=f\left(APP^{-1}\right)=f(A),\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

3. 因为 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 交换对角线排列顺序是相似的, 所以关于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的多项式

$$f\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)$$

是轮换对称的, 所以由对称多项式基本定理得存在多项式 g 使得

$$g\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\right)=f\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right),$$

这里 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的初等对称多项式;

4. g 是非常值的, 否则由 g 在全部对角矩阵上为常值函数可以导出 f 也是常值函数;
5. 对 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$ 有 $g\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)\neq 0$.

为说明 g 不可约, 我们首先证明

$$f\left(A\right)=g\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\right),\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n},\tag{23.84}$$

这里 σ_k 是矩阵 A 的所有 k 阶主子式的和. 我们知道这里的 σ_k 在 A 为对角矩阵时和之前的定义是一致的. 现在式(23.84)在 A 为对角矩阵时成立, 由稠密性得式(23.84)对一切矩阵 A 都成立.

现在由(23.84)知 g 可约自然给出 f 可约, 这就是一个矛盾!, 从而 g 不可约!.

我们写

$$g\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\right)=\sum_{j=0}^{k}h_j\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1}\right)\sigma_n^j,$$

这里由于 g 非常值, 所以 $k\geqslant 1$ 且 h_k 不是零多项式. 我们来证明 h_0 不是零多项式.

若不然, 注意到非常系数多元多项式在非空开集上为 0 则恒为 0, 即定理23.39, 我们考虑非空开集

$$\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^{n-1}:h_k\left(\mathbf{x}\right)\neq 0\right\}.$$

此时 h_0 在这个开集上必然不恒为 0. 现在我们可以找到 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^{n-1}$ 使得

$$h_k\left(\mathbf{x}'\right)\neq 0,h_0\left(\mathbf{x}'\right)\neq 0.$$

现在非常数一元多项式 $g\left(\mathbf{x}',\cdot\right)$ 必有零点 t, 即 $g\left(\mathbf{x}',t\right)=0$. 由条件得

$$0=g\left(\mathbf{x}',0\right)=h_0\left(\mathbf{x}'\right),$$

这就是一个矛盾!, 至此我们知道 $h_0\equiv 0$, 此时

$$g=\sigma_n\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}h_j\left(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1}\right)\sigma_n^{j-1}\right).$$

因为 g 不可约, 我们只能有 $g=c\sigma_n$, 于是

$$g\left(1,1,\cdots,1\right)=1\Rightarrow g=\sigma_n.$$

现在我们知道 $f\left(A\right)=\det A$ 对 A 为复对角矩阵成立, 由稠密性知对一切复矩阵 A 都成立.

例题 23.104 $\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{K}\right)$ 是单 Lie 代数 设 $\mathbb{K}$ 是数域, 考虑

$$\mathfrak{sl}_n\left(\mathbb{K}\right)\triangleq\left\{A\in\mathbb{K}^{n\times n}:\operatorname{tr}\left(A\right)=0\right\},[A,B]\triangleq AB-BA,A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}.$$

设 $V\subset\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ 是线性子空间且满足

$$[A,B]\in V,\forall A\in V,B\in\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}).$$

证明 $V=\{0\}$ 或者 $V=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

注 回忆迹 0 矩阵空间的一组基为

$$E_{ij},i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,E_{11}-E_{ii},i=2,3,\cdots,n.$$

笔记 本结果有这样的应用: 设线性映射 $f:\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})\to\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ 满足

$$f([A,B])=[f(A),f(B)],$$

则要么 $f=0$, 要么 f 是线性同构. 这是因为 $\ker f$ 就是满足本题条件的 V.

证明 假设 $V\neq\{0\},n\geqslant 2,X=(x_{ij})\in V\setminus\{0\}$.

Case 1 若 X 有某个 $x_{ji}\neq 0,i\neq j$, 则直接计算得

$$[[X,E_{ij}],E_{ij}]=-2x_{ji}E_{ij}\in V\Rightarrow E_{ij}\in V.$$

然后

$$[[E_{ij},E_{ji}],E_{ji}]=-2E_{ji}\in V\Rightarrow E_{ji}\in V.$$

对 $k\neq i,j$, 我们有

$$[E_{ij},E_{jk}]=E_{ik}\in V.$$

类似的 $E_{ki}\in V$. 现在我们看到通过 $E_{ij}\in V$ 可以推出第 i 行和第 j 行的所有非对角元的 E_{st} 都落在 V, 那么反复这个操作就能得到

$$E_{st}\in V,\forall s\neq t,1\leqslant s,t\leqslant n.$$

又

$$[E_{st},E_{ts}]=E_{ss}-E_{tt}\in V,\forall s\neq t,1\leqslant s,t\leqslant n,$$

这样我们就证明了 V 包含 $\mathfrak{sl}_n$ 空间的基, 此时就有 $V=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

Case 2 若

$$X=\operatorname{diag}\{x_{11},x_{22},\cdots,x_{nn}\}\in V\setminus\{0\},$$

则 X 对角元必然有 $i\neq j$ 使得两个 $x_{ii}\neq x_{jj}$. 现在

$$[X,E_{ij}]=XE_{ij}-E_{ij}X=(x_{ii}-x_{jj})E_{ij}\in V\Rightarrow E_{ij}\in V,$$

此时就回到了 **Case 1**. 至此我们完成了证明.

引理 23.16

设 $\mathbb{K}$ 是一个数域, $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 满足

$$\det(A+X)=\det(B+X),\forall X\in\mathbb{K}^{n\times n},$$

则 $A=B$.

证明 取 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得[61]

$$r(B-A+C)=n,r(C)+r(B-A)=n.$$

然后

$$\det C=\det(A+C-A)=\det(B+C-A)\neq 0.$$

现在

$$r(B-A)=0\Rightarrow A=B,$$

[61] $B-A$ 的列空间取一个补空间, 补空间的基就是 C 的列向量组.

这就完成了证明.

引理 23.17

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是秩为 $k\in\mathbb{N}_0$ 的矩阵, $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, 则至多存在 k 个不同的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $X+\lambda A$ 是奇异的. ♡

证明 只需要考虑 $\det(X+\lambda A)=0$ 不同解个数. 显然这在做等价下不变, 因此不妨设

$$A=\operatorname{diag}\{I_k,0\},X=\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix},X_1\in\mathbb{C}^{k\times k}.$$

现在

$$\det(X+\lambda A)=\det\left(\begin{pmatrix}X_1+\lambda I_k&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}\right)$$

是至多 k 次多项式, 这就证明了至多存在 k 个不同的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $X+\lambda A$ 是奇异的.

例题 23.105 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$\det(A\circ X)=\det(X),\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{23.85}$$

证明: 存在

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$$

使得

$$\prod_{i=1}^n u_i\cdot\prod_{i=1}^n v_i=1,A=uv^T.$$

并且说明这是 A 应该满足(23.85)的充要条件.

证明 设 $X=(x_{ij}),A=(a_{ij}),S_n$ 为 n 次对称群. 于是

$$\begin{aligned}\det(A\circ X)&=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}\prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}=\det(X).\end{aligned}$$

两边对比系数得

$$\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}=1,\forall\sigma\in S_n.$$

现在所有 $a_{ij}\neq0$, 于是可取 σ 为恒等变换和对换得

$$\prod_{i=1}^n a_{ii}=1,a_{ii}a_{jj}=a_{ij}a_{ji},\forall i\neq j.$$

现在 A 的所有 2 阶子式为 0, 即 A 是秩 1 矩阵, 于是存在

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$$

使得

$$a_{ij}=u_iv_j,i,j=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\prod_{i=1}^{n} u_i \prod_{i=1}^{n} v_i = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = 1.$$

反过来, 如果

$$\prod_{i=1}^{n} u_i \prod_{j=1}^{n} v_j = 1, A = uv^T,$$

则对任何 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都有

$$\begin{aligned}\det(A\circ X) &= \det\left(\begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n \end{pmatrix}\right)\cdot \det(X)\cdot \det\left(\begin{pmatrix} v_1 & & & \\ & v_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n \end{pmatrix}\right)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} u_i \prod_{j=1}^{n} v_j\right)\cdot \det(X) = \det(X),\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 23.106* 设 $\phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 是线性映射且满足

$$\det\phi(A) = \det A, \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

证明: 存在满足 $\det(MN) = 1$ 的 $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\phi(A) = MAN, \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

或者

$$\phi(A) = MA^TN, \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

注 回忆保可逆矩阵的线性映射几乎是保行列式的, 即例题23.50.

证明 **Step 1**

设 $\phi(A) = 0$, 则

$$\phi(A+B) = \phi(0+B), \forall B \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

由引理23.16得 $A = 0$, 即 ϕ 是单射, 从而 ϕ 也是满射.

Step 2

对 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 因为 ϕ 满射, 所以可取可逆矩阵 $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$U\phi(A)V = \operatorname{diag}\{I_\ell, 0\}, U\phi(B)V = \operatorname{diag}\{1, 2, \cdots, n\}.$$

计算得

$$\det(B+\lambda A) = \det(\phi(B)+\lambda\phi(A)) = \frac{1}{\det(UV)}\cdot \begin{vmatrix} 1+\lambda & & & & & & \\ & 2+\lambda & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ell+\lambda & & & \\ & & & & \ell+1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & n \end{vmatrix}.$$

注意到上式右边有 ℓ 个不同的根, 所以引理23.17我们知道

$$r(A) \geqslant \ell = r(\phi(A)).$$

因为 ϕ 是可逆的, 所以对 ϕ^{-1} 用一次就得到

$$r\left(\phi^{-1}(A)\right) \leqslant r(A), \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

现在我们知道了 ϕ 保持矩阵秩不变.

Step 3

设 P 是秩 $k \in \mathbb{N}$ 投影算子, 则

$$\phi(P) + \phi(I-P) = I,$$

即由例题23.42知 $\phi(P)$ 也是秩 k 投影算子.

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的基, P_i 是到 e_i 的投影算子, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(P_i) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right) = I.$$

由例题23.77知

$$\phi(P_i)\phi(P_j) = 0, \forall i \neq j.$$

此时我们知道

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}\phi(P_1) \oplus \mathrm{Im}\phi(P_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\phi(P_n).$$

取

$$y_i \in \mathrm{Im}\phi(P_i) \setminus \{0\}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

然后令 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$Q(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

于是

$$\phi(y_i)Q(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (0, \cdots, y_i, \cdots, 0) = Q(0, \cdots, e_i, \cdots, 0), i = 1, 2, \cdots, n.$$

此时考虑

$$\widetilde{\phi}: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, A \to Q^{-1}\phi(A)Q$$

代替 ϕ, 我们知道可以不妨设

$$\phi(P_i) = P_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

换言之 ϕ 保持对角矩阵不变.

Step 4

对 $i \neq j, \lambda \in \mathbb{C}$, 我们有

$$\phi(E_{ij} + \lambda E_{ii}) = \phi(E_{ij}) + \lambda E_{ii}$$

是秩 1 矩阵. 考虑上式右边矩阵所有可能的二阶子式, 只要 $\phi(E_{ij})$ 非 i 行和列有一个非 0, 那么总可以得到一个二阶非 0 子式, 这就是矛盾!, 因此 $\phi(E_{ij})$ 只能在在 i 行或者 i 列非 0. 同样的考虑 $\phi(E_{ij} + \lambda E_{jj})$ 得 $\phi(E_{ij})$ 只能在在 j 行或者 j 列非 0. 至此我们证明了存在非 0 的 $a_{ij}, i \neq j$ 使得

$$\phi(E_{ij}) = a_{ij}E_{ij}, \phi(E_{ij}) = a_{ij}E_{ji}$$

必有一个发生.

若

$$\phi(E_{ij}) = a_{ij}E_{ij}, \phi(E_{ik}) = a_{ik}E_{ki}, i \neq j, k \neq i,$$

我们有

$$\phi(E_{ij} + E_{ik}) = a_{ij}E_{ij} + a_{ik}E_{ki},$$

这里左边是秩 1, 右边是秩 2 而矛盾!, 即同一行发生的情况是一致的. 类似的知道同一列发生的情况是类似的, 至

此我们知道

$$\phi(E_{ij})=a_{ij}E_{ij},\phi(E_{ij})=a_{ij}E_{ji}$$

当 i,j 变化时只能有前或者后同一种发生，此时两种 ϕ 差一个转置，因此我们不妨设为前一种.

Step 5

现在由例题23.105我们知道可以写

$$a_{ij}=u_iv_j,i,j=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$1=u_iv_i,i=1,2,\cdots,n.$$

这就可以看出

$$\phi(X)=\begin{pmatrix}u_1&&&\\&u_2&&\\&&\ddots&\\&&&u_n\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}u_1&&&\\&u_2&&\\&&\ddots&\\&&&u_n\end{pmatrix}^{-1},\forall X\in\mathbb{C}^{n\times n},$$

因此我们得到了证明.

23.5.2 矩阵空间维数极值

例题 23.107 求 n 阶实幂零矩阵构成线性空间的最大维数.

证明 注意到 $\{E_{ij}:1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 张成的空间为一个满足题目条件的空间且其维数为 $\frac{n^2-n}{2}$，下证这也是可能的最大维数.

注意到全体非 0 实对称矩阵不是幂零的且全体实对称矩阵维数为 $\frac{n^2+n}{2}$，因此实对称矩阵空间和幂零矩阵构成线性空间之和是直和，所以幂零矩阵构成线性空间的维数小于等于 $n^2-\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^2-n}{2}$，这就完成了证明.

例题 23.108 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间 X 满足 $\operatorname{tr}(AB)=0,\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$，求 X 可能的最大维数.

证明 断言对大可能维数为 $\frac{n^2-n}{2}$. 首先考虑 X 为全体上三角幂零矩阵，则 $\dim X=\frac{n^2-n}{2}$ 且满足题目要求.

对满足题目条件的 X，若 $\dim X>\frac{n^2-n}{2}$. 注意到全体实对称矩阵为 $\frac{n^2+n}{2}$ 维，故计算维数知 X 中必然含有一个非 0 实对称矩阵 A，于是 $\operatorname{tr}(A^2)=0$. 现在对角化就只能有 $A=0$，矛盾!，这就完成了证明.

例题 23.109 设 M 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间且 $A^TA=AA^T,\forall A\in M$，求 M 的最大可能的维数.

笔记 因为 $\left\{\sum_{i=1}^n c_iv_i:c_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n\right\}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上线性空间为

$$\left\{\sum_{i=1}^n a_iv_i+\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n b_iv_i:a_i,b_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

注意到

$$\dim_{\mathbb{C}}M\geqslant\frac{n(n+1)}{2}+1\Rightarrow\dim_{\mathbb{R}}M\geqslant n(n+1)+2,$$

这里 $\dim_{\mathbb{R}}$ 表示视为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间维数，$\dim_{\mathbb{C}}$ 表示视为 $\mathbb{C}$ 上线性空间维数.

证明 假设 M 是一个满足题目条件的子空间且 $\dim_{\mathbb{C}}M\geqslant\frac{n(n+1)}{2}+1$. 记

$$S=\{A+iB:A,B\in\mathbb{R}^{n\times n},A是幂零上三角矩阵,B是幂零下三角矩阵.\}.$$

我们知道

$$\dim_{\mathbb{R}}S=\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2-n,$$

以及

$$\dim_{\mathbb{R}}S+\dim_{\mathbb{R}}M\geqslant 2n^2+2>2n^2.$$

从而我们知道存在 $A+iB\in S\bigcap M, A, B$不全为0. 注意到

$$(A+iB)^T(A+iB)=(A+iB)(A+iB)^T\Rightarrow A^TA-B^TB=AA^T-BB^T,$$

即 $A^TA+BB^T=B^TB+AA^T$. 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}b_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}+\sum_{k=1}^{n}b_{ki}b_{kj}.$$

注意到 A 是幂零上三角矩阵, B 是幂零下三角矩阵, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\min\{i,j\}-1}a_{ki}a_{kj}+\sum_{k=1}^{\min\{i,j\}-1}b_{ik}b_{jk}=\sum_{k=\max\{i,j\}+1}^{n}a_{ik}a_{jk}+\sum_{k=\max\{i,j\}+1}^{n}b_{ki}b_{kj}.$$

考虑 $i=j$, 有

$$\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}^2+\sum_{k=1}^{i-1}b_{ik}^2=\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}^2+\sum_{k=i+1}^{n}b_{ki}^2. \tag{23.86}$$

考虑 $i=1$, 有

$$\sum_{k=2}^{n}a_{1k}^2+\sum_{k=2}^{n}b_{k1}^2=0\Rightarrow A第一行全为0, B第一列全为0.$$

此时(23.86)变为

$$\sum_{k=2}^{i-1}a_{ki}^2+\sum_{k=2}^{i-1}b_{ik}^2=\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}^2+\sum_{k=i+1}^{n}b_{ki}^2.$$

考虑 $i=2$, 则

$$\sum_{k=3}^{n}a_{2k}^2+\sum_{k=3}^{n}b_{k2}^2=0\Rightarrow A第二行全为0, B第二列全为0.$$

这种操作显然可以一直持续下去, 这就证明了 $A=B=0$, 这就是一个矛盾!

现在可取 $M=\left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:A^T=A\right\}$, 此时 $\dim_{\mathbb{C}}M=\frac{n^2+n}{2}$, 因此可能的最大维数为 $\frac{n^2+n}{2}$.

例题 23.110 设 $\mathbb{F}$ 是一个域且 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 有一个非 0 子空间, 其中非 0 元素都可逆, 证明这个子空间维数小于等于 n. 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 且 n 为奇数, 则这个子空间维数只能是 1.

证明 任何 $n+1$ 个这个子空间的矩阵的第一列必然线性相关, 从而考虑使得这组列向量线性组合为 0 的不全为 0 的系数. 此时这 $n+1$ 个矩阵在这组系数下线性组合的矩阵的第一个列向量为 0, 这和其必须可逆矛盾! 因此这个子空间维数小于等于 n.

当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 且 n 为奇数, 注意到奇数次实系数多项式必有根, 不妨设这个子空间含有单位矩阵 E, 否则同时做一个等价即可. 如果这个子空间还有其他非 0 矩阵 A, 取 c 是 A 实特征值, 考虑 $cE-A$ 必有 0 特征值. 于是 $A=cE$, 这就证明了这个子空间维数只能是 1.

例题 23.111 如果 M 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个子空间且 M 中的非 0 矩阵都可逆, 则 M 的最大维数是多少?

笔记 如果 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 改成 $\mathbb{R}^{n\times n}$, 本题是一个钓鱼题, 结果是把 n 写成 $n=2^{4a+b}c, 0\leqslant b\leqslant 3, c$是奇数, 则最大维数是 $8a+2^b$.

证明 断言最大维数维为 1. 维数为 1 的例子显然存在.

不妨设满足题目要求的 M 含有 E, 否则做一个等价即可. 注意到 $\lambda E+A, \forall$非数量矩阵$A\in M, \lambda\in\mathbb{C}$ 都是可逆的, 这不可能. 故 A 只能是数量矩阵, 于是我们证明了 $\dim M\leqslant 1$. 这就完成了证明.

例题 23.112 设 n 维线性空间 V 的对偶空间 V^* 的一个子空间为 S, 则

$$\dim S+\dim S^{\perp}=\dim V,$$

这里

$$S^{\perp}\triangleq\left\{x\in V:f(x)=0, \forall f\in S\right\}.$$

证明 取 S 的一个基 $f_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,i=1,2,\cdots,s$. 注意到 $\dim S^{\perp}$ 就是线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,i=1,2,\cdots,s$ 解空间的维数且 $s=\dim S$ 是系数矩阵的秩, 所以由线性方程组的解空间的维数公式知 $n=s+\dim S^{\perp}$, 这就完成了证明.

例题 23.113* 设 M 是一个 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间且 $r(A)\leqslant r,\forall A\in M$, 证明 M 的最大维数为 rn.

笔记 实际考试中会以一个确定的 r 来叙述, 例如 $r=1$, 或者 $r=n-1$. 此时也可以等价叙述为不可逆矩阵空间最大维数.

证明 **Method 1**

考虑 $E_{ij},1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant n$ 张成的空间, 这个空间为一个满足题目条件的例子且秩为 rn.

设 M 是满足题目条件的一个子空间, 不妨设 M 包含 $A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 否则做一个等价即可. 接下来考虑 M 中其他的矩阵会长什么样子. 考虑 $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\in M$, 注意到 $tA+B\in M,\forall t\in\mathbb{C}$. 从而 $\begin{pmatrix}tE_r+B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$ 所有 $r+1$ 阶子式为 0, 因此对 B_{22} 中每一个元素 b, 以及所在行列属于 B_{12},B_{21} 的向量 β^T,α, 都有

$$\begin{vmatrix}tE_r+B_{11}&\alpha\\\beta^T&b\end{vmatrix}=0. \tag{23.87}$$

注意到由加边行列式23.9.4和(23.87), 我们有

$$\begin{vmatrix}tE_r+B_{11}&\alpha\\\beta^T&b\end{vmatrix}=|tE_r+B_{11}|\,b-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}(tE_r+B_{11})_{ij}\,\alpha_i\beta_j=0,\forall t\in\mathbb{C}.$$

注意到 $(tE_r+B_{11})_{ij}$ 是不超过 $r-1$ 次的多项式. $|tE_r+B_{11}|$ 是关于 t 的首 1 的 r 次多项式, 于是 $b=0$ 且 $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r}(tE_r+B_{11})\,\alpha_i\beta_j=0$. 再注意到 $(tE_r+B_{11})_{ij}$ 满足当 $i=j$ 时才是 $r-1$ 次多项式, $i\neq j$ 时只是关于 t 的 $r-2$ 次多项式, 于是

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\alpha_i\beta_i=0\Rightarrow\beta^T\alpha=0,$$

这就给出了 M 中的矩阵形如 $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&0\end{pmatrix},B_{21}B_{12}=0.$

现在对 $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&0\end{pmatrix}\in M$, 由 $B+C\in M$ 知

$$(B_{21}+C_{21})(B_{12}+C_{12})=0\Rightarrow B_{21}C_{12}+C_{21}B_{12}=0. \tag{23.88}$$

既然前面 r 行是自由的, 为了确定 M 的维数, 考虑线性映射

$$f:M\to\mathbb{C}^{r\times n},\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\end{pmatrix},$$

则

$$\ker f=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\B_{21}&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}0&0\\B_{21}&0\end{pmatrix}\in M\right\}.$$

再考虑

$$g:\ker f\to\left(\mathbb{C}^{r\times n}\right)^*,\begin{pmatrix}0&0\\B_{21}&0\end{pmatrix}\mapsto\operatorname{tr}(B_{21}X_{12}),\forall X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{r\times n}.$$

如果

$$\operatorname{tr}(B_{21}X_{12})=0,\forall X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{r\times n},$$

可取 $X_{12}=B_{21}^*$, 于是由 $\operatorname{tr}(B_{21}B_{21}^*)=0$ 和例题21.17, 我们有 $B_{21}=0$. 这就给出了 $\ker g=0$, 从而

$$\dim\ker f=\dim g(\ker f). \tag{23.89}$$

又继续用维数公式有

$$\dim M=\dim\ker f+\dim f(M). \tag{23.90}$$

利用例题23.112, 我们可得

$$\dim g(\ker f)+\dim[g(\ker f)]^{\perp}=\dim\left(\mathbb{C}^{r\times n}\right)^{*}=rn, \tag{23.91}$$

这里

$$[g(\ker f)]^{\perp}=\left\{X\in\mathbb{C}^{r\times n}:g(B)(X)=0,\forall B\in\ker f\right\}.$$

再证

$$f(M)\subset[g(\ker f)]^{\perp}. \tag{23.92}$$

对任何 $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&0\end{pmatrix}\in M$, 现在要证明

$$g(C)(f(B))=0,\forall C=\begin{pmatrix}0&0\\C_{21}&0\end{pmatrix}\in\ker f\subset M. \tag{23.93}$$

注意到

$$g(C)(f(B))=\operatorname{tr}(C_{21}B_{12})\overset{(23.88)}{=}0,$$

这就给出了(23.93), 从而得到了(23.92).

现在回忆(23.89), (23.90)和(23.91)并结合(23.92), 我们就得到了

$$rn\geqslant\dim\ker f+\dim f(M)=\dim M.$$

故所求 M 可能的最大维数为 rn.

Method 2

不妨设 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\in M$, 否则做一个同时等价即可. 考虑

$$U\triangleq\left\{\begin{pmatrix}0&C\\C^{*}&B\end{pmatrix},C\in\mathbb{C}^{r\times(n-r)},B\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}\right\},$$

我们有 $\dim U=n^2-nr$. 设 $\begin{pmatrix}0&C\\C^{*}&B\end{pmatrix}\in U\bigcap M$, 我们有

$$\begin{pmatrix}tI_r&C\\C^{*}&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}tI_r&C\\0&B-\frac{1}{t}C^{T}C\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}tI_r&0\\0&B-\frac{1}{t}C^{*}C\end{pmatrix},\forall t>0.$$

于是

$$B-\frac{1}{t}C^{*}C=0,\forall t>0\Rightarrow B=0,C^{*}C=0.$$

由命题21.17得 $C=0$, 因此

$$U\oplus M\subset\mathbb{C}^{n\times n}\Rightarrow n^2-nr+\dim M\leqslant n^2\Rightarrow\dim M\leqslant nr.$$

取等条件成立的例子同 **Method 1**.

例题 23.114 求 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的维数最大的子空间 M, 使得 M 中矩阵可以在 $\mathbb{R}$ 上相似对角化.

证明 记 M_0 为全体 n 阶实对称矩阵构成的线性空间, S 为全体 n 阶幂零上三角矩阵构成的线性空间, 则

$$\dim M_0=\frac{n(n+1)}{2},\dim S=\frac{n(n-1)}{2}.$$

注意到 $M\bigcap S=\{0\}$, 我们有

$$\dim M\leqslant n^2-\dim S=\frac{n^2+n}{2},$$

且 $M=M_0$ 时等号成立, 即 M 维数最大为 $\frac{n^2+n}{2}$.

注 将 $\mathbb{R}$ 改为复数域问题将变成钓鱼题, 要用到相当非平凡的Motzkin-Taussky theorem, 此时 M 中的矩阵两两可交换, 从而由定理23.4知 M 最大的维数是 n.

例题 23.115 求数域 $\mathbb{F}$ 上的两两可交换的 n 阶互不相同对合矩阵[62]个数的最大值.

证明 由两两可交换和对合矩阵可交换, 在运用命题23.4, 我们不妨设对合矩阵只能形如 $\operatorname{diag}\{E_r,-E_{n-r}\},r=1,2,\cdots,n$.

因此对合矩阵个数被对角线上出现 1 的个数和位置决定. 对每个对角元要么取 1, 要么取 -1, 于是共有 2^n 种取法.

例题 23.116 设 M 是一个 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间且 M 中的矩阵两两可交换, 求 M 的最大可能维数.

证明 我们断言最大维数是 $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor+1$.

当 $n=1$ 结论显然成立, 假定问题对小于 n 时成立, 来看 n 的情形:

可交换条件让我们自然利用的定理23.2使得不妨设 M 中的每一个矩阵都是上三角矩阵. 现在对 M 中每一个矩阵 A, 我们都可以截取 A 左上角 $n-1$ 阶子矩阵并记作 $f(A)$. 同时截取 A 右下角 $n-1$ 阶子矩阵并记作 $g(A)$. 显然 f,g 都是 M 到 $\mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 的线性映射且 $f(M),g(M)$ 中的矩阵都是两两可交换的. 因此由归纳假设, 我们有

$$\dim f(M)\leqslant\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor+1,\dim g(M)\leqslant\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor+1. \tag{23.94}$$

注意到 $\ker f$ 中元素形如 $\left(0_{n\times(n-1)},\alpha\right)$, $\ker g$ 中元素形如 $\begin{pmatrix}\beta^T\\0_{(n-1)\times n}\end{pmatrix}$, 这里 α,β 都是 n 维列向量. 可交换意味着 $\beta^T\alpha=0$. 所以

$$\dim\ker f+\dim\ker g\leqslant n. \tag{23.95}$$

现在利用维数一定是正整数, 我们有

$$\begin{aligned}\dim M&=\dim\ker f+\dim f(M)=\dim\ker g+\dim g(M)\\&=\frac{\dim\ker f+\dim\ker g}{2}+\frac{\dim f(M)+\dim g(M)}{2}\\&\overset{(23.94),(23.95)}{\leqslant}\left\lfloor\frac{n}{2}+\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor+1\right\rfloor\leqslant\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor+1.\end{aligned}$$

我们考虑例子

$$\begin{pmatrix}\lambda E_m&N\\0&\lambda E_m\end{pmatrix}(n=2m),\begin{pmatrix}\lambda E_m&N\\0&\lambda E_{m+1}\end{pmatrix}(n=2m+1),$$

于是我们证明了最大维数是 $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor+1$.

例题 23.117 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵, 对角线有 p 个 1, q 个 -1, r 个 0, 这里 $p+q+r=n$. 若子空间 $M\subset\mathbb{R}^n$ 满足 $x^TAx=0,\forall x\in M$, 求 M 最大维数.

证明 不妨设

$$x^TAx=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=1}^{q}x_{p+i}^2,p\geqslant q.$$

考虑

$$M=\operatorname{span}\{e_1-e_{p+1},e_2-e_{p+2},\cdots,e_q-e_{p+q},e_{p+q+1},e_{p+q+2},\cdots,e_n\},$$

则 $\dim M=q+r$.

若有满足题目要求的子空间 S, 但是 $\dim S>q+r$. 因为

$$\dim S+\dim\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}>n,$$

[62] $A^2=I_n$.

我们可取非 0 的

$$\alpha \in S \bigcap \operatorname{span}\left\{e_1, e_2, \cdots, e_p\right\},$$

则

$$0 = \alpha^T A \alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 > 0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了所求最大维数为 $\dim M = q + r$.

对于一般情况, 最大维数为 $r + \min\{p, q\}$.

23.5.3 杂例

来看复旦大学 2024 期中考试压轴题:

例题 23.118 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A^2 = 0$, 证明: $r\left(A^T + A\right) = 2r\left(A\right)$.

证明 首先我们有

$$y \in (\mathrm{Im}A)^{\perp} \Leftrightarrow (y, Ax) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \left(A^T y, x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow y \in \ker A^T.$$

于是

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}A \oplus (\mathrm{Im}A)^{\perp} = \mathrm{Im}A \oplus \ker A^T. \tag{23.96}$$

现在由 $A^2 = 0$ 得 $A|_{\mathrm{Im}A} = 0$, 我们来证明

$$\mathrm{Im}\left(A + A^T\right) = A\left(\ker A^T\right) \oplus A^T\left(\mathrm{Im}A\right). \tag{23.97}$$

首先对 $x = y + z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathrm{Im}A, z \in \ker A^T$, 我们有

$$\left(A + A^T\right)x = A^T y + Az \in A\left(\ker A^T\right) + A^T\left(\mathrm{Im}A\right).$$

然后对 $y \in \mathrm{Im}A, z \in \ker A^T$, 我们有 $\left(A + A^T\right)(y + z) = A^T y + Az$, 故

$$\mathrm{Im}\left(A + A^T\right) = A\left(\ker A^T\right) + A^T\left(\mathrm{Im}A\right).$$

设

$$Az = A^T y \in A\left(\ker A^T\right) \bigcap A^T\left(\mathrm{Im}A\right), z \in \ker A^T, y \in \mathrm{Im}A,$$

我们有 $A^T Az = \left(A^T\right)^2 y = 0$. 结合命题21.8知 $Az = 0$, 故(23.97)成立. 现在由(23.96)得

$$\begin{aligned} r\left(A + A^T\right) &= \dim\left(\mathrm{Im}\left(A + A^T\right)\right) = \dim\left(A\left(\ker A^T\right)\right) + \dim\left(A^T\left(\mathrm{Im}A\right)\right) \\ &= \dim \mathrm{Im}A + \dim \mathrm{Im}A^T = r\left(A\right) + r\left(A^T\right) = 2r\left(A\right). \end{aligned}$$

首先来看 2024 山东大学数学学院夏令营笔试问题:

例题 23.119 考虑线性变换 $\sigma : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto A^T$, 证明 σ 可对角化并求特征子空间.

证明 注意到 $\sigma^2 = I$, 故 σ 极小多项式可以分解为一次因式的积, 所以 σ 可对角化. 显然 $\sigma \neq \pm I$, 故 σ 有特征值 ± 1. 现在我们容易知道 A 的特征子空间是全体实对称矩阵空间和实反对称矩阵空间.

例题 23.120 设 A, B 为正定矩阵, 证明关于 X 的矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解, 且解也为正定矩阵.

证明 考虑映射 $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, X \mapsto AX + XA$, 注意到由命题21.5和 A 特征值为正, $-A$ 特征值为负, 我们知道 $AX = X(-A)$ 只有 0 解. 因此 T 为单射, 从而 T 也是满射. 故矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解 X. 此外

$$A^T X^T + X^T A^T = B^T \Rightarrow AX^T + X^T A = B,$$

故解 X 是实对称的. 设 $X\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

$$2\lambda\alpha^T A\alpha = \alpha^T AX\alpha + \alpha^T XA\alpha = \alpha^T B\alpha > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha^T B\alpha}{2\alpha^T A\alpha} > 0,$$

从而 X 是正定矩阵.

例题 23.121 设 S 为 n 阶实对称矩阵, 证明: 当且仅当 S 可逆时, 存在矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $SA + A^T S$ 正定.

证明 必要性: 若存在矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $SA+A^TS$ 正定但是 S 不可逆, 则存在 $\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 使得 $S\alpha=0$. 于是

$$0=(S\alpha)^TA\alpha+\alpha^TA^TS\alpha=\alpha^T\left(SA+A^TS\right)\alpha>0,$$

这就是一个矛盾!

充分性: 若 S 可逆, 可以不妨设 S 为对角矩阵, 这是因为我们可以设 $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵且 T^TST 为对角矩阵, 于是只需要构造 A 使得 $T^TSTT^TAT+\left(T^TAT\right)^TT^TST$ 正定, 因此可以不妨设.

下设

$$S=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\},\lambda_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\},i=1,2,\cdots,n.$$

取

$$A=\operatorname{diag}\left\{\operatorname{sgn}\lambda_1,\operatorname{sgn}\lambda_2,\cdots,\operatorname{sgn}\lambda_n\right\},$$

则

$$SA+A^TS=\operatorname{diag}\left\{2\left|\lambda_1\right|,2\left|\lambda_2\right|,\cdots,2\left|\lambda_n\right|\right\}$$

是正定矩阵.

例题 23.122 设 $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ 为 n 阶复方阵构成的复线性空间. 对每个 $A\in V$, 我们定义

$$D_A:V\to V,X\to AX-XA^T.$$

证明: 若 A 有 n 个不同的特征值则有

$$V=D^{-1}(0)\oplus D(V).\tag{23.98}$$

笔记 张量积和向量拉直技术固然可行, 几何的观点同样重要的. 我们来看几何的观点.

证明 因为 A 有 n 个互不相同的特征值, 所以不妨设 $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 这里不妨设的原因是我们设可逆复矩阵 P, 考虑

$$A=P\Delta P^{-1},\sigma_P(X)=P^{-1}XP^{-T},X\in V.$$

则注意到下列交换图:

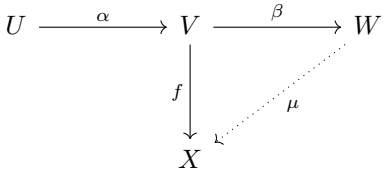
$$\begin{array}{ccc}V&\xrightarrow{D_A}&V\\\downarrow{\scriptstyle\sigma_P}&&\downarrow{\scriptstyle\sigma_P}\\V&\xrightarrow{D_\Delta}&V\end{array}$$

于是我们有 $D_A(E_{ij})=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$, 这就说明了 D_A 是对角的, 显然就有(23.98)成立.

例题 23.123 设 U,V,W 都是有限维线性空间, $\alpha:U\to V,\beta:V\to W$ 是线性映射且满足 $\beta\alpha=0$. 若对任何一个有限维线性空间 X 和线性映射 $f:V\to X$, 都存在唯一的线性映射 $\mu:W\to X$, 使得 $f=\mu\beta$, 证明:

1. β 是满射.
2. 有线性同构 $W\cong V/\operatorname{Im}(\alpha)$.

笔记 首先画出交换图:

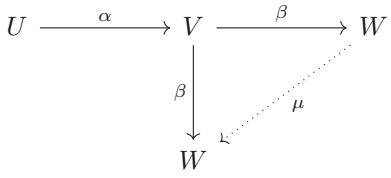


(23.99)

自然的要从图(23.99)中去思考 X,f 取什么来导出需要的结果.

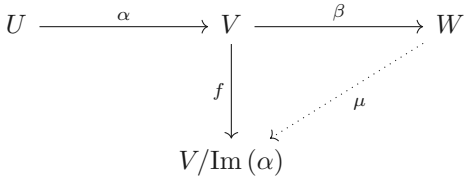
证明

1. 取 $X=W, f=\beta$, 则图(23.99)变为



因此 $\mu\beta=\beta$ 只有唯一解 $\mu=I$, 故线性方程组 $X\beta=0$ 只有 0 解, 从而 β 行满秩即 β 满射. 这就证明了第一问.

2. 取 $X=W\cong V/\mathrm{Im}\,(\alpha)$, f 为商映射, 则图(23.99)变为



证明的想法即猜想 μ 就是同构, 我们只需简单追图即可.

Step 1

设 $\mu(w)=0$, 因为 β 满射, 所以存在 $v\in V$, 使得 $\beta(v)=w$, 因此

$$f(v)=\mu(\beta(v))=0\Rightarrow v\in\mathrm{Im}\,(\alpha),$$

即由 $\beta\alpha=0$ 知 $w=\beta(v)=0$, 故 μ 是单射.

Step 2

设 $f(y)\in V/\mathrm{Im}\,(\alpha), y\in V$, 则 $f(y)=\mu(\beta(y))$, 从而 μ 是满射.

Step 3

至此我们证明了有线性同构 $\mu: W\cong V/\mathrm{Im}\,(\alpha)$.

例题 23.124 设 A 是 n 阶实矩阵且满足

$$Y_1Y_2\cdots Y_m=X_1X_2\cdots X_m,\tag{23.100}$$

这里 $X_i,Y_i\in\{A,A^T\}, i=1,2,\cdots,m$, 且对 X_i 来说 A,A^T 交错出现且不是每个 Y_i 都和 X_i 相同. 证明 A 是正规矩阵.

笔记 回忆矩阵范数

$$||A||\triangleq\sup_{x\neq0}\frac{||Ax||}{||x||}=\sqrt{\sup_{x\neq0}\frac{x^TA^TAx}{x^Tx}}\overset{21.15}{=}\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}, A\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

有不等式

$$||AB||\leqslant||A||\,||B||, ||Ax||\leqslant||A||\,||x||, \forall x\in\mathbb{R}^n, A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

由推论21.1知 $||A||=\left||A^T\right||$.

设矩阵 $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $||S||=1$. 设 $||Sx||=||x||$, 则取正交矩阵 T 使得 $T^TS^TST=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 我们考虑 $x=Ty$, 有

$$\sum_{i=1}^n y_i^2=||y||^2=||x||^2=||Sx||^2=x^TS^TSx=y^TT^TS^TSTy=\sum_{i=1}^n\lambda_iy_i^2,$$

于是当 $\lambda_i\neq1$ 时必有 $y_i=0$. 故不妨设 $T^TS^TST=\begin{pmatrix}E&0\\0&S'\end{pmatrix}$, 于是

$$S^TSx=S^TSTy=T\begin{pmatrix}E&0\\0&S'\end{pmatrix}T^TTy=T\begin{pmatrix}E&0\\0&S'\end{pmatrix}y=Ty=x.$$

这个事实将配合(23.101)用到.

证明 对维数归纳, 当 $n=1$ 时问题显然成立, 设维数小于 n 时命题成立, 考虑一般的 n 的时候.

$A=0$ 命题显然成立, 不妨设 A^TA 最大特征值为 1, 当 A 是正交矩阵, 命题也显然成立. 当 A 不是正交矩阵. 由推论21.1知 AA^T 最大特征值也为 1. 现在考虑 $\mathbb{R}^n$ 的真子空间

$$V=\left\{x:A^TAx=x\right\},U=\left\{x:AA^Tx=x\right\}.$$

我们断言 $A:V\to U,A^T:U\to V$ 都是等距同构. 事实上对 $x\in V$, 则 $AA^TAx=Ax$, 从而 $Ax\in U$ 且

$$||Ax||^2=x^TA^TAx=x^Tx=||x||^2.$$

故 A 是等距的单线性映射, 类似的 A^T 也是. 对 $x\in U$, 考虑 $A^Tx\in V$, 则有 $AA^Tx=x$. 于是我们证明了 A 是满射, 从而是等距同构, 类似的 A^T 也是等距同构.

现在我们要证明 $U=V$, 从(23.100)的右边可以知道 $X_1X_2\cdots X_m$ 是 U 到 V 或者 V 到 V 或者 V 到 U 或者 U 到 V 的等距同构, 从而 $Y_1Y_2\cdots Y_m$ 也是.

取最大的 i, 使得 X_i 和 Y_i 不一致, 不妨设 $i=m$ 且 $X_m=A,Y_m=A^T$, 注意到对 $x\in V$, 我们有

$$||x||\geqslant||Y_mx||\geqslant||Y_1Y_2\cdots Y_mx||=||x||,\tag{23.101}$$

于是 $||Y_mx||=||x||$, 故由笔记知 $Y_m^TY_mx=x$, 即 $x\in U$. 现在 $V\subset U$, 从而 $U=V$ 是 A 和 A^T 公共不变子空间. 现在考虑 $\mathbb{R}^n=U\oplus U^\perp$, 则 A,A^T 在 $U,U^\perp$ 的一组标准正交基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}D_1&S_1\\0&C_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D_2&S_2\\0&C_2\end{pmatrix},$$

于是 $S_1=S_2=0,C_2=C_1^T,D_2=D_1^T$. 直接验证发现 D_1,C_1 也满足(23.100). 于是由归纳假设知 $D_1^TD_1=D_1D_1^T,C_1^TC_1=C_1C_1^T$, 从而我们知道 A 正规.

笔记 从证明中可以看到 A 一定正交相似于 $\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$, 这里 $A_i,i=1,2,\cdots,s$ 是正交矩阵的倍数.

例题 23.125

1. 设 V,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, $\varphi,\psi:V\to U$ 是两个线性映射, 证明存在 U 上线性变换 ξ 使得 $\psi=\xi\varphi$ 的充要条件是 $\ker\varphi\subset\ker\psi$.
2. 设 V,U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, $\varphi,\psi:V\to U$ 是两个线性映射, 证明存在 V 上线性变换 ξ 使得 $\psi=\varphi\xi$ 的充要条件是 $\operatorname{Im}\psi\subset\operatorname{Im}\varphi$.

证明

1. 必要性显然. 对于充分性, 假定 $\ker\varphi\subset\ker\psi$, 定义

$$\xi:\operatorname{Im}\varphi\to U,x\mapsto\psi(y)\,(x=\varphi(y),y\in V).$$

显然 ξ 线性, 为了定义良定, 我们只需证明 ξ 把 0 映为 0. 事实上设 $0=\varphi(y)$, 由条件 $\ker\varphi\subset\ker\psi$, 我们有 $\psi(y)=0$, 这就证明了 ξ 良定. 现在把 ξ 自然的线性扩充[63]到 U 上即得.

2. 必要性显然. 对于充分性, 假定 $\operatorname{Im}\psi\subset\operatorname{Im}\varphi$. 不妨设为矩阵意义, 则 ψ 列向量可以被 φ 列向量组线性表出, 于是 $\psi=\varphi\xi$.

例题 23.126 设 A,B 是实对称矩阵且 B 可逆, 若存在 n 个互不相同的实数 α 使得 $|\alpha B-A|=0$, 证明 A,B 可以同时合同对角化.

证明 不妨设 $B=\begin{pmatrix}E&0\\0&-E\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}A_1&C\\C^T&A_2\end{pmatrix}$. 于是 $B^{-1}A=\begin{pmatrix}A_1&C\\-C^T&-A_2\end{pmatrix}$ 可对角化. 因此存在可逆矩阵 P 和对角元素元素全不同的对角矩阵 Λ, 使得 $B^{-1}AP=P\Lambda$, 即 $P^TAP=P^TBP\Lambda$. 故不妨设 $A=B\Lambda$, 则直接考虑矩阵乘法知 A,B 是对角矩阵.

例题 23.127 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n},\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$. 若 A,B 的极小多项式分别是

$$f_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2),f_B(x)=(x-\mu_1)(x-\mu_2),$$

证明 A,B 至少有一个维数 1 或者 2 的公共不变子空间.

[63]取补空间, 在补空间上随意定义.

证明 事实上如果我们找到 $c_1,c_2,d_1,d_2\in\mathbb{C}$ 使得线性方程组

$$\begin{pmatrix}B-c_1E-c_2A\\BA-d_1E-d_2A\end{pmatrix}x=0$$

有非 0 解 α, 那么 $\operatorname{span}(\alpha,A\alpha)$ 是 A 和 B 的一个维数 1 或者 2 的公共不变子空间.

设 $f_B(x)=x^2-kx-r$, 取 $c_1=c$ 是 $B-A$ 特征值且 $c_2=1,d_2=k-c,d_1=cd_2+r$, 于是初等变换得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B-cE-A\\BA-d_1E-d_2A\end{pmatrix}&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B-cE-A\\B^2-cB-d_1E-d_2A\end{pmatrix}\\&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B-cE-A\\(k-c)B-(d_1-r)E-d_2A\end{pmatrix}.\\&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B-cE-A\\d_2(B-cE-A)\end{pmatrix}<n,\end{aligned}$$

显然此时

$$\begin{pmatrix}B-c_1E-c_2A\\BA-d_1E-d_2A\end{pmatrix}x=0$$

有非 0 解 α. 这就完成了证明.

例题 23.128 设 $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 满足 $A^TA=I,|A|=1,A\neq I$. 若 $A^3-tA^2+tA-I=0$, 求 $t\in\mathbb{R}$ 的取值范围.

证明 由于正交矩阵特征值的模长为 1[21.16]且实奇数阶矩阵必有实特征值, 我们知道 A 的特征值有三种可能.

第一种: A 的特征值为 $1,1,1$, 此时 $A=I$ 舍去.

第二种: A 的特征值为 $1,-1,-1$, 因此 A 可对角化, 此时 $A^2=I$, 于是

$$A^3-tA^2+tA-I=(t+1)(A-I)=0\Rightarrow t=-1.$$

容易验证 $t=-1$ 时, $A=\operatorname{diag}\{1,-1,-1\}$ 确实满足条件.

第三种: A 的特征值为 $1,w,\frac{1}{w},|w|=1,w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, 则

$$w^3-tw^2+tw-1=0\Rightarrow t=\frac{w^3-1}{w^2-w}=\frac{w^2+w+1}{w}=1+2\Re w\in(-1,3).$$

容易验证 $t=1+2\Re w$ 时, $A=\operatorname{diag}\left\{1,w,\frac{1}{w}\right\}$ 确实满足条件.

综上所述, t 的范围为 $[-1,3)$.

例题 23.129 设 A 是 n 阶实矩阵, 证明 A 的前 r 个列向量是 A 列向量组的极大无关组的充要条件是 A^TA 的前 r 列是 A^TA 的列向量组的极大无关组.

证明 设 $A=\begin{pmatrix}A_r&B\end{pmatrix}$, 这里 $A_r\in\mathbb{R}^{n\times r}$. 于是我们有

$$A^TA=\begin{pmatrix}A_r^T\\B^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_r&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_r^TA_r&A_r^TB\\B^TA_r&B^TB\end{pmatrix}.$$

从而 A^TA 的前 r 列是 $\begin{pmatrix}A_r^TA_r\\B^TA_r\end{pmatrix}$.

一方面

$$\begin{pmatrix}A_r^TA_r\\B^TA_r\end{pmatrix}x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}A_r^TA_rx\\B^TA_rx\end{pmatrix}=0\Rightarrow A_r^TA_rx=0\Rightarrow(A_rx)^T(A_rx)=0\Rightarrow A_rx=0.$$

另外一方面 $A_rx=0\Rightarrow\begin{pmatrix}A_r^TA_r\\B^TA_r\end{pmatrix}x=0$. 于是线性方程组 $A_rx=0,\begin{pmatrix}A_r^TA_r\\B^TA_r\end{pmatrix}x=0$ 同解, 故 $r(A_r)=r\left(\begin{pmatrix}A_r^TA_r\\B^TA_r\end{pmatrix}\right)$.

因为命题[21.8]我们知道 $r(A)=r(A^TA)$. 又矩阵前 r 列是极大无关组充要条件是矩阵的秩是矩阵前 r 列的秩. 所以 A 的前 r 个列向量是 A 列向量组的极大无关组的充要条件是 A^TA 的前 r 列是 A^TA 的列向量组的极大

无关组.

来看 2024 华东师范大学夏令营压轴题.

例题 23.130 设 n 阶复矩阵 A 满足其极小多项式 $\deg m_A = m \in \mathbb{N}$. 用 $F[A]$ 表示 A 生成的多项式并固定 $g \in \mathbb{C}[x]$, 我们定义

$$\varphi_g : F[A] \to F[A], X \mapsto g(A) X.$$

1. 若 $g(x) = x$, 证明 φ_g 特征多项式就是 m_A 并且 φ_g 行列式因子;
2. 设 $d = \gcd(g, m_A)$, 证明 $\dim \ker \varphi_g = \deg d, \dim \operatorname{Im} \varphi_g = m - \deg d$;
3. 若 $A = J_n(0), g(x) = x^2 + 1$, 求 φ_g 的 Jordan 标准型.

证明

1. 由结论23.1.7知 $F[A]$ 一组基为 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$. 于是
$$\varphi_x\left[A^k\right] = A^{k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots, m-1 \Rightarrow \varphi_x\text{的表示矩阵为}m_A\text{的友矩阵},$$
这就告诉我们 φ_g 特征多项式就是 m_A 并且 φ_g 行列式因子为 $1, 1, \cdots, 1, m_A$.
2. 设 $m_A = dm', g = dg'$, 则
$$\varphi_g(P(A)) = 0 \Leftrightarrow g(A) P(A) = 0 \Leftrightarrow m_A | (gP) \Leftrightarrow m' | (g'P) \Leftrightarrow m' | P.$$
注意到 $\deg m' = m - \deg d$, 我们断言 $m'(A), Am'(A), \cdots, A^{\deg d - 1} m'(A)$ 是 $\ker \varphi_g$ 的一组基.
一方面对 $P \in \mathbb{C}[x], P = hm', \deg P \leqslant m-1$, 我们有 $\deg h \leqslant m - 1 - (m-d) = d - 1$, 即 h 可以被 $1, x, \cdots, x^{\deg d - 1}$ 线性表出, 从而 $P(A)$ 可以被 $m'(A), Am'(A), \cdots, A^{\deg d-1} m'(A)$ 线性表出. 另外一方面, 若 $\sum\limits_{i=0}^{\deg d - 1} c_i A^i m'(A) = 0$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{\deg d - 1} c_i x^i m'$ 是 A 的 $m-1$ 次零化多项式, 则 $c_i = 0, i = 0, 1, 2, \cdots, \deg d - 1$.
这就证明了 $m'(A), Am'(A), \cdots, A^{\deg d - 1} m'(A)$ 是 $\ker \varphi_g$ 的一组基. 结合维数公式就证明了本结论.
3. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 φ_g 特征值, 则
$$\varphi_g(X) = \lambda X, X \neq 0 \Rightarrow \left(A^2 + (1-\lambda) E\right) X = 0 \Rightarrow \lambda = 1,$$
这里最后一个推出来自如果 $\lambda \neq 1$, 则 $A^2 + (1-\lambda) E$ 可逆, 从而 $X = 0$ 而矛盾!
现在 $(\varphi_g - I)(X) = A^2 X = \varphi_{x^2}(X)$, 则
$$\varphi_{x^2}\left(A^k\right) = A^{k+2}, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \Rightarrow \varphi_{x^2}\text{表示矩阵为} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
当 n 为偶数, 我们直接观察表示矩阵知幂零指数为 $\frac{n}{2}$. 注意到表示矩阵秩 $n-2$ 意味着两个 Jordan 块, 故 $\varphi_g \sim \begin{pmatrix} J_{\frac{n}{2}}(1) & 0 \\ 0 & J_{\frac{n}{2}}(1) \end{pmatrix}$. 当 n 为奇数, 注意到幂零指数为 $\frac{n+1}{2}$, 于是我们直接得到 Jordan$\varphi_g \sim \begin{pmatrix} J_{\frac{n+1}{2}}(1) & 0 \\ 0 & J_{\frac{n-1}{2}}(1) \end{pmatrix}$.

定理 23.45 (组合零点定理)

设 $\mathbb{F}$ 是一个域. $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n], \deg f = d \in \mathbb{N}_0$. 若 f 有一项
$$x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}, d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d, d_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \cdots, n$$
其系数非 0, 则对
$$S_1, S_2, \cdots, S_n \subset \mathbb{F}, |S_i| > d_i, i = 1, 2, \cdots, n,$$
我们有存在 $s_i \in S_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 使得
$$f(s_1, s_2, \cdots, s_n) \neq 0.$$
♡

证明 证明见知乎.

23.5.4 关于复形的线性代数题 *

本节的术语和证明大多可以平移推广到更一般的代数结构. 在这里大家视为线性代数习题训练, 对自己代数水平会大有毗益.

定义 23.10

一个上链复形 (cochain complex)$\mathcal{C}$ 是一族数域上的线性空间 $\left\{C^k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 以及一族线性映射 $d_k : C^k \to C^{k+1}, k\in\mathbb{Z}$. 并且满足

$$d_k \circ d_{k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

直观的, 我们考虑图形:

$$\cdots \longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

我们称 $H^k(\mathcal{C}) \triangleq \frac{\ker d_k}{\mathrm{Im} d_{k-1}}, k\in\mathbb{Z}$ 是 $\mathcal{C}$ 的第 k 个上同调空间 (cohomology vector space).

♣

注我们称 $\{d_k\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的微分 (differential). C^k 中的元素称为 k 次上链 (cochain). 一个 $Z^k(\mathcal{C}) \triangleq \ker d_k$ 中的 k 次上链被称为一个闭上链 (cocycle). 一个 $B^k(\mathcal{C}) \triangleq \mathrm{Im} d_{k-1}$ 中的 k 次上链被称为上边缘 (coboundary). 设 c 是一个 k 次闭上链, 等价类 $[c] \in H^k(\mathcal{C})$ 被称为上同调类 (cohomology class).

自然的, 我们要考虑两个不同上链复形之间的运算.

定义 23.11

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是两个不同的上链复形且有微分 $d_k, d'_k, k\in\mathbb{Z}$. 设线性映射族 $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足下述交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & A^k & \xrightarrow{d_k} & A^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & B^{k-1} & \xrightarrow[d'_{k-1}]{} & B^k & \xrightarrow[d'_k]{} & B^{k+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array},$$

我们称 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为一个上链映射.

♣

例题 23.131 设 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为一个上链映射, 我们定义一族自然的线性映射

$$\varphi_k^* : H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B}), [a] \mapsto [\varphi_k(a)], k\in\mathbb{Z}.$$

证明 固定 $k\in\mathbb{Z}$.

Step 1 证明对 $a \in \ker d_k$ 必有 $\varphi_k(a) \in \ker d'_k$.

事实上,

$$d'_k \varphi_k(a) = \varphi_{k+1} d_k(a) = 0,$$

这就证明了 **Step 1**.

Step 2 证明 φ_k^* 是良定的线性映射.

因为 φ_k 线性, 所以 φ_k^* 是线性. 为了证明 φ_k^* 良定, 只需证明[64] $\varphi_k^*([0]) = [0]$. 事实上,

$$\varphi_k^*([0]) = [\varphi_k(0)] = [0],$$

这就证明了 **Step 2**.

[64] 即证 $\boxplus = \boxtimes$ 则 $\varphi_k^*(\boxplus) = \varphi_k^*(\boxtimes)$, 线性映射特性告诉我们只需证明

$$\boxplus - \boxtimes = 0 \Rightarrow \varphi_k^*(\boxplus - \boxtimes) = 0.$$

定义 23.12

1. 一个线性空间的线性映射序列
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
被称为在 B 正合, 如果 $\ker g = \operatorname{Im} f$.
2. 一个线性空间的线性映射序列
$$A^0 \xrightarrow{f_0} A^1 \xrightarrow{f_1} A^2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A^n$$
被称为正合的, 如果上图在 $A^j, 1 \leqslant j \leqslant n-1$ 正合.
3. 一个正合列
$$0 \to A \to B \to C \to 0$$
被称为短正合列.

♣

命题 23.19

给定正合列
$$A \xrightarrow{f} B \to C \to 0. \tag{23.102}$$
然后有线性同构
$$C \simeq \operatorname{coker} f \triangleq B/\operatorname{Im} f.$$

♠

证明 因为(23.102)在 C 正合, 我们有线性满射 $g : B \to C$. 因为(23.102)在 B 正合, 我们有 $\ker g = \operatorname{Im} f$. 由线性空间经典的同构定理, 我们有
$$B/\operatorname{Im} f = B/\ker g \simeq C.$$

例题 23.132 若有正合列
$$0 \to A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \xrightarrow{d_2} \cdots \to A^m \xrightarrow{d_m} 0.$$

证明
$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dim A^k = 0. \tag{23.103}$$

证明 注意到维数公式
$$\dim A^k = \dim \ker d_k + \dim \operatorname{Im} d_k, k = 0, 1, 2, \cdots, m.$$

正合性告诉我们
$$\dim \ker d_k = \dim \operatorname{Im} d_{k-1}, k = 1, 2, \cdots, m.$$

故
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dim A^k &= \dim A^0 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left(\dim \operatorname{Im} d_{k-1} + \dim \operatorname{Im} d_k\right) \\ &= \dim A^0 + \sum_{k=1}^{m} \left[(-1)^k \dim \operatorname{Im} d_{k-1} - (-1)^{k+1} \operatorname{Im} d_k\right] \\ &= \dim \operatorname{Im} d_0 + (-\dim \operatorname{Im} d_0) - (-1)^{m+1} \operatorname{Im} d_m = 0.\end{aligned}$$

定义 23.13

1. 给定上链复形 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$, 我们称

$$0\to\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{C}\to 0$$

是正合的, 如果对每个 $k\in\mathbb{Z}$, 都有

$$0\to A^k\xrightarrow{i_k}B^k\xrightarrow{j_k}C^k\to 0$$

是正合列, 这里

$$i=\{i_k\}_{k\in\mathbb{Z}}:\mathcal{A}\to\mathcal{B},j=\{j_k\}_{k\in\mathbb{Z}}:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$$

是上链映射.

2. 我们来构建连接线性映射 (connecting homomorphism)

$$d_k^*:H^k(\mathcal{C})\to H^{k+1}(\mathcal{A}),k\in\mathbb{Z}.$$

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^{k+2} & \xrightarrow{i_{k+2}} & B^{k+2} & \xrightarrow{j_{k+2}} & C^{k+2} & \longrightarrow & 0\\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{k+1}^{\mathcal{A}}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{k+1}^{\mathcal{B}}} & & \uparrow{\scriptstyle d_{k+1}^{\mathcal{C}}} & & \\
0 & \longrightarrow & A^{k+1} & \xrightarrow{i_{k+1}} & B^{k+1} & \xrightarrow{j_{k+1}} & C^{k+1} & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle d_k^{\mathcal{A}}}\uparrow & & {\scriptstyle d_k^{\mathcal{B}}}\uparrow & & {\scriptstyle d_k^{\mathcal{C}}}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{k} & \xrightarrow[i_k]{} & B^{k} & \xrightarrow[j_k]{} & C^{k} & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle d_{k-1}^{\mathcal{A}}}\uparrow & & {\scriptstyle d_{k-1}^{\mathcal{B}}}\uparrow & & {\scriptstyle d_{k-1}^{\mathcal{C}}}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow[i_{k-1}]{} & B^{k-1} & \xrightarrow[j_{k-1}]{} & C^{k-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}. \tag{23.104}$$

对 $[c]\in H^k(\mathcal{C}),c\in Z^k(\mathcal{C})$, 因为 j_k 是满射, 所以 $c=j_kb,b\in B^k$, 于是

$$0=d_k^{\mathcal{C}}c=d_k^{\mathcal{C}}j_kb=j_{k+1}d_k^{\mathcal{B}}b\Rightarrow d_k^{\mathcal{B}}b\in Z^{k+1}(\mathcal{B}).$$

因为 $\ker j_{k+1}=\operatorname{Im}i_{k+1}$ 且 i_{k+1} 是单射, 所以存在唯一的 $a\in A^{k+1}$ 使得 $i_{k+1}a=d_k^{\mathcal{B}}b$. 又

$$i_{k+2}d_{k+1}^{\mathcal{A}}a=d_{k+1}^{\mathcal{B}}i_{k+1}a=d_{k+1}^{\mathcal{B}}\circ d_k^{\mathcal{B}}b=0.$$

故由 i_{k+2} 单射知

$$d_{k+1}^{\mathcal{A}}a=0\Rightarrow a\in Z^{k+1}(\mathcal{A}).$$

现在就定义 $d^*[c]_k=[a]\in H^{k+1}(\mathcal{A})$.

♣

注为了说明 d_k^* 是良定的, 我们说明上述得到的 $[a]$ 不随 b 的选取而改变. 设 $c=j_kb_1=j_kb_2,b_1,b_2\in B^k$, 则有

$$d_k^{\mathcal{B}}b_t=i_{k+1}a_t,a_t\in A^{k+1},t=1,2.$$

现在

$$b_1-b_2\in\ker j_k=\operatorname{Im}i_k\Rightarrow b_1-b_2=i_ka',a'\in A^k.$$

于是

$$d_k^{\mathcal{B}}(b_1-b_2)=d_k^{\mathcal{B}}i_ka'=i_{k+1}d_k^{\mathcal{A}}a'\overset{i_{k+1}\text{单射}}{\Rightarrow}a_1-a_2=d_k^{\mathcal{A}}a',$$

即

$$a_1-a_2\in B^{k+1}(\mathcal{A})\Rightarrow[a_1]=[a_2],$$

这就证明了 $[a]$ 不随 b 的选取而改变.

再说明不依赖代表元 c 的选取, 我们设 $[c]=[0]$, 即 $c\in B^k(\mathcal{C})$, 则有

$$c=d_{k-1}^{\mathcal{C}}c',c'\in c^{k-1}.$$

因为 j_{k-1} 满射, 所以 $c'=j_{k-1}b', b'\in B^{k-1}$, 于是

$$j_kd_{k-1}^{\mathcal{B}}b'=d_{k-1}^{\mathcal{C}}j_{k-1}b'=c.$$

故 $0=d_k^{\mathcal{B}}d_{k-1}^{\mathcal{B}}b'$ 知此时 $d^*\left([c]\right)=[0]$.

引理 23.18 (The zig-zag lemma)

给定上链复形 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$, 则有上同调空间的长正合列:

$$\cdots\overset{j_{k-2}^*}{\to}H^{k-1}\left(\mathcal{C}\right)\overset{d_{k-1}^*}{\to}H^k\left(\mathcal{A}\right)\overset{i_k^*}{\to}H^k\left(\mathcal{B}\right)\overset{j_k^*}{\to}H^k\left(\mathcal{C}\right)\overset{d_k^*}{\to}H^{k+1}\left(\mathcal{A}\right)\overset{i_{k+1}^*}{\to}\cdots.$$

♡

笔记 证明中应当仔细回味交换图(23.104).

证明 **Step 1**

对任何固定的 $k\in\mathbb{Z}$, 对 $b\in Z^k\left(\mathcal{B}\right)$, 我们有

$$d_k^*j_k^*\left([b]\right)=d_k^*\left([j_kb]\right)=0,$$

这是因为 $d_k^{\mathcal{B}}b=0$. 于是我们有 $d_k^*\circ j_k^*=0$.

对 $a\in Z^k\left(\mathcal{A}\right)$, 我们有

$$j_k^*i_k^*\left([a]\right)=[j_ki_ka]=[0]=0,$$

于是我们有 $j_k^*\circ i_k^*=0$.

对 $c\in Z^{k-1}\left(\mathcal{C}\right)$, 我们有

$$i_k^*d_{k-1}^*\left([c]\right)=i_k^*d_{k-1}^*\left([c]\right)=\left[d_{k-1}^{\mathcal{B}}b\right]=[0],$$

这里 $j_{k-1}b=c$. 于是我们有 $i_k^*\circ d_{k-1}^*=0$.

Step 2 证明在 $H^k\left(\mathcal{C}\right)$ 处正合. 为方便读者阅读, 我们作图

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{i_{k+1}} & d_k^{\mathcal{B}}b & & \\ {\scriptstyle d_k^{\mathcal{A}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d_k^{\mathcal{B}}} & & \\ a' & \xrightarrow{i_k} & b & \xrightarrow{j_k} & c \end{array}.$$

设 $d_k^*\left([c]\right)=[0], c\in Z^k\left(\mathcal{C}\right)$. 则设

$$j_kb=c, b\in B^k, i_{k+1}a=d_k^{\mathcal{B}}b, a\in A^{k+1}, a=d_k^{\mathcal{A}}a', a'\in A^k.$$

故

$$d_k^{\mathcal{B}}\left(b-i_ka'\right)=d_k^{\mathcal{B}}b-d_k^{\mathcal{B}}i_ka'=i_{k+1}a-i_{k+1}d_k^{\mathcal{A}}a'=i_{k+1}a-i_{k+1}a=0\Rightarrow b-i_ka'\in Z^k\left(\mathcal{B}\right),$$

以及

$$j_k^*\left([b-i_ka']\right)=[j_kb-j_ki_ka']=[c],$$

这就证明了 $c\in\operatorname{Im}j_k^*$. 现在我们知道 $\operatorname{Im}j_k^*=\ker d_k^*$, 即在 $H^k\left(\mathcal{C}\right)$ 处正合.

Step 3 证明在 $H^k\left(\mathcal{B}\right)$ 处正合. 读者自行作图.

设 $j_k^*\left([b]\right)=[j_kb]=[0], b\in Z^k\left(\mathcal{B}\right)$, 则

$$j_kb\in\operatorname{Im}d_{k-1}^{\mathcal{C}}\Rightarrow j_kb=d_{k-1}^{\mathcal{C}}c', c'\in C^{k-1}.$$

又设 $c'=j_{k-1}b', b'\in B^{k-1}$, 我们有

$$d_{k-1}^{\mathcal{C}}c'=d_{k-1}^{\mathcal{C}}j_{k-1}b'=j_kd_{k-1}^{\mathcal{B}}b'=j_kb\Rightarrow b-d_{k-1}^{\mathcal{B}}b'\in\ker j_k=\operatorname{Im}i_k.$$

设 $b-d_{k-1}^{\mathcal{B}}b'=i_ka, a\in A^k$, 则我们有

$$0=d_k^{\mathcal{B}}b-d_k^{\mathcal{B}}d_{k-1}^{\mathcal{B}}b'=d_k^{\mathcal{B}}i_ka=i_{k+1}d_k^{\mathcal{A}}a\Rightarrow d_k^{\mathcal{A}}a=0\Rightarrow a\in Z^k\left(\mathcal{A}\right).$$

因此

$$i_k^*([a])=[i_k a]=\left[b-d_{k-1}^{\mathcal{B}}b'\right]=[b],$$

即 $\operatorname{Im} i_k^*=\ker j_k^*$, 故 $H^k(\mathcal{B})$ 处正合.

Step 4 证明在 $H^k(\mathcal{A})$ 处正合. 读者自行作图.

设 $[a]\in H^k(\mathcal{A}), a\in Z^k(\mathcal{A})$ 使得 $i_k^*([a])=[i_k a]=[0]$, 则

$$i_k a\in\operatorname{Im} d_{k-1}^{\mathcal{B}}\Rightarrow i_k a=d_{k-1}^{\mathcal{B}}b', b'\in B^{k-1}.$$

考虑 $j_{k-1}b'\in C^{k-1}$, 则

$$d_{k-1}^{\mathcal{C}}j_{k-1}b'=j_k d_{k-1}^{\mathcal{B}}b'=j_k\circ i_k a=0\Rightarrow j_{k-1}b'\in Z^{k-1}(\mathcal{C}).$$

于是

$$d_{k-1}^*([j_{k-1}b'])=[a]\Rightarrow\ker i_k^*=\operatorname{Im} d_{k-1}^*,$$

即在 $H^k(\mathcal{A})$ 处正合. 这就完成了证明.

定理 23.46 (Roth 消去定理)

设 $\mathbb{K}$ 是一个数域, $A\in\mathbb{K}^{m\times m}, B\in\mathbb{K}^{n\times n}, C\in\mathbb{K}^{m\times n}$, 证明:

1. $AX-YB=C$ 有解的充分必要条件是 $\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 等价.
2. $AX-XB=C$ 有解的充分必要条件是 $\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 相似.

♡

证明

1. 必要性: 若 $AX_0-Y_0B=C$, 考虑初等变换

$$\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&-AX_0+C\\0&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A&Y_0B-AX_0+C\\0&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 等价.

充分性: 若 $\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 等价, 考虑等价:

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}, P_2BQ_2=\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}, P_i, Q_i\text{是可逆的}, i=1,2,$$

于是我们只需证明

$$\begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}P_1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&0\\0&Q_2\end{pmatrix}$$

等价.

不妨设 $A=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}I_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 然后

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & 0 & C_1 & C_2\\ 0 & 0 & C_3 & C_4\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_r & 0 & C_1 & 0\\ 0 & 0 & C_3 & C_4\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_3 & C_4\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_4\\ 0 & 0 & I_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

从而考虑秩得 $C_4=0$. 下构造 X,Y 使得

$$AX-YB=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & 0\end{pmatrix}. \tag{23.105}$$

设 $X=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}Y_1 & Y_2\\ Y_3 & Y_4\end{pmatrix}$. 要让等式(23.105)成立, 即需

$$\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}Y_1 & 0\\ Y_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1-Y_1 & X_2\\ -Y_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & 0\end{pmatrix}.$$

取 $X=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -C_3 & 0\end{pmatrix}$ 就满足(23.105). 证毕!

2. 必要性: 若 $AX_0-X_0B=C$, 则利用分块矩阵相似对应的初等变换21.5, 我们考虑

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & AX_0\\ 0 & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & AX_0-X_0B\\ 0 & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 相似.

充分性: 若 $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 相似, 则存在可逆矩阵 P 使得

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}P-P\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=0.$$

考虑线性映射

$$f_2:X\to\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

则

$$\ker f_2=\left\{\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}:\begin{cases}AX_1+CX_3=X_1A, & AX_2+CX_4=X_2B\\ BX_3=X_3A, & BX_4=X_4B\end{cases}\right\}.$$

我们的目标是证明 $\ker f_2$ 中含有 $\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}$, 代入即得 $AX_2-X_2B=C$.

再令

$$f_1:X\to\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

然后有

$$\begin{aligned} f_2(PX) &= \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} PX - PX \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} X - PX \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= P f_1(X). \end{aligned}$$

考虑线性同构 $\ker f_1 \to \ker f_2, D \mapsto PD$, 故

$$\dim \ker f_1 = \dim \ker f_2.$$

计算有

$$\ker f_1 = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} AX_1 = X_1A, & AX_2 = X_2B \\ BX_3 = X_3A, & BX_4 = X_4B \end{cases} \right\}.$$

令

$$U = \{(X_3, X_4) : BX_3 = X_3A, BX_4 = X_4B\},$$

我们有

$$g_1 : \ker f_1 \to U, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

是满射. 再考虑

$$g_2 : \ker f_2 \to U, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X_3 & X_4 \end{pmatrix},$$

注意 X_3, X_4 有限制故不一定满射. 下证 g_2 满射.

注意到 $\operatorname{Im} g_2 \subset \operatorname{Im} g_1 = U$, 只需证明 $\dim \operatorname{Im} g_2 = \dim \operatorname{Im} g_1$, 这等价于

$$\dim \ker f_1 - \dim \ker g_2 = \dim \ker f_2 - \dim \ker g_1.$$

注意到

$$\begin{aligned} \ker g_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : AX_1 = X_1A, AX_2 = X_2B \right\} \\ \ker g_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} : AX_1 = X_1A, AX_2 = X_2B \right\}, \end{aligned}$$

我们有 $\dim \ker g_2 = \dim \ker g_1$, 现在就有 g_2 满射, 故 $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \end{pmatrix} \in U$, 自然有 $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \in \ker f_2$, 我们完成了证明.

我们来看一个课本定理:

定理 23.47

设 V 是代数闭域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, 则线性变换 $A : V \to V$ 可对角化的充要条件是对 A 的任一不变子空间 $W \subset V$, 都有 A 的不变补空间 U, 即存在 A 的不变子空间 $U \subset V$ 使得 $V = U \oplus W$. ♡

注本题要仔细体会证明(23.107)的过程, 这是一个固定套路, 其关键在于中国剩余定理的运用和注意到 $A|_{V_{\lambda_i}}, i = 1, 2, \cdots, s$ 有互素的极小多项式.

证明 必要性:

设线性变换 $A : V \to V$ 可对角化, 则

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}, \tag{23.106}$$

这里 $V_{\lambda_i}, i=1,2,\cdots,s$ 是互不相同的属于 A 的特征值 λ_i 的特征子空间.

对 A 的任一不变子空间 $W\subset V$, 我们断言

$$W=\left(W\bigcap V_{\lambda_1}\right)\oplus\left(W\bigcap V_{\lambda_2}\right)\oplus\cdots\oplus\left(W\bigcap V_{\lambda_s}\right). \tag{23.107}$$

事实上, 显然

$$W\supset\left(W\bigcap V_{\lambda_1}\right)\oplus\left(W\bigcap V_{\lambda_2}\right)\oplus\cdots\oplus\left(W\bigcap V_{\lambda_s}\right). \tag{23.108}$$

对 $x\in W$, 由(23.106)得 $x_i\in V_{\lambda_i}, i=1,2,\cdots,s$ 使得 $x=\sum\limits_{i=1}^{s}x_i$. 由中国剩余定理23.1, 我们知道存在多项式 $p\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$p_j(x)\equiv\delta_{ij}\left(\mathrm{mod}\,(x-\lambda_i)\right), i,j=1,2,\cdots,n. \tag{23.109}$$

由(23.109)得

$$x_j=\sum_{i=1}^{s}p_j(A)x_i=p_j(A)x\in W, j=1,2,\cdots,s.$$

现在我们由 $x_j\in W\bigcap V_{\lambda_j}, j=1,2,\cdots,s$ 知

$$W\subset\left(W\bigcap V_{\lambda_1}\right)\oplus\left(W\bigcap V_{\lambda_2}\right)\oplus\cdots\oplus\left(W\bigcap V_{\lambda_s}\right). \tag{23.110}$$

结合(23.108)和(23.110)得(23.107).

对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 取 $W\bigcap V_{\lambda_i}$ 在 V_{λ_i} 的补空间 U_i. 注意到 $A|_{V_{\lambda_i}}$ 是数量矩阵, 于是 U_i 是 A 不变子空间. 考虑

$$U\triangleq U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s.$$

显然 U 是 A 不变子空间且 $V=W\oplus U$.

充分性:

若 A 的任一不变子空间 $W\subset V$, 都有 A 的不变补空间 U, 我们来对矩阵阶数归纳证明 A 可对角化.

当 $n=1$, 这没什么好证的, 假设命题对 $n-1$ 成立, 则对 n 时, 首先设 V_λ 是 A 的属于特征值 $\lambda\in\mathbb{C}$ 的特征子空间, 则若 $V=V_\lambda$, 已经有 A 是数量矩阵.

若 $V\neq V_\lambda$, 则存在 A 的不变补空间 U_λ 使得 $V=V_\lambda\oplus U_\lambda$. 现在对任何 A 的不变子空间 $W\subset U_\lambda$, 取 A 的不变补空间 U_W 使得 $V=W\oplus U_W$.

注意到 $U_W\bigcap U_\lambda$ 是 A 的不变子空间. 又注意到 $A|_{U_\lambda}$ 没有特征值 λ, 所以其极小多项式和 $A|_{V_\lambda}$ 极小多项式互素. 类似必要性用中国剩余定理得

$$U_\lambda=W\oplus\left(U_W\bigcap U_\lambda\right). \tag{23.111}$$

由(23.111)得 $A|_{U_\lambda}$ 满足归纳假设, 因此 $A|_{U_\lambda}$ 可对角化, 现在显然 A 可对角化. 我们完成了证明.

来看 2010 南开大学最难考研高等代数题.

例题 23.133* 设 V 是 n 维复线性空间, $\mathrm{End}V$ 是 V 上全部线性变换的集合. 设 $A\subset B$ 是 $\mathrm{End}V$ 的子空间并记

$$M\triangleq\{x\in\mathrm{End}V:xy-yx\in A,\forall y\in B\}.$$

证明: 若 $x_0\in M$ 且 $\mathrm{tr}(x_0y)=0,\forall y\in M$, 则 x_0 是幂零线性变换.

证明 记 $T_x:\mathrm{End}V\to\mathrm{End}V, y\mapsto xy-yx$, 则 $x_0\in M$ 等价于 T_{x_0} 把 B 映入 A. 现在对 $x_0\in M$, 由 Jordan 分解23.2, 我们设 $x_0=s+n$, 这里 s 可对角化, n 幂零, 且 s,n 是 x_0 不含常系数的多项式, 则我们只需证明 $s=0$. 不妨考虑 x_0 为 Jordan 标准形, 即

$$s=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix},n=\begin{pmatrix}0&*&*&*\\&0&*&*\\&&\ddots&*\\&&&0\end{pmatrix}.$$

本题就是合理的取一些 $y\in M$ 使得根据 $\mathrm{tr}(x_0y)=0$ 来推出 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

Step 1 因为 T_{x_0} 把 B 映入 A, 所以 T_{x_0} 的不具有常数项的多项式也把 B 映入 A. 注意到 s 可以表示为 x_0 没有常数项的多项式, 自然猜想 T_s 可以表示为 T_{x_0} 的不具有常数项的多项式. 事实上, 我们注意到

$$T_{x_0}(z)=(s+n)z-z(s+n)=sz-zs+nz-zn=T_s(z)+T_n(z),\forall z\in \mathrm{End}V. \tag{23.112}$$

下面去证明上式是 Jordan 分解. 事实上由定理23.21我们知道 s 可对角化给出 T_s 可对角化. 又

$$T_n(z)=nz-zn=T_n'(z)-T_n''(z),\forall z\in \mathrm{End}V,$$

我们有当 $m\in\mathbb{N}$ 足够大成立

$$[T_n'(z)]^m=n^mz=0,[T_n''(z)]^m=zn^m=0,\forall z\in \mathrm{End}V.$$

再注意到

$$T_n'(T_n''(z))=nT_n''(z)=nzn=T_n''(nz)=T_n''(T_n'(z)),\forall z\in \mathrm{End}V,$$

我们有

$$T_n^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k[T_m']^k[T_m'']^{m-k}.$$

即当 $m\in\mathbb{N}$ 充分大时 $T_n^m=0$. 故 T_n 是幂零的.

现在容易验证 $T_nT_s=T_sT_n$, 于是由定理23.21的唯一性部分我们知道(23.112)的确是 Jordan 分解, 因此 T_s 可以表示为 T_{x_0} 的不具有常数项的多项式.

Step 2 现在我们来看哪些 $y\in \mathrm{End}V$ 在 M 中.

现在来计算 T_s. 注意到

$$T_s(E_{ij})=(a_i-a_j)E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n.$$

于是对于没有常数项的多项式 r, 我们有

$$r(T_s)(E_{ij})=r(a_i-a_j)\cdot E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n.$$

要使得 $y\in M$, 我们期待取 T_y 表示成 T_s 没有常数项的多项式. 对任何一组 $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^n\subset\mathbb{C}$ 满足

$$c_{ii}=0,T_y(E_{ij})=c_{ij}E_{ij},i,j=1,2,\cdots,n,$$

且对 $a_i-a_j=a_s-a_t$ 有 $c_{ij}=c_{st}$, 我们由拉格朗日插值知肯定存在没有常数项的多项式 r 使得 $r(a_i-a_j)=c_{ij}$. 现在 $T_y=r(T_s)$, 从而 $y\in M$. 这就刻画了一些在 M 中的 y.

Step 3 实际上我们只需取 M 中形如 $\begin{pmatrix}t_1&&&\\&t_2&&\\&&\ddots&\\&&&t_n\end{pmatrix}$ 的 y 就可以了.

把 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 张成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 N. 对任何线性函数为 $f\in N^*$, 我们取

$$y=\begin{pmatrix}f(a_1)&&&\\&f(a_2)&&\\&&\ddots&\\&&&f(a_n)\end{pmatrix}\in M,$$

则我们有

$$\mathrm{tr}(x_0y)=\sum_{j=1}^{n}a_jf(a_j)=0.$$

上式两边作用 f 得

$$\sum_{j=1}^{n}f^2(a_j)=0\Rightarrow f(a_i)=0,i=1,2,\cdots,n.$$

现在我们知道 $\dim N^*=0$, 故 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 这就证明了 $s=0$, 从而 x_0 幂零.

我们完成了证明.

23.6 向量组问题

例题 23.134 设自然数 $s \geqslant 2$, 线性空间中, 设向量 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是至少存在一个 $i \in \{2, 3, \cdots, s\}$ 使得 α_i 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

注 本题精细的刻画了线性表出方式.

笔记 注意仔细体会抓极值这个数学基本思想.

证明 充分性: 若存在一个 $i \in \{2, 3, \cdots, s\}$ 使得 α_i 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出, 显然向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

必要性: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关. 设不全为 0 的数字 $c_i, i = 1, 2, \cdots, s$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{s} c_i \alpha_i = 0$. 取最大的 i_0 使得 $c_{i_0} \neq 0$, 则 $i_0 \geqslant 2$, 否则 $\alpha_1 = \mathbf{0}$ 而矛盾!. 现在

$$\sum_{i=1}^{i_0} c_i \alpha_i = 0 \Rightarrow a_{i_0} = -\sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{c_i}{c_{i_0}} \alpha_i,$$

这就完成了证明.

例题 23.135 线性空间中, 设 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出. 证明: 表示方法唯一的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

证明 充分性: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关但有两种表示方式

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} c_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} c_i' \alpha_i.$$

现在

$$\sum_{i=1}^{r} (c_i - c_i') \alpha_i = \beta - \beta = \mathbf{0},$$

即

$$c_i = c_i', i = 1, 2, \cdots, r.$$

因此我们证明了表示方式唯一.

必要性: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关. 设不全为 0 的数字 $c_i'', i = 1, 2, \cdots, r$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{r} c_i'' \alpha_i = 0$. 再设 $\beta = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i''' \alpha_i$. 我们还有另外一种表示方式

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} \left(c_i^{'''+c_i''}\right) \alpha_i.$$

现在我们完成了证明.

例题 23.136 线性空间中, 设向量 $\beta \neq \mathbf{0}$ 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 向量组 $\beta\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关. 证明:$\beta\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中有且仅有一个向量 $\alpha_j, 1 \leqslant j \leqslant n$ 可由其前面的向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{j-1}$ 线性表出.

证明 内容...

例题 23.137 线性空间中设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关. 证明: 当且仅当 n 为奇数时, 向量组

$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$$

也线性无关.

证明 内容...

例题 23.138 线性空间中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 秩为 r. 证明其任意 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$ 秩 $\geqslant r + m - s$.

证明 内容...

例题 23.139 替换定理 线性空间中, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关且可以被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出. 则可以从 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 选出 r 个向量替换为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 后得到的新向量组与从 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价.

证明

例题 23.140 设 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 的一组基. W 是非平凡子空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 W 的一组基. 证明: $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 中可以找到 $n-r$ 个向量 $\epsilon_{i_1},\epsilon_{i_2},\cdots,\epsilon_{i_{n-r}}$ 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\epsilon_{i_1},\epsilon_{i_2},\cdots,\epsilon_{i_{n-r}}$ 是 V 的一组基.

证明 不失一般性[65], 假设

$$\epsilon_i=e_i,i=1,2,\cdots,n.$$

考虑矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r\end{pmatrix}$$

的 r 阶非 0 子式, 不妨设为前 r 行[66]. 取

$$i_j=r+j,j=1,2,\cdots,n-r.$$

此时矩阵形如

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & \epsilon_{i_1} & \epsilon_{i_2} & \cdots & \epsilon_{i_{n-r}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_r & 0\\ * & E_{n-r}\end{pmatrix},A_r\in\mathbb{F}^{r\times r},\det A_r\neq 0.$$

至此我们证明了

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & \epsilon_{i_1} & \epsilon_{i_2} & \cdots & \epsilon_{i_{n-r}}\end{pmatrix}\neq 0,$$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\epsilon_{i_1},\epsilon_{i_2},\cdots,\epsilon_{i_{n-r}}$ 是 V 的一组基.

例题 23.141 望远镜公式 设 $\mathbb{E}_1\subset\mathbb{E}_2\subset\mathbb{E}_3$ 都是域. 若 $\mathbb{E}_2$ 视为 $\mathbb{E}_1$ 上的线性空间维数是 m, $\mathbb{E}_3$ 视为 $\mathbb{E}_2$ 上的线性空间维数是 n. 证明 $\mathbb{E}_3$ 视为 $\mathbb{E}_1$ 上的线性空间维数是 mn.

注 如不是直接证明此题, 本结果可以直接使用.

证明 我们设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 $\mathbb{E}_1$ 上的线性空间 $\mathbb{E}_2$ 的一组基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $\mathbb{E}_2$ 上的线性空间 $\mathbb{E}_3$ 的一组基.

设

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\alpha_i\beta_j=0,c_{ij}\in\mathbb{E}_1,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\alpha_i\right)\beta_j=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\alpha_i=0,j=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow c_{ij}=0,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n,$$

即 $\{\alpha_i\beta_j:1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$ 在域 $\mathbb{E}_1$ 上线性无关.

对

$$x=\sum_{j=1}^{n}c_j\beta_j\in\mathbb{E}_3,c_j\in\mathbb{E}_2,j=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$c_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i,a_{ij}\in\mathbb{E}_1,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.$$

因此

$$x=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i\beta_j,$$

从而 $\mathbb{E}_3$ 视为 $\mathbb{E}_1$ 上的线性空间维数是 mn. 这就完成了证明.

[65] 考虑矩阵表示.

[66] 否则交换行列即可.

23.7 数学类线性代数杂题

来看一个大学数学征解题.

例题 23.142 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且满足对任何 $k\in\mathbb{N}$ 都有 $\left|A^k+I_n\right|=1$. 证明 A 是幂零矩阵.

证明 证明的想法类似于23.4. 事实上设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 由题目条件得

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j^k\right)=1,\forall k\in\mathbb{N}. \tag{23.113}$$

实际上有

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j\right)=1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j+\cdots+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{23.114}$$

展开(23.113)得

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\lambda_j^k\right)=1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i^k\lambda_j^k+\cdots+\lambda_1^k\lambda_2^k\cdots\lambda_n^k. \tag{23.115}$$

将(23.114)中每项看成 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$, 由(23.115),(23.113)得

$$y_1^k+y_2^k+\cdots+y_{2^n-1}^k=0,\forall k\in\mathbb{N}.$$

由牛顿公式得 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$ 所有初等对称多项式为 0. 从而 $y_1,y_2,\cdots,y_{2^n-1}$ 是多项式 $y^{2^n-1}=0$ 的全部根. 这就给出了

$$y_i=0,i=1,2,\cdots,2^n-1\Rightarrow\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,n,$$

即 A 是幂零矩阵.

来看一个类似的竞赛真题.

例题 23.143 设 A 是 3 阶复矩阵, 对 $k=1,2,\cdots,7$, 我们有

$$\left|I+A^k\right|=1,$$

证明 A 是幂零矩阵, 并问 k 是否可只取 $1,2,\cdots,6$.

证明 事实上, 设 $\lambda_i,i=1,2,3$ 是 A 的特征值, 那么

$$\left(1+\lambda_1^k\right)\left(1+\lambda_2^k\right)\left(1+\lambda_3^k\right)=1,k=1,2,\cdots,7.$$

于是我们有

$$\left(1+\lambda_1^k\right)\left(1+\lambda_2^k\right)\left(1+\lambda_3^k\right)=1+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\lambda_1^k\lambda_3^k+\lambda_2^k\lambda_3^k+\lambda_1^k\lambda_2^k\lambda_3^k,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\lambda_1^k\lambda_3^k+\lambda_2^k\lambda_3^k+\lambda_1^k\lambda_2^k\lambda_3^k=0,k=1,2,\cdots,7.$$

上面一共有 7 项, 这 7 个数字的小于等于 7 次的幂和为 0, 由牛顿公式他们是 $\lambda^7=0$ 的七个根, 因此我们推出了

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$$

这就说明了 A 幂零.

如果 k 只能取 $1,2,3\cdots,6$, 反例可取

$$A=\begin{pmatrix}e^{\frac{2\pi i}{7}}&0&0\\0&e^{\frac{4\pi i}{7}}&0\\0&0&e^{\frac{8\pi i}{7}}\end{pmatrix}.$$

反例甚至可以完整的刻画出来, 因为原题没要求, 所以留给读者思考.

来看浙江大学夏令营高等代数真题.

例题 23.144 设 f,g 是互素多项式且 A 是一个 n 阶矩阵, 证明 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的

秩之和为 n.

证明 由裴蜀等式, 存在多项式 a,b 使得 $af+bg=1$. 于是

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(A) & b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} f(A) & a(A)f(A)+b(A)g(A) \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(A) & E \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(A) & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & E \\ -f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E \\ f(A)g(A) & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} f(A)g(A) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

即 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是 $f(A)$ 的秩和 $g(A)$ 的秩之和为 n.

例题 23.145 ♡ 设 $f,g\in\mathbb{C}[x], A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明:

$$r\left(\begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix}\right).$$

证明 设 $d\triangleq(f,g)\in\mathbb{C}[x]$. 熟知存在 $a,b\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $af+bg=d$. 现在我们初等变换得

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 \\ f(A) \\ g(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a(A)f(A)+b(A)g(A) \\ f(A) \\ g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(A) \\ f(A) \\ g(A) \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} d(A) \\ -\frac{f(A)}{d(A)}d(A)+f(A) \\ -\frac{g(A)}{d(A)}d(A)+g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(A) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} f(A) & g(A) & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(A) & g(A) & a(A)f(A)+b(A)g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & g(A) & d(A) \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} f(A)-\frac{f(A)}{d(A)}d(A), g(A)-\frac{g(A)}{d(A)}d(A), d(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d(A) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$r\left(\begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix}\right) = r(d(A)).$$

例题 23.146 设 A 是 n 阶幂零矩阵, B 是 n 阶方阵满足 $AB=BA$ 且 $r(AB)=r(B)$, 证明 $B=0$.

证明 $AB=BA$ 表明 $\operatorname{Im}B$ 是 A 不变子空间. 于是可以考虑 $A|_{\operatorname{Im}B}$. 由维数公式有

$$\begin{aligned}
\dim\operatorname{Im}B &= \dim\ker A|_{\operatorname{Im}B} + \dim\operatorname{Im}AB \\
&= \dim\ker A|_{\operatorname{Im}B} + \dim\operatorname{Im}B,
\end{aligned}$$

即 $\ker A|_{\operatorname{Im}B}=0$. 现在 $A|_{\operatorname{Im}B}$ 也是 $\operatorname{Im}B$ 上的满射. 于是由 $\left(A|_{\operatorname{Im}B}\right)^n = A^n|_{\operatorname{Im}B}=0$ 知 $A|_{\operatorname{Im}B}=0$, 从而 $\operatorname{Im}B=0$, 这就完成了证明.

例题 23.147 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(AB-BA+I)=1$, 证明

$$\operatorname{tr}(ABAB)-\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right)=\frac{n(n-1)}{2}. \tag{23.116}$$

证明 由秩 1 矩阵性质, 我们知道存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 使得 $AB-BA+I=\alpha\beta^T$, 于是我们有

$$n=\operatorname{tr}(AB-BA+I)=\operatorname{tr}\left(\alpha\beta^T\right)=\operatorname{tr}\left(\beta^T\alpha\right).$$

现在

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left((AB-BA)^2\right)&=\mathrm{tr}\left(ABAB-AB^2A-BA^2B+BABA\right)\\&=\mathrm{tr}\left(ABAB-A^2B^2-A^2B^2+ABAB\right)\\&=2\mathrm{tr}\left(ABAB-A^2B^2\right)=\mathrm{tr}\left(\left(\alpha\beta^T-I\right)^2\right).\end{aligned}$$

利用推论21.1, 我们有 $\alpha\beta^T$ 特征值为 $\beta^T\alpha,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1个}$. 故 $\left(\alpha\beta^T-I\right)^2$ 特征值为 $\left(\beta^T\alpha-1\right)^2,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1个}$. 于是

$$\mathrm{tr}\left(ABAB\right)-\mathrm{tr}\left(A^2B^2\right)=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

来看 2024 浙江大学夏令营压轴题.

例题 23.148 设 $n\geqslant 3$ 阶矩阵 $A=(a_{ij}),a_{ij}=\begin{cases}3i, & i=j\\ 3i+1, & i<j\\ 2-3j, & i>j\end{cases}$, 证明 $\det A$ 是 3 的倍数当且仅当 n 是奇数.

笔记 mod p 技巧几乎快直接怼脸了. 本题同样需要积累一种特别的求行列式方法.

证明 我们在有限域 $\mathbb{Z}_3$ 上考虑矩阵 A, 即

$$A=(a_{ij}),a_{ij}=\begin{cases}0, & i=j\\ 1, & i<j\\ 2, & i>j\end{cases},$$

故 $A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\2&0&\ddots&1\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\2&2&\cdots&0\end{pmatrix}$. 现在定义

$$f(x)=\begin{vmatrix}x&x+1&\cdots&x+1\\x+2&x&\ddots&x+1\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\x+2&x+2&\cdots&x\end{vmatrix},$$

则显然 f 是关于 x 的一次函数[67]且

$$f(-1)=(-1)^n,f(-2)=(-2)^n\Rightarrow f(x)=\left((-1)^n-(-2)^n\right)(x+1)+(-1)^n.$$

现在

$$|A|=f(0)=2(-1)^n-(-2)^n=\begin{cases}2-4^m, & n=2m\\ -2+2^{2m-1}, & n=2m-1\end{cases},$$

注意到

$$4\equiv 1\,(\mathrm{mod}3)\Rightarrow 4^m\equiv 1\,(\mathrm{mod}3)\Rightarrow 2-4^m\equiv 1\,(\mathrm{mod}3),$$

以及

$$4\equiv 1\,(\mathrm{mod}3)\Rightarrow 2^{2m-2}\equiv 1\,(\mathrm{mod}3)\Rightarrow 2\left(2^{2m-2}-1\right)\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)\Rightarrow -2+2^{2m-1}\equiv 0\,(\mathrm{mod}3),$$

这就完成了证明.

来看复旦大学期中高等代数压轴题.

[67]注意初等变换, 让每一行都减去第一行.

例题 23.149 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明存在 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{C}$ 使得 $A-c_1e^A-c_2e^{2A}-\cdots-c_{n-1}e^{(n-1)A}$ 为可对角化矩阵.

证明 **Step 1**

当 A 是幂零矩阵, 我们有[68]

$$\begin{pmatrix} I_n\\ e^A\\ e^{2A}\\ \vdots\\ e^{(n-1)A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\\ 1 & 2 & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n\\ A\\ A^2\\ \vdots\\ A^{n-1}\end{pmatrix}.$$

容易通过初等变换[69]得到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\\ 1 & 2 & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵. 于是

$$\begin{pmatrix} I_n\\ A\\ A^2\\ \vdots\\ A^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\\ 1 & 2 & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_n\\ e^A\\ e^{2A}\\ \vdots\\ e^{(n-1)A}\end{pmatrix},$$

即 A 可以表示为 e^A 的不超过 $n-1$ 次多项式. 于是存在 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{C}$ 使得 $A-c_1e^A-c_2e^{2A}-\cdots-c_{n-1}e^{(n-1)A}=0$ 为可对角化矩阵.

Step 2

当 A 是一般的复 n 阶矩阵. 由 Jordan 分解定理23.2, 我们知道存在可对角化矩阵 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 幂零矩阵 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=B+C, BC=CB$ 且 B,C 都是 A 的多项式. 如果证明了 C 是 e^A 多项式不超过 $n-1$ 次多项式, 那么就足以说明 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{C}$ 使得 $A-c_1e^A-c_2e^{2A}-\cdots-c_{n-1}e^{(n-1)A}=B$ 为可对角化矩阵. 因为极小多项式最多 n 次, 所以只需证明 C 是 e^A 多项式即可.

为了证明 C 是 e^A 多项式, 我们注意到这个结论不随相似而改变, 因此不妨设 A 是其 Jordan 标准型且有

$$A=B+C=\operatorname{diag}\{\lambda_1E_{n_1},\lambda_2E_{n_2},\cdots,\lambda_sE_{n_s}\}+\operatorname{diag}\{C_1,C_2,\cdots,C_{n_s}\},$$

这里对每个 $i=1,2,\cdots,s$ 都有 λ_i 互不相同且 C_i 是 n_i 阶幂零矩阵.

Step 1 表明对每个 $i=1,2,\cdots,s$ 都有 C_i 是 e^{C_i} 的多项式, 从而也是 $e^{\lambda_i}e^{C_i}$ 的多项式. 我们设 $p_i\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$C_i=p_i\left(e^{\lambda_i}e^{C_i}\right),i=1,2,\cdots,s.$$

注意到 $e^{\lambda_i}e^{C_i}$ 特征多项式是 $\left(\lambda-e^{\lambda_i}\right)^{n_i}$, 于是由中国剩余定理23.1, 我们有 $p\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$p\equiv p_i\left(\operatorname{mod}\left(\lambda-e^{\lambda_i}\right)^{n_i}\right),i=1,2,\cdots,s.$$

于是 $C=p\left(e^A\right)$, 这就完成了证明.

例题 23.150 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基, 证明 $\left\{\alpha_i\alpha_j^T\right\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的一组基.

[68]视 A 为不定元.

[69]让后面的行依次减去前面的行直到变成上三角矩阵.

证明 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}\alpha_i\alpha_j^T=0$, 则

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}=0,$$

这自然给出

$$\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}=0.$$

来看一组二次型的问题:

例题 23.151 二次型积分方法

1. 设 $t\geqslant 0,a_i>0,i=1,2,\cdots,n$, 证明 $A=\left(\frac{1}{(a_i+a_j)^t}\right)$ 是半正定的.
2. 设一组正数 $a_i,i=1,2,\cdots,n$ 满足 $a_i+a_j>1,i,j=1,2,\cdots,n$, 证明 $A=\left(\frac{1}{\ln(a_i+a_j)}\right)$ 是半正定矩阵.
3. 设 $a_i,i=1,2,\cdots,n$ 是实数, 证明 $A=\left(e^{-|a_i-a_j|}\right)$ 是半正定矩阵.
4. 设实数 $0\leqslant x\leqslant 1$, 证明 $A=\left(x^{|i-j|}\right),1\leqslant i,j\leqslant n$ 是半正定的.
5. 证明: n 阶矩阵 $A=\left\{\frac{1}{1+|i-j|}\right\}$ 是半正定的.
6. 设 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset(0,+\infty)$, 证明 $A=(\min\{x_i,x_j\})$ 是半正定的.
7. 设 $x\geqslant 1$, 证明 $A=\left(\frac{1+x+\cdots+x^{ij}}{1+ij}\right),i,j=1,2,\cdots,n$ 是半正定的.

笔记 此类问题关键是熟悉一些积分的结构, 利用积分来配方完成证明.

证明

1. 利用

$$\frac{1}{x^t}=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{\infty}y^{t-1}e^{-yx}\mathrm{d}y,x>0,,t\geqslant 0.$$

对 $x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{(a_i+a_j)^t}=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{\infty}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}y^{t-1}e^{-y(a_i+a_j)}x_ix_j\mathrm{d}y=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{\infty}y^{t-1}\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_ie^{-ya_i}\right|^2\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

这就证明了 A 是半正定的. 若 $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{(a_i+a_j)^t}=0$, 则 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_ie^{-ya_i}=0,\forall y\geqslant 0$, 于是

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ e^{-a_1} & e^{-a_2} & \cdots & e^{-a_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e^{-(n-1)a_1} & e^{-(n-1)a_2} & \ldots & e^{-(n-1)a_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0.$$

故当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同时, 系数矩阵的行列式是 Vandermonde 行列, 因此可逆知 A 是正定的.

2. 利用

$$\frac{1}{\ln x}=\int_0^{\infty}x^{-t}\mathrm{d}t,\frac{1}{x^t}=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{\infty}y^{t-1}e^{-yx}\mathrm{d}y,x>0,t\geqslant 0.$$

对 $x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n$, 我们运用第一问有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{\ln(a_i+a_j)}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\int_0^{\infty}\frac{x_ix_j}{(a_i+a_j)^t}\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

证毕!

3. 利用例题14.23, 我们有

$$e^{-|a|}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

于是对 $x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}e^{-|a_i-a_j|}x_ix_j&=\frac{1}{\pi}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{-1}(a_i-a_j)t}}{1+t^2}x_ix_j\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{e^{\sqrt{-1}a_it}}{\sqrt{1+t^2}}x_i\cdot\overline{\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{e^{\sqrt{-1}a_it}}{\sqrt{1+t^2}}x_j}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{e^{\sqrt{-1}a_it}}{\sqrt{1+t^2}}x_i\right|^2\mathrm{d}t\geqslant 0,\end{aligned}$$

证毕!

4. 不妨设 $x\neq 0$, 则利用第三问和 $x^{|i-j|}=e^{-\left|i\ln\frac{1}{x}-j\ln\frac{1}{x}\right|}$, 我们即完成证明. 实际上读者还能初等变换证明更强的 $\det A=\left(1-x^2\right)^{n-1}$.

5. 运用上一问, 对 $x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{1+|i-j|}=\int_0^1\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}t^{|i-j|}x_ix_j\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

证毕!

6. 对 $\{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}$, 定义

$$f_i(x)=\begin{cases}a_i, & x\in[0,x_i]\\0, & x\notin[0,x_i]\end{cases},i=1,2,\cdots,n,$$

则

$$a_ia_j\min\{x_i,x_j\}=\int_0^{\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

故我们有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_ia_j\min\{x_i,x_j\}=\int_0^{\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant n}f_i(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

这就完成了证明.

7. 当 $x=1$, 命题显然成立, 当 $x>1$ 时, 对 $\{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1+x+\cdots+x^{ij}}{1+ij}a_ia_j&=\frac{1}{x-1}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x^{ij+1}-1}{1+ij}a_ia_j\\&=\frac{1}{x-1}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\int_1^x a_ia_jy^{ij}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

运用了 Vandermonde 行列式可得

$$\det\left(x^{ij}\right)=x^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(x^j-x^i\right)>0.$$

而所有顺序主子式有着类似的结构, 故我们证明了 $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\int_0^1 a_ia_jx^{ij}\geqslant 0$, 从而完成了证明.

例题 23.152 设 $A,B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$AB=BA,AC=CA,|B|=|C|=0,|B+C|\neq 0.$$

证明:$\mathbb{C}^n$ 能分解为矩阵 A 的两个非平凡不变子空间的直和,

证明 如果 $\mathbb{C}^n$ 不能分解为矩阵 A 的两个非平凡不变子空间的直和, 那么 A 必然不能相似成分块对角矩阵, 因此 A 只能相似一个孤立的 Jordan 块 $J_n(a),a\in\mathbb{C}$. 注意到 B,C 与 A 可交换, 所以由命题21.2知存在多项式 $p,q\in\mathbb{C}[x]$

使得 $B=p(A),C=q(A)$. 于是 $|B|=|C|=0$ 知 $p(a)=q(a)=0$. $|B+C|\neq 0$ 知 $p(a)+q(a)\neq 0$, 矛盾! 这就完成了证明.

例题 23.153 在 n 维欧式空间 V 中, 两两夹角为钝角的非 0 向量个数至多只有 $n+1$ 个.

证明 先构造 $n+1$ 个两两夹角为钝角的单位向量. $n=1$ 是显然的, 假定对维数小于 n 为空间, 的确是存在的, 则对 n, 在 V 的一个 $n-1$ 维子空间中取 n 个两两夹角为钝角的向量, 记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量 β. 待定向量

$$\alpha_1-\lambda\beta,\alpha_2-\lambda\beta,\cdots,\alpha_n-\lambda\beta,\beta. \tag{23.117}$$

现在我们有

$$(\alpha_i-\lambda\beta,\beta)=-\lambda<0,\forall i=1,2,\cdots,n\Leftrightarrow\lambda>0;$$
$$(\alpha_i-\lambda\beta,\alpha_j-\lambda\beta)=(\alpha_i,\alpha_j)+\lambda^2<0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant n\Leftrightarrow\lambda^2<\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}\{-(\alpha_i,\alpha_j)\}.$$

于是这样的 λ 肯定存在. 又若 $\alpha_i-\lambda\beta=\beta$, 则 $\beta=\frac{\alpha_i}{1+\lambda}\in$ 子空间, 矛盾! $\alpha_i-\lambda\beta=\alpha_j-\lambda\beta\Leftrightarrow i=j$, 这也是矛盾! 于是我们证明了(23.117)中向量的确互不相同, 这就归纳完成了构造.

再证明两两夹角为钝角的非 0 向量个数不超过 $n+1$ 个. $n=1$ 显然, 假定对维数小于 n 为空间, 的确成立, 在 n 时, 假定有 $n+2$ 个不同的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+2}$ 两两夹角为钝角. 受存在性构造的启发, 我们把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 正交化, 但不必单位化. 即令

$$\beta_i=\alpha_i-(\alpha_i,\alpha_{n+2})\,\alpha_{n+2},i=1,2,\cdots,n+1.$$

注意到

$$(\beta_i,\alpha_{n+2})=0,i=1,2,\cdots,n+1;$$
$$(\beta_i,\beta_j)=(\alpha_i,\alpha_j)-(\alpha_i,\alpha_{n+2})\,(\alpha_j,\alpha_{n+2})<0,1\leqslant i<j\leqslant n+1,$$

我们有 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n+1}$ 张成的空间至多是 $n-1$ 维, 由归纳假设, 他应该至多只有 n 个两两正交, 这是一个矛盾! 至此我们完成了证明.

例题 23.154 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A\overline{A}=B\overline{B}=I_n$, 证明: A,B 在 $\mathbb{C}$ 上相似则存在实可逆矩阵 T 使得 $B=T^{-1}AT$.

证明 设可逆复矩阵 $P=X+iY,X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $B=P^{-1}AP$, 则

$$AP=PB\Rightarrow\overline{A}\cdot\overline{P}=\overline{P}\cdot\overline{B}\Rightarrow A^{-1}\overline{P}=\overline{P}\cdot B^{-1}\Rightarrow A\overline{P}=\overline{P}B.$$

注意到实多项式 $|X+\lambda Y|$ 有非 0 的点 i, 所以其不是 0 多项式. 故取 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $T=X+\lambda Y$ 可逆. 现在

$$\begin{cases}A(X+iY)=B(X+iY)\\A(X-iY)=B(X-iY)\end{cases}\Rightarrow AX=BX,AY=BY\Rightarrow AT=TB,$$

故 $B=T^{-1}AT$.

例题 23.155 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n},f\in\mathbb{C}[x]$, 证明: A 可相似对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix}A&f(A)\\f(A)&A\end{pmatrix}$ 可对角化.

证明 **Step 1**

首先

$$\begin{pmatrix}A&f(A)\\f(A)&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}f(A)+A&f(A)+A\\f(A)&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}f(A)+A&0\\f(A)&A-f(A)\end{pmatrix}.$$

由分块矩阵的相似初等变换21.5我们有

$$\begin{pmatrix}A&f(A)\\f(A)&A\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}f(A)+A&0\\f(A)&A-f(A)\end{pmatrix}.$$

若 $\begin{pmatrix}A&f(A)\\f(A)&A\end{pmatrix}$ 可对角化则 $\begin{pmatrix}f(A)+A&0\\f(A)&A-f(A)\end{pmatrix}$ 也可对角化, 因此由命题23.1我们知道 $f(A)+A,A-f(A)$ 都可以对角化.

因为 $f(A)+A, A-f(A)$ 可交换, 由命题23.4我们知道 $f(A)+A, A-f(A)$ 可以同时相似对角化, 所以设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是把它们对角化的矩阵, 我们有

$$\frac{P^{-1}(f(A)+A)P+P^{-1}(A-f(A))P}{2}=P^{-1}AP$$

是对角矩阵, 即 A 可相似对角化.

Step 2

若 A 可对角化, 设 $Ax=\lambda x, Ay=\mu y, x, y\neq 0$, 我们有

$$\begin{pmatrix}A & f(A)\\ f(A) & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax+f(A)y\\ f(A)x+Ay\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x+f(\mu)y\\ f(\lambda)x+\mu y\end{pmatrix}.$$

于是当 $y=x$ 有

$$\begin{pmatrix}A & f(A)\\ f(A) & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(\lambda+f(\lambda))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

当 $y=-x$ 有

$$\begin{pmatrix}A & f(A)\\ f(A) & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(\lambda-f(\lambda))\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

设 A 的一组最大线性无关特征向量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则 $\begin{pmatrix}x_i\\ x_i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_i\\ -x_i\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,n$ 构成 $\begin{pmatrix}A & f(A)\\ f(A) & A\end{pmatrix}$ 特征向量. 设

$$\sum_{i=1}^{n}\left[c_i\begin{pmatrix}x_i\\ x_i\end{pmatrix}+d_i\begin{pmatrix}x_i\\ -x_i\end{pmatrix}\right]=0,$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}(c_i+d_i)x_i\\ (c_i-d_i)x_i\end{pmatrix}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(c_i+d_i)x_i=\sum_{i=1}^{n}(c_i-d_i)x_i=0.$$

相加和相减上式并利用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关得

$$c_i, d_i=0, i=1,2,\cdots,n.$$

现在我们证明了 $\begin{pmatrix}x_i\\ x_i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_i\\ -x_i\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,n$ 线性无关, 从而 $\begin{pmatrix}A & f(A)\\ f(A) & A\end{pmatrix}$ 可对角化.

我们完成了证明.

例题 23.156 设 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵. $A=\operatorname{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 任取 QA 的特征值 λ_0, 证明:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\leqslant|\lambda_0|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|. \tag{23.118}$$

证明 设 $QAx=\lambda_0 x, x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$, 我们有

$$x^*A^*Ax=x^*A^*Q^*QAx=|\lambda_0|^2x^*x.$$

现在

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot|x_i|^2=|\lambda_0|^2\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2.$$

即由命题21.15得(23.118)成立.

例题 23.157

1. 求 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$ 的所有特征值.

2. 求 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}2024 & -1 & & \\ -1 & 2024 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2024\end{pmatrix}$ 的所有特征值.

证明

1. 由三对角行列式的性质23.48得矩阵 A 特征多项式为[70] $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$, 这里
$$\alpha(\lambda)=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2},\beta(\lambda)=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}..$$
于是 A 特征值由 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}=1,\alpha\neq\beta$ 确定, 于是
$$\frac{\alpha}{\beta}=e^{\frac{2k\pi i}{n+1}},k=1,2,\cdots,n.$$
注意到 $\alpha+\beta=\lambda,\alpha\beta=1$, 我们有
$$\alpha^2=\alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=e^{\frac{2k\pi i}{n+1}},k=1,2,\cdots,n\Rightarrow\alpha=e^{\frac{k\pi i}{n+1}},\beta=e^{-\frac{k\pi i}{n+1}},k=1,2,\cdots,n.$$
因此我们就有 A 的特征值
$$\lambda_k=e^{\frac{k\pi i}{n+1}}+e^{-\frac{k\pi i}{n+1}}=2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),k=1,2,\cdots,n.$$
2. 注意到
$$A=\begin{pmatrix}2024 & -1 & & \\ -1 & 2024 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2024\end{pmatrix}=2024I_n-\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}.$$
于是由第 1 问结果得 A 的特征值
$$\lambda_k=2024-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),k=1,2,\cdots,n.$$

来看 2015 中科院夏令营压轴题.

例题 23.158 考虑赋范空间 $(\mathbb{C}^{n\times n},||\cdot||)$, 这里 $||(a_{ij})||\triangleq\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$, 解决下列问题:

1. 证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的稠密开集;
2. 证明 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中全体可对角化矩阵在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中稠密;
3. 对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义
$$f_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},B\mapsto AB-BA.$$
证明对任何 $p>0$ 都有
$$\left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:\mathrm{rank}(f_A)>p\right\}$$
是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的开集;
4. 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中所有幂零矩阵张成的子空间;
5. 对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 定义共轭类
$$C_A=\left\{P^{-1}AP:P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}.$$
证明: 若 A 为幂零矩阵则 $0\in\overline{C_A}$.

证明 注意到有限维空间范数都等价, 所以其实范数具体指定哪一个都是无所谓的.

1. 考虑连续映射
$$\det:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C},A\mapsto\det A,$$

[70] 有递推数列的特征多项式重根的时候可以视为极限情况, 此时单独验证不是特征值根.

即

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})=\left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:\det A\neq 0\right\}$$

是开集;

2. 因为任何矩阵可以酉相似为上三角矩阵23.2, 因此可以不妨只用可对角化矩阵逼近上三角矩阵. 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&*&\cdots&*\\&a_{22}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&*\\&&&a_{nn}\end{pmatrix},A_\epsilon=\begin{pmatrix}a_{11}+t_1\epsilon&*&\cdots&*\\&a_{22}+t_2\epsilon&\ddots&\vdots\\&&\ddots&*\\&&&a_{nn}+t_n\epsilon\end{pmatrix},$$

这里 $\epsilon>0,t_i\in\mathbb{R}$ 使得 A_ϵ 的特征值互不相同, 因此 A_ϵ 可对角化且 $\lim\limits_{\epsilon\to0^+}A_\epsilon=A$;

3. 注意到 f_A 的表示矩阵的元素是 A 的元素的连续函数. 设 $\mathrm{rank}(f_A)>p$, 则 f_A 有一个 $p+j,j\geqslant1$ 阶子式行列式不为 0. 由连续函数保号性, 我们知道这个子式在 A 的邻域也不为 0, 从而 $\mathrm{rank}(f_A)>p$. 故对任何 $p>0$ 都有

$$\left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:\mathrm{rank}(f_A)>p\right\}$$

是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的开集;

4. 这个子空间是全体

$$S=\left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n}:\mathrm{tr}(A)=0\right\}.\tag{23.119}$$

显然 S 包含一切幂零矩阵且是线性空间. 反之对任何 $A=(a_{ij})\in S$, 因为迹 0 矩阵都能相似为对角线全为 0 的矩阵, 即命题23.16, 我们可以不妨设 A 对角元全为 0, 于是有 $A=\sum\limits_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}$, 从而我们证明了(23.119).

5. 对一般的幂零矩阵 A, 注意到

$$A\sim\mathrm{diag}\left\{tJ_{n_1}(0),tJ_{n_2}(0),\cdots,tJ_{n_s}(0)\right\},\forall t\neq0,$$

以及

$$\lim_{t\to0}\mathrm{diag}\left\{tJ_{n_1}(0),tJ_{n_2}(0),\cdots,tJ_{n_s}(0)\right\}=0.$$

这就怎证明了 $0\in\overline{C_A}$.

例题 23.159 设 $\mathbb{F}$ 是一数域且 $AB=BA$. 设方程组 $ABX=0,AX=0,BX=0$ 的解空间分别是 V,V_1,V_2, 证明 $V=V_1\oplus V_2$ 的充要条件是存在 $C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $CA+DB=I_n$.

证明 初等变换得

$$\begin{pmatrix}A^T&B^T&I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&I_n\end{pmatrix}.$$

于是注意到

$$\begin{aligned}&\exists C,D\in\mathbb{F}^{n\times n},\text{使得}CA+DB=I_n\Leftrightarrow\exists C,D\in\mathbb{F}^{n\times n},\text{使得}\begin{pmatrix}C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=I_n\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A^T&B^T\end{pmatrix}X=I_n\text{在}\mathbb{F}^{2n\times n}\text{有解}\Leftrightarrow r\left(\begin{pmatrix}A^T&B^T\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}A^T&B^T&I_n\end{pmatrix}\right)\\&\Leftrightarrow r\left(\begin{pmatrix}A^T&B^T\end{pmatrix}\right)=n\Leftrightarrow r\left(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right)=n\Leftrightarrow AX=0,BX=0\text{公共解只有0解}\\&\Leftrightarrow V_1\bigcap V_2=\{0\}.\end{aligned}$$

容易看到必要性得证.

对于充分性, 由上面的推导我们知道 V_1+V_2 是直和. 由 $AB=BA$ 我们知道 $V_1\oplus V_2\subset V$, 于是

$$n-r(AB)\geqslant n-r(A)+n-r(B)\Rightarrow r(AB)\leqslant n-r(A)-r(B).$$

由秩不等式我们得

$$n-r(AB)=n-r(A)+n-r(B),$$

即 $V=V_1\oplus V_2$。

例题 23.160 设 $\mathbb{F}$ 是一个域且 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},A^T=A,B^T=B$ 满足对任何 $C\in\mathbb{F}^{n\times n},C^T=C$ 都成立

$$|A+C|=|B+C|. \tag{23.120}$$

证明 $A=B$.

注 本题归纳起点是 $n=2$, 因为下面交换行列的操作在 $n=2$ 时并未改变矩阵的样子.

证明 当 $n=1$ 已经有 $A=B$. 当 $n=2$ 时考虑

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\0&x\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a'&b'\\b'&c'\end{pmatrix}.$$

那么由(23.120)得

$$\begin{vmatrix}a+1&b\\b&c+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a'+1&b'\\b'&c'+x\end{vmatrix}.$$

由行列式性质得

$$\begin{vmatrix}a&b\\b&c+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&b\\0&c+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a'&b'\\b'&c'+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&b'\\0&c'+x\end{vmatrix}. \tag{23.121}$$

再取 $C=\begin{pmatrix}0&0\\0&x\end{pmatrix}$, 那么由(23.120)得

$$\begin{vmatrix}a&b\\b&c+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a'&b'\\b'&c'+x\end{vmatrix}.$$

因此结合(23.121)得

$$c+x=c'+x\Rightarrow c=c'.$$

类似的考虑 $C=\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix}$, 此时得 $a=a'$.

在(23.120)取 $C=-A$ 得

$$|B-A|=0\Rightarrow-(b'-b)^2=0\Rightarrow b'=b,$$

即 $n=2$ 时得 $A=B$.

现在假设命题对 $n-1$ 时成立, 考虑

$$A=\begin{pmatrix}a&\beta^T\\\beta&A_{n-1}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b&\alpha^T\\\alpha&B_{n-1}\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0^T\\0&X\end{pmatrix}.$$

于是由(23.120)得

$$|A+C|=\begin{vmatrix}a+1&\beta^T\\\beta&A_{n-1}+X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b+1&\alpha^T\\\alpha&B_{n-1}+X\end{vmatrix}=|B+C|.$$

故

$$\begin{vmatrix}a&\beta^T\\\beta&A_{n-1}+X\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&\beta^T\\0&A_{n-1}+X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&\alpha^T\\\alpha&B_{n-1}+X\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&\alpha^T\\0&B_{n-1}+X\end{vmatrix}. \tag{23.122}$$

取 $C=\begin{pmatrix}0&0^T\\0&X\end{pmatrix}$ 并由(23.120)得

$$\begin{vmatrix}a&\beta^T\\\beta&A_{n-1}+X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&\alpha^T\\\alpha&B_{n-1}+X\end{vmatrix}.$$

结合(23.122)得

$$|A_{n-1}+X|=|B_{n-1}+X|.$$

由归纳假设我们知道 $A_{n-1}=B_{n-1}$.

类似的(23.120)中考虑

$$C=\begin{pmatrix}X & 0^T\\ 0 & 0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}X & 0^T\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

那么 A,B 左上角的 $n-1$ 阶子矩阵必然一致. 注意还有 $(1,n),(n,1)$ 元没有确定. 但我们同时交换 $1,2$ 行, $1,2$ 列, 此时对应正交变换[71]题目条件全部保留, 即 $(1,n),(n,1)$ 元处 A,B 值也一样. 这就证明了 n 时也有 $A=B$.

我们完成了证明.

例题 23.161 设 V 是线性空间, V_1^*,V_2^* 是 V^* 子空间. 设

$$W=\left\{v\in V:f(v)=0,\forall f\in V_1^*\bigcap V_2^*\right\};$$

$$W_i=\left\{v\in V:f(v)=0,\forall f\in V_i^*\right\},i=1,2.$$

证明:$W=W_1+W_2$.

证明 显然

$$W_1+W_2\subset W,W_1\bigcap W_2=\left(V_1^*+V_2^*\right)^{\perp},W=\left(V_1^*\bigcap V_2^*\right)^{\perp},$$

利用例题23.112和维数公式我们有

$$\begin{aligned}\dim\left(W_1+W_2\right)&=\dim W_1+\dim W_2-\dim\left(W_1\bigcap W_2\right)\\&=2n-\dim V_1^*-\dim V_2^*-\left(n-\dim\left(V_1^*+V_2^*\right)\right)\\&=n-\dim V_1^*-\dim V_2^*+\dim\left(V_1^*+V_2^*\right)\\&=n-\dim\left(V_1^*\bigcap V_2^*\right)=\dim W,\end{aligned}$$

于是我们证明了 $W=W_1+W_2$.

例题 23.162 设 $\mathbb{F}$ 是数域, 对 $f\in\mathbb{F}[x]$, 定义

$$(f(x))\triangleq\{f(x)g(x):g\in\mathbb{F}[x]\}.$$

证明: 若 f 是 10 次多项式, 计算 $\dim\left(\mathbb{F}[x]/(f(x))\right)$. 若 $f,g\in\mathbb{F}[x]$ 互素, 证明映射

$$\varphi:\mathbb{F}[x]/(f(x)g(x))\to\mathbb{F}[x]/(f(x))\times\mathbb{F}[x]/(g(x)),h+(fg)\mapsto(h+(f),h+(g))$$

是 $\mathbb{F}-$ 线性同构.

证明 考虑线性映射

$$T:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}_9[x],h\mapsto r,$$

这里 r 由带余除法得 $h=qf+r,\deg r<\deg f=10$ 确定. 于是 T 显然是满射且

$$h\in\ker T\Leftrightarrow f|h\Leftrightarrow h\in(f(x)),$$

即由同态基本定理得

$$\mathbb{F}[x]/(f(x))=\mathbb{F}[x]/\ker T\cong\mathbb{F}_9[x]\Rightarrow\dim\left(\mathbb{F}[x]/(f(x))\right)=10.$$

先证 φ 是良定义的. 显然 φ 是线性的, 事实上设 $h+(fg)=0$, 即 $h=kfg,k\in\mathbb{F}[x]$, 此时有

$$h+(f)=0,h+(g)=0,$$

即 φ 良定义.

再证明单射, 事实上设 $h+(fg)\in\ker\varphi$, 则 $f|h,g|h$. 因为 f,g 互素, 所以 $fg|h$, 所以 $h\in(fg)$, 即 $h+(fg)=0$. 因此 φ 是单射.

[71]一般域的正交矩阵可以自然定义.

相似第 1 问计算维数得

$$\dim\left(\mathbb{F}[x]/(f(x)g(x))\right)=\deg f+\deg g;$$

$$\dim\left(\mathbb{F}[x]/(f(x))\times\mathbb{F}[x]/(g(x))\right)=\dim\left(\mathbb{F}[x]/(f(x))\right)+\dim\left(\mathbb{F}[x]/(g(x))\right)=\deg f+\deg g.$$

于是我们证明了 φ 是 $\mathbb{F}-$ 线性同构.

例题 23.163 设 $A,B,AB\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是复正规矩阵, 证明: BA 也是复正规矩阵.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(BA(BA)^*\right)&=\operatorname{tr}\left(BAA^*B^*\right)=\operatorname{tr}\left(B^*BAA^*\right)\\&=\operatorname{tr}\left(BB^*A^*A\right)=\operatorname{tr}\left(ABB^*A^*\right)=\operatorname{tr}\left((AB)(AB)^*\right),\end{aligned}$$

由 AB,BA 有完全一样的非 0 特征值21.1以及舒尔不等式取等条件21.7, 我们有 BA 满足舒尔不等式21.7取等条件, 这就证明了 BA 也是复正规矩阵.

例题 23.164 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是复矩阵. 证明 A 是复正规充要条件是

$$r(A)=r\left(A^2\right),A^2A^*=A^*A^2,A^3A^*=A^*A^3.\tag{23.123}$$

证明 当 A 复正规, 由例23.28知 A^* 是 A 的多项式. 由 A 可对角化知 A 的 0 特征值对应 Jordan 块都是 1 阶的, 故(23.123)成立. 反之, 当(23.123)成立. 若 A 可逆, 则由(23.123)知

$$A^3A^*=AA^*A^2,A^*A^3=A^2A^*A\Rightarrow AA^*A^2=A^2A^*A\Rightarrow A^*A=AA^*.$$

若 A 不可逆, 取 $\ker A$ 的一组标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 并扩充为 $\mathbb{C}^n$ 一组标准正交基. 由 $r(A)=r\left(A^2\right)$ 知 A 的 0 特征值代数重数就是几何重数, 所以在这组基下 $A=\begin{pmatrix}0&B\\0&C\end{pmatrix}$, C 可逆. 现在(23.123)变成

$$\begin{pmatrix}0&BC^2\\0&C^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\B^*&C^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\B^*&C^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&BC^2\\0&C^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&BC\\0&C^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\B^*&C^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\B^*&C^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&BC\\0&C^2\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}BC^2B^*&BC^2C^*\\C^3B^*&C^3C^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&B^*BC^2+C^*C^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}BCB^*&BCC^*\\C^2B^*&C^2C^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&B^*BC+C^*C^2\end{pmatrix}.$$

容易看到 $B=0$, 于是 C 也满足(23.123)的性质, 因此由可逆的情况的推导我们知道 C 正规, 因此 A 是复正规. 这就完成了证明.

例题 23.165 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在 $n+1$ 个不同实数 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$ 使得

$$A+t_iB,i=1,2,\cdots,n+1$$

是幂零矩阵, 证明 A,B 都是幂零矩阵.

证明 定义 $p(\lambda,\mu)\triangleq|\lambda I-A-\mu B|$. 由 $A+t_iB,i=1,2,\cdots,n+1$ 都是是幂零矩阵得

$$p(\lambda,t_i)=\lambda^n,i=1,2,\cdots,n+1.$$

对固定的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 注意到不超过 n 次的多项式 $p(\lambda,\cdot)-\lambda^n$ 有 $n+1$ 个不同实根 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$, 于是 $p(\lambda,\cdot)-\lambda^n\equiv0$, 即

$$|\lambda I-A-\mu B|=\lambda^n,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}.$$

让 $\mu=0$ 得 $|\lambda I-A|=\lambda^n,\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 即 A 是幂零矩阵. 注意到

$$\mu^n\left|\frac{\lambda}{\mu}I-\frac{A}{\mu}-B\right|=\lambda^n.$$

把 λ 用 $\mu\lambda$ 替换得

$$\left|\lambda I-\frac{A}{\mu}-B\right|=\lambda^n.$$

让 $\mu\to+\infty$ 得 $|\lambda I-B|=\lambda^n$, 即 B 也是幂零矩阵.

例题 23.166 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 A 与 A^*A 可交换, 证明:A 是正规矩阵.

证明 因为 A^*A 是自伴矩阵, 我们不妨设

$$A^*A=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1E_{n_1},\lambda_2E_{n_2},\cdots,\lambda_sE_{n_s}\right\},$$

这里 λ_i 互不相同. 现在 A 对应分块为 (A_{ij}), 由可交换性得

$$\lambda_iA_{ij}=A_{ij}\lambda_j,i,j=1,2,\cdots,s,$$

于是 $A_{ij}=0,\forall i\neq j$.

现在

$$A^*A=\operatorname{diag}\left\{A_{11}^*A_{11},A_{22}^*A_{22},\cdots,A_{ss}^*A_{ss}\right\},$$

即

$$A_{ii}^*A_{ii}=\lambda_iE,i=1,2,\cdots,s.$$

当 $\lambda_i\neq0$, 显然有

$$A_{ii}A_{ii}^*=A_{ii}^*A_{ii}=\lambda_iE. \tag{23.124}$$

当 $\lambda_i=0$, 由命题21.8知 $A_{ii}=0$, 即仍有(23.124)成立, 因此我们有 $A^*A=AA^*$, 即 A 是正规矩阵.

例题 23.167 设 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, 计算 $J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)$ 的 Jordan 标准型.

注 在开始本证明之前, 我们先回顾一下克罗内克积基本性质23.18. 比如

$$A\sim A',B\sim B'\Rightarrow A\otimes B\sim A'\otimes B',A\otimes I+I\otimes B\sim A'\otimes I+I\otimes B'.$$

这可以通过

$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes Q)\sim\left(P^{-1}AP\right)\otimes\left(Q^{-1}BQ\right);$$
$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes I+I\otimes B)(P\otimes Q)=\left(P^{-1}AP\right)\otimes I+I\otimes\left(Q^{-1}BQ\right)$$

得到. 比如 $p(A\otimes I)=p(A)\otimes I$, 这可以通过

$$(A\otimes I)^n=A^n\otimes I^n=A^n\otimes I,\forall n\in\mathbb{N}$$

得到. 还有

$$r(A\otimes B)=r(A)\otimes r(B).$$

证明 由克罗内克积性质23.18, 我们知道 $J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)$ 的所有特征值都是 $\lambda\mu$.

Case 1 若 $\lambda\mu\neq0$, 我们断言 $J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)$ 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\left\{J_{m+n-1}(\lambda\mu),J_{m+n-3}(\lambda\mu),\cdots,J_{|m-n|+1}(\lambda\mu)\right\}.$$

显然

$$J_m(\lambda)\sim\lambda J_m(1),J_n(\mu)\sim\mu J_n(1),$$

于是由克罗内克积性质23.18, 我们知道

$$J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)\sim\lambda\mu J_m(1)\otimes J_n(1).$$

因此不妨设 $\lambda=\mu=1$.

在例题23.86的注中取

$$p(z)\triangleq\ln(1+z),|z|<1.$$

我们有 $p(0)=0, p'(0)\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}
&J_m(1)\otimes J_n(1)-I_{mn}\sim \ln\left(J_m(1)\otimes J_n(1)\right)\\
&=\ln\left(\left(J_m(1)\otimes I_n\right)\left(I_m\otimes J_n(1)\right)\right)\\
&=\ln\left(J_m(1)\otimes I_n\right)+\ln\left(I_m\otimes J_n(1)\right)\\
&=\ln\left(J_m(1)\right)\otimes I_n+I_m\otimes \ln\left(J_n(1)\right)\\
&\sim \left(J_m(1)-I_m\right)\otimes I_n+I_m\otimes\left(J_n(1)-I_n\right)\\
&=J_m(0)\otimes I_n+I_m\otimes J_n(0)\\
&\sim \operatorname{diag}\left\{J_{n+m-1}(0), J_{n+m-3}(0), J_{|m-n|+1}(0)\right\},
\end{aligned}$$

这里第二等号来自 $J_m(1)\otimes I_n, I_m\otimes J_n(1)$ 可交换, 从而对数在数上的性质在矩阵上也成立. 最后一个等号来自数学类线性代数习题289.. 因此

$$J_m(1)\otimes J_n(1)\sim \operatorname{diag}\left\{J_{n+m-1}(1), J_{n+m-3}(1), J_{|m-n|+1}(1)\right\},$$

这就得证.

Case 2 若 $\lambda=0,\mu\neq 0$, 我们断言 $J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)$ 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\left\{\underbrace{J_m(0), J_m(0), \cdots, J_m(0)}_{n\text{个}}\right\}.$$

我们有

$$\left(J_m(0)\otimes J_n(\mu)\right)^m=J_m^m(0)\otimes J_n^m(\mu)=0$$

以及

$$\begin{aligned}
&r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(\mu)\right)^{m-1}\right)=r\left(J_m^{m-1}(0)\otimes J_n^{m-1}(\mu)\right)\\
&=r\left(J_m^{m-1}(0)\right)\cdot r\left(J_n^{m-1}(\mu)\right)=n.
\end{aligned}$$

由命题21.3得其 m 阶 Jordan 块的个数为 n 个, 这已经给出了 mn 阶矩阵了, 因此给出了要证的.

Case 3 若 $\lambda\neq 0,\mu=0$, 同 **Case 2**, 我们有 $J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)$ 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\left\{\underbrace{J_n(0), J_n(0), \cdots, J_n(0)}_{m\text{个}}\right\}.$$

Case 4 若 $\lambda=\mu=0$, 我们断言 $J_m(\lambda)\otimes J_n(\mu)$ 的 Jordan 标准型为

$$\operatorname{diag}\left\{J_1(0), J_1(0), J_2(0), J_2(0), \cdots, J_{\min\{m,n\}-1}(0), J_{\min\{m,n\}-1}(0), \underbrace{J_{\min\{m,n\}}(0), J_{\min\{m,n\}}(0), \cdots, J_{\min\{m,n\}}(0)}_{\max\{m,n\}-\min\{m,n\}+1\text{个}}\right\}.$$

不妨设 $n\leqslant m$, 对 $k=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^k\right)=(m-k)(n-k),$$

即对 $k=1,2,\cdots,n-1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^{k+1}\right)+r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^{k-1}\right)-2r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^k\right)\\
&=(m-k-1)(n-k-1)+(m-k+1)(n-k+1)-2(m-k)(n-k)\\
&=2,
\end{aligned}$$

即由命题21.3得 k 阶 Jordan 块个数为 2.

又

$$\begin{aligned}
&r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^{n+1}\right)+r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^{n-1}\right)-2r\left(\left(J_m(0)\otimes J_n(0)\right)^n\right)\\
&=m-n+1,
\end{aligned}$$

即由命题21.3得 n 阶 Jordan 块个数为 $m-n+1$. 这已经给出了 mn 阶矩阵了, 因此给出了要证的.

23.8 组合数论类

此类问题在考试中考到都属于难题, 有很强的高中数学竞赛风格. 做不出是正常的, 也很难训练, 是天才们的游戏, 因此主要是欣赏证明.

23.8.1 杂例

例题 23.168 设 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 次多项式. 证明:

$$n_1+n_2+\cdots+n_r<\frac{r\left(r-1\right)}{2}. \tag{23.125}$$

则 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 线性相关. 这里我们约定 0 多项式的次数是 $-\infty$.

笔记 $\frac{r(r-1)}{2}$ 显然来自等差数列求和.

证明 若 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 有 0 多项式自然线性相关. 假设 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 没有 0 多项式. 然后若 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 互不相同, 则不妨设 $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_r$, 我们有

$$n_i\geqslant i-1,i=1,2,\cdots,r.$$

现在由(23.125)得

$$\frac{r\left(r-1\right)}{2}>\sum_{i=1}^{r}n_i\geqslant\sum_{i=1}^{r}\left(i-1\right)=\frac{r\left(r-1\right)}{2},$$

这就是一个矛盾! 因此必然存在 $1\leqslant i<j\leqslant r$ 使得 $n_i=n_j$ 且

$$p_i=ax^n+\cdots,p_j=bx^n+\cdots,a,b\neq0.$$

考虑向量组

$$p_1,p_2,\cdots,p_{i-1},p_j-\frac{b}{a}p_i,p_{i+1},\cdots,p_j,p_{j+1},\cdots,p_r. \tag{23.126}$$

显然它与向量组 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 等价且满足(23.125). 对向量组(23.126)继续如上操作, 考虑到次数在不断降低, 因此经过有限次后必然出现 0 多项式, 因此 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 线性相关.

例题 23.169 决定全部 $a\in\mathbb{Q}$ 使得 $A=\begin{pmatrix}a&-a&-1&0\\a&-a&0&-1\\1&0&a&-a\\0&1&a&-a\end{pmatrix}$ 是某个 4 阶有理数域上的矩阵的平方.

证明 记 $M=\begin{pmatrix}a&-a\\a&-a\end{pmatrix}$, 注意 $M^2=0$, 则

$$\left|A-xI\right|=\begin{vmatrix}M-xI&-I\\I&M-xI\end{vmatrix}\overset{\text{例题21.12}}{=}\left|\left(M-xI\right)^2+I\right|=\left|\left(x^2+1\right)I-2xM\right|=\left(x^2+1\right)^2,$$

这里最后一个等号可以通过 M 特征值全为 0 来得到 $\left(x^2+1\right)I-2xM$ 的特征值为两个 x^2+1.

哈密顿凯莱定理表明 $\left(A^2+I\right)^2=0$, 若 $C\in\mathbb{Q}^{4\times4}$ 使得 $A=C^2$, 则 $\left(C^4+I\right)^2=0$, 即 $\left(x^4+1\right)^2$ 是 C 的零化多项式. 现在 x^4+1 不可约且 C 的极小多项式不超过 4 次, 因此 C 的极小多项式就只能是 x^4+1, 从而

$$0=C^4+I=A^2+I=\begin{pmatrix}0&0&-2a&2a\\0&0&-2a&2a\\2a&-2a&0&0\\2a&-2a&0&0\end{pmatrix},$$

即 $a=0$.

对于 $a=0$, 直接构造[72]一个 $C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $C^2=A$.

例题 23.170 设 $n\in\mathbb{N}$, S_n 是由元素为 $-1,1$ 组成的 n 阶对称矩阵全体, 试计算 S_n 中所有矩阵行列式的平均值.

证明 **Case 1** 当 n 为奇数, 对每个 $S\in S_n$ 有 $-S\in S_n$, 因此

$$|S|+|-S|=|S|+(-1)^n|S|=0.$$

从而所求平均值为 0.

Case 2 当 $n=2m,m\in\mathbb{N}$, 设 $S=(s_{ij})$, T_n 为 n 次对称群, 则

$$\frac{\sum\limits_{S\in S_n}|S|}{|S_n|}=\frac{\sum\limits_{S\in S_n}\sum\limits_{\sigma\in T_n}\operatorname{Sgn}(\sigma)\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}s_{i\sigma(i)}}{|S_n|}=\frac{\sum\limits_{\sigma\in T_n}\operatorname{Sgn}(\sigma)\sum\limits_{S\in S_n}\prod\limits_{i=1}^{n}s_{i\sigma(i)}}{|S_n|}. \tag{23.127}$$

当 σ 没有不动点且 $\sigma^2=I$, 我们把这样的置换全体记作 H_n. 此时

$$\prod_{i=1}^{n}s_{i\sigma(i)}=1\Rightarrow\frac{\sum\limits_{S\in S_n}\prod\limits_{i=1}^{n}s_{i\sigma(i)}}{|S_n|}=1.$$

当 $\sigma\in T_n\setminus H_n$, 我们可以看到[73] $\frac{\sum\limits_{S\in S_n}\prod\limits_{i=1}^{n}s_{i\sigma(i)}}{|S_n|}=0$.

现在就有

$$\frac{\sum\limits_{S\in S_n}|S|}{|S_n|}=\sum_{\sigma\in H_n}\operatorname{Sgn}(\sigma).$$

注意每一个 $\sigma\in H_n$ 的充要条件是能写成

$$\sigma=(i_1,i_2)(i_3,i_4),\cdots,(i_{2m-1},i_{2m}),\text{这里}i_1,i_2,\cdots,i_{2m}\text{是}1,2,\cdots,n\text{的一个排列}.$$

于是

$$|H_n|=\frac{C_{2m}^2C_{2m-2}^2\cdots C_2^2}{m!},\operatorname{Sgn}(\sigma)=(-1)^m,\forall\sigma\in H_n,$$

从而

$$\sum_{\sigma\in H_n}\operatorname{Sgn}(\sigma)=(-1)^m(2m-1)!!.$$

例题 23.171 设 A 是元素都为正实数的 $n,n\geqslant 2$ 阶可逆矩阵, 证明 A^{-1} 中的零元素个数小于等于 n^2-2n.

证明 设 $A=(a_{ij}),A^{-1}=(b_{ij})$, 由于 $AA^{-1}=E$, 从而

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\delta_{ij}. \tag{23.128}$$

当 $i\neq j$, 注意到(23.128)给出 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=0$, 则 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj}$ 至少有两个非 0[74]. 因此我们说明了至少有 $2n$ 个非 0 元素, 这就证明了 A^{-1} 的 0 元素个数小于等于 n^2-2n.

例题 23.172 设 A 是由一个元素为 $1,-1$ 组成的 n 阶矩阵且行向量相互正交. 又设 A 有一个 $a\times b$ 阶子矩阵使得 H 元素即为 1, 证明 $ab\leqslant n$.

证明 设 $A=(a_{ij})$, 记 A 的所有行向量为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$,H 对应的 A 的行的集合为 I, 列的集合为 J. 记 $\alpha=\sum\limits_{i\in I}r_i$,

[72]没有太多的动机, 纯属试出来, 考试中几乎可以直接跳过.

[73]对求和中的每一项, 必有另外一项和其互为相反数, 从而两两配对来得到为 0, 可以考虑低阶的 $n=4$ 来找感觉.

[74]否则第 j 列 A^{-1} 元素都是 0.

则

$$||\alpha||^2=\left(\sum_{i\in I}r_i,\sum_{i'\in I}r_{i'}\right)=\sum_{i\in I}\sum_{i'\in I}(r_i,r_{i'})=\sum_{i\in I}||r_i||^2=an.$$

注意到 α 的第 j 个位置的元素为 $\sum\limits_{i\in I}a_{ij}$, 则

$$a^2b=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}a_{ij}\right)^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in I}a_{ij}\right)^2=||\alpha||^2=an\Rightarrow ab\leqslant n.$$

例题 23.173 设 $\Gamma=\{W_1,W_2,\cdots,W_r\}$ 为 r 个复 n 阶可逆矩阵构成的集合且对乘法封闭, 证明:

$$\sum_{i=1}^{r}W_i=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}\mathrm{tr}\,(W_i)=0;\tag{23.129}$$

以及

$$\Gamma=\{E_n\}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}W_i\text{可逆}.\tag{23.130}$$

证明 两个问题的必要性显然, 只需证明充分性.

事实上若(23.129)右端成立, 则对每个 $j\in\{1,2,\cdots,r\}$, 都有 $\{W_jW_1,W_jW_2,\cdots,W_jW_r\}$ 两两不同. 因此

$$\Gamma=\{W_jW_1,W_jW_2,\cdots,W_jW_r\}.\tag{23.131}$$

现在就有

$$\left(\sum_{i=1}^{r}W_i\right)^2=r\sum_{i=1}^{r}W_i.\tag{23.132}$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{r}W_i$ 可对角化且特征值只能是 $0,r$. 又(23.129)右端成立, 故 $\sum\limits_{i=1}^{r}W_i$ 的特征值只能全为 0, 故 $\sum\limits_{i=1}^{r}W_i=0$, 这就完成了第一个问题的证明.

若(23.130)右端成立, 同样的由(23.132)知 $\sum\limits_{i=1}^{r}W_i$ 可对角化且特征值只能是 r, 故 $\sum\limits_{i=1}^{r}W_i=rE_n$. 注意到由(23.131)得

$$rE_n=\sum_{i=1}^{r}W_jW_i=rW_jE_n=rW_j,j=1,2,\cdots,r,$$

从而 $\Gamma=\{E_n\}$. 我们完成了证明.

来看同济大学考研压轴题.

例题 23.174 设 $n\geqslant 2$, 用 $1,2,\cdots,n^2$ 排成一个 n 阶矩阵且都恰好是矩阵的一个元素, 问秩最小可能是多少, 最大可能是多少.

证明 先考虑一种自然的排列, 即

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n+1&n+2&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n^2-n+1&n^2-n+2&\cdots&n^2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{从最后一行开始依次让后一行减去前一行}}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n&n&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n&n&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&-1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

这就构造了一个秩为 2 的例子.

对满足题目条件的矩阵, 由于交换行列都是题意中的矩阵且不改变秩, 不妨设

$$1=a_{11}<a_{21}<\cdots<a_{n1},1=a_{11}<a_{12}<\cdots<a_{1n},$$

则 $a_{n1}\geqslant n, a_{1n}\geqslant n$ 且等号不能同时成立. 现在

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}-a_{1n}a_{n1} < n^2-n^2 = 0,$$

从而 2 就是所求最小的秩.

我们接下来目标是构造一个可逆矩阵, 从而最大可能的秩为 n. 事实上, 我们考虑对角线全为奇数, 对角线上方全为偶数[75], 其余部分随意, 这考虑 mod2 就得到一个下三角矩阵且对角线全为 1, 此时该矩阵可逆, 这就完成了证明.

例题 23.175 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 A 主对角元都是 0, 其余元素都是正实数, 求 A 可能的最小秩.

证明 当 $n=1$ 时 $A=0$, 于是最小的可能的秩就是 0. 当 $n=2$ 时, $\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab < 0$. 此时最小可能的秩为 2.

当 $n>2$, 考虑左上角 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ k & 0 & f \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = afc+kdb > 0$, 于是我们来证明最小可能的秩是 3.

考虑 $a_{ij}=(i-j)^2=i^2+j^2-2ij$ 是三个秩 1 矩阵[76]的和, 因此由秩不等式21.6知 $A=(a_{ij})$ 的秩小于等于 3, 从而 A 的秩恰好是 3. 这就完成了证明.

例题 23.176 设 $A\in\mathbb{Z}^{2\times 2}$ 且存在正整数 m 使得 $A^m=E_2$. 证明:$A^{12}=E_2$.

证明 因为 A 的极小多项式整除一次式的积 x^m-1, 所以也是一次式的积, 所以 A 在 $\mathbb{C}$ 可对角化. 因为实矩阵复特征值成对出现而 A 特征值只能是 m 次单位根. 所以 A 的实特征值只能是 ±1 且有实特征值时就只有实特征值, 因此显然 $A^{12}=E_2$.

下面设 A 特征值为 $e^{\frac{2k\pi i}{m}}, e^{-\frac{2k\pi i}{m}}, k\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$, 则

$$e^{\frac{2k\pi i}{m}}+e^{-\frac{2k\pi i}{m}} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \operatorname{tr}(A)\in\mathbb{Z}.$$

由引理23.19得

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = 0,\pm1,$$

即

$$\cos\left(\frac{2k}{m}\pi\right)=0\Rightarrow\frac{4k}{m}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m|4\Rightarrow m=1,2,4;$$
$$\cos\left(\frac{2k}{m}\pi\right)=\pm1\Rightarrow\frac{2k}{m}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m|2\Rightarrow m=1,2;$$
$$\cos\left(\frac{2k}{m}\pi\right)=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{6k}{m}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m|6\Rightarrow m=1,2,3,6.$$

现在就有 $A^{12}=E_2$. 我们完成了证明.

例题 23.177 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 且二阶矩阵 B 的元素都是正整数, 有行列式 1 并满足 $AB=BA$. 证明存在正整数 m, 使得 $B=A^m$.

证明 直接假设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 利用 B 的条件直接计算得 $c=b, d=a-b>0, a^2-ab-b^2=1$.

若 $b=1$, 则 $a=2$, 此时 $B=A$, 故可取 $m=1$.

若 $b>1$, 考虑矩阵 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}, B_1=A^{-1}B=\begin{pmatrix} a-b & 2b-a \\ 2b-a & 2a-3b \end{pmatrix}$, 我们记 $a_0=a, b_0=b$, 则

$$B_1=A^{-1}B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix}, a_1=a_0-b_0, b_1=2b_0-a_0.$$

[75] 因为偶数和奇数应该各占一半, 所以是够用的.

[76] 回忆秩 1 矩阵可以写为 (c_id_j).

于是我们知道

$$B_s=\left(A^{-1}\right)^s B=\begin{pmatrix}a_s & b_s\\ b_s & a_s-b_s\end{pmatrix},a_s=a_{s-1}-b_{s-1},b_s=2b_{s-1}-a_{s-1},$$

以及

$$\left|B_s\right|=\left|A^{-1}\right|^s|B|=1\Rightarrow a_s^2-a_sb_s-b_s^2=1.$$

现在我们由 $(a,b),a>b,a^2-ab-b^2=1$ 出发, 我们知道

$$a_1=a_0-b_0>0,b_1=2b_0-a_0<b_0,a_1\left(a_1-b_1\right)=a_1^2-a_1b_1=1+b_1^2>0,$$

故 $a_1-b_1>0$. 若 $b_1\leqslant 0$, 则

$$1+b^2=a(a-b)\geqslant 2b^2\Rightarrow|b|\leqslant 1.$$

一直下去知一直有 $a_s>b_s$ 且 b_s 严格减少. 所以有限次操作后知对某个 $s\in\mathbb{N}$, 我们有 b_s 取得最小正整数[77],

$$a_s>0,a_s>b_s=1,a_s^2-a_sb_s-b_s^2=1.$$

此时 $a_s=2$, 故取 $m=s+1$ 即得 $B=A^m$.

来看竞赛真题:

例题 23.178 设 $R=\{0,1,-1\}$, S 是 R 上的三阶行列式全体, 证明:

$$S=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,0\}.$$

证明 设 $\det A=(a_{ij})\in S$, 则

$$\begin{aligned}\det A=&(a_{11}a_{22}a_{33})+(a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{32}a_{21})\\&+(-a_{13}a_{22}a_{31})+(-a_{12}a_{21}a_{33})+(-a_{11}a_{32}a_{23}).\end{aligned}$$

注意到每个 a_{ij} 都会在上面六项中出现两次, 因此如果某个 a_{ij} 为 0, 上式至多只有 4 项非 0, 因此 $|\det A|\leqslant 4$. 如果所有 a_{ij} 都不为 0, 那么上述六项之积为 $-\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 3}a_{ij}^2=-1$. 从而这六项不能全为 1 或者 -1, 从而必然有两项互为相反数而抵消, 因此 $|\det A|\leqslant 4$.

注意我们总可以交换两行来改变行列式符号, 下面只需构造 $\det A=0,1,2,3,4$ 的情况. 取 $A=0,A=E$ 得 $0,1$. 再构造

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=3,\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,$$

就证明了

$$S=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,0\}.$$

例题 23.179 设 $R=\{0,1,4,9,16\}$, U 是 R 上的三阶矩阵全体且 $S\subset U$, 若 S 中元素个数多于 5^9-5^3-18, 则 S 中必有不同的 A,B 使得 $AB=BA$.

证明 注意到 $|U|=5^9$, 待定构造互不相交的集合 $L_i,i=1,2,\cdots,s$ 使得 L_i 中的集合两两可交换. 注意到

$$S=\left(S\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{s}L_i\right)\right)\bigcup\left(S\bigcap\left(U\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{s}L_i\right)\right)\right).\tag{23.133}$$

然后如果 S 中的任何两个不同的元素都不能交换, 则

$$\left|S\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{s}L_i\right)\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{s}\left(S\bigcap L_i\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{s}1=s.$$

[77] 即第 $s+1$ 次时, $b_{s+1}\leqslant 0$, 此时必有 $|b_s|\leqslant 1$.

于是

$$|S| \leqslant \left|S \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{s} L_i\right)\right| + \left|S \bigcap \left(U \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} L_i\right)\right)\right| \leqslant s + \left|U \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} L_i\right)\right|$$
$$= s + |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{s} L_i\right| = s + 5^9 - \sum_{i=1}^{s} |L_i| = 5^9 + \sum_{i=1}^{s} (1 - |L_i|).$$

为了让 $|S|$ 的上界最好[78], 应该使得分的组数越多. 然后构造

$$L_1 = \{M \in U : M\text{是对角矩阵}\}, |L_1| = 5^3;$$
$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}, |L_2| = 25.$$

于是

$$|S| \leqslant 2 + 5^9 - 25 - 5^3 < 5^9 - 5^3 - 18,$$

这就完成了证明.

计算幻方的基和维数:

例题 23.180 设

$$V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} = \operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1,j}, i = 1, 2, \cdots, n \right\},$$

计算 V 的维数.

证明 本题 $n = 1, 2, 3$ 是枚举题, 基分别为

$$\{1\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

读者可以自行解方程计算. 下设 $n > 3$.

当 $n = 4$, 考虑

$$M' = \{A \in V : \text{存在} x \in \mathbb{R}, A = xJ\}, M_0 = \{A \in V : \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

注意到 $V = M_0 \oplus M'$, 这是因为

$$A = A - \operatorname{tr}(A) J + \operatorname{tr}(A) J, \forall A \in V,$$

以及

$$A \in M_0 \bigcap M' \Rightarrow A = xJ, \operatorname{tr}(A) = nx = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = 0.$$

现在考虑 M_0 中的矩阵, 注意到

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \text{确定} \\ * & * & * & \text{确定} \\ \text{确定} & * & a & b \\ \text{确定} & \text{确定} & c & d \end{pmatrix}, a+b, a+c, b+d, a+d\text{确定},$$

这里 $*$ 表示可任意指定一个数字, 确定表示这个数字会随之确定. 注意到 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 所以关于 a, b, c, d 的线性方程组有唯一解, 因此 a, b, c, d 也唯一确定. 注意我们还有最后一行行和为 0 没用, 事实上注意到

[78] 最小.

所有列和为 0, 因此所有矩阵元素和为 0. 又前三排行和为 0, 所以最后一排行和为 0. 于是这就构造了全体 4 阶幻方且 $\dim V=7+1=8$. 基就是在一个 $*$ 取 1, 其余 $*$ 取 0 之后生成的幻方全体并上 J.

当 $n>4$ 结果是类似的, 这里 $*$ 为满足 $1\leqslant i,j\leqslant n-1,(i,j)\neq(n-1,1),(n-1,n-1)$ 的 (i,j) 元. 此时 $\dim V=(n-1)^2-2+1=n^2-2n$. 基就是在一个 $*$ 取 1, 其余 $*$ 取 0 之后生成的幻方全体并上 J.

最后我们可以算的得

$$\dim V=\begin{cases}1, & n=1\\ 1, & n=2\\ n^2-2n, & n\geqslant 3\end{cases}.$$

来看复旦大学 2025 高等代数题.

例题 23.181 求数域 $\mathbb{F}$ 上全体 n 阶置换矩阵[79]张成线性空间的维数.

笔记 本题突破口是注意到所有置换矩阵的线性组合都满足行和和列和相等, 这是因为对置换矩阵 P, cP 只对每行和每列提供 c.

证明 **Step 1** 记

$$M\triangleq\left\{S\in\mathbb{F}^{n\times n}:S\text{的所有行和以及列和都相等}\right\};$$
$$M_0\triangleq\left\{S\in\mathbb{F}^{n\times n}:S\text{的所有行和以及列和都为}0\right\}.$$

我们有直和分解 $M=M_0\oplus\operatorname{span}\{J\}$, 这里 J 为元素全为 1 的矩阵. 再设 V 为所有置换矩阵张成的线性空间, 我们知道 $V\subset M$, 于是

$$\dim V\leqslant\dim M=\dim M_0\oplus\dim\operatorname{span}\{J\}=(n-1)^2+1, \tag{23.134}$$

这里 $\dim M_0$ 可以如此确定: 对 $A\in M_0$, 任意给定 A 的左上角 $n-1$ 阶矩阵, 然后 A 其余位置元素会被唯一确定.

Step 2 设 S_n 是 n 次对称群, 我们用 E_σ 表示

$$\left\{e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(n)}\right\},\sigma\in S_n.$$

我们归纳来构造 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的 $(n-1)^2+1$ 个线性无关的置换矩阵.

当 $n=1$, 取 $H_1\triangleq\left\{\left(1\right)\right\}$. 假设 $H_n\triangleq\{A_i\}_{i=1}^{(n-1)^2+1}$ 是 $(n-1)^2+1$ 个线性无关的 n 阶置换矩阵, 我们考虑

$$P_i\triangleq\begin{pmatrix}A_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},i=1,2,\cdots,(n-1)^2+1;$$

$$Q_i\triangleq E_{(n+1,n,n-1,\cdots,i+1,i)},i=2,3,\cdots,n,$$

$$R_i\triangleq E_{\sigma_i},\sigma_i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-i+2 & n-i+3 & n-i+4 & \cdots & n+1\\ n+1 & i & i+1 & \cdots & n & 1 & 2 & \cdots & i-1\end{pmatrix},i=1,2,\cdots,n.$$

设 $c_i,k_i,t_i\in\mathbb{C}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{(n-1)^2+1}c_iP_i+\sum_{i=2}^{n}k_iQ_i+\sum_{i=1}^{n}t_iR_i=0. \tag{23.135}$$

对比(23.135)两边的 $(n+1,i)$ 元得 $k_i=0,i=2,3,\cdots,n$. 再对比(23.135)两边 $(n,n+1)$ 元得 $t_1=0$. 对比 $(i,n+1)$ 元得 $t_i=0,i=2,3,\cdots,n$. 由 $\{A_i\}$ 线性无关得

$$c_i=0,i=1,2,\cdots,(n-1)^2+1,$$

于是 $\{P_i,Q_i,R_i\}$ 线性无关. 注意到 $n+n-1+(n-1)^2+1=n^2+1$, 于是 $H_{n+1}\triangleq\{P_i,Q_i,R_i\}$ 为所求.

现在 $\dim V\geqslant(n-1)^2+1$, 这就证明了

$$\dim V=(n-1)^2+1.$$

[79] 单位矩阵交换行列得到的矩阵.

来看一个超难 Putnam 试题:

例题 23.182 设集合

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:x,y,z,w\text{构成等差数列}\right\}.$$

求所有 $C\in S$ 使得存在整数 $k\geqslant 2$, 使得 $C^k\in S$.

证明 注意到 S 中的子集

$$\left\{a\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix},a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}\right\}$$

都满足题目 C 的条件, 证明他们是全部所求.

首先注意到 S 中的矩阵 T 一定满足

$$\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}T^k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=0. \tag{23.136}$$

我们设 $C\in S$, 则存在 $a,d\in\mathbb{R}$ 使得

$$C=\begin{pmatrix}a-3d & a-d\\ a+d & a+3d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix},$$

于是假设 a,d 都不为 0. 我们断言对任何 $k\geqslant 2$, 都有(23.136)不成立.

取 $H=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 则有

$$H^{-1}CH=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}d\\ 2\sqrt{2}d & 2a\end{pmatrix},$$

以及

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}C^k\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}H\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}d\\ 2\sqrt{2}d & 2a\end{pmatrix}^kH^{-1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}d\\ 2\sqrt{2}d & 2a\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}d\\ 2\sqrt{2}d & 2a\end{pmatrix}^k\text{的左上角元素的值的两倍.}\end{aligned}$$

所以我们只需断言 $\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 1\end{pmatrix}^k$, $s\in\mathbb{R},k\geqslant 2$ 的左上角不为 0.

事实上,

$$\begin{pmatrix}a_m & b_m\\ c_m & d_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_ms & a_ms+b_m\\ d_ms & c_ms+d_m\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_{m+1}=sb_m,\\ b_{m+1}=sa_m+b_m\end{cases},a_1=0,b_1=s,a_2=s^2,$$

这里 $\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix},k=1,2,\cdots$. 因此我们有

$$a_{m+1}=s^2a_{m-1}+sb_{m-1}=s^2a_{m-1}+a_m\,(m\geqslant 2),$$

于是 $a_m>0$. 我们完成了证明.

例题 23.183 设 $G\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个群, 证明: G 中矩阵有相同的秩.

证明 若 G 只有一个元素, 则显然 G 中矩阵有相同的秩. 设 G 中的单位元为 A, 若 $A=0$, 则

$$B=AB=BA=0,\forall B\in G.$$

下设 G 中的单位元为 $A\neq 0$.

注意到 $A^2=A$ 而题目条件在相似下不改变, 因此不妨设 $A=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 于是设

$$B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}, B_1\in\mathbb{C}^{r\times r},$$

我们有

$$B=BA=AB\Rightarrow\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B_2=0, B_3=0, B_4=0.$$

现在 G 中元素形如 $\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B_1\in\mathbb{C}^{r\times r}$, 于是由 G 中元素都存在逆元我们知对 $\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in G$, 有 $\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in G$ 使得

$$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

即 B_1 可逆. 于是我们证明了 G 中矩阵有相同的秩.

例题 23.184 设

$$M=\left\{A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}:\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,n\right\},$$

证明:M 是不含幺半群.

注回忆半群定义.

证明 注意到 $M=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:A\mathbf{1}_n=0\}$, 所以对任何 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都有

$$AB\mathbf{1}_n=0\Rightarrow AB\in M.$$

显然矩阵的运算性质可以继承到 M 上, 所以 M 是半群.

注意虽然一般的可逆矩阵群单位元是 E_n, 但不能说明 $E_n\notin M$ 就断言 M 没有单位元. 现在假设 M 有单位元 H, 则

$$AH=HA=A,\forall A\in M. \tag{23.137}$$

注意到由(23.137)得

$$(E_{ij}-E_{ij'})H=H(E_{ij}-E_{ij'})=E_{ij}-E_{ij'},\forall j\neq j', i\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

设 $H=(h_{ij})$, 我们对比第一个等号矩阵元素就有 $h_{ki}=0, k\neq i$, 于是结合 $H\in M$ 得 $H=0$, 因此(23.137)无论如何也不能成立, 所以 M 不含有幺元, 从而是不含幺半群.

例题 23.185 设

$$\mathrm{SL}(2)=\left\{A\in\mathbb{Z}^{2\times 2}:\det A=1\right\}.$$

对 $A\in\mathrm{SL}(2)$, 用 $o(A)$ 表示最小的自然数 n 使得 $A^n=E_2$. 求

$$O=\{o(A):A\in\mathrm{SL}(2)\}.$$

证明 注意到

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2),\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N},$$

即 $o(A)=+\infty$.

设 $A\in\mathrm{SL}(2)$ 使得 $n=o(A)<\infty$, 则 $A^n=E_2$.

若 A 特征值全为 1, 则

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{或者}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

因为 $o(A)<\infty$, 所以只能有 $A\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 即 $n=1$.

设 A 的特征值为

$$e^{\frac{2\pi ik}{n}},e^{-\frac{2\pi ik}{n}},k\in\{1,2,\cdots,n-1\},(k,n)=1.$$

因为 A 是整数矩阵, 我们知道

$$\operatorname{tr}(A)=e^{\frac{2\pi ik}{n}}+e^{-\frac{2\pi ik}{n}}=2\cos\frac{2\pi k}{n}\in\mathbb{Z}.$$

我们有如下引理

引理 23.19

设 $q\in\mathbb{Q},\cos(q\pi)\in\mathbb{Q}$, 则有

$$\cos(q\pi)\in\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\right\}.$$

♡

证明 引理证明见mse

于是我们由引理23.19知 $\cos\frac{2\pi k}{n}\in\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\right\}$, 即

$$\cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right)=0\Rightarrow\frac{4k}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n|4\Rightarrow n=1,2,4;$$

$$\cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right)=\pm1\Rightarrow\frac{2k}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n|2\Rightarrow n=1,2;$$

$$\cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right)=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{6k}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n|6\Rightarrow n=1,2,3,6.$$

最后我们给出构造:

$$o\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)=+\infty,o\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=1;$$

$$o\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=2,o\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right)=3;$$

$$o\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)=4,o\left(\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)=6,$$

这就证明了

$$O=\{1,2,3,4,6\}.$$

例题 23.186 证明:

1. 每一个 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 都是四个正交矩阵在 $\mathbb{R}$ 上的线性组合.
2. 每一个 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 都是两个酉矩阵在 $\mathbb{C}$ 上的线性组合.

证明

1. 由奇异值分解23.4, 不妨设 $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 且

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n.$$

不妨设 $A\neq 0$, 则 $|\lambda_n|>0$. 考虑

$$n\text{为偶数}:\begin{cases}a_i=\frac{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}{2}\\ b_i=\frac{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}}{2}\end{cases},i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

$$n\text{为奇数}:\begin{cases}a_i=\frac{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}{2}\\ b_i=\frac{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}}{2}\\ a_{\frac{n+1}{2}}=2\lambda_n,b_{\frac{n+1}{2}}=\lambda_n\end{cases},i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$$

则

$$|a_i|\leqslant 2\lambda_n,|b_i|\leqslant\lambda_n,i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2},\tag{23.138}$$

且

$$A=\operatorname{diag}\{a_1,a_1,a_2,a_2,\cdots\}-\operatorname{diag}\{b_1,-b_1,b_2,-b_2,\cdots\}.\tag{23.139}$$

于是可以写为

$$a_i=2\lambda_n\cos\alpha_i,b_i=\lambda_n\sin\beta_i,i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}.$$

考虑

$$R_\theta\triangleq\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},S_\theta\triangleq\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ \sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix},$$

我们有

$$R_\theta+R_{-\theta}=2\cos\theta\operatorname{diag}\{1,1\},S_\theta+S_{-\theta}=2\cos\theta\operatorname{diag}\{1,-1\}.\tag{23.140}$$

现在

$$\operatorname{diag}\{a_1,a_1,a_2,a_2,\cdots\}=\lambda_n\operatorname{diag}\{R_{\alpha_1},R_{\alpha_2},\cdots\}+\lambda_n\operatorname{diag}\{R_{-\alpha_1},R_{-\alpha_2},\cdots\},\tag{23.141}$$

这里如果当 n 为奇数, 则(23.141)的右下角取 1. 以及

$$\operatorname{diag}\{b_1,-b_1,b_2,-b_2,\cdots\}=\frac{\lambda_n}{2}\operatorname{diag}\{S_{\beta_1},S_{\beta_2},\cdots\}+\frac{\lambda_n}{2}\operatorname{diag}\{S_{-\beta_1},S_{-\beta_2},\cdots\},\tag{23.142}$$

这里当 n 为奇数. 则(23.142)的右下角取 -1.

现在结合(23.141),(23.142),(23.140),(23.139)和(23.138)知 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是四个正交矩阵在 $\mathbb{R}$ 上的线性组合.

2. 由奇异值分解23.4, 不妨设 $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 且

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n.$$

不妨设 $A\neq 0$, 则 $|\lambda_n|>0$. 于是可以构造分解

$$A=\frac{|\lambda_n|}{2}\operatorname{diag}\left\{\frac{\lambda_1}{|\lambda_n|}+i\sqrt{1-\frac{\lambda_1^2}{|\lambda_n|^2}},\frac{\lambda_2}{|\lambda_n|}+i\sqrt{1-\frac{\lambda_2^2}{|\lambda_n|^2}},\cdots,\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}+i\sqrt{1-\frac{\lambda_n^2}{|\lambda_n|^2}}\right\}$$
$$+\frac{|\lambda_n|}{2}\operatorname{diag}\left\{\frac{\lambda_1}{|\lambda_n|}-i\sqrt{1-\frac{\lambda_1^2}{|\lambda_n|^2}},\frac{\lambda_2}{|\lambda_n|}-i\sqrt{1-\frac{\lambda_2^2}{|\lambda_n|^2}},\cdots,\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}-i\sqrt{1-\frac{\lambda_n^2}{|\lambda_n|^2}}\right\}.$$

例题 23.187 设 $G\subset\mathbb{F}^{n\times n}$ 是若干可逆矩阵构成的集合. 若 G 满足对任何不相同的 $A,B\in G$ 都有 $|A+B|=0$. 证明 G 是有限集.

证明 对 $A\in G$, 构造不超过 n 次的多元多项式

$$f_A(X)\triangleq|X+A|,X\in\mathbb{F}^{n\times n}.$$

若互不相同的 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in G$ 满足

$$\sum_{i=1}^m k_i f_{A_i}=0,k_i\in\mathbb{F},i=1,2,\cdots,m,$$

则

$$k_j\left|A_j+A_j\right|=\sum_{i=1}^{m}k_i\left|A_i+A_j\right|=0,j=1,2,\cdots,m\Rightarrow k_j=0,j=1,2,\cdots,m.$$

现在我们知道 $f_{A_1},f_{A_2},\cdots,f_{A_m}$ 线性无关.

因为不超过 n 次的多元多项式构成的空间有限维,所以我们知道 G 中只有有限个互不相同的元素,我们完成了证明.

23.8.2 有限域上的线性代数 *

本子节 p,q 都是正素数.

命题 23.20 (有限域上可逆矩阵个数)

有限域 $\mathbb{Z}_q$ 上全体 m 阶可逆矩阵的个数为

$$\left(q^m-1\right)\left(q^m-q\right)\cdots\left(q^m-q^{m-1}\right).$$

♠

证明 考虑 $\mathbb{Z}_q$ 上的 m 阶矩阵 M,其可逆的充分必要条件是行向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,这也等价于 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$ 且 $\alpha_i,i\geqslant 2$ 不是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性组合.

现在 α_1 有 q^m-1 种取法,而 α_2 不能取 $a\alpha_1,a\in\mathbb{Z}_q$,即有 q^m-q 种取法. 依次下去,α_m 不能取

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_{m-1}\alpha_{m-1},a_i\in\mathbb{Z}_q,i=1,2,\cdots,m-1,$$

即有 q^m-q^{m-1} 种取法. 现在由乘法原理我们知道有限域 $\mathbb{Z}_q$ 上全体 m 阶可逆矩阵的个数为

$$\left(q^m-1\right)\left(q^m-q\right)\cdots\left(q^m-q^{m-1}\right).$$

来看复旦大学考研真题.

例题 23.188 由 $1,2,\cdots,p$ 组成的 n 阶行列式中,不是 p 倍数的行列式有多少个.

注 复旦大学原题是 $p=n=3$.

证明 等价于求 $\mathbb{Z}_p^{n\times n}$ 中可逆矩阵个数,即由命题23.20得个数为

$$\left(p^n-1\right)\left(p^n-p\right)\cdots\left(p^n-p^{n-1}\right).$$

特别的,当 $p=n=3$,我们有个数为

$$\left(3^3-1\right)\left(3^3-3\right)\left(3^3-3^2\right)=11232.$$

命题 23.21 (有限域上行列式为 1 矩阵个数)

有限域 $\mathbb{Z}_q$ 上全体 m 阶行列式为 1 的矩阵个数为

$$q^{m-1}\left(q^m-1\right)\left(q^m-q\right)\cdots\left(q^m-q^{m-2}\right).$$

♠

证明

命题 23.22 (有限域上线性子空间基数量)

有限域 $\mathbb{Z}_q$ 上 m 维线性空间有 s 组基,这里

$$s=\frac{\left(q^m-1\right)\left(q^m-q\right)\cdots\left(q^m-q^{m-1}\right)}{m!}.$$

♠

证明

例题 23.189 把 $\mathbb{Z}_{p^n}$ 看作子域 $\mathbb{Z}_{p^d}$ 上的线性空间, 证明这有 s 组基, 这里

$$s=\frac{\left(q^m-1\right)\left(q^m-q\right)\cdots\left(q^m-q^{m-1}\right)}{m!}.$$

证明

命题 23.23 (有限域上子空间个数计数)

有限域 $\mathbb{Z}_q$ 上的 m 维线性空间的 $t(1\leqslant t\leqslant m)$ 维子空间个数为

$$\frac{\left(q^m-1\right)\left(q^m-q\right)\cdots\left(q^m-q^{t-1}\right)}{\left(q^t-1\right)\left(q^t-q\right)\cdots\left(q^t-q^{t-1}\right)}.$$

证明

例题 23.190 把 $\mathbb{Z}_{q^m}$ 看成 $\mathbb{Z}_q$ 上的 m 维线性空间, $1\leqslant t\leqslant m$, 则

1. 证明 $\mathbb{Z}_{q^m}$ 有 $\frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{t-1})}{(q^t-1)(q^t-q)\cdots(q^t-q^{t-1})}$ 个子空间;
2. 证明 $\mathbb{Z}_{q^m}$ 有 $\frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{t-1})}{t!}$ 组含有 t 个元的线性无关向量组.

证明 内容...

23.9 行列式

23.9.1 三对角行列式

定义 23.14 (三对角矩阵)

我们称

$$J_n=J_n\left(a_i,b_j,c_k\right)=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&0&\cdots&0&0\\c_2&a_2&b_2&0&\cdots&0&0\\0&c_3&a_3&b_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&a_{n-1}&b_{n-1}\\0&0&0&0&\cdots&c_n&a_n\end{pmatrix}$$

为三对角矩阵.

取可逆矩阵 $D=\operatorname{diag}\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$, 我们有

$$\begin{pmatrix}a_1&\frac{t_2b_1}{t_1}&0&0&\cdots&0&0\\\frac{t_1c_2}{t_2}&a_2&\frac{t_3b_2}{t_2}&0&\cdots&0&0\\0&\frac{t_2c_3}{t_3}&a_3&\frac{a_4b_3}{t_3}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&a_{n-1}&\frac{t_nb_{n-1}}{t_{n-1}}\\0&0&0&0&\cdots&\frac{t_{n-1}c_n}{t_n}&a_n\end{pmatrix}=D^{-1}J_nD,$$

可以看到对角线上下两边对称位置的元素之积在这种相似下保持不变.

那么反过来当 $b_jc_{j+1}=b'_jc'_{j+1},j=1,2,\cdots,n-1$ 且 b_j,c_k 都不为 0, 则有

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & a_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & b'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c'_2 & a_2 & b'_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & c'_3 & a_3 & b'_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b'_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c'_n & a_n \end{pmatrix}. \tag{23.143}$$

定理 23.48 (三对角角矩阵行列式)

延续定义23.14的符号, 则

1. 成立

$$\det J_n=a_n\det J_{n-1}-b_{n-1}c_n\det J_{n-2},n=3,4,\cdots. \tag{23.144}$$

2. 设 $a_i\equiv a,b_j\equiv b,c_k\equiv c$, 计算 $\det J_n$.

♡

证明

1. 按最后一行展开之后再按最后一列展开即得(23.144).
2. 若 $bc=0$, 则由(23.144)知

$$\det J_n=a\det J_{n-1}\Rightarrow \det J_n=a^n.$$

若 $bc\neq 0$, 设 $x^2-ax+bc=0$ 的两个复根是

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2},\beta=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}.$$

若 $a^2-4bc\neq 0$, 则由常系数线性递推数列的解法知常系数线性递推数列(23.144)的通解为

$$\det J_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n,n\in\mathbb{N}. \tag{23.145}$$

注意到 $\det J_1=a,\det J_2=a^2-bc$, 代入(23.145)就解得

$$\det J_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

若 $a^2-4bc=0$, 则继续求解常系数线性递推数列(23.144)得

$$\det J_n=(c_3+c_4n)\,\alpha^n,$$

同样的代入初值得

$$\det J_n=(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

最后我们总结写出

$$\det J_n=\begin{cases} a^n, & bc=0\\ (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n, & a^2=4bc\\ \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & a^2-4bc\neq 0 \end{cases},n\in\mathbb{N}.$$

例题 23.191 计算

$$A_n=\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

证明 由三对角行列式23.48, 我们知道

$$A_n=(a_{n-1}+a_n)A_{n-1}-a_{n-1}^2A_{n-2},n=3,4,\cdots.$$

为了求解上述变系数递推, 读者需要算 A_1,A_2, 于是我们可以猜测归纳证明:

$$A_n=a_0a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right). \tag{23.146}$$

直接验证这是容易的, 从而(23.146)成立.

我们来看一种特殊的情况:

命题 23.24

对 $x,n\in\mathbb{R}$, 成立

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n & x & 2 & & \\ & n-1 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}=\prod_{k=0}^{n}(x+n-2k), \tag{23.147}$$

以及

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ -n & x-2 & 2 & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}=(x-n)^{n+1}. \tag{23.148}$$

以及

$$\begin{vmatrix} x-n & n & & & \\ -1 & x-n+2 & n-1 & & \\ & -2 & x-n+4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -n & x+n \end{vmatrix}=x^{n+1}. \tag{23.149}$$

证明 证明的想法是设 $D_{n+1}(x)\triangleq\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n & x & 2 & & \\ & n-1 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}$, 则 $D_1(x)=x$. 对每个 $i=1,2,\cdots,n$, 我们依次将 $D_{n+1}(x)$ 的第 $i+1,i+2,\cdots,n+1$ 行都加到第 i 行. 于是提取公因式得

$$D_{n+1}(x)=(x+n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & x+n-1 & x+n & \cdots & x+n & x+n \\ 0 & n-1 & x+n-2 & \cdots & x+n & x+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+1 & x+n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

对每个 $j=1,0,-1,\cdots,2-n$, 依次让 $j+n$ 列减去第 $j-1+n$ 列并按第一行展开, 我们就得到递推

$$D_{n+1}(x)=(x+n)D_n(x-1).$$

于是 $D_n(x-1)=(x+n-2)D_{n-1}(x-2)$, 依次递推下去我们得到(23.147).

对于(23.148), 记

$$K_{n+1}(x)\triangleq\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ -n & x-2 & 2 & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & -1 & x-2n \end{vmatrix},n\in\mathbb{N}.$$

采用和计算(23.147)完全相同的初等变换可得递推

$$K_{n+1}(x)=(x-n)K_n(x-1),$$

这就给出了(23.148).

把(23.148)每行提出 -1 并把 x 换成 $n-x$ 之后取转置即得(23.149).

例题 23.192 延续定义23.14的符号, 当 $a_n=a,b_n=b,c_n=c$ 且 $bc>0,a\in\mathbb{R}$, 有 J_n 的每个特征值都是实的且几何重数为 1.

证明 由前面的推导(23.143), 我们取 $bc=h^2,h>0$, 则 J_n 相似把 b,c 换成 h 的矩阵, 这个矩阵是实对称的, 因此 J_n 的每个特征值都是实的.

设 λ 是 J_n 的特征值且 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\neq 0$ 是特征向量. 注意到

$$\begin{cases}(\lambda-a)x_1-bx_2=0\\-cx_1+(\lambda-a)x_2-bx_3=0\\\vdots\\-cx_{n-2}+(\lambda-a)x_{n-1}-bx_n=0\\-cx_{n-1}+(\lambda-a)x_n=0\end{cases}.$$

因为 $b\neq 0$, 所以由第一个方程可知 x_2 由 x_1 确定, 第二个方程可知由 x_3 由 x_1,x_2 确定, 因此也由 x_1 确定. 依次下去可知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都由 x_1 确定. 故我们证明了 J_n 的每个特征值几何重数是 1.

例题 23.193 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

证明 由三对角行列式23.48, 我们知道

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\frac{\sin[\alpha(n+1)]}{\sin\alpha}.$$

例题 23.194 若 $n\in\mathbb{N}$ 且 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是有理数, 则 $n|4$.

笔记 容易验证 $n=1,2,4$ 都是有理数, 但是 $n=3$ 就需要更多方法了.

证明 注意到由例题23.193, 我们用 Laplace 展开得到 n 阶矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{\sin[(n-1)\alpha]}{\sin\alpha} = \cos(n\alpha).$$

我们可以把 $2\cos(n\alpha)$ 表示为 $2\cos\alpha$ 的 n 次首 1 整系数多项式, 记为 P_n.

设 $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, 我们注意到 $\frac{4}{n} = 4\cos^2\frac{p}{q}\pi = 2\left(1+\cos\left(\frac{2p}{q}\pi\right)\right)$ 是首 1 多项式 $P_q(x-2)-2=0$ 的有理根, 我们有 $n|4$.

23.9.2 vandermonde 相关

本节我们用 $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 阶 Vandermonde 行列式.

对 $1 \leqslant i \leqslant n$, $V_n^{(i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示删除 $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的第 i 行 $\left(x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, \cdots, x_n^{i-1}\right)$ 之后新添第 n 行 $\left(x_1^n, x_2^n, \cdots, x_n^n\right)$ 所得 n 阶行列式.

$\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示将 $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的第 n 行换成 $\left(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \cdots, x_n^{n+1}\right)$ 所得 n 阶行列式.

例题 23.195 设初等对称多项式

$$\sigma_j = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n} x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_j}, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{23.150}$$

我们有

$$V_n^{(i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sigma_{n-i+1}V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, n. \tag{23.151}$$

证明 不妨设 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 互不相同. 设

$$D_n(x) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ (-x)^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-x)^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

由行列式性质我们知道 D_n 是 n 次多项式且有 n 个根 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_n$. 于是我们有

$$D_n(x) = c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n).$$

把 $D_n(x)$ 按第一列展开得

$$D_n(x) = \sum_{i=1}^{n} V_n^{(i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{i-1} + V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^n.$$

于是我们有 $c = V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 定义 $\sigma_0 = 1$, 用根和系数的关系得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_{n-i+1}V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} V_n^{(i)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{i-1} + V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^n,$$

这就证明了(23.151).

例题 23.196 证明:

$$\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\right)V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{23.152}$$

证明 不妨设 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 互不相同. 设 $n+1$ 次多项式

$$P_{n+1}(x) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ (-x)^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-x)^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ (-x)^{n+1} & x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

注意到有 n 个根 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_n$. 我们用 $-x_{n+1}$ 表示 P_{n+1} 第 $n+1$ 个根. 于是我们有

$$P_{n+1}(x) = c(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)(x+x_{n+1}).$$

将 $P_{n+1}(x)$ 按第一列展开得

$$P_{n+1}(x) = -V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{n+1} + \Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0, \tag{23.153}$$

其中 $a_{n-2}, \cdots, a_0$ 是某些与 x_j 有关的 n 阶行列式.

现在 $c = -V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 由多项式根和系数的关系得

$$P_{n+1}(x) = -V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\left(x^{n+1} + \delta_1 x^n + \delta_2 x^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}\right), \tag{23.154}$$

这里 δ_j 相似(23.150)定义是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的初等对称多项式.

比较(23.153),(23.154)的 x^{n-1} 系数可得

$$\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\delta_2 V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

因为 $P_{n+1}(x)$ 没有 x^n 的项, 所以[80]

$$\delta_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 0 \Rightarrow \delta_2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$

现在就有(23.152)成立.

来看一个小结论.

例题 23.197 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + \cdots + a_{in}x^{n-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 证明: 对任何复数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都有

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = \det A \cdot V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

这里 $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 Vandermonde 行列式.

证明 直接由矩阵乘法观察知显然.

例题 23.198 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

[80] 回忆 $\delta_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} x_i x_j$.

证明 由例题23.197我们知道

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

例题 23.199 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ (x_1+1)^n & (x_2+1)^n & (x_3+1)^n & \cdots & (x_n+1)^n \end{vmatrix}.$$

证明 二项式定理展开 D_n 最后一行, 然后把前面的行适当倍数加到最后一行可以得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n+nx_1^{n-1} & x_2^n+nx_2^{n-1} & x_3^n+nx_3^{n-1} & \cdots & x_n^n+nx_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{例题23.195}}{=} (x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)+n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

例题 23.200 计算

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}.$$

证明 首先我们有

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

然后利用

$$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

和例题23.197得

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_1^2 - 1 & \cdots & x_1^n - 1 \\ x_2 - 1 & x_2^2 - 1 & \cdots & x_2^n - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - 1 & x_n^2 - 1 & \cdots & x_n^n - 1 \end{vmatrix} = (x_1 - 1)(x_2 - 1)\cdots(x_n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + x_1 & \cdots & 1 + x_1 + \cdots + x_1^{n-1} \\ 1 & 1 + x_2 & \cdots & 1 + x_2 + \cdots + x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 + x_n & \cdots & 1 + x_n + \cdots + x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - 1)(x_2 - 1)\cdots(x_n - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

$$= (x_1 - 1)(x_2 - 1)\cdots(x_n - 1) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

由结论23.9.4得 $f(a) = |A|$ 是关于 a 的一次函数, 于是我们有

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} \Rightarrow f(a) = (a+1) f(0) - f(-1)\, a,$$

即

$$|A| = \left[(a+1) x_1 x_2 \cdots x_n - a (x_1 - 1)(x_2 - 1)\cdots(x_n - 1)\right] \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

例题 23.201 设 $A = \left(\frac{1 - x_i^n y_j^n}{1 - x_i y_j}\right), x_i y_j \neq 1, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 计算 $\det A$.

证明 注意到

$$\frac{1 - x_i^n y_j^n}{1 - x_i y_j} = 1 + x_i y_j + x_i^2 y_j^2 + \cdots + x_i^{n-1} y_j^{n-1}, i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

定义两个范德蒙德矩阵

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad V(y) = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \cdots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \cdots & y_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \cdots & y_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 可分解为:

$$A = V(x) \cdot V(y)^\top.$$

$$\det(A) = \det\left(V(x) \cdot V(y)^\top\right) = \det(V(x)) \cdot \det(V(y)^\top).$$

由于转置不改变行列式, 且范德蒙德行列式为:

$$\det(V(x)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i), \quad \det(V(y)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_j - y_i),$$

最终结果为:

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)(y_j - y_i).$$

引理 23.20

对 $m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\cos(m\theta) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant m}(-1)^k C_m^{2k}\left(1-\cos^2\theta\right)^k\cos^{m-2k}\theta; \tag{23.155}$$

$$\sin(m\theta) = \sin\theta\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant m}(-1)^k C_m^{2k+1}\left(1-\cos^2\theta\right)^k\cos^{m-2k-1}\theta. \tag{23.156}$$

♡

证明 先来看(23.155), 利用欧拉公式, 我们有

$$\begin{aligned}\cos(m\theta) &= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^m+(\cos\theta-i\sin\theta)^m\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{m}C_m^t\left[(i\sin\theta)^t+(-i\sin\theta)^t\right]\cos^{m-t}\theta\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant m}C_m^{2k}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{m-2k}\theta\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant m}C_m^{2k}(-1)^k\left(1-\cos^2\theta\right)^k\cos^{m-2k}\theta,\end{aligned}$$

这就证明了(23.155).

再来看(23.156), 利用欧拉公式, 我们有

$$\begin{aligned}\sin(m\theta) &= \frac{1}{2i}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^m-(\cos\theta-i\sin\theta)^m\right]\\ &= \frac{1}{2i}\sum_{t=0}^{m}C_m^t\left[(i\sin\theta)^t-(-i\sin\theta)^t\right]\cos^{m-t}\theta\\ &= \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant m}C_m^{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}\theta\cos^{m-2k-1}\theta\\ &= \sin\theta\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant m}C_m^{2k+1}(-1)^k\left(1-\cos^2\theta\right)^k\cos^{m-2k-1}\theta,\end{aligned}$$

这就证明了(23.156).

例题 23.202 计算如下行列式

1.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cdots & \cos\theta_n\\ \cos 2\theta_1 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos 2\theta_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \cos(n-1)\theta_1 & \cos(n-1)\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i). \tag{23.157}$$

2.

$$\begin{vmatrix}\sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \cdots & \sin\theta_n\\ \sin 2\theta_1 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin 2\theta_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sin n\theta_1 & \sin n\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_n\end{vmatrix} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\sin\theta_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i). \tag{23.158}$$

笔记 证明的想法是把 $\cos(m\theta)$ 表示为 $\cos\theta$ 的 m 次多项式, 将 $\sin(m\theta)$ 表示为 $\cos\theta$ 的 $m-1$ 次多项式和 $\sin\theta$ 之积的形式.

证明 由引理23.20和例题23.197, 我们容易得(23.157)和(23.158).

23.9.3 循环行列式

定义 23.15 (斜循环行列式)

证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1}z & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2}z & a_{n-1}z & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1z & a_2z & a_3z & \cdots & a_{n-1}z & a_0 \end{vmatrix} = f(w_0)f(w_1)\cdots f(w_{n-1}), \tag{23.159}$$

这里

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}, w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}是w^n = z的n个不同复根.$$

♣

证明 处理斜循环行列式的最重要的思想就是记住 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ 构成的 Vandermonde 矩阵可以把斜循环矩阵相似对角化. 考试中直接默写不必真的计算, 就能很快解决.

取 $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w_0 & w_1 & \cdots & w_{n-1} \\ w_0^2 & w_1^2 & \cdots & w_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_0^{n-1} & w_1^{n-1} & \cdots & w_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$, 则矩阵乘法直接验证就有

$$V^{-1}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1}z & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2}z & a_{n-1}z & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1z & a_2z & a_3z & \cdots & a_{n-1}z & a_0 \end{pmatrix} V = \operatorname{diag}\{f(w_0), f(w_1), \cdots, f(w_{n-1})\}.$$

两边取行列式即得(23.159). 此外还要注意 $V^{-1} = \frac{1}{n}\overline{V}$.

特别的, 对 $z = 1$, 我们有

定义 23.16

我们称

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}. \tag{23.160}$$

为循环矩阵

♣

注 记初等循环矩阵为

$$C = (e_n, e_1, \cdots, e_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们直接验证矩阵乘法计算得循环矩阵(23.160)一定等价于可以表示成

$$a_0+a_1C+a_2C^2+\cdots+a_{n-1}C^{n-1}.$$

注意到 $C^{-1}=C^{n-1}$, 我们有循环矩阵的和差积逆全是循环矩阵.

例题 23.203 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d & \cdots & a+(n-1)d \\ a+(n-1)d & a & a+d & \cdots & a+(n-2)d \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d & a & \cdots & a+(n-3)d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+d & a+2d & a+3d & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

证明 设 $f(x)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}(a+jd)x^j$, 由斜循环行列式23.15我们知道

$$D_n=f(w_0)f(w_1)\cdots f(w_{n-1})=\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(a+jd)w_k^j,$$

这里 w_k 是 n 次单位根的 k 次方. 现在

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(a+jd)w_k^j &\overset{\text{错位相减}}{=}\frac{2an+n(n-1)d}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{aw_k^{n+1}-aw_k^n-aw_k+a-dw_k^{n+1}+dnw_k^{n+1}-dnw_k^n+dw_k}{(w_k-1)^2}\\ &=\frac{2an+n(n-1)d}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{aw_k-a-aw_k+a-dw_k+dnw_k-dn+dw_k}{(w_k-1)^2}\\ &=\frac{2an+n(n-1)d}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{dn}{w_k-1}=\frac{2an+n(n-1)d}{2}(dn)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{w_k-1}.\end{aligned}$$

又 $(z+1)^n=1$ 的全部复根是 $w_k-1, k=0,1,2,\cdots,n-1$, 由韦达定理[81]得

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{w_k-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

因此

$$D_n=(-1)^{n-1}\frac{2a+(n-1)d}{2}(nd)^{n-1}.$$

例题 23.204 设 a,n 是给定互素正整数, 按 Euild 除法, 存在唯一确定的整数对 (s,t) 使得 $a=sn+t, 0\leqslant t\leqslant n-1$. 令

$$u_i=\begin{cases}s+1, & 0\leqslant i<t\\ s, & t\leqslant i\leqslant n-1\end{cases}.$$

若 t 与 n 互素, 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_0 & \cdots & u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_0 \end{vmatrix}.$$

证明 记

$$f(x)\triangleq\sum_{i=0}^{n-1}u_ix^i, w_j\triangleq e^{\frac{2\pi ij}{n}}, j=0,1,2,\cdots,n-1,$$

[81] 即考虑 $z^n+\cdots+nz=0$ 的一次项系数.

由循环行列式23.15我们知道

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{k=0}^{n-1} f\left(w_k\right) = (ns+t) \prod_{k=1}^{n-1} \left(s \sum_{i=0}^{n-1} w_1^{ki} + \sum_{j=0}^{t-1} w_1^{kj} \right) \\ &= a \prod_{k=1}^{n-1} \left(s \frac{1-w_1^{nk}}{1-w_1^k} + \frac{1-w_1^{tk}}{1-w_1^k} \right) = a \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-w_1^{tk}}{1-w_1^k} \\ &= a, \end{aligned}$$

这里因为 t, n 互素, 所以[82]

$$\left\{w_1, w_1^2, \cdots, w_1^{n-1}\right\} = \left\{w_1^t, w_1^{2t}, \cdots, w_1^{(n-1)t}\right\}.$$

23.9.4 杂例

结论 [加边行列式] 设 A 是 $n-1$ 阶矩阵, α, β 是 $n-1$ 维列向量, b 是一个数字, 那么

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = |A|\, b - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} A_{ij} \alpha_i \beta_j,$$

这里 α_i 是 α 的第 i 个分量, β_j 是 β 的第 j 个分量. A_{ij} 是 A 的第 (i,j) 元对应的代数余子式.

笔记 本结论是纯计算的, 只需要按最后一行用 Laplace 展开定理即可, 考试的时候可以假装证明[83]之后直接使用. 本结果一个自然的推论是

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & 0 \end{vmatrix} = -\beta^T A^* \alpha. \tag{23.161}$$

例题 23.205

1. 计算

$$|B| = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{vmatrix}$$

2. 计算

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

证明

1. 注意到

$$|B| = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{vmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right].$$

[82] 注意设群里面元素 g 的阶为 n, 则 g^k 的阶为 $\frac{n}{(n,k)}$.

[83] 即默写而无需真的去证一遍.

由Cauchy-Binet公式, 我们得

$$|B|=\begin{cases}0, & n\geqslant 3\\ -(a_1-a_2)^2, & n=2\\ 2a_1 & n=1\end{cases}. \tag{23.162}$$

2. 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\neq 0$, 否则摄动即可. 记

$$C\triangleq\begin{pmatrix}2a_1 & & & \\ & 2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2a_n\end{pmatrix},F\triangleq\begin{pmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & a_n\end{pmatrix},D\triangleq\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

我们由命题21.7有

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0\end{vmatrix}=|B-C|=|FD-C|\\ &=(-1)^n|C|\cdot\left|I-FDC^{-1}\right|=(-1)^n|C|\cdot\left|I-DC^{-1}F\right|\\ &=(-1)^n|C|\cdot\left|I-\begin{pmatrix}\frac{n}{2} & \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}\\ \frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_n} & \frac{n}{2}\end{pmatrix}\right|\\ &=(-1)^n2^n\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n a_i\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right]\cdot\prod_{i=1}^n a_i\\ &=(-2)^{n-2}\left[(n-2)^2-\sum_{i=1}^n a_i\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right]\cdot\prod_{i=1}^n a_i\\ &=(-2)^{n-2}\left[(n-2)^2\cdot\prod_{k=1}^n a_k-\sum_{k=1}^n a_k\cdot\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}a_j\right].\end{aligned}$$

结论 [♡] 设

$$A(t)\triangleq\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix},$$

我们有

$$A(t)=A(0)+t\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}. \tag{23.163}$$

注 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式.

笔记 本结果考试中可以直接使用, 只需加上一句利用行列式多重线性性[84]反复展开即可.

[84]即关于每个列向量线性的函数.

证明 利用行列式多重线性性和行列式有两列相同必然为 0, 我们知道

$$A(t)=A(0)+\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & t & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & t & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{把}A(0)\text{的第}j\text{列换成}t}$$

$$\overset{\text{按第}j\text{列展开}}{=} A(0)+\sum_{j=1}^{n}t\sum_{i=1}^{n}A_{ij}$$

$$=A(0)+t\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ij},$$

即证明了(23.163).

例题 23.206 设 $a,b,c\in\mathbb{C}$, 计算

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

证明 设

$$f(t)\triangleq\begin{vmatrix} a+t & b+t & \cdots & b+t \\ c+t & a+t & \cdots & b+t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c+t & c+t & \cdots & a+t \end{vmatrix}.$$

由结论23.9.4得 f 是一次函数. 当 $b\neq c$, 我们有

$$f(-b)=(a-b)^n,f(-c)=(a-c)^n,$$

于是

$$\frac{f(0)-f(-b)}{0-b}=\frac{f(0)-f(-c)}{0-c}\Rightarrow|A|=f(0)=\frac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c}. \tag{23.164}$$

当 $b=c$, 由连续性和(23.164)得

$$|A|=\lim_{b\to c}\frac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

实际上我们可以有更强的.

例题 23.207 计算

$$|A|=\begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ c & x_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

证明 相似例题23.206的证明, 我们有

$$|A|=\begin{cases}\frac{1}{c-b}\left(c\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(x_i-c)\right), & b\neq c\\ \prod_{i=1}^{n}(x_i-b)+b\sum_{j=1}^{n}\prod_{1\leqslant i\leqslant n,i\neq j}(x_i-b), & b=c\end{cases}.$$

例题 23.208 设 $m,n\in\mathbb{N}$, 计算

1.
$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1\\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

2.
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+n}{1}\\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \cdots & \binom{m+n+1}{2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \cdots & \binom{m+2n-1}{n}\end{vmatrix}.$$

注 在一些文献中, 也用 $\binom{s}{t}\triangleq C_s^t$. 我们总是约定
$$\binom{s}{t}=C_s^t=0,\forall t\notin[0,s]\bigcap\mathbb{Z}.$$

引理 23.21 (Vandermonde 恒等式)

对 $p,q\in\mathbb{N},0\leqslant l\leqslant p+q,l\in\mathbb{Z}$, 我们有
$$\binom{p}{0}\binom{q}{l}+\binom{p}{1}\binom{q}{l-1}+\cdots+\binom{p}{l}\binom{q}{0}=\binom{p+q}{l}. \tag{23.165}$$
♡

证明 考虑
$$(x+1)^p(x+1)^q=(x+1)^{p+q},$$
则
$$\left(\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{q}\binom{q}{s}x^s\right)=\sum_{t=0}^{p+q}\binom{p+q}{t}x^t.$$
比较上式两边 x^l 系数可得(23.165).

证明

1. 考虑 $L=(l_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 这里
$$l_{ij}=\begin{cases}C_{i-1}^{j-1}, & 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n\\ 0, & 1<i<j\leqslant n\end{cases}.$$
注意到
$$A=(a_{ij}),a_{ij}=C_{i+j-2}^{i-1}.$$
利用 Vandermonde 恒等式23.21有
$$a_{ij}=C_{i+j-2}^{i-1}=\sum_{k=1}^{n}C_{i-1}^{i-k}C_{j-1}^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}C_{i-1}^{k-1}C_{j-1}^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}l_{jk},$$
即
$$|A|=\det\left(L\cdot L^T\right)=|\det L|^2=1.$$

2. 利用 Vandermonde 恒等式23.21有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \cdots & \binom{m+n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \cdots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n-1}{n-1} & \binom{m+n-1}{n-2} & \cdots & \binom{m+n-1}{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$

$$= 1.$$

例题 23.209 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

这里

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, k \in \mathbb{N}_0.$$

证明 注意到

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

于是由 Vandermonde 行列式可得

$$D = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x - x_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)^2.$$

例题 23.210 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}.$$

证明 由例题23.197和 Vandermonde 行列式, 当 $a\neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\text{原行列式}&=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}1&-a&0&0&\cdots&0\\1&x_1-a&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\1&x_2-a&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n-a&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}\\
&-\frac{1}{a}\begin{vmatrix}x_1-a&x_1(x_1-a)&x_1^2(x_1-a)&\cdots&x_1^{n-1}(x_1-a)\\x_2-a&x_2(x_2-a)&x_2^2(x_2-a)&\cdots&x_2^{n-1}(x_2-a)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n-a&x_n(x_n-a)&x_n^2(x_n-a)&\cdots&x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}\\
&=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\-a&1&\cdots&0&0\\0&-a&\ddots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-a&1\end{vmatrix}\cdot V_{n+1}(0,x_1,x_2,\cdots,x_n)-\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)}{a}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_j-x_i)\\
&=\frac{1}{a}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right)\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_j-x_i).
\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{a\to 0}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)}{a}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j}x_i,$$

我们有

$$\text{原行列式}=\begin{cases}\frac{1}{a}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)\right)\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_j-x_i), & a\neq 0\\ \prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_j-x_i)\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{i\neq j}x_i, & a=0\end{cases}.$$

例题 23.211 设 $n>2$ 阶行列式 $\det A$ 的所有元素为 $1,-1$, 证明 $|\det A|\leqslant\frac{2}{3}n!$.

证明 当 $n=3$, 设

$$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^3, a_{ij}\in\{-1,1\}, i,j=1,2,\cdots,n.$$

首先通过行列倍乘, 我们不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&c&d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\{-1,1\}.$$

考虑第 $2,3$ 列减去第 1 列可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&b\\1&c&d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\{-2,0\}.$$

注意到若 $a=b=c=d=-2$, 则 $|\det A|=|ad-bc|=0$, 其余情况

$$|\det A|=|ad-bc|\leqslant 4=\frac{2}{3}\cdot 3!.$$

假设 $|\det A| \leqslant \frac{2}{3}n!$ 对 $n \geqslant 3$ 成立, 当 $n+1$ 时, 注意到 A 可以按第一行作 Laplace 展开, 则

$$|\det A| = \left|\sum_{j=1}^{n+1} a_{1j}A_{1j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} |A_{1j}| \leqslant (n+1)\cdot\frac{2}{3}\cdot n! = \frac{2}{3}(n+1)!,$$

从而对一切 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|\det A| \leqslant \frac{2}{3}n!$.

例题 23.212

1. 设

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, a_{ij} = \max\{i,j\}, i,j = 1,2,\cdots,n,$$

计算 $\det A$.

2. 设

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, a_{ij} = |x_i - x_j|, i,j = 1,2,\cdots,n,$$

这里 x_i 互不相同. 证明:

$$\det A = (-1)^n 2^{n-2}(x_{k_1} - x_{k_2})(x_{k_2} - x_{k_3})\cdots(x_{k_{n-1}} - x_{k_n})(x_{k_n} - x_{k_1}), \tag{23.166}$$

这里

$$x_{k_1} > x_{k_2} > \cdots > x_{k_{n-1}} > x_{k_n}.$$

证明

1. 注意到

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & n \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

我们有

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & n \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}\cdot n.$$

2. 我们不妨设 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, 否则对 A 的行列作同步的置换, 就也可以得到(23.166).
首先我们有

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & x_1 - x_2 & x_1 - x_3 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_1 - x_2 & 0 & x_2 - x_3 & \cdots & x_2 - x_n \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_3 & 0 & \cdots & x_3 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & x_3 - x_n & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

依次第一列减第二列, 第二列减第三列, 第三列减第四列, $\cdots$, 我们有

$$\det A = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_4 - x_3 & \cdots & x_n - x_{n-1} & x_1 - x_n \\ x_1 - x_2 & x_3 - x_2 & x_4 - x_3 & \cdots & x_n - x_{n-1} & x_2 - x_n \\ x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & x_4 - x_3 & \cdots & x_n - x_{n-1} & x_3 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & x_3 - x_4 & \cdots & x_{n-1} - x_n & x_n - x_n \end{vmatrix}.$$

提出各列公因子得

$$\det A=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n)\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1&x_1-x_n\\1&-1&-1&\cdots&-1&x_2-x_n\\1&1&-1&\cdots&-1&x_3-x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1&x_n-x_n\end{vmatrix}.$$

把上式第一行加到第 n 行得

$$\begin{aligned}\det A&=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n)\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1&x_1-x_n\\1&-1&-1&\cdots&-1&x_2-x_n\\1&1&-1&\cdots&-1&x_3-x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&x_1-x_n\end{vmatrix}\\&=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_n)\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1\\1&-1&-1&\cdots&-1\\1&1&-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1\end{vmatrix}\\&=(-1)^{n-1}2^{n-2}(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_n),\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自例题23.206. 因此我们有(23.166)成立.

例题 23.213 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

$$|B|=\begin{vmatrix}a_{11}-a_{12}&a_{12}-a_{13}&\cdots&a_{1,n-1}-a_{1n}&1\\a_{21}-a_{22}&a_{22}-a_{23}&\cdots&a_{2,n-1}-a_{2n}&1\\a_{31}-a_{32}&a_{32}-a_{33}&\cdots&a_{3,n-1}-a_{3n}&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}-a_{n2}&a_{n2}-a_{n3}&\cdots&a_{n,n-1}-a_{nn}&1\end{vmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.\tag{23.167}$$

证明 设 $\alpha_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 A 的列向量组, 则

$$|B|=\det(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}-\alpha_n,1_n).$$

把上式的每一列后面除 1_n 的列全部加到该列得

$$|B|=\det(\alpha_1-\alpha_n,\alpha_2-\alpha_n,\cdots,\alpha_{n-1}-\alpha_n,1_n).$$

我们有

$$\begin{aligned}|B|&=\det(\alpha_1-\alpha_n,\alpha_2-\alpha_n,\cdots,\alpha_{n-1}-\alpha_n,1_n)\\&=\det(\alpha_1-\alpha_n,\alpha_2-\alpha_n,\cdots,\alpha_{n-1}-\alpha_n,\alpha_n+1)-\det(\alpha_1-\alpha_n,\alpha_2-\alpha_n,\cdots,\alpha_{n-1}-\alpha_n,\alpha_n)\\&=\det(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\cdots,\alpha_{n-1}+1,\alpha_n+1)-\det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},\end{aligned}$$

这里倒数第二个等号来自把两个行列式最后一列分别加到前面的列, 最后一个等号来自结论23.9.4. 于是我们证

明了(23.167).

例题 23.214 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_2a_3\cdots a_n & a_1a_3\cdots a_n & \cdots & a_1a_2\cdots a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} V_n(a_1, a_2, \cdots, a_n). \tag{23.168}$$

证明 我们有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_2a_3\cdots a_n & a_1a_3\cdots a_n & \cdots & a_1a_2\cdots a_{n-1} \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_1a_2\cdots a_n \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} V_n(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

即(23.168)成立.

例题 23.215 计算

$$J_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & d_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix}.$$

证明 注意到按第一行展开得

$$J_{2n} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & a_n & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & c_n & d_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & d_n & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_2 \\ c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

按最后一行展开上式得到递推关系,从而有

$$J_{2n} = \prod_{k=1}^{n} (a_k d_k - b_k c_k).$$

例题 23.216 设 $a_{ij}=(t+x_i)^j, i,j=1,2,\cdots,n$, 证明:

$$x_1x_2\cdots x_n\det\left((a_{ij})\right)=\det\left(\left(x_i^j\right)\right)(t+x_1)(t+x_2)\cdots(t+x_n). \tag{23.169}$$

证明 记 $F(t)\triangleq\det\left((a_{ij})\right)$, 我们有

$$\begin{aligned}F(t)&=\prod_{i=1}^{n}(t+x_i)\begin{vmatrix}1&t+x_1&\cdots&(t+x_1)^{n-1}\\1&t+x_2&\cdots&(t+x_2)^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&t+x_n&\cdots&(t+x_n)^{n-1}\end{vmatrix}\\&=\prod_{i=1}^{n}(t+x_i)\cdot V_n(t+x_1,t+x_2,\cdots,t+x_n).\\&=\prod_{i=1}^{n}(t+x_i)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+t-x_i-t)\\&=V_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\prod_{i=1}^{n}(t+x_i),\end{aligned}$$

于是由

$$\begin{aligned}x_1x_2\cdots x_nV_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&\cdots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=F(0),\end{aligned}$$

我们有(23.169)成立, 这就完成了证明.

例题 23.217 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 用 $M_{ij,rs}$ 表示表示 $|A|$ 中划去 a_{ij} 和 a_{rs} 所在行和列后所得行列式和 $(-1)^{i+j+r+s}$ 的积. 证明: 对 $i\neq r, j\neq s$, 我们有

$$\begin{vmatrix}A_{ij}&A_{is}\\A_{rj}&A_{rs}\end{vmatrix}=|A|M_{ij,rs}. \tag{23.170}$$

证明 不妨设 $(i,j)=(n-1,n-1),(r,s)=(n,n)$, 否则交换行列即可.

由 Laplace 展开得

$$a_{h1}A_{i1}+a_{h2}A_{i2}+\cdots+a_{hn}A_{in}=\begin{cases}|A| & (\text{当}h=i),\\0 & (\text{当}h\neq i),\end{cases},$$

对 $1\leqslant m\leqslant n-2$, 我们有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1,1} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & A_{m+1,2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & A_{m+1,m} & \cdots & A_{nm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1,m+1} & \cdots & A_{n,m+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1,m+2} & \cdots & A_{n,m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m+1,n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+2,1} & \cdots & a_{m+2,m} & 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

因此

$$|A|\begin{vmatrix} A_{m+1,m+1} & \cdots & A_{n,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1,n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}|A|^{n-m}.$$

取 $m=n-2$ 即得(23.170).

例题 23.218 证明:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(x_k-a_k)+\sum_{k=1}^{n}a_k\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(x_i-a_i). \tag{23.171}$$

证明 每列提出 a_i 得

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{x_2}{a_2} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{x_3}{a_3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{x_n}{a_n} \end{vmatrix}.$$

由例题23.207得(23.171).

例题 23.219 设 $A=((i+j-2)!)_{n\times n}$, 计算 $\det A$.

证明 记下三角矩阵

$$B=(b_{ij})_{n\times n},b_{ij}\triangleq\begin{cases}\frac{[(i-1)!]^2}{(i-j)!(j-1)!}, & 1\leqslant j\leqslant i\\ 0, & j>i\end{cases}.$$

此时使用组合数的 Vandermonde 恒等式23.21可得

$$A=BB^T\Rightarrow \det A=|\det B|^2=\left(\prod_{k=0}^{n-1}k!\right)^2.$$

例题 23.220 当 $n\geqslant 2$, 计算

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

证明 我们有

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -b_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_1 & -b_3 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

是对角元为

$$a_1b_1, b_2\left(a_2b_1-a_1b_2\right), b_3(a_3b_2-a_2b_3),\ \cdots,\ b_n(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)$$

的下三角矩阵. 于是我们有

$$|A|=\frac{a_1b_1\prod\limits_{k=2}^{n}b_k\left(a_kb_{k-1}-a_{k-1}b_k\right)}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}=a_1b_n\prod_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}b_k-a_kb_{k+1}\right).$$

命题 23.25 (矩阵和的行列式)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$, 则

$$|A+B|=|A|+|B|+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}}A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\widehat{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix},$$

这里 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 表示 A 的 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行, $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列构成的子式. $\widehat{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 表示 B 去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行, $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列之后剩下的行列构成的代数余子式.

证明 利用行列式的多重线性性和 Laplace 展开容易证明, 详细书写可见高等代数中两个同阶矩阵的行列式之和.

23.10 数学类多项式

多项式更多作为高中数学竞赛内容出现, 因此备考中无需过度重视. 唯一一次以难题出现还是无人可做的钓鱼题.

23.10.1 分圆多项式

本节是补充一下基本的分圆多项式重点内容, 属于课内知识. 可以直接使用结论而不必关心证明. 本节我们设 $\xi=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 并记全体 n 次单位根 $\xi^j, j=0,1,2,\cdots,n-1$. 由基本的数论知识我们知道共有 $\varphi(n)$ 个本原 n 次单位根[85].

定义 23.17 (分圆多项式定义)

定义 $\Phi_0(x)=1$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 我们定义第 n 个分圆多项式为

$$\Phi_n(x)=\prod_{1\leqslant k\leqslant n,(k,n)=1}\left(x-\xi^k\right).$$

♣

分圆多项式有如下性质:

定理 23.49 (分圆多项式的性质)

1.

$$x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x),\forall n\in\mathbb{N}. \tag{23.172}$$

2. 对任何 $n\in\mathbb{N}$, Φ_n 是首一 $\varphi(n)$[a]次不可约整系数多项式.

[a] $\varphi(n)=n\prod\limits_{p|n,p\text{是正素数}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 叫欧拉函数, 其定义为和 n 互素的不超过 n 的正整数个数.

♡

证明 证明见:分圆多项式.

例题 23.221 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $A\in\mathbb{Q}^{2\times2}$ 满足 $A^n=-I_2$, 证明 $A^2=-I_2$ 或者 $A^3=-I_2$.

证明 设 $m,\deg m\leqslant 2$ 是 A 的极小多项式, 注意到 x^n+1 是 A 的零化多项式, 因此有

$$m|\left(x^n+1\right)\Rightarrow m|\frac{x^{2n}-1}{x^n-1}\overset{\text{分圆多项式性质23.49}}{=}m|\frac{\prod\limits_{d|2n}\Phi_d}{\prod\limits_{d|n}\Phi_d},\Phi_d\text{是分原多项式23.17}.$$

于是我们只需考虑 m 是若干个 Φ_d 的积, 此时必有 $\deg\Phi_d=\varphi(d)\leqslant 2$. 枚举可得 $d=\{1,2,3,4,6\}$. 此时对应的分圆多项式分别是 $x\pm1,x^2\pm x+1,x^2+1$. 注意到 $A^n=-I_2$ 说明 A 不能有特征值 1, 从而排除 $x-1$ 是 m 的因子. 若 m 有因子 x^2+1, 则考虑次数不能超过 3 知 x^2+1 就是 A 的极小多项式, 从而 $A^2=-I_2$. 若 $x+1$ 是 m 的因子, 则 A 有特征值 -1, 于是 A 特征值是 $-1,-1$. 注意到 $(x+1)^2$ 不是 x^n+1 的因子, 因此 A 的极小多项式是 $x+1$, 从而 $A=-I_2$ 给出了 $A^3=-I_2$. 若 x^2-x+1 是 m 的因子, 则 $m=x^2-x+1$, 从而

$$A^2-A+I_2=0\Rightarrow A^3+I_2=(A+I_2)\left(A^2-A+I_2\right)=0.$$

若 x^2+x+1 是 m 的因子, 则 $m=x^2+x+1$, 从而

$$A^2+A+I_2=0\Rightarrow A^3-I_2=(A-I_2)\left(A^2+A+I_2\right)=0,$$

故

$$A^3=I_2,A^4=A,A^5=A^2,A^6=A^3=I_2,\cdots.$$

现在

$$A^n=\underbrace{I_2}_{\text{不可能}}\text{ 或 }\underbrace{A}_{\text{此时}A=-I_2}\text{ 或 }\underbrace{A^2}_{\text{此时}A^2=-I_2},$$

这就完成了证明.

[85] 即单位根群的生成元.

23.10.2 一些重要判别法和结论

定理 23.50 (perron 判别法)

设 $n\in\mathbb{N},f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{Z}[x],a_n=1,a_0\neq0$, 如果有

$$|a_{n-1}|>\sum_{0\leqslant i\leqslant n,i\neq n-1}|a_i|,$$

那么 f 在 $\mathbb{Z}[x]$ 不可约.

♡

注本结果也有高代证明, 但是复分析显得自然, 简洁. 极大的系数往往就能证配合鲁歇定理.

证明 首先

$$\left|a_{n-1}x^{n-1}\right|=|a_{n-1}|>\sum_{0\leqslant j\leqslant n,j\neq n-1}|a_j|\geqslant\left|-a_nx^n-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_0\right|,\forall|x|=1,$$

由鲁歇定理, $a_{n-1}x^{n-1}$ 和 $f(x)$ 在 $|x|<1$ 有相同的根, 因此 f 有唯一一个模长大于 1 的零点 a, 且在 $|x|=1$ 没有零点, 如果存在 $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x],m\neq0$, 使得

$$f(x)=g(x)h(x),g(x)=x^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0.$$

因为 $a_0\neq0$, 所以 $c_0\neq0$, 由韦达定理, 我们知道 $g(x)$ 所有根之积的绝对值是 $|c_0|\geqslant1$, 因此 $g(x)$ 有零点 a, 如果 $\deg h>0$, 那么同样的事情对 h 也成立, 因此 h 也有零点 a, 这和 f 只有单根 a 矛盾, 所以 $\deg h=0$, 因此 $g(x)=f(x)$, 这样就说明了 f 在 $\mathbb{Z}[x]$ 不可约.

定理 23.51 (Gauss-Lucas 定理)

设 $f\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg f\geqslant1$, 证明 f' 所有零点位于 f 的零点的凸包内.

♡

证明 设 $f(z)=c\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{m_i},m_i\in\mathbb{N},i=1,2,\cdots,m,c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{z-z_i}.$$

设 $f'(z_0)=0,f(z_0)\neq0$, 则

$$0=\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{z_0-z_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i\left(\overline{z_0}-\overline{z_i}\right)}{\left|z_0-z_i\right|^2}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\frac{m_iz_0}{\left|z_0-z_i\right|^2}=\sum_{i=1}^{m}\frac{m_iz_i}{\left|z_0-z_i\right|^2},$$

即

$$z_0=\sum_{i=1}^{m}\lambda_iz_i,\lambda_i=\frac{m_i}{\left|z_0-z_i\right|^2\sum_{j=1}^{m}\frac{m_j}{|z_0-z_j|^2}}\in[0,1],j=1,2,\cdots,m.$$

当 $f'(z_0)=0=f(z_0)$, 此时当然定理更成立. 我们完成了证明.

23.10.3 多项式杂题

例题 23.222 设 $f\in\mathbb{C}[x]$ 满足

$$\deg f=n\in\mathbb{N},f'|f,$$

证明:f 有 n 重根.

证明 注意到 $\deg f'=n-1,f'|f$ 以及对比首系数, 我们有

$$f(x)=\frac{1}{n}(x-c)f'(x).$$

注意到[86]

$$\frac{f}{(f,f')}=\frac{1}{n}(x-c),$$

因此我们有 f 只能有根 c, 因此

$$f(x)=a(x-c)^n,a\neq 0.$$

例题 23.223 如果 $f\in\mathbb{R}[x]$ 是非负的, 证明: 存在 $\varphi,\psi\in\mathbb{R}[x]$ 使得

$$f=\varphi^2+\psi^2.$$

证明 当 f 为常数多项式则显然, 下面假设 $\deg f\geqslant 1$.

设

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}g(x),$$

这里 $a_0>0$ 且 $k_i,i=1,2,\cdots,r$ 都是正偶数且 g 没有实根.

设

$$g(x)=(x-\beta_1)\left(x-\overline{\beta_1}\right)(x-\beta_2)\left(x-\overline{\beta_2}\right)\cdots(x-\beta_s)\left(x-\overline{\beta_s}\right),$$

我们有

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_s)=\mu(x)+i\nu(x),\mu,v\in\mathbb{R}[x].$$

注意到

$$\left(x-\overline{\beta_1}\right)\left(x-\overline{\beta_2}\right)\cdots\left(x-\overline{\beta_s}\right)=\mu(x)-i\nu(x),$$

于是

$$g(x)=\mu^2(x)+\nu^2(x).$$

考虑

$$\varphi(x)\triangleq\sqrt{a_0}\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{\frac{k_i}{2}}\mu(x),\psi(x)\triangleq\sqrt{a_0}\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{\frac{k_i}{2}}\nu(x),$$

就有

$$f=\varphi^2+\psi^2.$$

来看天津大学考研题

例题 23.224 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上无重根的非常数多项式且满足

$$f(f(x))=f^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0,$$

这里 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mathbb{Z}$. 证明 $f\in\mathbb{Z}[x]$ 且若 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为奇数, 则 f 无偶整数根.

证明 因为 f 值域包含无穷多个点, 所以

$$f(x),x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

在无穷多个点上相等, 所以

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x].$$

若 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为奇数, 由有理根的性质, 我们知道 f 的整数根 q 必须满足 $q|a_0$, 从而 q 为奇数, 这就完成了证明.

例题 23.225 设 p 为正素数, 证明 $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

[86]这一步操作始终得到 f 的所有零点对应一次多项式的积, 即不计重数的暴露出 f 的全部零点.

证明 注意到

$$f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}, f(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x}=\sum_{k=0}^{p-1}C_p^k x^{p-k-1}.$$

因为 $p|C_p^i, 1\leqslant i\leqslant p-1$ 且 p 不能整除首系数 1, p^2 不能整除 $C_p^{p-1}=p$, 我们知道由艾森斯坦判别法知 $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

例题 23.226 设 $p,q\in\mathbb{R}[x]$ 且 $m,n\in\mathbb{N}$. 设

$$p(x)=x^n+\sum_{j=1}^{n}a_jx^{n-j}, q(x)=x^m+\sum_{j=1}^{m}b_jx^{m-j}.$$

若 $q|p$ 且对某个 $k\in\mathbb{N}, c>0$ 有 $|b_k|>(c+1)^kC_m^k$. 证明: 存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得 $|a_j|>c$.

证明 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 p 的全部根且模长小于等于 $c+1$. 由根与系数的关系知

$$\begin{aligned}|b_k|&=\left|(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\right|\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}|\\&\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(c+1)^k=(c+1)^kC_m^k,\end{aligned}$$

这和题目假设矛盾! 故 p 存在复根 y 并成立 $|y|>c+1$. 假定对所有 j, 都有 $|a_j|\leqslant c$, 则由 $q|p$ 知

$$\begin{aligned}0=|p(y)|&=\left|y^n+\sum_{j=1}^{n}a_jy^{n-j}\right|\\&\geqslant|y|^n-\left|\sum_{j=1}^{n}a_jy^{n-j}\right|\geqslant|y|^n-c\sum_{j=1}^{n}|y|^{n-j}\\&=|y|^n-c\frac{|y|^n-1}{|y|-1}>|y|^n-c\frac{|y|^n}{|y|-1}\\&=|y|^n\left(1-\frac{c}{|y|-1}\right)>0,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得 $|a_j|>c$.

例题 23.227 设 $p(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的多项式, 且满足

$$P|_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\text{是满射}.$$

证明: $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一次多项式.

证明 显然 $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的多项式 (取一些有理点解方程就能在 $\mathbb{Q}$ 上确定好系数), 进一步, 不妨设 $p(x)$ 是整系数多项式, $\deg p(x)>1$. 设 $p(x)$ 的首系数不含有素因子 $q>1$, 记

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

显然由艾森斯坦判别法的推广

$$qa_nx^n+qa_{n-1}x^{n-1}+\ldots qa_1x+(a_0q-1)$$

是 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式, 故无有理根, 故此时 $p(x)=\frac{1}{q}$ 无解, 由 q 任意性,$p(x)$ 首系数必然含有任何素因子, 这是矛盾的. 当 $\deg p(x)=1$, 此时显然满足题目条件, 我们完成了证明.

例题 23.228 设 $f,g\in\mathbb{C}[x]$ 是次数大于等于 1 的互素多项式, 证明必然存在唯一的 $u,v\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

且 $\deg u<\deg g, \deg v<\deg f$.

证明 存在性:

因为 $(f,g)=1$, 故必然存在 $k,h\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $fh+gk=1$. 若 $\deg h\geqslant\deg g$, 则做带余除法

$$h=gq+u, \deg u<\deg g.$$

于是

$$f(gq+u)+gk=1\Rightarrow fu+g(fq+k)=1.$$

令 $v=fq+k$, 则由 $fu+g(fq+k)=1$ 和比较两边次数知 $\deg v<\deg f$. 现在我们证明了存在性.

唯一性:

若还有 $u_1,v_1\in\mathbb{C}[x]$ 满足条件, 则

$$f(u-u_1)=g(v_1-v).$$

又 f,g 互素, 故

$$g|(u-u_1),f|(v_1-v)\Rightarrow u=u_1,v=v_1,$$

这就证明了唯一性.

例题 23.229 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $f,g\in\mathbb{F}[x],\deg g\geqslant 1$, 证明: 存在唯一一的 $(f_0,f_1,\cdots,f_r,0,0,\cdots)\in(\mathbb{C}[x])^{\infty}$ 使得

$$\deg f_i<\deg g\text{或者}f_i=0,0\leqslant i\leqslant r$$

且

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+\cdots+f_r(x)g^r(x).$$

注$(\mathbb{C}[x])^{\infty}$ 表示 $\mathbb{C}[x]$ 的可数笛卡尔积. 为书写方便, 我们可以记 $f_i=0,i\geqslant r+1$.

证明

为方便, 对 $p\in\mathbb{C}[x]$, 我们约定 $\deg p=-\infty\Leftrightarrow p=0$.

存在性:

由带余除法, 存在 $r\in\mathbb{N}_0$ 使得 $\deg q_r<\deg g$ 且

$$\begin{aligned}
&f=q_1g+f_0,\deg f_0<\deg g,q_1=q_2g+f_1,\deg f_1<\deg g\\
&q_2=q_3g+f_2,\deg f_2<\deg g,q_3=q_4g+f_3,\deg f_3<\deg g\\
&\vdots\\
&q_{r-1}=q_rg+f_{r-1},\deg f_{r-1}<\deg g,
\end{aligned}$$

取 $f_r=q_r$, 我们得

$$\begin{aligned}
f&=f_0+(q_2g+f_1)g=f_0+f_1g+(q_3g+f_2)g^2=\cdots\\
&=f_0+f_1g+\cdots+f_{r-1}g^{r-1}+q_rg^r=f_0+f_1g+\cdots+f_rg^r.
\end{aligned}$$

唯一性:

若有两种不同的表示

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}f_ig^i=\sum_{i=0}^{\infty}h_ig^i,\deg h_i,\deg f_i<\deg g,i\in\mathbb{N}_0,$$

我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}(f_i-h_i)g^i=0.$$

设上式使得 $f_i-h_i\neq 0$ 的最大的 i 为 k, 则 $\deg\left[(f_k-h_k)g^k\right]\geqslant k\deg g$ 以及

$$\deg\left[(f_i-h_i)g^i\right]=\deg(f_i-h_i)+i\deg g<k\deg g,0\leqslant i<k,$$

故 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(f_i-h_i)g^i$ 不可能是 0 多项式, 矛盾! 这就证明了唯一性.

例题 23.230 设 $p,q\in\mathbb{R}[x]$ 满足

$$p\left(x^2+x+1\right)=q\left(x^2-x+1\right),$$

证明 $p=q$ 为常数.

笔记 利用等式关系反复迭代来得到无穷个根.

证明 事实上

$$(2x+1)\,p'\left(x^2+x+1\right)=(2x-1)\,q'\left(x^2-x+1\right),\forall x\in\mathbb{R},$$

那么 $p'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right)=0$, 因此由韦达定理知

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+1.$$

从而 $p'\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+1\right)=0$, 类似的从而 $q'\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1\right)=0$, 从而 $q'\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}+1\right)=0$, 从而 $p'\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}+1\right)=0$, 依次下去我们得到 p',q' 有无穷多个根, 因此都为 0, 这样结合 $p(1)=q(1)$ 我们就证明了 $p=q$ 为常数.

例题 23.231 计算全部 $f\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$f\left(x^2\right)=f(x)\,f(x+1),\forall x\in\mathbb{C}. \tag{23.173}$$

证明 当 $f=c\in\mathbb{C}$, 我们有 $c=c^2$, 故 $f=0$ 或者 $f=1$ 为所求.

当 f 不为常数, 设 $f(x_1)=0,x_1\in\mathbb{C}$, 我们由(23.173)知

$$f\left(x_1^2\right)=0.$$

反复运用(23.173)得 $x_1^{2^n},n\in\mathbb{N}_0$ 都是 f 零点. 又非 0 多项式零点有限, 故设 $x_1^{2^n}=x_1^{2^m},n>m\geqslant 0$, 则 $x_1^{2^n-2^m}=1$ 或 $x_1=0$. 当前者发生, 我们有 $|x_1|=1$. 从而 f 的所有根都在单位圆周上或者是 0.

设 $f(x_1)=0,x_1\in\mathbb{C}$, 又由(23.173)知 $f\left((x_1-1)^2\right)=0$. 当

$$|x_1|=1,x_1\neq 1. \tag{23.174}$$

则 $|x_1-1|=1$, 故两个方程解得 $x_1=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$, 即满足(23.174)的 f 零点只能是 $e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$. 考虑 $x_1^2=e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}\neq e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ 也是满足(23.174)的 f 的零点. 这就是矛盾!

故不存在 f 的满足(23.174)的零点. 从而 f 的零点只有 0 或者 1. 设 $f(x)=cx^n(x-1)^m$ 代入原方程得

$$\begin{aligned}f\left(x^2\right)&=cx^{2n}\left(x^2-1\right)^m=cx^{2n}(x-1)^m(x+1)^m\\&=f(x)\,f(x+1)=c^2x^{n+m}(x-1)^m(x+1)^n\\&\Rightarrow f(x)=x^n(x-1)^n,n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

这就完成了证明.

例题 23.232 设一元 n 次多项式的 $n-1$ 次项为第二项, 求所有 2020 次复系数多项式 f, 使得对 f 每个复根 x_k, 都存在首 1 第二项相同的多项式 g_k,h_k 使得

$$f(x)=(x-x_k)\,g_k(x)\,h_k(x).$$

证明 首先第二项相同的首 1 多项式就是说所有根之和相等. 此外满足题目条件的 f 显然应该首 1. 因此假定 f 的全部根为 $x_1,\cdots,x_{2020}$. 那么对每个 $k=1,2,\cdots,2020$, 除去 x_k 外, 剩下 x_i 要分成两组使得两组和相等. 于是

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant 2020,i\neq k}\epsilon_i x_i=0,\epsilon_i=\pm 1,\forall k=1,2,\cdots,2020,$$

这是关于 $x_1,\cdots,x_{2020}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵对角元为 0, 非对角元为 ±1.

我们把系数矩阵视为 $\mathbb{Z}_2$ 上的矩阵, 则系数矩阵变成 $J-I$, 这里矩阵是 $n=2020$ 阶的, 其特征值[87]为 $n-1,\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{n-1\text{个}}$. 于是

$$\det(J-I)=(-1)^{n-1}(n-1)=-2019=1,$$

[87]计算方法见例题21.6.

从而 $J-I$ 可逆知 $x_1,\cdots,x_{2020}$ 都是 0. 现在我们知道 $f(x)=x^{2020}$ 是唯一所求.

例题 23.233 证明 $\mathbb{Q}$ 上的次数大于 1 的多项式能表示为两个 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式之和.

证明 设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,n>1,a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{Q}.$$

取非 0 的 $m\in\mathbb{Z}$, 使得

$$mf(x)=\sum_{k=0}^{n}ma_kx^k\in\mathbb{Z}[x].$$

则选取素数 p, 使得 p 不整除 ma_0+1. 考虑分解

$$f(x)=\left[f(x)+\frac{x^n+p}{mp}\right]+\left[-\frac{x^n+p}{mp}\right].$$

由艾森斯坦判别法, 显然 $-\frac{x^n+p}{mp}$ 不可约. 此外

$$mpf(x)+x^n+p=(1+mp)x^n+p\sum_{j=1}^{n-1}ma_jx^j+p(ma_0+1).$$

注意到 p 不整除 $1+mp$ 但整除其余所有系数且 p^2 不整除 $p(ma_0+1)$, 因此由艾森斯坦判别法我们知道 $f(x)+\frac{x^n+p}{mp}$ 不可约. 这就完成了证明.

例题 23.234 设 $a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$, 研究 x^n-a 在 $\mathbb{C}[x]$ 中的可约性.

证明 当 $n=1$ 显然是不可约的, 下面假定 $n>1$.

$a=0,1$ 可约是显然的, $a=-1$,n 为奇数可约也是显然的, 当 $n=2m$, 其中 $m\geqslant 2$. 如果 $m=2^k\ell$, 这里 $k\in\mathbb{N}$,ℓ 是一个奇数, 那么

$$x^{2m}+1=\left(x^{2^{k+1}}\right)^{\ell}+1\Rightarrow x^{2^{k+1}}+1|x^{2m}+1,$$

即 $x^{2m}+1$ 可约.

当 $n=2^k,k\in\mathbb{N}_0,k=0$ 显然不可约, 下设 $k\geqslant 1$. 注意到

$$(x+1)^{2^k}+1=x^{2^k}+C_{2^k}^1x^{2^k-1}+\cdots+C_{2^k}^{2^k-1}x+2,$$

以及 $2|2,2^2$ 不整除 2, 首系数 1 也不整除 2. 对每个 $j\in\{1,2,\cdots,2^k-1\}$, 有 $\frac{2^k}{j}\frac{(2^k-1)\cdots(2^k-j+1)}{(j-1)!}\frac{(2^k-1)\cdots(2^k-j+1)}{(j-1)!}\in\mathbb{Z}$, 此外对这些 j, 他的 2 因子个数必然小于 k, j 的其余因子 (计重数) 必然整除 $\frac{(2^k-1)\cdots(2^k-j+1)}{(j-1)!}$, 这就证明了 $2|C_{2^k}^j$, 于是由艾森斯坦判别法我们证明了不可约.

假设 a 有素因子分解

$$a=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\beta_i},\beta_i\in\mathbb{N},i=1,2,\cdots,s,$$

并记 $v(a)=\gcd(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$.

若 $d=\gcd(n,v(a))>1$, 那么 $x^{\frac{n}{d}}-a^{\frac{1}{d}}|f$, 因此 f 可约.

若 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约, 那么存在 $g,h\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 g 是首 1 的且

$$f(x)=g(x)h(x),1\leqslant k=\deg g<\deg f.$$

注意到

$$x^n-a=\prod_{i=1}^{n}\left(x-e^{\frac{2\pi i}{n}}a^{\frac{1}{n}}\right),$$

因此可不妨设

$$g(x)=\prod_{j=1}^{k}\left(x-e^{\frac{2\pi i_j}{n}}a^{\frac{1}{n}}\right),1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n.$$

由于 $g\in\mathbb{Q}[x]$, 于是 $\prod_{j=1}^{k}a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2\pi i_j}{n}}\in\mathbb{Q}$, 因此 $\prod_{j=1}^{k}e^{\frac{2\pi i_j}{n}}\in\mathbb{R}$ 且仍然是 $x^n=1$ 的根, 因此 $\prod_{j=1}^{k}e^{\frac{2\pi i_j}{n}}=\pm1$, 所以

$a^{\frac{k}{n}} \in \mathbb{Q}$, 从而 $\frac{k\beta_i}{n} \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, \cdots, s$. 因此

$$n | \gcd(k\beta_1, k\beta_2, \cdots, k\beta_s) \Rightarrow n | kv(a) \Rightarrow d = \gcd(n, v(a)) > 1.$$

现在我们就证明了 f 不可约等价于 $\gcd(n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = 1$.

例题 23.235 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ 两两不同, 证明:

1. $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;
2. $f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明

1. 若 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在 $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ 使得

$$f = pq, 1 \leqslant \deg p < \deg f, 1 \leqslant \deg q < \deg f.$$

于是由 $f(a_i) = p(a_i) q(a_i) = -1, i = 1, 2, \cdots, n$ 知

$$p(a_i) + q(a_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

但是

$$\deg(p + q) \leqslant \max\{\deg p, \deg q\} < \deg f = n,$$

我们有 $p + q = 0$. 但是 f 首系数为 1, 所以 p, q 首系数符号相同, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

2. 若 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在 $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ 使得

$$f = pq, 1 \leqslant \deg p < \deg g, 1 \leqslant \deg q < \deg f.$$

由 $f(a_i) = p(a_i) q(a_i) = 1, i = 1, 2, \cdots, n, f \geqslant 1$ 和介值定理知

$$p(a_i) = 1, \forall i = 1, 2, \cdots, n \text{或者} p(a_i) = -1, \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

不妨设前者发生, 此时 $q(a_i) = 1, \forall i = 1, 2, \cdots, n$.

注意到 $\deg f = 2n, f'(a_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 故 $p'(a_i) + q'(a_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 又

$$\deg(p + q) < 2n, \begin{cases} p(a_i) + q(a_i) = 2 \\ p'(a_i) + q'(a_i) = 0 \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

即由 Hermite 插值多项式的唯一性11.1就有 $p + q \equiv 2$. 现在有 $1 \leqslant f = p(2 - p) \leqslant 1$, 故 $f = 1$ 而矛盾! 至此我们证明了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

例题 23.236 设 $n \in \mathbb{N}$, 判断 $1 + \prod_{k=1}^{n} (x - k)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约性.

证明 当 $n = 1, 2, 3$, 读者容易检查是不可约的, 而当 $n = 4$, 我们有

$$1 + \prod_{k=1}^{4} (x - k) = \left(x^2 - 5x + 5\right)^2$$

是可约的.

当 $n > 4$, 若

$$1 + \prod_{k=1}^{n} (x - k) = f(x) g(x), \deg f < n, \deg g < n, f, g \in \mathbb{Z}[x].$$

注意到

$$f(k), g(k) \in \mathbb{Z}, f(k) g(k) = 1, k = 1, 2, \cdots, n,$$

我们有

$$f(k) - g(k) = 0, k = 1, 2, \cdots, n, \deg(f - g) < n.$$

现在我们知道

$$f \equiv g \Rightarrow 1 + \prod_{k=1}^{n} (x - k) = f^2(x), \deg f = \frac{n}{2}.$$

又设

$$I \triangleq \{1 \leqslant k \leqslant n : f(k) = 1, k \in \mathbb{N}\}, J \triangleq \{1 \leqslant k \leqslant n : f(k) = -1, k \in \mathbb{N}\},$$

则 $|I| = |J| = \frac{n}{2}$, 否则计算 f 必然超过 $\frac{n}{2}$ 个点同时取 1 或者 -1, 这给出了 $f \equiv 1$ 或者 $f \equiv -1$ 而矛盾!.

注意到

$$x - 1 | f(x) - f(1),$$

由于 $n \geqslant 6$, 所以我们可取整数 $3 \leqslant x_0 \leqslant n$ 使得 $f(x_0) \neq f(1)$, 于是

$$0 < \left| \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \right| = \frac{2}{x_0 - 1} < 1, \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \in \mathbb{Z},$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了 $n \neq 4$ 时原多项式不可约.

例题 23.237 设 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 是首 1 不可约的, 若 $|f(0)|$ 不是完全平方数, 则 $f(x^2)$ 不可约.

证明 假设 $f(x^2)$ 可约, 则存在首 1 不可约 $g \in \mathbb{Z}[x], 1 \leqslant \deg g < 2 \deg f$ 使得 $g(x) | f(x^2)$, 显然 $g(-x) | f(x^2)$. 若 $g(x) = g(-x)$, 则 g 的每一项都是偶数次方, 因此 $g(x) = h(x^2), h \in \mathbb{Z}[x]$. 现在 $h(x) | f(x)$ 且 $1 \leqslant \deg h < \deg f$, 这就和 f 不可约矛盾! 故 $g(x) \neq g(-x)$. 我们知道 $g(-x), g(x)$ 都是不可约的, 所以 $g(-x) g(x) | f(x^2)$. 同样的

$$g(-x) g(x) = t(x^2) | f(x^2) \Rightarrow t | f \Rightarrow \deg t = \deg f \Rightarrow \deg g = \deg f,$$

故 $f(x^2) = \pm g(x) g(-x)$, 从而 $|f(0)| = |g(0)|^2$, 这就是一个矛盾! 至此我们证明了 $f(x^2)$ 不可约.

例题 23.238 设 $n \in \mathbb{N}$, 证明多项式 $f(x) = \prod_{k=1}^{n} (x^2 + k^2) + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 设 $f(0) = n!^2 + 1 = m^2, m \in \mathbb{N}$, 则有 $(m - n!)(m + n!) = 1$, 故由 $m + n! = 1, m - n! = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ 知矛盾! 因此我们由例题23.237知只需证明 $g(x) = \prod_{k=1}^{n} (x + k^2) + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 若 $g = pq, p, q \in \mathbb{Z}[x], 1 \leqslant \deg p, \deg q \leqslant n - 1$. 注意到

$$1 = g(-k^2) = p(-k^2) q(-k^2), k = 1, 2, \cdots, n,$$

我们有

$$p(-k^2) - q(-k^2) = 0, k = 1, 2, \cdots, n.$$

现在我们知道 $p = q$. 但是 $g = p^2 \geqslant 0$ 显然是个矛盾! 因此我们证明了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

来看一个困难的考研真题

例题 23.239 证明 $f(x) = \prod_{i=1}^{18} (x - i) + 23$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 假设 f 在 $\mathbb{Z}[x]$ 可约, 则存在首 1 的非常数多项式 $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ 使得

$$f(x) = g(x) h(x), \deg g \leqslant 9.$$

由

$$g(i) h(i) = f(i) = 23, i = 1, 2, \cdots, 18$$

得

$$g(i) = \pm 1, \pm 23.$$

最大的设 $S \subset M \triangleq \{1, 2, \cdots, 18\}$ 使得

$$g(x) = \pm 23, \forall x \in S$$

若存在 $a, b \in M \setminus S$ 使得 $g(a) = 1, g(b) = -1$. 由 $a - b | g(a) - g(b)$ 得 $|a - b| \leqslant 2$. 因此我们有 $|M \setminus S| \leqslant 8$. 结合 S 是 g 在 $\mathbb{Z}_{23}$ 上的一个互异零点集, 我们有

$$\deg g \geqslant |S| \geqslant 10,$$

这就是一个矛盾!. 因此存在 $\epsilon \in \{1, -1\}$ 使得

$$g(i) = \epsilon, \forall i \in M \setminus S.$$

现在 $g-\epsilon$ 至少有 $18-\deg g$ 个不同整数根. 又

$$18-\deg g \leqslant \deg g,$$

因此只能有 $\deg g=9$. 于是

$$g(x)=\prod_{i\in M\setminus S}(x-i)+\epsilon.$$

同理可得 $\delta\in\{-1,1\}$ 成立

$$h(x)=\prod_{i\in S}(x-i)+\delta.$$

表达式代入 $gh=f$ 得

$$\delta\prod_{i\in M\setminus S}(x-i)+\epsilon\prod_{i\in S}(x-i)+\epsilon\delta=23.$$

比较两边最高次方系数得 $\epsilon+\delta=0$. 再比较 8 次方系数得

$$-\delta\sum_{i\in M\setminus S}i-\epsilon\sum_{i\in S}i=0,$$

即

$$171=\sum_{i=1}^{18}i=\sum_{i\in M\setminus S}i+\sum_{i\in S}i=2\sum_{i\in S}i,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 f 不可约.

下面的题目来自 2013 北京大学考研.

例题 23.240 判断 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{2013}(x-i)^2+2014$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约?

证明 假如 f 在 $\mathbb{Z}$ 可约, 设 $f(x)=g(x)h(x)$, 这里 g,h 都是非常数的整系数多项式. 现在

$$f(c)=g(c)h(c)=2014=2\cdot19\cdot53, 1\leqslant c\leqslant 2013.$$

注意到 2014 的因子只有 $\pm2^i19^j53^k, i,j,k\in\{0,1\}$, 即十六个可能的因子, 我们知道必然存在一个 2014 的因子 d 使得 $g(c)=d$ 在 $c\in\{1,2,\cdots,2013\}$ 出现 $\left\lceil\frac{2013}{16}\right\rceil=126$ 次.

现在考虑

$$S\triangleq\{1\leqslant c\leqslant 2013: g(c)=d\},$$

我们有

$$\prod_{c\in S}(x-c)\mid[g(x)-d].$$

若存在 $1\leqslant c_0\leqslant 2013$ 使得 $g(c_0)\neq d$, 我们知道存在整数 $t\neq0$ 使得

$$g(c_0)-d=t\prod_{c\in S}(c_0-c).$$

于是结合 $g(c_0)\mid2014, d\mid2014$, 我们有

$$(63!)^2\leqslant\prod_{c\in S}|c_0-c|\leqslant|t|\cdot\prod_{c\in S}|c_0-c|=|g(c_0)-d|\leqslant4028,$$

这里最左边的不等号是因为至少有 126 个不同整数的积. 现在这显然不可能发生, 于是我们证明了

$$g(x)=d+q_1(x)\prod_{i=1}^{2013}(x-i), q_1\in\mathbb{Z}[x].$$

类似可得

$$h(x)=d_2+q_2(x)\prod_{i=1}^{2013}(x-i), d_2\in\mathbb{Z}, q_2\in\mathbb{Z}[x].$$

又

$$\deg h(x)+\deg g=\deg f=4026,$$

于是我们有 q_1,q_2 是常多项式且

$$\left[\prod_{i=1}^{2013}(x-i)\right]^2+2014=\left(d+q_1\prod_{i=1}^{2013}(x-i)\right)\left(d_2+q_2\prod_{i=1}^{2013}(x-i)\right).$$

因此我们有关于 y 的二次恒等式

$$y^2+2014=(d+q_1y)(d_2+q_2y).$$

考虑左右符号显然不可能!, 因此我们证明了 f 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约, 从而在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

来看清华求真大一新生考试题.

例题 23.241 设 $f\in\mathbb{Z}[x]$ 是首 1 的 r 次多项式, 其所有复根模长为 1, 证明: 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 f 的所有根都是 N 次单位根.

笔记 注意对称多项式基本定理在环上也是成立.

注本结果可以减弱条件为 f 所有复根模长小于等于 1 且不为 0.

证明 设 f 的所有根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 考虑多项式

$$f_n(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i^n).$$

注意到 f_n 的系数是 $\alpha_1^n,\alpha_2^n,\cdots,\alpha_r^n$ 的初等对称多项式, 从而是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 初等对称多项式的多项式[88], 由韦达定理知 $f_n\in\mathbb{Z}[x]$.

因为所有 α_i 模长为 1, 所以 f_n 的 x^k 的系数有上界 C_r^k. 注意到 n 遍历整个正整数, f_{2^n} 的系数有独立于 n 的上界且为整系数, 因此必然只能出现有限个多项式. 所以存在整数 $\ell,k\geqslant 1$ 使得 $f_{2^k}=f_{2^{k+\ell}}$. 于是 $\alpha_1^{2^{k+\ell}},\alpha_2^{2^{k+\ell}},\cdots,\alpha_r^{2^{k+\ell}}$ 是 $\alpha_1^{2^k},\alpha_2^{2^k},\cdots,\alpha_r^{2^k}$ 一个置换, 而置换总是有限阶的, 因此存在一个 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\alpha_i^{2^k}=\alpha_i^{2^{k+\ell m}},i=1,2,\cdots,r,$$

从而 $\alpha_i^{2^{k+\ell m}-2^k}=1,i=1,2,\cdots,r$, 即可取 $N=2^k\left(2^{\ell m}-1\right)$.

来看一个钓鱼真题, 此类问题考到也做不出来, 平时欣赏即可.

例题 23.242* 设 $n\in\mathbb{Z}$ 且 $n\geqslant 2$, 证明 $f(x)=x^n-x-1$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

证明 当 $n=2$ 命题是显然的, 下面假设 $n\geqslant 3$.

首先我们对

$$f=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j\in\mathbb{Z}[x],,a_n=1,a_0\neq 0,$$

定义

$$S(f)=\sum_{\alpha是f的零点}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right),$$

这里的求和要计重数.

于是 $S(f)=-a_{n-1}+\frac{a_1}{a_0}\in\mathbb{Q}$, 且当 $a_0=\pm1$ 有 $S(f)\in\mathbb{Z}$. 注意到复根两两成对出现, 于是

$$S(f)=\sum_{\alpha是f的零点}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)=\sum_{\alpha是f的零点}\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha-\frac{1}{\alpha}+\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}&=(\alpha+\overline{\alpha}+1)\left(1-\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}\right)-1+\frac{1}{|\alpha|^2}\\&=\left[(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)-|\alpha|^2\right]\left(1-\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}\right)-1+\frac{1}{|\alpha|^2}.\end{aligned}$$

[88]注意是 $\mathbb{Z}$ 上.

现在如果 α 是 f 的根, 那么 $\alpha^n=\alpha+1$, 从而

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}+\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}=\left[|\alpha|^{2n}-|\alpha|^2\right]\left(1-\frac{1}{|\alpha|^2}\right)-1+\frac{1}{|\alpha|^2}\geqslant\frac{1}{|\alpha|^2}-1. \tag{23.175}$$

现在假定

$$f=gh,g,h\in\mathbb{Z}[x],1\leqslant\deg g=s<n,$$

以及 g,h 首系数都是 1, 末系数为 ±1. 于是不妨设 g 的实根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 则

$$1=\sqrt[s]{\prod_{i=1}^{s}|\alpha_i|^{-2}}\leqslant\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}|\alpha_i|^{-2}\leqslant\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(1+\alpha_i-\frac{1}{\alpha_i}+\overline{\alpha_i}-\frac{1}{\overline{\alpha_i}}\right)=1+\frac{2S(g)}{s}, \tag{23.176}$$

现在从不等式(23.176)我们看到 $S(g)\geqslant0$, 类似的有 $S(h)\geqslant0$. 注意到 $1=S(f)=S(g)+S(h)$ 以及 $S(g),S(h)\in\mathbb{Z}$, 因此我们有 $S(g),S(h)$ 必有一个为 1, 一个为 0, 不妨假设 $S(g)=0$.

从不等式(23.175)和(23.176), 我们知道

$$1=\sqrt[s]{\prod_{i=1}^{s}|\alpha_i|^{-2}}=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}|\alpha_i|^{-2}=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(1+\alpha_i-\frac{1}{\alpha_i}+\overline{\alpha_i}-\frac{1}{\overline{\alpha_i}}\right)=1.$$

因此显然有 $|\alpha_i|=1,i=1,2,\cdots,s$. 注意到 $\alpha_i^n=\alpha_i+1,i=1,2,\cdots,s$, 于是我们有 $|\alpha_i+1|=1,i=1,2,\cdots,s$. 这就给出了 $\alpha_i=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),i=1,2,\cdots,s$, 这显然不是 f 的根, 这就是矛盾, 因此 f 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

例题 23.243Mason-Stothers 定理 设 a,b,c 是三个两两互素的 $\mathbb{C}$ 上的非 0 多项式且 $a+b+c=0$, 设 N 是 abc 不同零点个数, 证明 $\deg a,\deg b,\deg c\leqslant N-1$.

证明 当然我们取 $p=\frac{a}{c},q=\frac{b}{c}$, 则 $p+q+1=0$, 因此 $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}=-\frac{\frac{q'}{q}}{\frac{p'}{p}}$. 设 d 是 abc 的所有不同一次因式的积, 那么显然有 $d\frac{q'}{q},d\frac{p'}{p}$ 都是次数不超过 $N-1$ 的多项式, 因此

$$\frac{a}{b}=-\frac{\frac{dq'}{q}}{\frac{dp'}{p}},$$

由于 a,b 互素, 于是我们就证明了 $a|d\frac{q'}{q},b|d\frac{p'}{p}$, 因此就说明了 $\deg a,\deg b\leqslant N-1$, 类似的可以说明 $\deg c\leqslant N-1$, 我们完成了证明.

例题 23.244 多项式的 Fermat 大定理. 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geqslant3$, 证明: 在 $\mathbb{C}[x]$ 上, 下述方程

$$f^n+g^n=h^n$$

不存在两两互素的且不全是常数的的解.

证明 设 $a=f^n,b=g^n,c=-h^n$, 计算次数并利用例题23.243即得.

例题 23.245 设 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$, 以及正素数 $p=\sum_{j=0}^{n}a_j10^j$, 证明: $f(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^{10}$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 不可约.

证明 不妨设 $\deg f>1,a_n\neq0$, 由 p 素数知 f 是本原多项式. 如果 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 可约, 那么存在 $g,h\in\mathbb{Z}[x]$, 使得

$$f(x)=q(x)h(x),1\leqslant\deg q<\deg f.$$

现在 $q(10)p(10)=p$, 因此不妨假设 $q(10)=\pm1$ 且

$$q(x)=\lambda(x-z_1)\cdots(x-z_s).$$

于是

$$1=|q(10)|\geqslant\prod_{i=1}^{s}|10-z_i|\geqslant\prod_{i=1}^{s}|10-\Re z_i|. \tag{23.177}$$

若 $\Re z_i \geqslant 9, i \in \{1,2,\cdots,s\}$, 则

$$\begin{aligned}0 = \left|\frac{f(z_i)}{z_i^n}\right| &= \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z_i} + \cdots + \frac{a_0}{z_i^n}\right| \geqslant \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z_i}\right| - \left|\frac{a_{n-2}}{z_i^2} + \cdots + \frac{a_0}{z_i^n}\right| \\ &\geqslant \Re\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z_i}\right) - 9\left(\frac{1}{|z_i|^2} + \cdots + \frac{1}{|z_i|^n}\right) = \Re(a_n) + a_{n-1}\frac{\Re z_i}{|z_i|^2} - 9\frac{1}{|z_i|^2 - |z_i|} \\ &\geqslant 1 - 9\frac{1}{|z_i|^2 - |z_i|},\end{aligned}$$

这给出了 $|z_i|^2 - |z_i| \leqslant 9$, 即

$$\Re z_i \leqslant |z_i| \leqslant \frac{\sqrt{37}+1}{2} < 9.$$

这就是矛盾!, 因此 $\Re z_i < 9, \forall i \in \{1,2,\cdots s\}$. 这和(23.177)矛盾!, 我们完成了证明.

例题 23.246 设

$$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, n = 1,2,\cdots,$$

证明当 $1 \leqslant i < j$, 我们有 p_i, p_j 互素.

证明 若 $1 \leqslant i < j \leqslant n, z \in \mathbb{C}$ 使得 $p_i(z) = p_j(z) = 0$. 设 $w \triangleq \frac{1}{z} \neq 0,1$, 由数列求和方法和直接检查得

$$w^n = nw - n + 1, \overline{w}^n = n\overline{w} - n + 1, n \in \{i+1, j+1, 0, 1\}.$$

考虑

$$f(t) \triangleq |w|^{2t} - t^2|w|^2 + 2t(t-1)\operatorname{Re} w - (t-1)^2,$$

我们有

$$f(t) = 0, t \in \{0, 1, i+1, j+1\}.$$

注意到

$$f'''(t) = (2\ln|w|)^3 |w|^{2t} > 0,$$

这和反复对 f 用罗尔中值定理矛盾!. 于是我们证明了当 $1 \leqslant i < j$, 我们有 p_i, p_j 互素.

例题 23.247 设 $n \geqslant 1$ 次不可约多项式 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 的 n 个根是实数且成等差数列, 证明:$n \leqslant 2$.

证明 设

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,\cdots,n,$$

以及 $d \in \mathbb{Q}$ 为 x_i 的公差.

下证

$$(x - x_1)(x - x_n) \in \mathbb{Q}[x],$$

这等价于 $x_1 + x_n, x_1 x_n \in \mathbb{Q}$.

注意到

$$x_1 x_n = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (x_n - x_1)^2}{4} = \frac{(x_1 + x_n)^2 - (n-1)^2 d^2}{4},$$

以及

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 + x_n \in \mathbb{Q}.$$

只需证 $d^2 \in \mathbb{Q}$.

事实上

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 - 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \in \mathbb{Q},$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{n-k+1}^2\right] = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(x_k + x_{n-k+1}\right)^2 + \left(x_k - x_{n-k+1}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(x_1 + x_n\right)^2 + \left(n-2k+1\right)^2 d^2\right] \in \mathbb{Q}.$$

我们有 $d^2 \in \mathbb{Q}$, 因此 $x_1 x_n \in \mathbb{Q}$. 现在我们证明了

$$\left(x - x_1\right)\left(x - x_n\right) \in \mathbb{Q}\left[x\right],$$

即 $n \leqslant 2$.

第 23 章 练习

1. (1.) 设 $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 这里 $\mathbb{F}$ 是一个数域, 证明
$$\left|A + B + ACB\right| = \left|A + B + BCA\right|.$$
2. (2.) 设 V 是复数域上的 n 维线性空间,A 是 V 上的一个线性变换, 证明存在 $\alpha \in V$, 使得 $\left\{\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha\right\}$ 为 V 一组基当且仅当对 A 的任一特征值 λ, λ 的几何重数是 1.
3. (3.) 设 $n \geqslant 3$ 为自然数且 $\theta = \frac{2\pi}{n}$. 对任意 $1 \leqslant s, t \leqslant n$, 取 $a_{st} = \sin\left(s + t\right)\theta$, 考虑矩阵 $A = \left(a_{st}\right)_{n\times n}$, 计算 $E + A^{2023}$ 行列式, 这里 E 是 n 阶单位矩阵.
4. (4.) 设 $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明 $O = \left\{x, Ax, A^2x, \cdots\right\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中不稠密.
5. (5.) 设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, 设 $A^2 - 2AB - B^2 = 0$, $A, B \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 证明 $AB - BA$ 不可逆.
6. (6.) 设 A 是 n 阶复矩阵, $l_A : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, B \to AB - BA$. 证明: 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \ker\left(A - \lambda I\right)^n$ 是 B 不变子空间的充要条件是存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $l_A^n\left(B\right) = 0$.
7. (7.) 设 A 是 n 阶实矩阵且满足 $A^5 = AA^TAA^TA$, 求所有 $m \in \mathbb{N}$, 使得 A^m 一定是对称矩阵.
8. (8.∗) 确定全部的 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得对任何非常数 $f \in \mathbb{R}[x]$, 都有 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $f\left(X\right) = A$.
9. (9.) 设 A, B 都是幂等矩阵, 证明 A, B 有相同核的充要条件是 $AB = A, BA = B$.
10. (10.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $A^m = B^m$ 且 m 是奇数. 若 A, B 都对称的, 则 $A = B$.
11. (11.) 给定 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明 A 特征值由负实部的充要条件是对每一个正定对称 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 存在唯一一个正定矩阵 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $BA + A^TB = -C$.
12. (12.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 并定义 $\varphi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, X \mapsto AX - XA$. 证明, 若 $A^n = 0, \mathrm{rank}\varphi = r \in \mathbb{N}_0$, 则 φ 幂零指数不超过 $2\sqrt{r} + 1$. 本题最好的结果应该是若 A 幂零指数为 ℓ, 则 φ 幂零指数为 $2\ell - 1$.
13. (13.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明存在非 0 的矩阵 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 AB 可对角化.
14. (14.) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A^2 + B^2 = 2AB$, 证明 A, B 有相同的特征多项式.
15. (15.) 设 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $AB - BA = \overline{C}C^T$. 设 $a, b \in \mathbb{C}$ 使得
$$f\left(A, B\right) = 0, f \in \mathbb{C}\left[x, y\right] \Rightarrow f\left(a, b\right) = 0.$$
证明存在 $v \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{0\right\}$ 使得 $Av = av, Bv = bv$.
16. (16.) 设 C, D 分别是 m, n 阶复矩阵. 若对任何 $m \times n$ 阶复矩阵 A,$n \times m$ 阶复矩阵 B 都有
$$\mathrm{rank}\left(C - AB\right) + n = \mathrm{rank}\left(D - BA\right) + m.$$
证明存在非 0 数字 k 使得 $C = kE_m, D = kE_n$.
17. (17.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且 $A^2 + B^2 = AB$, 证明
$$AB - BA\text{可逆} \Rightarrow 3|n.$$
18. (18.) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 且对某个 $k \in \mathbb{N}$ 有
$$\sum_{\ell=0}^{k} \left(-1\right)^{\ell} C_k^{\ell} A^{k-\ell} B^{\ell} = 0.$$

证明 A,B 有相同的特征多项式.

19. (19.) 设 A,B 是秩 r 的实 n 阶不可逆矩阵, I,J 是集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 两个 $r+1$ 元子集, 令
$$V=\left\{C=(c_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}:c_{ij}=0,\text{若}i\notin I,\text{或者}j\notin J\right\},$$
证明存在 $0\neq C\in V$ 使得 $ACB=0$.

20. (20.) 设 V,U 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $\varphi:V\to U$ 是线性映射, 求证: 存在线性映射 $\psi:U\to V$ 使得 $\varphi\psi=0$, 且 $\varphi(V)=\ker\psi,\psi(U)=\ker\varphi$.

21. (21.) 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathscr{F}$ 上有限维空间上的线性变换, 证明
$$\dim\left(R(\mathscr{A})\bigcap\ker\mathscr{A}\right)=r(\mathscr{A})-r\left(\mathscr{A}^2\right).$$

22. (22.) 本结果是 Hodge 分解的初等形式.) 设 A,B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 上的线性变换且满足
$$A^2=B^2=0,\ker A=\ker BA,\ker B=\ker AB.$$
设 $D=AB+BA$, 证明
$$V=\ker D\oplus R(A)\oplus R(B).$$

23. (23.) 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $(AB)^7=C,|C|\neq0$. 若 $AC=CA$ 或 $BC=CB$ 有一个成立, 求 $(BA)^{14}$ 是 C 的关系.

24. (24.) 设 A,B 是同阶方阵且 $A+B+AB=0$, 证明
$$r\left(A^2\right)+r\left(B^2\right)=2r(AB).\tag{23.178}$$

25. (25.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $A,B,A_1,B_1\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足
$$A\sim A_1,B\sim B_1,AB=0.$$
若 n 为奇数, 证明:$A+A_1,B+B_1$ 至少一个不可逆.

26. (26.) 设 S 实半正定矩阵, O 实正交矩阵, 若 SO 的特征多项式和 S 特征多项式一致, 证明 $SO=S$.

27. (27.) 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 若 $v_1,v_2,\cdots,v_n\in\mathbb{R}^n$ 且满足 $|v_i-e_i|<\frac{1}{\sqrt{n}},i=1,2,\cdots,n$, 证明 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

28. (28.) 设 A 是 2021 阶矩阵, 且对角元都为 0, 并且每行恰好有 1010 个 1 和 1010 个 -1, 求 A 所有可能的秩.

29. (29.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足
$$\operatorname{tr}\left(A^TA\right)+n-1<2\operatorname{tr}(A).$$
证明对任何 $b\in\mathbb{R}^n$, 线性方程组 $Ax=b$ 都有唯一解.

30. (30.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, $Q\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 且满足 $Q^TQ=I_m$, 证明 $Q^TA^{-1}Q-\left(Q^TAQ\right)^{-1}$ 是半正定矩阵.

31. (31.) 设 $a_{ij}=a_{ji},a_{ij},b_i,b\in\mathbb{R},\forall i,j=1,2,...,n$, 给定
$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^n b_ix_i+b,$$
且 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 正定. 求 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的最小值.

32. (32.) 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A^k=A^{[k]},0\leqslant k\leqslant n+1$, 这里 $A^{[k]}$ 表示把 A 所有元素 k 次方得到的矩阵. 证明:
$$A^k=A^{[k]},\forall k\in\mathbb{N}.$$

33. (33.) 是否存在 $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 使得 $\sin A=\begin{pmatrix}1&2024\\0&1\end{pmatrix}$.

34. (34.) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 证明可以通过第三类初等变换使得 A 变成 $\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&|A|\end{pmatrix}$.

35. (35.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A^n=2^nI$. 证明: A 属于特征值 2 的线性子空间的维数是
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{tr}\left(A^k\right)}{2^kn}.$$
36. (36.) 设 A 是 d 阶矩阵且元素都为整数. 若 $E+A+A^2+\cdots+A^{100}=0$, 证明:
$$\det\left(A^n+A^{n+1}+\cdots+A^{100}\right)=\pm1,\forall 1\leqslant n\leqslant 100.$$
37. (37.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $A,B,M\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $AM=MB$ 且 A,B 有相同的特征多项式, 证明: 对任何 $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 都有
$$\det\left(A-MX\right)=\det\left(B-XM\right). \tag{23.179}$$
38. (38.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, V 是 $\mathbb{F}$ 上一个有限维线性空间. 若 V 上双线性函数 f 是全迷向的[89], 证明: 存在一个 V 的子空间 W, 使得
$$W=W^{\perp}\triangleq\left\{v\in V:f\left(u,v\right)=0,\forall u\in W\right\}. \tag{23.180}$$
且 $\varphi:V\to W^*,v\mapsto f\left(v,\cdot\right)$ 为满的线性映射, 其核为 W, 并且 $\dim V$ 为偶数.
39. (39.) 设可逆矩阵 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $A^k\sim B^k,\forall k\geqslant N$. 证明:$A\sim B$.
40. (40.) 设 $m,n\in\mathbb{N},m\geqslant n+1$, 考虑矩阵
$$A=\begin{pmatrix}1^n & 2^n & \cdots & m^n\\ 2^n & 3^n & \cdots & (m+1)^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m^n & (m+1)^n & \cdots & (2m-1)^n\end{pmatrix}.$$
求矩阵 A 的秩.
41. (41.$*$) 设 $p\in\mathbb{R}[x]$ 且 $\deg p>0$. 若 p 首系数为整数, 证明: 在任何长度为 4 的闭区间上必存在一个点 x 使得 $|p\left(x\right)|\geqslant 2$.
42. (42.) 设 n 为奇数且 n 阶矩阵 A 的主对角元都为零, 其余元素均为 -1 或者 1. 若 A 每一行的 $1,-1$ 个数相同, 证明:A 的秩是 $n-1$.
43. (43.) 设
$$A_n=\begin{pmatrix}\frac{n}{n+1} & 2\\ \frac{2n}{n+1} & 1\end{pmatrix},B_n=A_1A_2\cdots A_n,n\in\mathbb{N},$$
证明: 对所有 $n\in\mathbb{N}$, B_n 第二行元素都为整数.
44. (44.) 设可逆矩阵 A,B 满足
$$A^3=B^{2n-1}=E,n\in\mathbb{N},ABA=BA^2B.$$
证明: $AB=BA$.
45. (45.) 求所有 $t\in\mathbb{R}$ 的值使得 $F:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2},A\mapsto A^3+tA+E_2$ 是满射.
46. (46.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $\det A=0$. 证明: 存在非 0 的 $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $AB=BA=0$.
47. (47.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\left(AA^*\right)^2=A^*A$. 证明: $AA^*=A^*A$ 且 A 的任意非 0 特征值模长为 1. 这里 $*$ 表示共轭转置.
48. (48.) 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵且满足
$$\operatorname{tr}\left(\left(A+B\right)^k\right)=\operatorname{tr}\left(A^k\right)+\operatorname{tr}\left(B^k\right),k=1,2,\cdots.$$
证明:$AB=0$.
49. (49.) 设 V 是 n 维欧式空间且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in V$. 若存在非 0 的 $\alpha\in V$ 使得
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha,\alpha_i\right)\beta_i=0. \tag{23.181}$$

[89] 即 $f\left(\alpha,\alpha\right)=0,\forall\alpha\in V$.

证明: 必然存在非 0 的 $\beta \in V$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta, \beta_i)\, \alpha_i = 0. \tag{23.182}$$

50. (50.) 设 V 是次数不超过 n 的实系数多项式全体组成的线性空间.
求基 $\left\{1, x, x^2, \cdots, x^n\right\}$ 到基 $\left\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\right\}$ 的过渡矩阵和其逆矩阵.
51. (51.) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正定, 证明: 存在唯一的 $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且正定使得 $A = H - H^{-1}$.
52. (52.) 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n, g_1, g_2, \cdots, g_n \in C[0,1]$, 证明:

$$\det\left(\int_0^1 f_i g_j \mathrm{d}x\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n} \left[\det\left(f_i\left(x_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \det\left(g_i\left(x_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right] \mathrm{d}V. \tag{23.183}$$

53. (53.) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是复正规矩阵, 证明: $AB = BA$ 当且仅当 $|tI - xA - yB|$ 可以分解为一次因式的积.
54. (54.) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且每行每列都只有一个元素非 0. 若非 0 的元素只可能是 ± 1, 证明:A 的特征值只能是单位根.
55. (55.) 设 V 是 n 维线性空间, X 是 V 的 $n+1$ 元子集且 $r(X) = n$. 考虑

$$GL_V(X) \triangleq \{L | L\text{是}V\text{上可逆线性变换}, L(X) = X\},$$

求 GL_V 元素个数最大值.
56. (56.) 设数域上的线性空间 $\dim U = \ell, \dim V = m, \dim W = n$, $f: U \to V, g: U \to W$ 都是线性映射且 $\ker f \subset \ker g$. 证明:
(a). 存在线性映射 $h: V \to W$ 使得 $g = h \circ f$, 并且 h 唯一当且仅当 f 是满射.
(b). 记 $t \triangleq \dim \operatorname{Im} f$, 以及

$$S \triangleq \{h \in \operatorname{Hom}(V,W) : g = h \circ f\}, T \triangleq \{\rho \in \operatorname{Hom}(V,W) : \exists h_1, h_2 \in S, \text{使得} \rho = h_1 - h_2\},$$

证明: T 为 $\operatorname{Hom}(V,W)$ 的子空间并求其维数.
57. (57.) 设 $\Gamma = \{W_1, W_2, \cdots, W_r\}$ 为 r 个复 n 阶可逆矩阵构成的集合且对乘法封闭.
(a). 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}W_iP\text{是酉矩阵}, i = 1, 2, \cdots, r.$$

(b). 若 $W_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 1, 2, \cdots, r$, 则存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}W_iP\text{是正交矩阵}, i = 1, 2, \cdots, r.$$

58. (58.) 设 φ, ψ 都是数域上 n 维线性空间 V 的对合变换, 证明:

$$\operatorname{Im}(\varphi\psi - \psi\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi + \psi) \bigcap \operatorname{Im}(\varphi - \psi). \tag{23.184}$$

59. (59.) 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^{n\times n}, m \in \mathbb{N}$ 满足对任何 $A, B \in \Omega$ 都有

$$(AB)^m = BA \in \Omega.$$

证明: $AB = BA, \forall A, B \in \Omega$ 且

$$\det A = 0\text{或者}(\det A)^{m-1} = 1, \forall A \in \Omega.$$

60. (60.) 设 $A = \begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ \cdots & & \\ a_n & & \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 求可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP$ 是 Jordan 标准型.
61. (61.) 设

$$f(X) = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_r| - |x_{r+1}| - |x_{r+2}| - \cdots - |x_{r+s}|, X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

这里 $r \geqslant s \geqslant 0$.
(a). 证明: 存在 $n-r$ 维子空间 W 使得

$$f(X) = 0, \forall X \in W. \tag{23.185}$$

(b). 若 W_1, W_2 是 $\mathbb{R}^n$ 两个 $n-r$ 维子空间且满足

$$f(X)=0, \forall X \in W_1 \bigcup W_2. \tag{23.186}$$

证明:

$$\dim\left(W_1 \bigcap W_2\right) \geqslant n-(r+s). \tag{23.187}$$

62. (62.) 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^3$ 且 $\alpha \neq 0$. 若 $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ 满足

$$A\alpha=\beta, A\beta=-\gamma, A\gamma=\alpha-\beta.$$

证明:α, β, γ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

63. (63.) 设 Q 是实 n 阶正交矩阵, $u \in \mathbb{R}^n$ 是一个单位列向量, $P=I-2uu^T$. 证明: 若 1 不是 Q 特征值, 则 1 是 PQ 特征值.

64. (64.) 设 A 是可逆复矩阵, 证明: $X^2=A$ 只有有限个解 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的充要条件是和 A 乘法可交换的矩阵只能是 A 的多项式.

65. (65.) 设 φ, ψ 是数域上线性空间 V 的线性变换且 $\varphi\psi=\psi\varphi$. 证明: 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mathrm{Im}\varphi^m+\mathrm{Im}\psi^m=\mathrm{Im}\left(\varphi^m+\psi^m\right).$$

66. (66.) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: AA^T+A+A^T 和 A^TA+A+A^T 合同.

67. (67.) 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间且 T 是 V 上线性变换. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ 互不相同且都不是 T 特征值. 证明: 存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(T-\lambda_k I\right)^{-1}=I. \tag{23.188}$$

68. (68.) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $r(A)=r(B)$, 证明:

$$A^2B=A \Leftrightarrow B^2A=B.$$

69. (69.) 设 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ 且满足

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\ b_1^2+b_2^2=1.$$

考虑 5×5 矩阵 $M=(A, B)$, 其中 A 每行都是 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 排列,B 每行都是 $b_1,\ b_2$ 排列, 证明:

(a). $(\mathrm{tr}(M))^2 \leqslant (5+2\sqrt{6})\mathrm{rank}(M)$.

(b). M 有实特征值 λ, $|\lambda| \leqslant \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

70. (70.)[中山大学压轴题] 我们称 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是半正定的, 如果

$$x^*Ax \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

称线性映射 $\varphi: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 为非负的, 如果 φ 把半正定矩阵映为半正定矩阵. 证明: 这里定义的半正定矩阵就是通常的半正定矩阵且对非负映射 φ, 必有

$$\varphi(A^*)=\varphi^*(A), \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

71. (71.) 设实向量 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$, $B=(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的. 证明: 方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j=0 \end{cases}. \tag{23.189}$$

只有 0 解的必要条件是

$$\begin{vmatrix} B & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23.190}$$

72. (72.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n},\varphi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AX^TA^T$, 证明:$A$ 可对角化的充要条件是 φ 可对角化.
73. (73.) 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 A,B 实对称, C 反对称. 若 $A^2+B^2=C^2$, 证明: $A=B=C=0$.
74. (74.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是满足 $\det A=1$ 的正交矩阵. 证明: 存在正交矩阵 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=B^2$.
75. (75.) 设元素为 0 或者 1 的 n 阶矩阵 A 满足 $AA^T=E_n+2J$. 证明: $AJ=3J$ 且 $n=4,A^TA=E_n+2J$.
76. (76.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $r(AB)=r(A)$. 证明: 存在 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=ABC$. 若 AB 是幂等矩阵, 证明 BA 也是幂等矩阵.
77. (77.) 设 A 是 n 阶非 0 矩阵且对任何 n 阶可逆矩阵 P 都有 $r(APA)=r\left(A^2\right)$, 证明: A 是可逆矩阵.
78. (78.) 设 η 是 n 维欧式空间 V 的一个单位向量, 定义线性变换 σ 如下:

$$\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\forall\alpha\in V.$$

我们称这样一个线性变换为镜面反射.

(a). 证明镜面反射是一个正交变换.

(b). 证明镜面反射行列式为 -1.

(c). 设 ρ 是 V 的一个正交变换且有特征值 $\lambda_0=1,\dim V_{\lambda_0}=n-1$, 证明: ρ 是一个镜面反射.

79. (79.) 设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n\geqslant 2$ 阶非 0 矩阵, 证明: 存在非 0 的 n 阶矩阵 B 使得

$$(AB)^n=(BA)^n=0.$$

80. (80.) 设 $n\in\mathbb{N},n>1$ 且 $p,q\in\mathbb{R}[x]$ 是不超过 n 次的多项式. 证明: 存在不超过 $2n-2$ 次的实系数多项式 $F(x,y)$ 使得

$$F(p(t),q(t))=0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

81. (81.) 在实数上设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, 问是否存在

$$u_i(x)=a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3+d_ix_4,i=1,2,3,4$$

使得

$$x^T\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}x=\begin{vmatrix}u_1(x)&u_2(x)\\u_3(x)&u_4(x)\end{vmatrix}.\tag{23.191}$$

注[*] 如果问题改成对任何 4 维列向量都有(23.191)成立呢?

82. (82.) 设 T 是 n 维实数域上的线性空间 V 上的线性变换满足 $T^2+I=0$. 定义

$$(a+bi)v=av+bT(v),\forall a,b\in\mathbb{R},$$

证明: V 关于上述数乘和自身的加法运算构成复数上的线性空间, 求这个线性空间的维数.

83. (83.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A-E$ 幂零且对某个 $k\in\mathbb{N}$ 有 $A^kB=BA^k$, 证明:$AB=BA$.
84. (84.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 A 可逆实对称, B 实反对称, 证明: 若 $AB=BA$ 则 $A+B$ 可逆.
85. (85.) 设 $A,P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A^TP=A\neq 0$, 证明: A 实正交相似于 $\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$, 这里 B 是可逆矩阵.
86. (86.) 设 T 是实数域或者复数域上的 n 维线性空间 V 上的幂等算子且范数为[90]1, 证明:T 是自伴算子.
87. (87.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正惯性指数为 1 的实对称矩阵. 考虑

$$f(u,v)=u^TAv,\forall u,v\in\mathbb{R}^n.$$

[90] T^TT 最大奇艺值为 1.

若某个 $u\in\mathbb{R}^n$ 使得 $f(u,u)>0$, 证明: 对任何 $v\in\mathbb{R}^n$ 都有

$$f(u,u)\,f(v,v)\leqslant f^2(u,v). \tag{23.192}$$

并证明(23.192)取等条件是存在 $r\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(w,v)=f(w,ru),\forall w\in V. \tag{23.193}$$

88. (88.) 考虑线性空间

$$V=\left\{q(x,y)=c_0x^2+c_1xy+c_2y^2:c_0,c_1,c_2\in\mathbb{C}\right\}.$$

对 $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$, 考虑线性映射

$$\varphi_M:V\to V,q(x,y)\mapsto q(ax+by,cx+dy).$$

证明: $\det M$ 是 φ_M 特征值. 当 $M=\begin{pmatrix}\mu&1\\0&\mu\end{pmatrix},\mu\in\mathbb{C}$, 计算 φ_M 属于特征值 $\det M$ 的所有特征向量. 此外, 证明 φ_M 可对角化当且仅当 M 可对角化.

89. (89.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A+A^T$ 为正定矩阵但 $A\neq A^T$. 证明: $\det\left(A+A^T\right)<\det(2A)$.

90. (90.) 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 是两两正交的. 记 $A=\alpha\beta^T+\beta\gamma^T+\gamma\alpha^T$, 证明 $r(A)=3$ 并判断 A 是否可以相似对角化.

91. (91.) 设 $\varphi,\psi\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $\varphi^2=\psi^2=I$. 证明当 n 为奇数时 φ,ψ 有公共特征向量, 当 n 为偶数时 φ,ψ 有公共一维或者二维不变子空间.

92. (92.) 设整数 $n\geqslant2,A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在 $\alpha\in[-2,2]$ 使得

$$A^2-\alpha A+I_n=0.$$

证明: 对任何整数 $m\geqslant2$, 存在唯一的 $\alpha_m\in[-2,2]$ 使得

$$A^{2m}-\alpha_mA^m+I_n=0. \tag{23.194}$$

93. (93.) 设 $n\geqslant2$,

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in\mathbb{C}[x],$$

$f(\mu)=0$. 证明:

$$|\mu|\leqslant\max\left\{1,\sum_{j=1}^n|a_j|\right\}. \tag{23.195}$$

且

$$|\mu|\leqslant\max\left\{\{1+|a_j|,j=1,2,\cdots,n-1\}\bigcup\{|a_n|\}\right\}. \tag{23.196}$$

94. (94.) 设 A,B,C 都是 n 阶半正定实[91]对称矩阵且 $ABC=CBA$, 证明: ABC 是半正定矩阵.

95. (95.) 设 $n\geqslant1,f,g$ 都是域 $\mathbb{F}$ 上首 1 复 n 次多项式. 定义不超过 $n-1$ 次多项式的线性空间 V 上的线性变换 T_1,T_2 分别为: 对 $h\in V,T_1h$ 表示 fh 除以 g 的余式, T_2h 表示 gh 除以 f 的余式. 证明 $\det T_1=(-1)^n\det T_2$.

96. (96.) 设 $B_i\in\mathbb{C}^{n\times n},i=1,2,\cdots,k$ 是幂等矩阵, $A=B_1B_2\cdots B_k$, 证明:

$$r(I-A)\leqslant k(n-r(A)).$$

97. (97.) 设 $\mathbb{P}$ 为一数域, $a\in\mathbb{P}$, 证明:

$$\begin{pmatrix}a&&&\\1&a&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&a\end{pmatrix}$$

[91] 本题结果可以类似推广到 Hermite 半正定矩阵.

恰有 $n+1$ 个不同的不变子空间.

98. (98.$*$) 设 $A_i, i=1,2,\cdots,m$ 是 n 阶秩 1 复矩阵, 证明

$$|\det(I_n+A_1+A_2+\cdots+A_m)| \leqslant \prod_{i=1}^{m}(1+||A_i||),$$

这里

$$||A|| \triangleq \sup_{||z||_{\mathbb{C}^n}=1} ||Az||_{\mathbb{C}^n}, ||z||_{\mathbb{C}^n} \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2}.$$

99. (99.) 设

$$a_m \neq 0, f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0 \in \mathbb{C}[x], |a_m| > \sum_{i=0}^{m-1}|a_i|.$$

若 $f(A)=0, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明:$2X+AX=XA^2$ 在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 只有 0 解.

100. (100.) 设 $A,B,C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$A^2=B^2=C^2, B^3=ABC+2I_n.$$

证明: $A^6=I_n$.

101. (101.) 设 $A,H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A 可逆, H 正定, 证明存在正交矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\left(H^T+E_n\right)A^TA(E_n+H)-P^TA^TAP$$

为正定矩阵.

102. (102.) 设 f 是首系数为 1 的三次实多项式且其复根全在单位圆周上. 证明: $g(x)=2xf'(x)-3f(x)$ 的单位根也全在单位圆周上.

103. (103.) 设 $A,B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ 满足 $(A-B)^2=AB$. 证明: $\det(AB-BA)=0$.

104. (104.) 设 $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$AB=BA, \det(A+B) \geqslant 0,$$

证明:

$$\det(A^p+B^p) \geqslant 0, \forall p \in \mathbb{N}.$$

105. (105.) 设 V 是一个 n 维欧式空间, 满射 $A: V \to V$ 满足 $A(0)=0$ 且保持距离, 即对任何 $x,y \in V$, 我们有

$$||x-y||=||Ax-Ay||.$$

证明: A 是线性变换.

106. (106.) 设数域上的 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V, f 是 V 上的双线性函数, V' 是 V 的真子空间, 对 $\xi \notin V'$, 证明: 存在 $\alpha \in V' \oplus <\xi>, \alpha \neq 0$, 使得 $f(x,\alpha)=0, \forall x \in V'$.

107. (107.) 设 A 是 n 阶可对角化实矩阵且特征值只可能有 $0,1,-1$. 若还满足

$$x^TA^TAx \leqslant x^Tx, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

证明 $A=A^T$.

108. (108.) 给定 n 阶实矩阵 A, 设 A^TA 的特征值是 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$, 且

$$1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0,$$

证明

$$|E_n-A| \geqslant (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n).$$

109. (109.) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是可逆对称矩阵, 正惯性指数为 p. 证明 $W=\left\{x \in \mathbb{R}^n : x^TAx=0\right\}$ 不包含 $\mathbb{R}^n$ 的 $p+1$ 和 $n-p+1$ 维子空间.

110. (110.) 设 $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵. 若 $A^2=cAB+B^2$, 证明 $c=0$.

111. (111.) 考虑 $H \triangleq \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定的. 若存在 $z_1, z_2, \cdots, z_k \in H$ 使得

$$\det\left(\sum_{i=1}^{k} z_i A_i\right) = 0, \tag{23.197}$$

证明:

$$\det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right) \equiv 0, \forall x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{R}. \tag{23.198}$$

112. (112.) 设 $A \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ 是可逆的. 求满足

$$A^{50} \equiv I_2 \,(\mathrm{mod} 3)$$

的方阵个数.

113. (113.) 设 C_k 表示多项式 $\left(x^2+1\right)^k$ 的友矩阵, 求最大的自然数 m 使得任何 $\mathbb{R}^{90}$ 的 m 元子集都包含在 $A = \mathrm{diag}\{C_1, C_2, \cdots, C_9\}$ 某个非平凡不变子空间中.

114. (114.) 设 V 是十维列向量空间构成的内积. 设 $(-,-)$ 为 V 上标准内积. 对 $u \in V$, 我们定义

$$P_u : V \to V, x \mapsto x - \frac{2(x,u)\,u}{(u,u)}.$$

给定 $v, w \in V$ 满足

$$0 < (v,w) < \sqrt{(v,v)(w,w)}.$$

记 $Q = P_v \circ P_w$, 求所有满足 $P \circ Q = Q \circ P$ 的线性变换 $P : V \to V$ 构成的线性空间维数.

115. (115.) 设 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是 $\mathbb{R}^{100}$ 中的标准距离函数. 记

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{100\times 100}, a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i \partial y_j},$$

求 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 的秩.

116. (116.$*$) 设 M 的元素在 $0, \pm 1, \pm 2$ 中取值且是 n 阶对称矩阵. 记这样的矩阵全体为 S, 计算

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{n^4}\frac{1}{5^{\frac{n^2+n}{2}}}\sum_{M\in S}\mathrm{tr}\left(M^6\right)\right].$$

117. (117.) 设 $A \in \mathbb{R}^{20\times 20}$ 满足 $e^A = I_{20}$ 且特征值模长不超过 20, 求这样的互不相似的 A 的个数.

118. (118.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \geqslant 2$ 满足 $A^2 = -I_n, AB = BA$. 证明:$\det B \geqslant 0$.

119. (119.) 设 $n \geqslant 2$, 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值和 Jordan 标准型.

120. (120.) 设 $n \geqslant 2$, 计算

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & \\ & \iddots & \iddots & & \\ 1 & \iddots & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

的特征值和 Jordan 标准型.

121. (121.) 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. 证明: $\alpha^T\beta > 0$ 的充要条件是存在正定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\alpha = A\beta$.

122. (122.) 设 n 是奇数, $\mathbb{F}$ 是一个数域且 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 若 $A^2 = 0$, 证明 $AB - BA$ 不可逆.

123. (123.)f,g 是域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 上的线性函数满足

$$f(v)\,g(v)=0,\forall v\in V.$$

是否有 f,g 必有一个为 0.

124. (124.$*$) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明

$$\det\left(E+A\overline{A}\right)\geqslant 0. \tag{23.199}$$

125. (125.) 设

$$V=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R}):f(x+1)=2f(x)\}.$$

定义映射

$$L:V\to V,f\mapsto f'+kf.$$

求所有 $k\in\mathbb{R}$ 使得 L 为双射.

126. (126.) 设 $\sigma\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ 是正交矩阵, 证明: 存在正交矩阵 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ 使得

$$\sigma=\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_k,\dim\ker(\tau_i-I)=n-1,i=1,2,\cdots,k.$$

127. (127.) 设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的非 0 子空间, σ 是 V 上线性变换. 证明:

$$\dim\sigma(W)+\dim\left(\ker\sigma\bigcap W\right)=\dim W, \tag{23.200}$$

以及

$$\dim W\leqslant\dim\sigma^{-1}(W)\leqslant\dim W+\dim\ker\sigma. \tag{23.201}$$

128. (128.) 设 $m,n,k\in\mathbb{N}$. 定义线性映射 $L:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{k\times n}$. 记

$$W=\left\{L:L(AB)=L(A)\,B,\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n},B\in\mathbb{R}^{n\times n}\right\}.$$

求 $\dim W$.

129. (129.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$A^m=E_n,\sum_{j=0}^{m-1}A^jB^j=0.$$

证明 B 特征值都是 m 次单位根.

130. (130.) 设 $\mathbb{F}$ 是域且 $A,B,C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 A 可逆且

$$AB=BA,C(A+B)=-BA^{-1}.$$

证明:

$$C(A+B)=(A+B)C.$$

131. (131.) 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上线性变换, 证明存在 V 的 $\varphi-$ 不变子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_k$ 使得

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k,$$

其中每个 $\varphi|_{W_i}$ 的最小多项式为 $p_i^{r_i}(\lambda)$ 且 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为互不相同的首一不可约多项式.

132. (132.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $AB=BA$, 证明

$$r(A)+r(B)\geqslant r\left(\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\right)+r(AB), \tag{23.202}$$

133. (133.) 构造 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$|a_{ij}|=1,i,j=1,2,\cdots,n,\det A=n^{\frac{n}{2}}.$$

134. (134.) 求所有连续函数 $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(A)=f\left(A^2\right).$$

135. (135.) 设 $\mathbb{P}$ 是一个数域,

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^{n\times n},A_1\in\mathbb{P}^{k\times n},A_2\in\mathbb{P}^{(n-k)\times n}.$$

若 V_1,V_2 分别是 $A_1x=0,A_2x=0$ 的解空间. 证明:$\mathbb{P}^n=V_1\oplus V_2$ 的充要条件是

$$n=\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A_1+\operatorname{rank}A_2.$$

136. (136.) 设 $A,B,X\in\mathbb{C}^{3\times3}$ 且存在 $f,g\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$A=f(X),B=g(X),A^2=B^2=0,$$

证明: 存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足 $A=\lambda B$ 或者 $B=\lambda A$.

137. (137.) 设实对称矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A&B\\B^T&C\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},A\in\mathbb{R}^{r\times r},C\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}.$$

记 λ_1,λ_2 分别是 M 的最小和最大特征值, μ_1,μ_2 分别是 A,C 的最大特征值, 证明:$\lambda_1+\lambda_2\leqslant\mu_1+\mu_2$.

138. (138.) 设 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是全体 n 阶可逆复矩阵构成的集合, T_n 为其中所有上三角矩阵构成的子集. 对 $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 定义集合

$$PT_nP^{-1}=\left\{PAP^{-1}:A\in T_n\right\}.$$

求 $\bigcap\limits_{P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}PT_nP^{-1}$.

139. (139.$*$) 给定三个矩阵 $E,F,H\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$EF-FE=H,EH-HE=2E,HF-FH=2F.$$

证明 H 的特征值均为整数.

140. (140.) 设 $n\geqslant2$, S_n 为 n 阶置换群. 考虑线性空间

$$V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}.$$

对于 $\tau\in S_n$, 定义线性变换

$$\rho_\tau:V\to V,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\left(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\cdots,x_{\tau(n)}\right).$$

对 $\tau\in S_n$, 求 $\operatorname{tr}(\rho_\tau)$ 所有可能值. 再求

$$\sum_{\tau\in S_n}\left|\operatorname{tr}(\rho_\tau)\right|^2.$$

141. (141.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵, 证明 AB 可对角化.

142. (142.) 设 A_1,A_2,B_1,B_2 是 n 阶数字矩阵且 B_1 可逆. 记

$$A(\lambda)=\lambda A_1-A_2,B(\lambda)=\lambda B_1-B_2.$$

若存在可逆 λ 矩阵 $M(\lambda),N(\lambda)$ 使得

$$M(\lambda)A(\lambda)N(\lambda)=B(\lambda).$$

证明: 存在 n 阶数字可逆矩阵 P,Q 使得

$$PA(\lambda)Q=B(\lambda).$$

143. (143.$*$) 设 λ_n 是 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的最小特征值, 其中 $a_{ij}=n-|i-j|$. 证明

$$\frac12<\lambda_n\leqslant1,\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\frac12.$$

144. (144.) 设 V 是一个 n 维欧式空间, V_1,V_2 是两个非平凡子空间且 $V=V_1\oplus V_2$. 设 σ_i 是 V 到 V_i 的正交投影, $i=1,2$, 证明:

(a). 对任何 $v_1\in V_1,v_2\in V_2$ 有

$$v_1-\sigma_2(v_1)\in V_2^\perp,v_2-\sigma_1(v_2)\in V_1^\perp.$$

(b). 对 $\sigma_2\sigma_1|_{V_2}$ 任何一个特征值 λ 都有 $0 \leqslant \lambda < 1$.

145. (145.) 证明: 秩为 $r > 0$ 的对称或者实反对称矩阵 A 一定有 r 阶非零主子式.

146. (146.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的, $A^2B + BA^2$ 正定. 证明 B 正定.

147. (147.) 设 V 是欧式空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基.

(a). 证明: 存在 V 的唯一一组基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 使得

$$(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

(b). 已知 $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0, \forall 1 \leqslant i < j \leqslant n$. 设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \in V$ 满足 $(\alpha, \alpha_i) \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 证明:$k_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n$.

148. (148.) 设 $n \in \mathbb{N}, V$ 是全体不超过 n 次多项式构成的线性空间. 设

$$\varphi : V \to V : f(x) \mapsto f(ax + b),$$

这里 $a, b \in \mathbb{C}$ 且 $a \neq 0$. 求 φ 可对角化充要条件.

149. (149.) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵. 考虑

$$S(A) \triangleq \left\{P^{-1}AP : P \in \mathbb{R}^{n\times n}\text{是可逆矩阵}\right\}.$$

证明:$S(A)$ 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中是闭集. 反过来, 如果 $S(A)$ 是闭集, 证明 A 在 $\mathbb{C}$ 上一定可对角化.

150. (150.) 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$AB + A = BA + B.$$

证明:

$$(A - B)^n = 0.$$

151. (151.) 设 $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明存在对角元只能是 ± 1 的对角矩阵 J 使得

$$\det(H + J) \neq 0.$$

152. (152.)

(a). 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的, 证明 $\lambda = \min\limits_{||v||=1, v\in\mathbb{R}^n} \langle Av, v\rangle$ 是 A 的最小特征值.

(b). 设

$$C = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} : x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n\right\}.$$

证明: 对任何一个 $u \in \mathbb{R}^n$, 存在 $v, w \in C$ 满足

$$u = v - w, \langle v, w\rangle = 0.$$

(c). 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的, 满足对任何 $1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$ 都有 $a_{ij} < 0$ 且对任何 $v \in C \setminus \{\mathbf{0}\}$ 都有 $-Av \notin C$. 证明 A 是正定矩阵.

153. (153.) 设 p 是首一 n 次实系数多项式, 以及

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j x^j, g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j x^j \in \mathbb{R}[x].$$

再设 fg 除以 p 的余数为 r, 证明存在 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$r\left(x\right)=\begin{pmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-1}\end{pmatrix}f\left(A\right)\begin{pmatrix}g_0\\ g_1\\ \vdots\\ g_{n-1}\end{pmatrix};$$

$$r\left(x\right)=\begin{pmatrix}1 & x & \cdots & x^{n-1}\end{pmatrix}g\left(B\right)\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ \vdots\\ f_{n-1}\end{pmatrix}.$$

154. (154.) 设

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbb{C}$$

满足

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_n^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ 1!\\ \vdots\\ (m-1)!\end{pmatrix}.$$

证明:$m\leqslant 2n$.

155. (155.) 我们称元素都为非负数的矩阵为非负矩阵. 对于 $m\times n$ 阶非负矩阵 M, 我们定义 $\mathrm{rk}_+\left(M\right)$ 为最小的 $r\in\mathbb{N}$ 使得存在 $m\times r$ 阶非负矩阵 A, $r\times n$ 阶非负矩阵 B 满足 $M=AB$.

(a). 设 A,B 是 $m\times n$ 阶非负矩阵, 证明:

$$\mathrm{rk}_+\left(A+B\right)\leqslant\mathrm{rk}_+\left(A\right)+\mathrm{rk}_+\left(B\right).$$

(b). 设 A 是 $m\times p$ 阶非负矩阵, B 是 $p\times n$ 阶非负矩阵, 证明:

$$\mathrm{rk}_+\left(AB\right)\leqslant\min\left\{\mathrm{rk}_+\left(A\right),\mathrm{rk}_+\left(B\right)\right\}.$$

(c). 设

$$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n},a_{ij}=\left(i-j\right)^2,i,j=1,2,\cdots,n,$$

证明:

$$\mathrm{rk}_+\left(A\right)\geqslant\frac{\ln n}{\ln 2}.$$

156. (156.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明:

$$\left|\mathrm{tr}\left(A\right)\right|^2\leqslant r\left(A\right)\cdot\mathrm{tr}\left(A^TA\right)$$

并求等号成立条件.

157. (157.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足对角线都为正数且对 A 的任一 k 阶顺序主子式 A_k 都有

$$\left|\mathrm{tr}\left(A_k\right)\right|^2>\left(k-1\right)\mathrm{tr}\left(A_kA_k^T\right),$$

证明:A 的顺序主子式都为正.

158. (158.) 设 $A_k\left(1\leqslant k\leqslant m\right)$ 是 n 阶实半正定矩阵. 证明:

$$\det\left(I_n+\sum_{k=1}^{m}A_k\right)\leqslant\det\left(\prod_{k=1}^{m}\left(I_n+A_k\right)\right).$$

159. (159.∗) 设 $n \in \mathbb{N}$, 求下述矩阵的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

160. (160.) 设 V 是复 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换满足 $\sigma^n = 2^n I_n$. 记

$$W \triangleq \{\mathbf{x} \in V : \sigma(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}\},$$

证明:

$$\dim W = \frac{\operatorname{tr}(\sigma)}{2n} + \frac{\operatorname{tr}(\sigma^2)}{2^2 n} + \cdots + \frac{\operatorname{tr}(\sigma^n)}{2^n n}.$$

161. (161.) 设

$$V = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\right\}, U = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = -A\right\}.$$

对 $A \in V$, 定义线性映射

$$\varphi_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, X \mapsto AX - XA.$$

证明 $\varphi_A|_V : V \to U$ 为满射的充要条件是 A 的特征多项式没有重根.

162. (162.) 设 $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}^n$, 构造 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A\alpha = \beta$ 且对任何满足 $\alpha^T\gamma = 0$ 的 $\gamma \in \mathbb{R}^n$ 都有 $A\gamma = \gamma$.

163. (163.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆的, $m \in \mathbb{N}$. 证明: 存在 $f \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $f^m(A) = A$.

164. (164.) 设 V 是 n 维欧式空间, σ 是 V 上正交变换满足 $\sigma^m = I$, 这里 $m > 1$ 为正整数. 记

$$V_\sigma \triangleq \{u \in V : \sigma(u) = u\}.$$

证明

(a). V_σ 是 V 子空间;

(b). 对任何 $u \in V$, u 在 V_σ 正交投影为 $\overline{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \sigma^i(u)$;

(c).

$$\dim V_\sigma = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \sigma^i(u)\right).$$

165. (165.∗) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 半正定矩阵. 证明:

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^\gamma\right) \geqslant \operatorname{tr}(A^\gamma) + \operatorname{tr}(B^\gamma), \forall \gamma \geqslant 1.$$

A^γ 可以如此定义: 设酉矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$A = P\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} P^T, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

考虑

$$A^\gamma \triangleq P\operatorname{diag}\{\lambda_1^\gamma, \lambda_2^\gamma, \cdots, \lambda_n^\gamma\} P^T.$$

为了说明 A^γ 良定义, 设酉矩阵 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$A = Q\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} Q^T.$$

由

$$Q\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} Q^T = P\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} P^T,$$

我们知道

$$P^T Q\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} P^T Q.$$

从而设 $P^TQ=(c_{ij})$, 我们有

$$\lambda_i c_{ij}=\lambda_j c_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n.$$

容易得

$$\lambda_i^\gamma c_{ij}=\lambda_j^\gamma c_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n,$$

即

$$P^TQ\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^\gamma,\lambda_2^\gamma,\cdots,\lambda_n^\gamma\right\}=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^\gamma,\lambda_2^\gamma,\cdots,\lambda_n^\gamma\right\}P^TQ.$$

现在我们知道

$$Q\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^\gamma,\lambda_2^\gamma,\cdots,\lambda_n^\gamma\right\}Q^T=P\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^\gamma,\lambda_2^\gamma,\cdots,\lambda_n^\gamma\right\}P^T,$$

因此 A^γ 良定义.

166. (166.) 设

$$V=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}:X=-X^T\right\}.$$

记

$$\mathrm{ad}_A:V\to V,B\mapsto AB-BA.$$

(a). 验证 ad_A 是 V 上线性变换且

$$\mathrm{ad}_{AB-BA}=\mathrm{ad}_A\circ\mathrm{ad}_B-\mathrm{ad}_B\circ\mathrm{ad}_A,\forall A,B\in V.$$

(b). 考虑 V 的基

$$e_1=E_{12}-E_{21},e_2=E_{23}-E_{32},e_3=E_{13}-E_{31},$$

计算 ad_{e_1} 在这个基下的表示矩阵.

(c). 验证

$$(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{R},(A,B)\mapsto-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_A\circ\mathrm{ad}_B\right)$$

为一个内积.

167. (167.)$V=\mathbb{R}^{n\times n}$ 上赋予内积

$$(X,Y)\triangleq\mathrm{tr}\left(X^TY\right).$$

则 $A\in V$ 满足什么条件时

$$U_A:V\to V,X\mapsto AX+XA$$

为 V 上正交变换.

168. (168.$*$)[92]把 $V=\mathbb{C}^{2\times2}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上线性空间并定义

$$A:V\to V,X\mapsto(1+i)X^*.$$

求 A 的极小多项式, 特征多项式, 特征值, 特征向量.

169. (169.) 设 $n\in\mathbb{N},f(x)=x^{n+1}+2x+6$, 方阵 A 的特征多项式是 f. 设 $\alpha\in\mathbb{C}$ 满足 $|\alpha|\geqslant7$. 证明:$\alpha I_{n+1}-A$ 是可逆矩阵.

170. (170.) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{2025\times2025}$ 满足

$$a_{ii}=i^3+3i^2+2i,a_{ij}=\begin{cases}3(i-j)+1, & i<j\\ 3(i+j)+2, & i>j\end{cases}.$$

证明:$3|\det A$.

171. (171.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个域, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 是对称的且有一个 r 阶主子式 $|M|\neq0$. 若还有包含 $|M|$ 的所有 $r+1$ 阶和 $r+2$ 阶的 A 的加边主子式都为 0, 证明 A 的秩为 r.

[92]本题来自中科大 2026 夏令营, 计算量有点离谱.

172. (172.) 求二次型

$$q(A)=\operatorname{tr}\left(A^2\right), A\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

的正负惯性指数.

173. (173.) 对 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 我们定义 A^R 为 A 逆时针旋转 90°, 例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}^R=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&8\\1&4&7\end{pmatrix}.$$

证明: 如果 $A=A^R$, 那么 A 的特征值只是是实数或者纯虚数.

174. (174.) 设 n 阶酉矩阵 U 满足 $\lim\limits_{k\to+\infty}U^k$ 存在, 求 $\lim\limits_{k\to+\infty}U^k$.

175. (175.$*$) 设

$$S^1\triangleq\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\},\varphi:S^1\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

是连续的且满足

$$\varphi(z_1z_2)=\varphi(z_1)\varphi(z_2),\forall z_1,z_2\in S^1,$$

证明: 存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(z)=U\operatorname{diag}\left\{z^{k_1},z^{k_2},\cdots,z^{k_n}\right\}U^{-1},\forall z\in S^1. \tag{23.203}$$

176. (176.) 设 $n\geqslant 2$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称矩阵, $v\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}$. 证明:

$$\operatorname{tr}\left(A^TA\right)\geqslant\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{||Av||^2}{||v||^2}-\frac{1}{n-1}\left[\operatorname{tr}(A)\right]^2.$$

177. (177.) 设 $A,B,C\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 是线性无关的. 证明存在 $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ 使得 $x_1A+x_2B+x_3C$ 是可逆矩阵.

178. (178.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个域, 且

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{pmatrix},B\in\mathbb{F}^{n\times n},$$

证明:

$$\sum_{j=1}^n\det(\alpha_1,\cdots,B\alpha_j,\cdots,\alpha_n)=\det A\cdot\operatorname{tr}(B).$$

179. (179.) 设 A 是 n 阶实正交矩阵, 证明 A 的任一 k 阶子式

$$A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$$

的行列式值等于 $|A|^{-1}$ 乘以其代数余子式的值.

180. (180.) 设 $\mathbb{F}$ 是域且 $X=(x_{ij})$ 是 n 阶不定元的矩阵, 证明

$$\det X\in\mathbb{F}[x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nn}]$$

是不可约多项式.

181. (181.) 设

$$A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathbb{K}^{n\times n},g\in\mathbb{K}[x],$$

这里 $\mathbb{K}$ 是一个数域. 若

$$g(A_1),g(A_2),\cdots,g(A_m)$$

都是可逆矩阵, 证明: 存在 $h\in\mathbb{K}[x]$ 使得

$$h(A_i)=g^{-1}(A_i),i=1,2,\cdots,m.$$

182. (182.) 设

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0.$$

设 P,Q 为实 n 阶正交矩阵且满足 $PA=AQ$, 证明 $P=Q$.

183. (183.) 设 $V=\mathbb{R}[x]$ 为内积空间, 内积为 $(f,g)=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $p_i, i=0,1,2,\cdots$ 为 i 次首一实系数多项式且满足 $(p_i,p_j)=0, i\neq j$.

(a). 计算 p_0,p_1,p_2.

(b). 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 证明: 存在 $\alpha_m,\beta_m,\gamma_m$ 使得

$$xp_m=\alpha_m p_{m-1}+\beta_m p_m+\gamma_m p_{m+1}.$$

184. (184.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征多项式 f, 若 $g\in\mathbb{C}[\lambda]$ 满足

$$\gcd\left(f\left(g\left(\lambda\right)\right),g'\left(\lambda\right)\right)=1.$$

证明: 存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $g(B)=A$.

185. (185.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\left(A^T\right)^m=A^k$, 这里 k,m 为互素正整数. 证明 A 的特征值是 0 或者单位根.

186. (186.) 求证:n 阶实对称矩阵 A 是正定的充要条件是 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式的代数余子式以及第 n 个顺序主子式大于 0.

187. (187.) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & i=j+1, 1\leqslant j\leqslant n-1;\\ 1, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

求 A 的特征多项式.

188. (188.) 设 $\mathbb{F}$ 是域, $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}.$$

(a). 证明:$|A+B|^2=|A|\cdot|B|$;

(b). 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 证明 $|A|=|B|$;

(c). 若 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, 是否有 $|A|=|B|$?.

189. (189.) 设 $(\cdot,\cdot)$ 是复 n 维线性空间 V 上的非退化双线性函数. 设

$$\mathfrak{g}=\left\{\varphi\in\mathrm{End}\left(V\right):(\varphi\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\varphi\mathbf{y})=0,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V\right\}.$$

设 $\varphi\in\mathfrak{g}$ 的根子空间分解为

$$V=\ker\left(\varphi-\lambda_1 I\right)^{n_1}\oplus\ker\left(\varphi-\lambda_2 I\right)^{n_2}\oplus\cdots\oplus\ker\left(\varphi-\lambda_s I\right)^{n_s}.$$

证明:

$$\left(\ker\left(\varphi-\lambda_i I\right)^{n_i},\ker\left(\varphi-\lambda_j I\right)^{n_j}\right)=0\Leftrightarrow\lambda_i+\lambda_j\neq 0.$$

190. (190.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 的. 若 e^B-e^A 正定, 证明:$B-A$ 正定.

191. (191.) 设 $d\in\mathbb{N}$, 以及

$$V=\left\{\mathbf{x}=(x_0,x_1,\cdots)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}:x_{n+d}=-\sum_{j=0}^{d-1}a_j x_{n+j},n=0,1,2,\cdots\right\}.$$

设线性变换

$$T:V\to V,(x_0,x_1,\cdots)\mapsto(x_1,x_2,\cdots).$$

(a). 求 T 的特征多项式, 不变因子和有理标准型;

(b). 若

$$\Delta(t)=t^d+a_{d-1}t^{d-1}+\cdots+a_0=\prod_{j=1}^{d}(t-\lambda_j)$$

无重根. 求 T 的一组特征向量使其正好构成 V 的一组基, 并计算 V 中元素通项.

192. (192.) 我们称 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是亚正定的, 如果对任何 $\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 都有 $\alpha^T M\alpha>0$. 证明: 若 $A,B,A-B$ 是亚正定的且 B 对称, 证明:$B^{-1}-A^{-1}$ 也亚正定.

193. (193.) 设 $\mathbb{F}$ 为数域, $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 满足存在 $P,Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $AP=B,BQ=A$.
   (a). 证明: 存在 $K\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $P+(PQ-I_n)K$ 为可逆矩阵;
   (b). 证明: 存在可逆的矩阵 $M\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $AM=B$.
194. (194.) 设 V 是 $\mathbb{Q}$ 上 4 维空间, φ 是 V 上的线性变换. 若 $\alpha_i\in V,i=1,2,3,4,5$ 满足
$$\alpha_1\neq 0,\alpha_4\neq\alpha_1+\alpha_2,\varphi\alpha_1=\alpha_2,\varphi\alpha_2=\alpha_3,\varphi\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\varphi\alpha_4=\alpha_5,\varphi\alpha_5=\alpha_3+\alpha_4.$$
   求 $\det\varphi$.
195. (195.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 A 的不同特征值模长互不相同且 $r(A)=r\left(A^2\right)$. 若对某个 $k\in\mathbb{N}$ 有 $A^kB=BA^k$, 证明 $AB=BA$.
196. (196.) 证明: 存在 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2+2A+5I_n=0$ 的充要条件是 n 为偶数. 当 $n\geqslant 4$, 验证满足上面矩阵 A 有无限个不变子空间.
197. (197.) 设 S 是全体 n 阶置换矩阵构成的集合.
   (a). 对 $A\in S$, 证明 $A^TA=I$;
   (b). 对 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times 1}$, 我们定义
$$V(\mathbf{x})=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$
   证明: 对 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^{n\times 1}$ 有
$$\sum_{A\in S}V(\mathbf{x}+A\mathbf{y})=n!V(\mathbf{x}).$$
   (c). 对 $A,B\in S$, 证明存在 $X,Y\in S$ 使得 $XAY=B,XBY=A$.
198. (198.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, A 是实正定矩阵, B 是实正交矩阵. 证明: $\operatorname{tr}(AB)\leqslant\operatorname{tr}(A)$.
199. (199.) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换. 证明: σ 必有一维或者二维不变子空间.
200. (200.) 证明求导变换 $\sigma:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ 的非 0 不变子空间必有 1. 进一步证明 σ 的 k 维不变子空间一定由 $1,x,x^2,\cdots,x^{k-1}$ 生成.
201. (201.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n},u,v\in\mathbb{R}^n$ 且 A,u,v 元素都是正数并满足 $Au=v,Av=u$. 证明:$u=v$.
202. (202.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $A,B,P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 且
$$(A-B)P=P(A-B),BP-PB=2(A-B).$$
   求一个可逆矩阵 $Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $AQ=QB$.
203. (203.) 设 $A,B\in\mathbb{Z}^{1012\times 1012}$ 满足
$$A+kB\text{是可逆的},k=0,1,2,\cdots,2024.$$
   若 $A+kB,k=0,1,2,\cdots,2024$ 的逆矩阵元素都是整数, 证明:$A+2025B$ 可逆且逆矩阵元素都是整数.
204. (204.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是可逆实对称的, 证明:A,B 可以同时合同对角化的充要条件是 $A^{-1}B$ 可以相似对角化.
205. (205.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 是可逆矩阵满足
$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},A_{11}\in\mathbb{F}^{\ell\times k},B_{11}\in\mathbb{F}^{k\times\ell}.$$
   证明:$\ker A_{12}\cong\ker B_{12}$.

206. (206.) 设整数 $n \geqslant 2$, $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是对称的且满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=0, j=1,2,\cdots,n.$$

对 $k=1,2,\cdots,n$, 设 $A_k \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 是 A 删去第 k 行第 k 列之后得到的子矩阵. 证明 $\det A_k, k=1,2,\cdots,n$ 是相等的.

207. (207.) 设 $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 都是反对称矩阵且 A 可逆. 证明:

$$\left|A^2-B\right| \geqslant |A|^2.$$

208. (208.) 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 $A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值. 证明:

$$|\lambda| \leqslant n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|.$$

209. (209.) 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}, \mathbb{F}$ 是一个域. 证明:

$$r\left(\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}\right)=k$$

等价于存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, P^{-1}B=\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{11} \in \mathbb{F}^{k\times k}, B_1 \in \mathbb{F}^{k\times m},$$

且满足

$$r\left(\begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B & A_{11}^2B & \cdots & A_{11}^{n-1}B \end{pmatrix}\right)=k.$$

210. (210.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的极小多项式是

$$m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i},$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s \in \mathbb{C}$ 两两不同且 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 都是正整数. 计算 $M=\begin{pmatrix} A & E_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 的极小多项式.

211. (211.) 设 $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的且满足

$$\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

证明:$AB=0$.

212. (212.)

(1): 证明: 不存在 $A,B,C \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ 使得

$$\det A=\det B=\det C=1, A^4+B^4=C^4.$$

(2): 是否存在 $A,B,C \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ 使得

$$\det A=\det B=\det C=1, A^2+B^2=C^2?$$

213. (213.) 设

$$A_1=A \in \mathbb{C}^{n\times n}, A_{k+1}=A\left(A_k-\frac{\operatorname{tr}(A_k)}{k}E_n\right), k=1,2,\cdots,$$

证明 $A_{n+1}=0$.

214. (214.) 设 $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 A 是对称的, B 是反对称的满足

$$AB=0, (A+B)^2=0.$$

证明 $A+B=0$.

215. (215.) 设 $A=\left(\frac{1}{\max\{i,j\}}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\rho(A)$ 是 A 的谱半径, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A)$.

216. (216.) 设 $m \in \mathbb{N}, A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, B 是半正定的. 若 $AB^m=B^mA$, 证明 $AB=BA$.

217. (217.) 设 σ 是复数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换. W 是 V 的 $\sigma-$ 不变真子空间. 证明: 存在 $\alpha \in V\setminus W$

和 λ_0 是 σ 某个特征值成立

$$(\sigma-\lambda_0 I)(\alpha)\in W.$$

218. (218.) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域. 证明 $\mathbb{F}$ 上的任一个 n 元齐 m 次多项式都是一次齐次多项式的 m 次方的线性组合.

219. (219.) 设 V 是有限维实线性空间, $W_1,W_2,\cdots,W_m\subset V$ 为子空间且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V$. 假设

$$\alpha_i\notin W_i,\dim W_i=\dim V-1,i=1,2,\cdots,m,\bigcap_{i=1}^{m}W_i=\{\mathbf{0}\}.$$

若线性变换 $T:V\to V$ 满足对任何 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, 存在 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$T(\alpha_i+W_i)\subset\alpha_j+W_j.$$

证明:$\det T=\pm1$.

220. (220.) 给定数域 $\mathbb{K}$ 内的数组成的无穷序列 $a_0,a_1,\cdots$. 对于非负整数 s,m, 定义

$$A_{sm}\triangleq\begin{pmatrix}a_s&a_{s+1}&\cdots&a_{s+m}\\a_{s+1}&a_{s+2}&\cdots&a_{s+m+1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{s+m}&a_{s+m+1}&\cdots&a_{s+2m}\end{pmatrix}.$$

如果存在非负整数 n,k 使得当 $s\geqslant k$ 时 $|A_{sn}|=0$. 证明: 存在 $\mathbb{K}$ 内不全为 0 的数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 以及非负整数 S, 使得当 $s\geqslant S$ 有

$$a_sb_n+a_{s+1}b_{n-1}+\cdots+a_{s+n}b_0=0.$$

221. (221.) 设 $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$,

$$A_n=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\x&1&2&\cdots&n-1\\x&x&1&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x&x&x&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

计算 $\det A_n$.

222. (222.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, $Q\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 满足 $Q^TQ=I_m$. 证明:$Q^TA^{-1}Q-\left(Q^TAQ\right)^{-1}$ 是半正定矩阵.

223. (223.) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b\in\mathbb{R},\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$, 求解线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0;\\a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0;\\a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0;\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0.\end{cases}$$

224. (224.) 设 A 是 n 阶非幂零实矩阵,

$$S=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda A\sim A\}.$$

证明:S 是有限集.

225. (225.) 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 6 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & & 1 & 2(n-1) & 1 & \\ & & & & 1 & 2n \end{pmatrix}.$$

若 $AB=BA$, 证明 B 可对角化. 并计算这样的 B 构成的线性空间 $C[A]$ 的维数.

226. (226.) 设 A 为实对称矩阵. $S(A)$ 表示 A 中所有元素之和. 证明对正偶数 k, 有

$$S\left(A^k\right) \geqslant \frac{S^k(A)}{n^{k-1}}.$$

227. (227.) 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间. σ,τ,δ 是 V 上线性变换. 若有

$$\tau\delta=0, \operatorname{rank}(\sigma)<\operatorname{rank}(\delta).$$

证明:σ,τ 至少有一个公共特征向量.

228. (228.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵. 证明: 存在可逆矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$A=|A|^{\frac{1}{n}}A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\cdots A_mB_mA_m^{-1}B_m^{-1}.$$

229. (229.) 设 A 为 n 阶方阵, 其主对角线上元素皆为 3, 其余位置上的元素不是 2 就是 2029. 证明 $\operatorname{rank}A=n$ 或者 $\operatorname{rank}A=n-1$.

230. (230.) 设 $A\neq 0, B_1,B_2,B_3,B_4\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 满足

$$\det(A+B_i)=\det A+\det B_i, i=1,2,3,4.$$

证明矩阵 B_1,B_2,B_3,B_4 线性相关.

231. (231.) 设 V 为数域上的线性空间, $V_i, i=1,2,\cdots,s$ 为 V 的非 0 维数相等的真子空间. 证明存在无穷多个 V 的真子空间 W 使得

$$V=V_1\oplus W=V_2\oplus W=\cdots=V_s\oplus W.$$

232. (232.) 设 ξ,η 是内积空间 V 的两个内积使得对任何 $u,v\in V$ 均有

$$\xi(u,v)=0\Leftrightarrow\eta(u,v)=0.$$

证明存在 $\alpha>0$ 使得 $\xi=a\eta$.

233. (233.) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 若 $A^k=0,(k\geqslant 2)$.

(a). 若 $k=3$, 是否存在 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $B^3=A+I$.

(b). 是否存在 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $B^{2023}=A+I$.

234. (234.) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, λ 是 A 的一个特征值. 证明:

$$|\lambda|\leqslant\min\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}.$$

235. (235.) 设

$$A=(A_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}, a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i-j}, & i\neq j\\ 2, & i=j\end{cases},$$

计算 $\det A$.

236. (236.) 设 $E_1,E_2,\cdots,E_{2^n-1}$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集的一个排序. 设

$$A_n=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{(2^n-1)\times(2^n-1)}, a_{ij}=\begin{cases}0, & E_i\bigcap E_j=\emptyset\\ 1, & E_i\bigcap E_j\neq\emptyset\end{cases},$$

计算 $\det A_n$.

237. (237.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $A^*A^2=AA^*$, 证明:$A^2=A$.

238. (238.) 设 $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的且 $\operatorname{tr}(P)\geqslant 0,\operatorname{tr}(Q)<0$, 证明存在 $e\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $e^TPe\geqslant 0,e^TQe<0$.

239. (239.$*$) 对实对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 定义

$$Q_A\triangleq\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}^TA\mathbf{x}\leqslant 0\right\}.$$

对实对称矩阵 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 若

$$A\neq B,Q_A=Q_B,\lambda_{\min}(A)<0<\lambda_{\max}(A),$$

证明: 存在 $\rho>0$ 使得 $B=\rho A$.

240. (240.) 设 σ 是 n 维欧式空间 V 的线性变换且对任何子空间 $S\subset V$ 有

$$\sigma\left(S^{\perp}\right)\subset[\sigma(S)]^{\perp}.$$

证明:$\sigma^T\sigma$ 是数量变换.

241. (241.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值都为正且满足

$$A^4+2A^3B=2AB^3+B^4.$$

证明:$A=B$.

242. (242.) 设 V 是有限维线性空间, $\sigma,\tau\in\operatorname{End}V$ 满足对任何 $u\in V$ 都有 $\sigma(u),\tau(u)$ 线性相关. 证明 σ,τ 线性无关的充要条件是 $\ker\sigma$ 不是 $\ker\tau$ 子集且 $\ker\tau$ 也不是 $\ker\sigma$ 子集.

243. (243.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明:

$$\det\begin{pmatrix}I-A^TA & I-A^TB\\ I-B^TA & I-B^TB\end{pmatrix}=(-1)^n\det(A-B)^2.$$

244. (244.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $E-A^TA,E-B^TB$ 都是半正定的. 证明:

$$\det\left(E-A^TB\right)^2\geqslant\det(A-B)^2+\det\left(E-A^TA\right)\det\left(E-B^TB\right).$$

245. (245.) 设 $A,B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$C(A-B)=(A-B)C,C^n=0,BC-CB=10(A-B).$$

证明:A,B 的迹相同.

246. (246.) 设

$$A,B,C,D\in\mathbb{R}^{n\times n},J=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},S^TJS=J.$$

证明 $D+iC$ 可逆.

247. (247.) 设矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 有极小多项式

$$(\lambda-a)^2(\lambda-b)^3(\lambda-c)^4,a,b,c\in\mathbb{R}.$$

记

$$A=C^4+C^3+C^2+C+E,B=C^4+2C^2+3E,$$

证明:

$$|A+B|\geqslant|A|+|B|.$$

248. (248.) 设

$$A\in\mathbb{Z}^{n\times n},\mathbf{z}A\mathbf{z}^T>0,\forall\mathbf{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\},z_i\geqslant 0.$$

对

$$\mathbf{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n),z_i\geqslant 0$$

证明 $\mathbf{z}A\mathbf{z}^T\geqslant 0$ 并问对这样非 $\mathbf{0}$ 的 $\mathbf{z}$ 等号是否可能成立.

249. (249.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 证明:$m+n$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix}0&A\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&B\\0&0\end{pmatrix}$$

相似当且仅当 $r(A)=r(B)$.

250. (250.) 设 A 不相似于 $a_{11}=0$ 的矩阵, 证明:$A=aE,a\neq 0$.

251. (251.) 设

$$A\in\mathbb{R}^{n\times n},\rho:(X,Y)\mapsto\operatorname{tr}\left(X^TAY\right),X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

证明 ρ 对称的充要条件是 A 对称, ρ 正定的充要条件是 A 正定.

252. (252.) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{8\times 8}$ 满足

$$|a_{ij}|\leqslant 1,i,j=1,2,\cdots,8.$$

求 $\det A$ 最大值.

253. (253.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的满足 $AB+A^3=BA+B^3$. 证明:$A=B$.

254. (254.) 给定正整数 $n\geqslant 2,d_{ij}\in\mathbb{R},1\leqslant i<j\leqslant n$ 满足对任何 $1\leqslant i<j<k<\ell\leqslant n$ 都成立

$$d_{ij}d_{k\ell}-d_{ik}d_{j\ell}+d_{i\ell}d_{jk}=0.$$

证明存在

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})\in\mathbb{R}^n$$

使得对任何 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 都成立

$$d_{ij}=\begin{vmatrix}a_{1i}&a_{1j}\\a_{2i}&a_{2j}\end{vmatrix}.$$

255. (255.) 设 V 是复内积空间. 问是否存在 V 上的非 0 线性变换 φ 使得

$$\langle\varphi(\mathbf{x}),\mathbf{x}\rangle=0,\forall\mathbf{x}\in V.$$

256. (256.) 对给定 $n\geqslant 2$, 设 $A=(a_{ij}(x))$, 其中 1 是非 0 实系数多项式 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}\in\mathbb{R}[x]$ 的最大公因式. 问是否存在

$$a_{ij}\in\mathbb{R}[x],2\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n$$

成立 $\det A=1$.

257. (257.) 记 $x_{n+1}=x_1$, 若二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2-2\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}+\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

是半正定的, 求正整数 n 全部值.

258. (258.) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 A 可逆. 已知存在正整数 t 使得

$$A^kB=BA^k,k=t+1,t+2,\cdots,t+n,$$

证明 A,B 可交换.

259. (259.) 设 V 是 $n\geqslant 2$ 维的欧式空间以及

$$v_1,v_2,\cdots,v_n\in V,a=((v_i,v_j))_{n\times n}.$$

若

$$(v_i,v_i)=\begin{cases}1, & \forall 1\leqslant i\leqslant n,i=j\\ c>0, & \forall 1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j\end{cases},$$

求 $\det A$ 并判断 c 满足什么条件时, A 是正定矩阵.

260. (260.) 设 $\mathbb{F}$ 是数域, $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times s}$. 证明:

$$r\left(AB\right)+n\geqslant r\left(A\right)+r\left(B\right).$$

并说明上述等式成立当且仅当 $\ker A\subset \mathrm{Im}B$.

261. (261.) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{2026\times 2026}$ 是反对称矩阵, 证明:$r\left(A\right)$ 为偶数并证明 AB 的任一特征值都是偶数重根.

262. (262.) 设有限维线性空间 V 有 n 维子空间 $W_i,i=1,2,\cdots,n$ 且满足

$$\dim W_i=n,i=1,2,\cdots,n,\dim\left(W_i\bigcap W_j\right)=n-1,1\leqslant i<j\leqslant n.$$

证明下列条件之一成立:

(a). 存在 $n-1$ 维子空间 $W\subset V$ 使得

$$W\subset W_i,i=1,2,\cdots,n.$$

(b). 存在 $n+1$ 维子空间 $U\subset V$ 使得

$$W_i\subset U,i=1,2,\cdots,n.$$

263. (263.) 设 V 是 2025 维实线性空间, $F:V\times V\to\mathbb{R}$ 是一个非退化双线性型. 已知在 V 的一个子空间 W 上 $F|_{W\times W}=0$. 考虑所有的 F 和 W, 求 $\dim W$ 最大值.

264. (264.) 设 $A,B,C,D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 I_n-AB,I_n-CD 都是反对称的. 证明:$AD+B^TC^T$ 可逆.

265. (265.) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间. 设 $[\cdot,\cdot]:V\times V\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $\alpha,\beta,\gamma\in V,k\in\mathbb{R}$ 满足

$$\begin{aligned}&[k\alpha,\beta]=k\left[\alpha,\beta\right];\\&[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma];\\&[\alpha,\beta]=-\left[\beta,\alpha\right];\\&[\alpha,\beta]=0,\forall\beta\in V\Rightarrow\alpha=0.\end{aligned}$$

证明

(a). $n\neq 1$;

(b). 对任何非 0 的 $\alpha\in V$, 存在 $\beta\in V$ 使得 $[\alpha,\beta]=1$;

(c). 设 K 是上一问中 α,β 生成的 V 的子空间,

$$K^{\perp}\triangleq\left\{\gamma\in V:[\gamma,\delta]=0,\forall\delta\in K\right\}.$$

证明 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间且 $V=K\oplus K^{\perp}$.

(d). 证明 n 为偶数 (记 $n=2k$) 且存在 V 的一组基 $\epsilon_{\pm 1},\epsilon_{\pm 2},\cdots,\epsilon_{\pm k}$ 成立

$$\begin{aligned}&[\epsilon_i,\epsilon_{-i}]=1,i=1,2,\cdots,k;\\&[\epsilon_i,\epsilon_j]=0,\forall i,j\in\left\{\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm k\right\},i+j\neq 0.\end{aligned}$$

266. (266.) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足其特征值的绝对值至多为 1. 证明:

$$||A^n||\leqslant\frac{n}{\ln 2}||A||^{n-1},$$

这里

$$||B||\triangleq\sup_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{C}^n}\leqslant 1,\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n}||B\mathbf{x}||_{\mathbb{C}^n}.$$

267. (267.) 考虑矩阵 $A=\left(\sqrt{i^2+j^2}\right)_{n\times n}$, 证明:$\det A>0$ 的充要条件是 n 为奇数.

268. (268.) 设

$$f\left(x\right)=a_0+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos\left(kx\right)+b_k\sin\left(kx\right)\right),$$

这里 $a_0,a_k,b_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,m$ 使得

$$f\left(x\right)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x) \leqslant (m+1)\, a_0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

269. (269.∗) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $||\cdot||$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上一个范数. 证明: 对任何 $x>0$, 存在 $z \in \mathbb{C}$ 使得

$$0<|z|<x, \left|\left|(I_n - zA_1)^{-1} + (I_n - zA_2)^{-1} + \cdots + (I_n - zA_p)^{-1}\right|\right| \geqslant p\,||I_n||.$$

270. (270.)$\mathbb{C}^{n\times n}$ 中赋予范数

$$||A|| \triangleq \sup_{||\mathbf{z}||_{\mathbb{C}^n}\leqslant 1} ||A\mathbf{z}||_{\mathbb{C}^n}.$$

设 G 是某些可逆复矩阵构成的群且存在 $a \in (0,2)$ 使得

$$||A-I|| < a, \forall A \in G,$$

证明 G 是有限群.

271. (271.) 设 $A \in \mathbb{R}^{r\times r}, B \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}, C \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ 满足

$$r\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\right) = r\left(\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}\right) = r.$$

证明 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

272. (272.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\operatorname{tr}(A)=0$. f 是次数大于等于 1 的多项式. 证明: 存在可逆 $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A = f(XY) - f(YX)$.

273. (273.) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明存在可相似对角化的 $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A = B + C$.

274. (274.) 已知 A, C 为 $n\times n$ 复矩阵, 满足 $A^2 = CA - AC$, 且 $\mathrm{r}(C)=1$, 证明:$A^2C = 0$.

275. (275.) 设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 和元素全为 1 的列向量线性无关. 求向量组

$$\left\{P\alpha : P \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{是置换矩阵}\right\}$$

的秩.

276. (276.) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是半正定的 Hermite 矩阵且 $A-B$ 也半正定. 证明:$\operatorname{tr}\left(A^2\right) \geqslant \operatorname{tr}\left(B^2\right)$.

277. (277.) 设 $W \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ 是子空间且 W 中每个矩阵都可以相似对角化. 若还有

$$AB - BA \in W, \forall A, B \in W.$$

证明 W 中矩阵可以同时相似对角化.

278. (278.) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$\mu \neq 0, AB - BA = \mu B.$$

若 A 全体不同特征值只有 k 个, 证明:

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{C}} (n - \operatorname{rank}(\lambda E - A)) \leqslant n - \operatorname{rank}\left(B^k\right).$$

279. (279.) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间且 A, B 是 V 上两个线性变换. 若

$$A^2 = B^2 = 0, AB + BA = E,$$

证明:

$$A^{-1}(0) = A\left(B^{-1}(0)\right), V = A^{-1}(0) \oplus B^{-1}(0)$$

且 $\dim V$ 为偶数.

280. (280.) 设 X 是正定 Hermite 矩阵, 则对 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 有

$$\mathbf{x}^* X^{-1} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n} \left(2\Re\left(\mathbf{x}^*\mathbf{y}\right) - \mathbf{y}^* X \mathbf{y}\right).$$

281. (281.) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是正定 Hermite 矩阵, 证明:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} A_i^{-1} - \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^{-1}$$

是半正定 Hermite 矩阵.

282. (282.) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是正定 Hermite 矩阵, 证明 $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^{-1}\right)$ 的特征值都是实数且大于等于 k^2.

283. (283.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵. 定义 Hadamard 积 $A \circ B$ 为矩阵对应元素相乘. 证明:$A \circ A^{-1} - I$ 是半正定矩阵且若 A, B 对角线元素均为 1, 则 $I - A^{\frac{1}{2}} \circ B^{\frac{1}{2}}$ 也是半正定矩阵.

284. (284.) 设 $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幂等矩阵, 证明:

$$r(I - BC) + r(B) + r(C) \leqslant 2n.$$

285. (285.) 设 $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ 满足

$$A^m B = BA^m, A^n B = BA^n, \forall B \in \mathbb{R}^{p\times p}.$$

证明: 若 $\det A \neq 0, (m, n) = 1$, 则

$$AB = BA, \forall B \in \mathbb{R}^{p\times p}.$$

286. (286.) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实矩阵, $\sigma_1(A)$ 表示 A 最大的奇异值, 即 $A^T A$ 最大的特征值的算术平方根. 满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ 的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 我们称为 A 的不动点.

(a). 假设 $\sigma_1(A) \leqslant 1$, 证明 A 的每个不动点也是 A^T 的不动点.

(b). 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 验证如果不假设 $\sigma_1(A) \leqslant 1$, 则第一问结果不成立.

(c). 假设 $AA^T = A^T A$, 证明 A 的每一个不动点都是 A^T 的不动点.

287. (287.) 设 $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$[X, Y] \triangleq XY - YX.$$

(a). 若 $[X, Y] = 0$, 证明:

$$e^X e^Y = e^{X+Y} = e^Y e^X.$$

(b). 若

$$[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0,$$

证明:

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

288. (288.) 对 $\mathbb{R}^3$ 上的外积 $\times$. 非零映射 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 满足 $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$. 证明: 存在正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$\varphi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

289. (289.) 设

$$V \triangleq \left\{ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{ij} x^i y^j : c_{ij} \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2, \cdots, n, j = 0, 1, 2, \cdots, m \right\}.$$

求线性变换

$$T : V \to V, p \mapsto \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}$$

的 Jordan 标准型.

290. (290.) 设 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$C = AB - BA, AC = CA, BC = CB.$$

记 m_A, m_B 分别为 A, B 的极小多项式,

$$N \triangleq \min\left\{\deg m_A, \deg m_B, n-1\right\}.$$

证明:$C^N = 0$.

291. (291.) 设 $B, W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 W 正定, 证明:$X - B^T X B = W$ 有正定解 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的充要条件是 $\rho(B) < 1$. 然后证明当 $\rho(B) < 1$, 正定解 $X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(B^T\right)^k W B^k$ 是唯一的. 这里 $\rho(B)$ 表示 B 的特征值最大模.

292. (292.) 设

$$f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{R}[x].$$

若 f 有 n 个不同实根且存在 $1 \leqslant p \leqslant n-1$ 使得

$$c_p = 0, c_i \neq 0, \forall i \neq p, 0 \leqslant i \leqslant n.$$

证明:$c_{p-1}c_{p+1} < 0$.

293. (293.) 设 $p, q, n \in \mathbb{N}$ 满足 $p + q > n$. 又 $V \in \mathbb{C}^{p\times q}$ 是酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的子矩阵. 确定 $||V||$ 的取值范围. 这里我们采用范数 $||V||$ 为 V^*V 的最大特征值的算术平方根.

294. (294.) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 $(AB)^2 = (BA)^2$ 且元素都为正数. 证明 $AB = BA$.

295. (295.) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $AB = BA = 0$. 证明存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$r\left(A^m + B^m\right) = r\left(A^m\right) + r\left(B^m\right).$$

296. (296.) 考虑线性空间

$$V = \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(x+1) = ef(x), \forall x \in \mathbb{R}\right\}.$$

考虑线性映射

$$L : V \to V, f \mapsto f'' - f,$$

计算

$$\dim \ker L, \dim V/L(V).$$

297. (297.) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 m 个非 $\mathbf{0}$ 向量. 若

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leqslant 0, \forall i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

(a). 证明: 存在向量 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 使得对任何 $1 \leqslant i \leqslant m$ 都有 $\langle \beta, \alpha_i \rangle \neq 0$.

(b). 证明:$m \leqslant 2n$, 且等号可能成立.

298. (298.) 给定 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 以及其上的线性变换 A. 证明: 若存在 $b \in V$ 使得

$$V = \left\{p(A)b : p \in \mathbb{F}[x]\right\},$$

则对任何可重复的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, 都存在 $f \in V'$ 使得

$$A + bf : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + bf(\mathbf{x})$$

的特征值恰好为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

299. (299.) 求全部 $n \in \mathbb{N}$ 使得存在一个 n 元集 $S \subset \mathbb{R}^3$ 成立

$$S = \left\{u \times v : u, v \in S\right\}.$$

300. (300.) 求所有 $p \in \mathbb{R}[x]$ 使得存在 $q \in \mathbb{R}[x]$ 成立

$$p(p(x)) - x = (p(x) - x)^2 q(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

301. (301.) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 判断

$$\int_0^\infty \left(I_3 + t^2 A^2\right)^{-1} \mathrm{d}t$$

收敛性并求值.

302. (302.) 设

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$$

满足 $|a_0|$ 是素数且

$$|a_0|>1+\sum_{i=1}^{n-1}|a_i|.$$

证明:f 的任一复根 α 都有 $|\alpha|>1$ 且 f 是 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式.

第 24 章 数学类解析几何

数学类解析几何是一个比较糟粕的学科, 平时无需学习, 考前模拟的时候再背公式算一些经典题即可. 好用的教材包括丘维声解析几何和吕林根的解析几何. 也可以在二次曲面和平面交线类型的不变量判断总结这里看到结论, 但不建议背诵.

例题 24.1 给定 $(a_j,b_j,c_j)\in\mathbb{R}^3, j=0,1,2$, 参数方程

$$\mathbf{r}(t)=\left(a_2t^2+a_1t+a_0,b_2t^2+b_1t+b_0,c_2t^2+c_1t+c_0\right),t\in(-\infty,+\infty)$$

的图形是什么?

证明 **Case 1** 当 $(a_2,b_2,c_2),(a_1,b_1,c_1)$ 都是 0 向量, $\mathbf{r}$ 是一个点.

Case 2 当 $(a_2,b_2,c_2),(a_1,b_1,c_1)$ 互相平行且不全为 0, 不妨设 $(a_2,b_2,c_2)\neq 0$, 则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$(a_1,b_1,c_1)=\lambda(a_2,b_2,c_2).$$

此时

$$\mathbf{r}(t)=\underbrace{\left(t^2+\lambda t\right)}_{\geqslant-\frac{\lambda^2}{4}}(a_2,b_2,c_2)+(a_0,b_0,c_0)$$

表示一条射线.

Case 3 当 $(a_2,b_2,c_2),(a_1,b_1,c_1)$ 不平行, 则它们都不是 0 向量. 设

$$(a_2,b_2,c_2)=\mu e_1,\mu=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2},(a_1,b_1,c_1)=\alpha e_1+\beta e_2,$$

这里 e_1,e_2 是相互垂直的单位向量且 $\beta\neq 0$. 现在

$$\mathbf{r}(t)=\mu t^2e_1+(\alpha e_1+\beta e_2)t+(a_0,b_0,c_0),$$

即

$$\mathbf{r}(t)-(a_0,b_0,c_0)=\mu t^2e_1+(\alpha e_1+\beta e_2)t.$$

以 (a_0,b_0,c_0) 为心, e_1 为 x 轴, e_2 为 y 轴, 则在新的坐标系下 $\mathbf{r}$ 变成

$$\begin{cases}x=\mu t^2+\alpha t\\ y=\beta t\\ z=0\end{cases}.$$

故 $\mathbf{r}$ 为抛物线.

例题 24.2 证明: 锥面

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0$$

有三条相互垂直直母线的充要条件是 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

证明 由于锥面不含常数项, 所以其顶点是 $(0,0,0)$. 考虑矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{3\times3}$. $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ 是锥面的一个母线方向当且仅当 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$. 所以该原解析几何问题可以转化为如下高等代数问题:

实对称矩阵 A 正交相似对角线全为 0 的矩阵的充要条件是 $\operatorname{tr}(A)=0$.

这个高等代数问题见命题23.16.

例题 24.3 若 $a,b,c>0$ 满足条件

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

证明: 过点 $(1,1,1)$ 可以做三条相互垂直的直线与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切.

证明 对方向 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$, 我们考虑

$$\frac{(1+v_1t)^2}{a^2}+\frac{(1+v_2t)^2}{b^2}+\frac{(1+v_3t)^2}{c^2}=1.$$

上述关于 t 的二次函数可化简为

$$\left(\frac{v_1^2}{a^2}+\frac{v_2^2}{b^2}+\frac{v_3^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{v_1}{a^2}+\frac{v_2}{b^2}+\frac{v_3}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1\right)=0,$$

于是上式关于 t 方程有且只有唯一解[1]的充要条件是

$$\left(\frac{v_1}{a^2}+\frac{v_2}{b^2}+\frac{v_3}{c^2}\right)^2=\left(\frac{v_1^2}{a^2}+\frac{v_2^2}{b^2}+\frac{v_3^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1\right),$$

即

$$\mathbf{v}^T\begin{pmatrix}\frac{1}{a^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{a^2} & \frac{1}{a^2b^2} & \frac{1}{a^2c^2}\\ \frac{1}{a^2b^2} & \frac{1}{b^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{b^2} & \frac{1}{b^2c^2}\\ \frac{1}{a^2c^2} & \frac{1}{b^2c^2} & \frac{1}{c^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{c^2}\end{pmatrix}\mathbf{v}=0.$$

于是相似例题24.2的证明我们只需验证

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{a^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{a^2} & \frac{1}{a^2b^2} & \frac{1}{a^2c^2}\\ \frac{1}{a^2b^2} & \frac{1}{b^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{b^2} & \frac{1}{b^2c^2}\\ \frac{1}{a^2c^2} & \frac{1}{b^2c^2} & \frac{1}{c^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{c^2}\end{pmatrix}\right)\\ &=\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{a^2}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{b^2}-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-1}{c^2}\\ &=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2b^2c^2}=0,\end{aligned}$$

这就完了证明.

例题 24.4 对任何 $m\in\mathbb{R}$, 判断 $x+y-mz=0$ 与 $x^2+y^2-z^2=1$ 交线是什么平面二次曲线?

笔记 我们介绍一种爆算的通用方法, 其特征是直接把平面旋转成 $z^*=0$, 然后利用平面解析几何方法来研究.

证明 设

$$e_3^*=\frac{1}{\sqrt{m^2+2}}(1,1,-m),e_1^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),e_2^*=e_3^*\times e_1^*=\frac{1}{\sqrt{2\left(m^2+2\right)}}(-m,-m,-2),$$

这里 e_3^* 是 $x+y-mz=0$ 的单位外法向量. 由于 $(0,0,0)$ 在题目的平面上, 因此可取新坐标系 $Ox^*y^*z^*$ 使得 x^*,y^*,z^* 的单位正方向依次是 e_1^*,e_2^*,e_3^*. 此时有坐标变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-m}{\sqrt{2(m^2+2)}} & \frac{1}{\sqrt{m^2+2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-m}{\sqrt{2(m^2+2)}} & \frac{1}{\sqrt{m^2+2}}\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2(m^2+2)}} & -\frac{m}{\sqrt{m^2+2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}.$$

在新的坐标平面中, 我们知道平面 $x+y-mz=0$ 变成立平面 $z^*=0$, 此时

$$\begin{aligned}1=x^2+y^2-z^2&=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x^* & y^* & z^*\end{pmatrix}T^T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

上式代入 $z^*=0$ 得

$$(x^*)^2+\frac{m^2-2}{m^2+2}(y^*)^2=1,$$

[1]也等价于直线

$$\begin{cases}x=1+v_1t\\y=1+v_2t\\z=1+v_3t\end{cases}$$

和椭球面相切.

即交线是

$$\begin{cases} \text{椭圆}, & |m|>\sqrt{2} \\ \text{双曲线}, & |m|<\sqrt{2} \\ \text{一对平行直线}, & |m|=\sqrt{2} \end{cases}.$$

例题 24.5 已知椭圆抛物面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$, 求过点 $(1,0,1)$ 且与椭圆抛物面交线是圆的所有平面方程.

笔记 我们采用正交换元法, 设

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

使得平面变成 $z'=t$, 此时带入换元得到

$$\frac{(ax'+by'+ct)^2}{9}+\frac{(dx'+fy'+gt)^2}{4}=2\left(hx'+iy'+jz'\right).$$

要得到圆就需要二次项系数相等且不能有交叉项, 即

$$\frac{a^2}{9}+\frac{d^2}{4}=\frac{b^2}{9}+\frac{f^2}{4},\frac{2ab}{9}+\frac{2df}{4}=0.$$

证明 首先 $z=c$ 带入方程, 因为 x^2,y^2 系数不同, 所以交线不是圆. 下面考虑平面

$$A(x-1)+B(y-0)+C(z-1)=0, A^2+B^2\neq 0.$$

我们把该平面视为新的坐标下 $z'=t$ 的平面, 即做正交换元

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{AC}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{BC}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & -\frac{A^2+B^2}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}} & \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

于是为了 $(x')^2,(y')^2$ 的系数相等, 我们需要

$$\frac{\left(\frac{AC}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{BC}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2}{4}=\frac{\left(\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2}{4},$$

即

$$\frac{A^2C^2}{9\left(A^2+B^2+C^2\right)}+\frac{B^2C^2}{4\left(A^2+B^2+C^2\right)}=\frac{B^2}{9}+\frac{A^2}{4}\Rightarrow C^2=\frac{\left(A^2+B^2\right)\left(9A^2+4B^2\right)}{5\left(B^2-A^2\right)}.$$

显然 $C\neq 0$, 由齐次性设 $C=1$.

我们有为了不含有 $x'y'$ 的项, 我们需要

$$\frac{2}{9}\frac{-ABC}{\left(A^2+B^2\right)\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{2}{4}\frac{ABC}{\left(A^2+B^2\right)\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0\Rightarrow ABC=0.$$

于是带入 $B=0$ 得

$$1=\frac{\left(A^2+B^2\right)\left(9A^2+4B^2\right)}{5\left(B^2-A^2\right)}<0,$$

这就是一个矛盾!, 因此 $A=0$, 此时

$$1=\frac{\left(B^2\right)\left(4B^2\right)}{5\left(B^2\right)}\Rightarrow B=\pm\frac{\sqrt{5}}{2},$$

即 $z=1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}y$ 为所求.

例题 24.6 设 $a,b,c>0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 求经过这个曲面腰椭圆上任意一个点的两条直母线所决定的平面和腰椭圆所在平面的夹角.

笔记 腰椭圆就是和 $z=0$ 的交线. 本题需仔细体会直线恒落在二次曲面上的处理思想. 注意回忆或者学习课本结

论[2], 单叶双曲面同族直母线异面, 异族直母线共面.

证明 任取腰椭圆上一个点 $(x_0,y_0,0)$, 这里 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. 设过 $(x_0,y_0,0)$ 的直母线方向为 (p,q,r), $p^2+q^2+r^2=1$. 现在

$$\frac{(x_0+pt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+qt)^2}{b^2}-\frac{(0+rt)^2}{c^2}=1,\forall t\in\mathbb{R},$$

即

$$2t\left(\frac{x_0p}{a^2}+\frac{y_0q}{b^2}\right)+t^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{r^2}{c^2}\right)=0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

我们有

$$\frac{x_0p}{a^2}+\frac{y_0q}{b^2}=0=\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{r^2}{c^2}.$$

因为 $r=0\Rightarrow p=q=0$, 即 $r\neq0$. 于是 $(p,q,-r)$ 也是另外一条直母线方向.

注意到

$$(p,q,r)\times(p,q,-r)=(-2qr,2pr,0)\perp(0,0,1),$$

即腰椭圆上任意一个点的两条直母线所决定的平面和腰椭圆所在平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

例题 24.7 设双叶双曲面 $S:x^2+y^2-z^2=-2$, 以 $(1,1,-1)$ 为顶点且与 S 的上半叶相切的所有切线构成的锥面为 σ. 求 σ 的方程和所有切点构成的平面方程.

笔记 回忆高中数学的知识点, 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,a,b>0$, 设 $p=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 则

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1\text{表示}\begin{cases}p\text{处切线}, & p\text{落在椭圆}\\ \text{过点}p\text{做椭圆两条切线, 连接两个切点的直线}, & p\text{落在椭圆外}\\ \text{椭圆内以}p\text{为中点的弦}, & p\text{落在椭圆内}\end{cases}.$$

这个结果可以类比到空间立体几何. 这个知识点如果只是中间步骤可以直接使用, 知识点其实来自解析几何二次曲面基本理论的知识点[3]. 但我们为了节约时间, 无需再花时间去系统性学习了!

证明 由我们知道所有切点构成的平面方程

$$x\cdot1+y\cdot1-z\cdot(-1)=-2\Rightarrow x+y+z=-2.$$

设锥面 σ 上的点为 (x,y,z), 则考虑其所在切线方向向量为 $(x-1,y-1,z+1)$.

对于切线方向 (a,b,c), 我们知道切线 $\begin{cases}x=1+at\\ y=1+bt\\ z=-1+ct\end{cases}$ 要满足

$$(1+at)^2+(1+bt)^2-(-1+ct)^2=-2$$

关于 t 有且只有一个实根. 化简上式得

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)t^2+2t\left(a+b+c\right)+3=0.$$

计算关于 t 的二次函数的 Δ 得

$$(a+b+c)^2=3\left(a^2+b^2-c^2\right).$$

代入 $(x-1,y-1,z+1)$ 得锥面方程为

$$(x+y+z-1)^2=3\left[(x-1)^2+(y-1)^2-(z+1)^2\right].$$

例题 24.8 设 L_1,L_2 是两条互不相交的异面直线且分别通过 L_1,L_2 作两个互相垂直的平面. 求证交线轨迹是单叶双曲面或者两张相交平面.

[2]例如丘维声习题 3.4,P108, 9,10 题.

[3]你也可以自行在教材上阅读证明.

证明 取异面直线 L_1, L_2 公垂线的中点为坐标原点. 公垂线为 z 轴, 并取 x 轴与直线 L_1, L_2 成相等夹角. 不失一般性[4], 直线可设为

$$L_1:\begin{cases}y=-\tan\alpha\cdot x\\ z=h\end{cases},L_2:\begin{cases}y=\tan\alpha\cdot x\\ z=-h\end{cases},$$

这里 $h>0,\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

过 L_1 的平面 π_1 的方程可设为

$$u\left(y+x\tan\alpha\right)+v\left(z-h\right)=0,u^2+v^2\neq 0.$$

过 L_2 的平面 π_2 的方程可设为

$$u^*\left(y-x\tan\alpha\right)+v^*\left(z+h\right)=0,\left(u^*\right)^2+\left(v^*\right)^2\neq 0.$$

两个平面垂直需要

$$-uu^*\tan^2\alpha+uu^*+vv^*=0.$$

当 $vv^*\neq 0$, 上式变形得

$$-\frac{u}{v}\frac{u^*}{v^*}\tan^2\alpha+\frac{u}{v}\frac{u^*}{v^*}+1=0.$$

于是代入

$$\frac{u}{v}=-\frac{z-h}{y+x\tan\alpha},v\neq 0,\frac{u^*}{v^*}=-\frac{z+h}{y-x\tan\alpha},v^*\neq 0$$

得

$$-\frac{\left(z-h\right)\left(z+h\right)}{\left(y+x\tan\alpha\right)\left(y-x\tan\alpha\right)}\tan^2\alpha+\frac{\left(z-h\right)\left(z+h\right)}{\left(y+x\tan\alpha\right)\left(y-x\tan\alpha\right)}+1=0.$$

化简得

$$x^2\tan^2\alpha-y^2+\left(\tan^2\alpha-1\right)z^2+h^2\left(1-\tan^2\alpha\right)=0.$$

可以看到当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时得到的轨迹是单叶双曲面. 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 方程变为 $(x-y)(x+y)=0$, 即退化为两张相交于 z 轴的平面.

我们还需要讨论 $vv^*=0$ 的情况, 实际上更简单的类似计算[5], 最后还是得到

$$x^2\tan^2\alpha-y^2+\left(\tan^2\alpha-1\right)z^2+h^2\left(1-\tan^2\alpha\right)=0.$$

因此我们完成了证明.

例题 24.9 用通过坐标轴的平面和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(0<a<b<c)$ 相截, 证明有且仅有两个平面使得截面曲线是圆. 并说明两张截面的位置.

证明 设截面曲线是圆的截面方程为 $Ax+By+Cz=0$. 因而当点 (x,y,z) 落在截线上时, $(-x,-y,-z)$ 落在截线上. 从而原点是这个圆的对称中心, 原点必为圆心. 设圆半径是 $R>0$, 则这圆在以原点为球心, R 为半径的球面上. 于是这圆上任何一点 (x,y,z) 满足

$$\begin{cases}\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1;\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}.\tag{24.1}$$

将方程组(24.1)中两式相减. 有

$$\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0.$$

注意到 $(tx,ty,tz),t\in\mathbb{R}$ 也满足上式, 我们知道截线圆所在平面上任何一个点都满足上式. 现在我们知道上式的

[4]方程中交换 $-\tan\alpha,\tan\alpha$ 结论是类似的, 读者可以自行计算.

[5]考试需要写出.

3 个系数必至少有一个是 0, 否则它是一个二次锥面不会包含平面. 由于

$$\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}<\frac{1}{R^2}-\frac{1}{b^2}<\frac{1}{R^2}-\frac{1}{c^2},$$

即只能有 $R=b$. 因此我们得到

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0.$$

因此所求平面为

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}x\pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}z=0.$$

第 25 章 后续课程问题 *

本部分内容不作为我们课程内容, 因此没有对问题做分类和总结, 而是记录平时遇到的问题, 默认读者拥有对应的基础知识以供有需求的读者查阅.

例题 25.1

1. 设单位球 $B(0,1)\subset\mathbb{C}$, $f\in H(B(0,1))$, $k\in\mathbb{Z}$ 满足
$$f\left(e^{2\pi it}z\right)=e^{2\pi ikt}f(z),\forall t\in[0,1],$$
求全部 f.
2. 设单位球 $B(0,1)\subset\mathbb{C}^n$, $f\in H(B(0,1))$, $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}$ 满足
$$f\left(e^{2\pi it_1}z_1,e^{2\pi it_2}z_2,\cdots,e^{2\pi it_n}z_n\right)=e^{2\pi i\sum\limits_{j=1}^{n}k_jt_j}f(z),\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0,1],$$
求全部 f.

证明

1. 固定 $r\in(0,1)$. 我们考虑
$$\begin{aligned}f^{(n)}(0)&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f\left(e^{2\pi it}\zeta\right)}{e^{(n+1)2\pi it}\zeta^{n+1}}e^{2\pi it}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(\zeta)}{e^{(n-k)2\pi it}\cdot\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=e^{(k-n)2\pi it}f^{(n)}(0),\end{aligned}$$
即 $f^{(n)}(0)=0,\forall n\neq k$, 故考虑 Taylor 级数展开得
$$f(z)=\begin{cases}cz^k,c\in\mathbb{C}, & k\geqslant 0\\0, & k<0\end{cases}.$$
2. 取 $t_2=t_3=\cdots=t_n=0$, 我们利用 1 问得
$$f(z)=\begin{cases}c_1(z_2,z_3,\cdots,z_n)z_1^{k_1}, & k_1\geqslant 0\\0, & k_1<0\end{cases}.$$
类似的考虑其他变量可知当 f 不为 0 函数时必有
$$k_1,k_2,\cdots,k_n\geqslant 0.$$
注意到
$$c_1(z_2,z_3,\cdots,z_n)=e^{2\pi i\sum\limits_{j=2}^{n}k_jt_j}c_1(z_2,z_3,\cdots,z_n),\forall t_2,\cdots,t_n\in[0,1],$$
于是归纳可得
$$f(z)=\begin{cases}cz_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdots z_n^{k_n}, & k_1,k_2,\cdots,k_n\geqslant 0\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

例题 25.2 设 $f\in H(B(0,1))$ 满足
$$\left|f\left(z^2\right)\right|\geqslant|f(z)|,\forall z\in B(0,1),$$
证明:f 为常值函数.

证明 对所有 $n\in\mathbb{N},z\in B(0,1)$, 我们有
$$|f(z)|\leqslant\left|f\left(z^2\right)\right|\leqslant\left|f\left(z^4\right)\right|\leqslant\cdots\leqslant\left|f\left(z^{2^n}\right)\right|.$$
注意到
$$\lim_{n\to\infty}\left|z^{2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|z|^{2^n}=0,$$

我们有

$$|f(z)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left|f\left(z^{2^n}\right)\right| = |f(0)|.$$

由最大模定理我们知道 f 为常数.

例题 25.3 复变函数 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是边界光滑的区域. 对 $f \in H(D) \bigcap C\left(\overline{D}\right)$, 证明:

$$\sup_{z\in\partial D} |f(z) - \overline{z}| \geqslant \frac{2S(D)}{\ell(\partial D)},$$

这里 $S(D)$ 表示 D 的面积, $\ell(\partial D)$ 表示 ∂D 的周长.

证明 我们直接计算有

$$\begin{aligned} S(D) &= \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{z}\mathrm{d}z = \left|\frac{1}{2i}\int_{\partial D} (\overline{z} - f(z))\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\partial D} 1\mathrm{d}s \cdot \sup_{z\in\partial D} |\overline{z} - f(z)| \\ &= \frac{\ell(\partial D)}{2} \sup_{z\in\partial D} |\overline{z} - f(z)|, \end{aligned}$$

这就证明了

$$\sup_{z\in\partial D} |f(z) - \overline{z}| \geqslant \frac{2S(D)}{\ell(\partial D)}.$$

例题 25.4 复变函数 设 $R > 0$, 我们用 B_R 表示复平面上圆心在圆点, 半径为 R 的圆. 考虑

$$\rho \in (0,R), f \in C^\infty(B_R), g(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i}\iint_{B_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

证明:

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = f(z), \forall |z| < \rho.$$

证明 因为复平面任何开集上的 dbar 方程都是可解的, 所以取 $u \in C^\infty(B_R)$ 使得 $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = f$. 由 Cauchy-Pompeiu formula 得

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\iint_{B_\rho} \frac{\frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}}}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \forall z \in B_\rho,$$

即

$$u(z) - g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

注意上式右边是 Cauchy 积分, 它解析, 因此

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = f(z), \forall z \in B_\rho.$$

例题 25.5 复变函数 设 f 在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上解析且成立 $\sin f(z) = f(z)$. 证明:f 为常值函数.

证明 条件即

$$f(\Omega) \subset \{z \in \Omega : \sin z = z\}.$$

零点孤立性表明上式右边集合是孤立的, 而开映射定理表明 f 值域是开集, 除非 f 常值, 因此我们知道 f 为常值函数.

例题 25.6 复变函数 设 f 在复平面全纯且满足

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{|\Re z|}, \forall \Re z \neq 0.$$

证明:$f \equiv 0$.

证明 对任何 $a\in\mathbb{R},r>0$, 由 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}\ln|f(ia)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(ia+ire^{it}\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{r|\sin t|}\mathrm{d}t\\&=-\ln r-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(|\sin t|\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令 $r\to+\infty$ 得 $f(ia)=0$. 零点孤立性表明 $f\equiv0$.

例题 25.7 复变函数 设 $B\subset\mathbb{C}$ 是单位开圆盘,$f:B\to B\setminus\{0\}$ 是单叶解析函数, 证明:

$$\sup|f'(0)|=\frac{2}{e}.$$

证明 设 $f(z)=e^{\frac{z+1}{z-1}}$, 我们有 $|f'(0)|=\frac{2}{e}$.

对一般的满足条件的 f, 我们可以写成 $f=e^g$, 这里

$$g:B\to\{z\in\mathbb{C}:\Re z<0\}\text{ 是解析的.}$$

注意到

$$h(z)\triangleq\frac{g(z)+1}{g(z)-1}$$

是 B 到 B 的解析映射且

$$f(z)=e^{\frac{h(z)+1}{h(z)-1}},|f'(0)|=\frac{2|h'(0)|}{|1-h(0)|^2}e^{\Re\frac{h(0)+1}{h(0)-1}}=\frac{2|h'(0)|}{|1-h(0)|^2}e^{-\frac{1-|h(0)|^2}{|1-h(0)|^2}}.$$

Schwarz Pick 定理给出

$$|h'(0)|\leqslant1-|h(0)|^2.$$

现在

$$|f'(0)|\leqslant\frac{2\left(1-|h(0)|^2\right)}{|1-h(0)|^2}e^{-\frac{1-|h(0)|^2}{|1-h(0)|^2}}\leqslant\frac{2}{e},$$

这里用到了

$$2xe^{-x}\leqslant\frac{2}{e},\forall x\in\mathbb{R}.$$

例题 25.8 复变函数 设

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,y>0\right\}.$$

对实值次调和函数 $u\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, 若

$$u(z)=O\left(|z|\right),|z|\to\infty,z\in\Omega$$

且对某个 $a,b>0$ 成立

$$u(x,0)\leqslant ax,u(0,y)\leqslant by,\forall x,y\geqslant0.$$

证明:

$$u(x,y)\leqslant ax+by,\forall(x,y)\in\Omega.$$

证明 考虑

$$v(x,y)\triangleq u(x,y)-ax-by,$$

于是有 $v\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ 在 Ω 次调和且

$$v(z)\leqslant0,\forall z\in\partial\Omega.$$

考虑

$$v_\epsilon\left(re^{i\theta}\right)\triangleq v\left(re^{i\theta}\right)-\epsilon r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

直接计算极坐标的 laplace 方程可知 $r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 是调和函数. 显然

$$v_\epsilon(z)\leqslant 0,\forall z\in\partial\Omega.$$

现在存在 $M>0$ 使得当 $r>0$ 充分大有

$$|v(z)|\leqslant M|z|,\forall|z|\geqslant r,z\in\Omega.$$

且

$$v_\epsilon\left(re^{i\theta}\right)\leqslant Mr-\epsilon r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\leqslant Mr-\epsilon r^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)\leqslant 0.$$

于是由次调和函数极大值原理我们有

$$v_\epsilon(x,y)\leqslant 0,\forall x,y\in\Omega.$$

于是

$$v(x,y)=\lim_{\epsilon\to 0^+}v_\epsilon(x,y)\leqslant 0,\forall(x,y)\in\Omega,$$

这就证明了

$$u(x,y)\leqslant ax+by,\forall(x,y)\in\Omega.$$

例题 25.92021 中科大复变函数 设 K_1,K_2 是复平面上不相交的紧集且 $f\in H\left(\mathbb{C}\setminus\left(K_1\bigcup K_2\right)\right)$. 证明: 存在

$$f_i\in H\left(\mathbb{C}\setminus K_i\right),i=1,2$$

使得

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),\forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(K_1\bigcup K_2\right).\tag{25.1}$$

证明 由光滑 Urysohn 定理, 即对

$$\mathbb{C}=\left(\mathbb{C}\setminus K_1\right)\bigcup\left(\mathbb{C}\setminus K_2\right)$$

用单位分解定理存在 $\rho_1,\rho_2\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\rho_1(z)+\rho_2(z)=1,z\in\mathbb{C},\mathrm{supp}\rho_1\subset\mathbb{C}\setminus K_2,\mathrm{supp}\rho_2\subset\mathbb{C}\setminus K_1.$$

注意到

$$\rho_i f\in C^\infty\left(\mathbb{C}\setminus K_i\right),i=1,2.$$

由复平面上 $\overline{\partial}$ 方程可解可取 $v\in C^\infty(\mathbb{C})$ 使得

$$\frac{\partial v(z)}{\partial\overline{z}}=\begin{cases}-f(z)\frac{\partial\rho_1(z)}{\partial\overline{z}}, & \forall z\in\mathbb{C}\setminus\left(K_1\bigcup K_2\right)\\ 0, & \forall z\in K_1\bigcup K_2\end{cases}.$$

我们令

$$f_1=\rho_1 f+v,f_2=\rho_2 f-v,$$

注意到 $f_1+f_2=f$ 并在定义域内成立

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}f_1=f\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\rho_1+\frac{\partial}{\partial\overline{z}}v=0,\frac{\partial}{\partial\overline{z}}f_2=f\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\rho_2-\frac{\partial}{\partial\overline{z}}v=-f\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\rho_1-\frac{\partial}{\partial\overline{z}}v=0,$$

这就证明了

$$f_i\in H\left(\mathbb{C}\setminus K_i\right),i=1,2.$$

我们完成了证明.

例题 25.10 复变函数 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. 若 $z=1$ 是 f 的正则点, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明 取 $R>1,\lambda>0$ 和

$$V\triangleq\left\{z\in\overline{B\left(0,R\right)}:\left|\arg z\right|\leqslant\lambda\right\}$$

使得 $f\in H\left(V\right)$. 考虑解析函数

$$s_n\left(z\right)\triangleq\sum_{k=0}^{n}a_kz^k,g_n\left(z\right)\triangleq\frac{f\left(z\right)-s_n\left(z\right)}{z^{n+1}}\left(z-e^{i\lambda}\right)\left(z-e^{-i\lambda}\right).$$

注意到对 $0\leqslant r<1$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|g_n\left(re^{\pm i\lambda}\right)\right|&=\left|\frac{f\left(re^{\pm i\lambda}\right)-s_n\left(re^{\pm i\lambda}\right)}{r^{n+1}e^{\pm i(n+1)\lambda}}\left(re^{\pm i\lambda}-e^{i\lambda}\right)\left(re^{\pm i\lambda}-e^{-i\lambda}\right)\right|\\&\leqslant\frac{\left(1-r\right)\left(r+1\right)}{r^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|a_k\right|r^k\leqslant\frac{1-r^2}{r^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}r^k\cdot\sup_{k\geqslant n+1}\left|a_k\right|\\&\leqslant\frac{1-r^2}{r^{n+1}}\frac{r^{n+1}}{1-r}\cdot\sup_{k\geqslant n+1}\left|a_k\right|\leqslant2\sup_{k\geqslant n+1}\left|a_k\right|.\end{aligned}$$

对 $1\leqslant r\leqslant R$, 有

$$\begin{aligned}\left|g_n\left(re^{\pm i\lambda}\right)\right|&=\left|\frac{f\left(re^{\pm i\lambda}\right)-s_n\left(re^{\pm i\lambda}\right)}{r^{n+1}e^{\pm i(n+1)\lambda}}\left(re^{\pm i\lambda}-e^{i\lambda}\right)\left(re^{\pm i\lambda}-e^{-i\lambda}\right)\right|\\&\leqslant\frac{\left(r-1\right)\left(r+1\right)}{r^{n+1}}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|r^k+\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\sum_{k=m+1}^{n}r^k\right)\\&\leqslant\frac{r^2-1}{r^{n+1}}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k+\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right)\\&\leqslant\frac{r^2-1}{r^{n+1}}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k\right)+\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\cdot\frac{r+1}{r^{n+1}}r^{n+1}\\&\leqslant\frac{r-1}{r^{n+1}-1}\left(r+1\right)\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k\right)+\left(R+1\right)\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\\&\leqslant\frac{R+1}{n}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k\right)+\left(R+1\right)\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|.\end{aligned}$$

当 $\theta\in[-\lambda,\lambda]$, 有

$$\begin{aligned}\left|g_n\left(Re^{i\theta}\right)\right|&=\left|\frac{f\left(Re^{i\theta}\right)-s_n\left(Re^{i\theta}\right)}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\left(Re^{i\theta}-e^{i\lambda}\right)\left(Re^{i\theta}-e^{-i\lambda}\right)\right|\\&\leqslant\frac{\left(R+1\right)^2}{R^{n+1}}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k+\sum_{k=m+1}^{n}\left|a_k\right|R^k\right)\\&\leqslant\frac{\left(R+1\right)^2}{R^{n+1}}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k+\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\cdot\frac{R^{n+1}-1}{R-1}\right)\\&\leqslant\frac{\left(R+1\right)^2}{R^{n+1}}\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k\right)+\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\cdot\frac{1}{R-1}.\end{aligned}$$

对任何 $\epsilon>0$, 取 $m\in\mathbb{N}$, 使得

$$\sup_{k\geqslant m}\left|a_k\right|\leqslant\epsilon.$$

那么当

$$n>\max\left\{\frac{\left(R+1\right)\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k\right)}{\epsilon},\frac{\ln\frac{\left(R+1\right)^2\left(\sup_V\left|f\right|+\sum_{k=0}^{m}\left|a_k\right|R^k\right)}{\epsilon}}{\ln R}-1,m\right\},$$

我们就有

$$|g_n(1)| \leqslant \sup_V |g_n| = \sup_{\partial V} |g_n| \leqslant \max\left\{2\epsilon, (R+2)\epsilon, \frac{R}{R-1}\epsilon\right\},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(1) = 0$, 即

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{收敛}.$$

例题 25.11 复变函数 证明存在一个整函数 f, 使得对任何整函数 g, 都存在 $a_{gi} \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots$ 使得在任何紧集上一致的有

$$\lim_{i\to+\infty} f(z + a_{gi}) = h(z).$$

证明 $H(\mathbb{C})$ 是标准的可度量化局部凸拓扑线性空间, 其上度量为 d 且是完备平移不变的. 我们考虑连续线性算子

$$T : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}), f \mapsto f(z+1), S : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}), f \mapsto f(z-1),$$

以及整函数

$$f_{m,k}(z) = z^m \left[\frac{k}{z}\sin\left(\frac{z}{k}\right)\right]^{m+1}, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

在 $H(\mathbb{C})$ 中, 显然有

$$\lim_{n\to\infty} T^n f_{m,k} = \lim_{n\to\infty} S^n f_{m,k} = 0, \lim_{k\to\infty} f_{m,k}(z) = z^m. \tag{25.2}$$

所以由全纯多项式在 $H(\mathbb{C})$ 中稠密得

$$H(\mathbb{C}) = \overline{\text{span}\left\{f_{m,k} : m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, k \in \mathbb{N}\right\}}.$$

下面我们证明存在稠密的 G_δ 集 $F \subset H(\mathbb{C})$ 使得对每一个 $f \in F$ 成立

$$H(\mathbb{C}) = \overline{\{T^n f : n = 0, 1, 2, \cdots\}}. \tag{25.3}$$

由 $H(\mathbb{C})$ 可分, 取可数稠子集 $\{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H(\mathbb{C})$ 并考虑

$$F_{j,N,k} \triangleq \bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{h \in H(\mathbb{C}) : d(T^n h, h_j) < \frac{1}{k}\right\}.$$

注意到使得(25.3)成立的 f 全体是 G_δ 集 $F = \bigcap\limits_{j,N,k=1}^{\infty} F_{j,N,k}$.

我们断言对任何 $j, N, k \in \mathbb{N}$ 都有 $F_{j,N,k}$ 是 $H(\mathbb{C})$ 中稠密集. 对任何 $w \in H(\mathbb{C}), \delta > 0$, 我们取

$$w_1, w_2 \in \text{span}\left\{f_{m,k} : m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, k \in \mathbb{N}\right\}$$

使得

$$d(w, w_2) < \frac{\delta}{2}, d(h_j, w_1) < \frac{1}{2k}.$$

再由(25.2), 可取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$d(T^{n_0} w_2, 0) < \frac{1}{2k}, d(S^{n_0} w_1, 0) < \frac{\delta}{2}.$$

现在取 $\widetilde{w} \triangleq S^{n_0} w_1 + w_2 \in H(\mathbb{C})$, 于是

$$d(\widetilde{w}, w) \leqslant d(\widetilde{w}, w_2) + d(w_2, w) = d(S^{n_0} w_1, 0) + d(w_2, w) < \delta,$$

且

$$\begin{aligned} d(T^{n_0}\widetilde{w}, h_j) &= d(T^{n_0} S^{n_0} w_1 + T^{n_0} w_2, h_j) = d(w_1 + T^{n_0} w_2, h_j) \\ &\leqslant d(w_1, h_j) + d(T^{n_0} w_2, 0) < \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

即 $F_{j,N,k}$ 是 $H(\mathbb{C})$ 中稠密集.

由 Baire 纲定理, 我们知道稠密开集的可数交也稠密, 所以因此我们证明了对每一个整函数 $f \in F$ 都满足题

目要求.

例题 25.12 复变函数 考虑上半平面

$$\mathbb{H} \triangleq \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$$

设解析函数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 和 $k > 2$ 满足

$$\int_{\mathbb{H}} y^{k-2} |f(x+iy)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty,$$

证明 $y^k f(x+iy)$ 有界.

证明 设 $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$, 记

$$B\left(z_0, \frac{y_0}{2}\right) \triangleq \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \frac{y_0}{2}\right\}.$$

平均值定理表明

$$f(z_0) = \frac{4}{\pi y_0^2} \iint_{B\left(z_0, \frac{y_0}{2}\right)} f(x+iy) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是对 $x + iy \in B\left(z_0, \frac{y_0}{2}\right)$, 我们有

$$\Im z = y \geqslant y_0 - \frac{y_0}{2} = \frac{y_0}{2}.$$

现在

$$\begin{aligned} \left|y_0^k f(z_0)\right| &= \left|\frac{4y_0^{k-2}}{\pi} \iint_{B\left(z_0, \frac{y_0}{2}\right)} f(x+iy) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{4}{\pi} 2^{k-2} \iint_{B\left(z_0, \frac{y_0}{2}\right)} y^{k-2} |f(x+iy)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{2^k}{\pi} \iint_{\mathbb{H}} y^{k-2} |f(x+iy)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty, \end{aligned}$$

即 $y^k f(x+iy)$ 有界.

例题 25.13 复变函数 设 $f : B(0,1) \to B(0,1)$ 是解析的, 证明:

$$\left|f(z) - \frac{f(0)\left(1 - |z|^2\right)}{1 - |f(0)|^2 \cdot |z|^2}\right| \leqslant \frac{|z|\left(1 - |f(0)|^2\right)}{1 - |f(0)|^2 \cdot |z|^2}, \forall z \in B(0,1). \tag{25.4}$$

证明 记

$$a \triangleq f(0), \varphi_a(w) \triangleq \frac{a - w}{1 - \bar{a}w}, w \triangleq \varphi_a(f(z)),$$

于是由分式线性变换的性质和 Schwartz 引理有 $|w| \leqslant |z|$ 以及直接计算有

$$f(z) - \frac{a\left(1 - |z|^2\right)}{1 - |a|^2 |z|^2} = \frac{\left(1 - |a|^2\right)\left(a|z|^2 - w\right)}{\left(1 - |a|^2 |z|^2\right)(1 - \bar{a}w)}.$$

当 $z \neq 0$, 我们有

$$\left|\frac{a|z|^2 - w}{1 - \bar{a}w}\right| = |z| \cdot \left|\varphi_{a|z|}\left(\frac{w}{|z|}\right)\right| \leqslant |z|,$$

所以

$$\left|f(z) - \frac{a\left(1 - |z|^2\right)}{1 - |a|^2 |z|^2}\right| \leqslant |z| \frac{1 - |a|^2}{1 - |a|^2 \cdot |z|^2}, \forall z \in B(0,1) \setminus \{0\}.$$

当 $z = 0$, 不等式(25.4)显然成立, 于是我们完成了证明.

例题 25.14 设可测集 $A, B \subset [0,1]$, 是否存在 $0 \leqslant x < y \leqslant 1, E = (x,y)$ 使得

$$m\left(E \bigcap A\right) = \frac{m(A)}{2}, m\left(E \bigcap B\right) = \frac{m(B)}{2}. \tag{25.5}$$

笔记 设 X 上 $[0,1]$ 上的全体可测集, 那么考虑

$$f:X\to\mathbb{R}^2,E\mapsto\left(m\left(E\bigcap A\right),m\left(E\bigcap B\right)\right).$$

注意到

$$f\left(\emptyset\right)=\left(0,0\right),f\left(\left[0,1\right]\right)=\left(m\left(A\right),m\left(B\right)\right).$$

由 Rudin 泛函分析 Theorem 5.5 我们知道 $f\left(X\right)$ 是紧凸集, 于是存在 $E\in X$ 使得

$$f\left(E\right)=\left(\frac{m\left(A\right)}{2},\frac{m\left(B\right)}{2}\right).$$

遗憾的是这个结果如果直接用只能找到可测集 E 使得(25.5)成立.

证明 若 A,B 都是 0 测集, 则没什么好证的, 取 $E=(0,1)$ 即可. 下面假设至少有一个集合不为 0 测集. 设

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases},g\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\notin B\end{cases}.$$

现在考虑 $S^2\to\mathbb{R}^2$ 的连续映射

$$(x,y,z)\to\left(\mathrm{sgn}x\int_0^{x^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y\int_{x^2}^{x^2+y^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z\int_{x^2+y^2}^1f\mathrm{d}t,\mathrm{sgn}x\int_0^{x^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y\int_{x^2}^{x^2+y^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z\int_{x^2+y^2}^1g\mathrm{d}t\right).$$

由引理30.13, 我们知道存在 $(x_0,y_0,z_0)\in S^2$, 使得

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}f\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}g\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t.$$

于是就有

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t=0;$$

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t=0.$$

注意到 x_0,y_0,z_0 必有两个符号相同 (0 可以视为有任意符号), 不妨设为 x_0,y_0 且 $\mathrm{sgn}x_0,\mathrm{sgn}y_0=1$, 则

$$\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t,\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t.$$

利用 $\int_0^1f\mathrm{d}t,\int_0^1g\mathrm{d}t$ 不全为 0, 我们知道 $\mathrm{sgn}z_0=-1$, 且

$$\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t=m\left(A\right)-\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t,\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t=m\left(B\right)-\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t.$$

这恰好是

$$\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t=\frac{m\left(A\right)}{2},\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t=\frac{m\left(B\right)}{2}.$$

我们取 $E=\left(0,x_0^2+y_0^2\right)$ 就完成了证明.

例题 25.15 复分析

1. 设

$$r_2>r_1>0,D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:r_1<|z|<r_2\right\}.$$

若 u 在包含 D 的区域次调和, 记

$$M\left(r\right)\triangleq\max_{|z|=r}u\left(z\right),r\in\left[r_1,r_2\right].$$

证明:

$$M(r) \leqslant \frac{M(r_1)(\ln r_2 - \ln r) + M(r_2)(\ln r - \ln r_1)}{\ln r_2 - \ln r_1}, \forall r \in (r_1, r_2). \tag{25.6}$$

2. 若 u 是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上有上界的次调和函数, 证明:u 为常数.

证明

1. 因为次调和函数一定是上半连续的, 所以 $M(r)$ 良定义. 显然

$$g(z) \triangleq \frac{M(r_1)(\ln r_2 - \ln |z|) + M(r_2)(\ln |z| - \ln r_1)}{\ln r_2 - \ln r_1}, r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$$

是调和函数且由定义得

$$u(z) \leqslant g(z), \forall |z| = r_1, r_2.$$

于是由 Rudin real and complex analysis Theorem 17.4 得

$$u(z) \leqslant g(z), \forall r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2.$$

因此我们有(25.6)成立.

2. 因为 u 有上界, 所以在(25.6)中让 $r_2 \to +\infty$ 得

$$M(r) \leqslant M(r_1), \forall r \geqslant r_1.$$

让 $r_1 \to 0^+$ 得

$$M(r) \leqslant M(r_2), \forall 0 < r \leqslant r_2,$$

这个就给出了 $M(r)$ 为常值函数. 强极值原理表明 u 为常数.

引理 25.1 (次调和函数的强极值原理)

设 $G \subset \mathbb{C}$ 为连通开集, u 为 G 上的次调和函数. 若 u 在 G 上取得最大值, 则 u 为常数. ♡

证明 设

$$M = \max_{z \in G} u(z), S = \{z \in G : u(z) = M\}.$$

若

$$z_n \in S, \lim_{n \to \infty} z_n = z_0 \in S.$$

由次调和函数上半连续, 我们有

$$M \geqslant u(z_0) \geqslant \overline{\lim_{z \to z_0}} u(z) \geqslant \lim_{n \to \infty} u(z_n) = M,$$

即 $z_0 \in S$. 因此 S 为闭集.

设 $z_0 \in S$, 我们取 $\rho > 0$ 使得

$$\{z : |z - z_0| \leqslant \rho\} \subset G.$$

于是

$$2\pi r u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} r u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta, \forall r \in [0, \rho],$$

即

$$\pi \rho^2 u(z_0) = \int_0^{\rho} 2\pi r u(z_0) \,\mathrm{d}r \leqslant \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_{|z - z_0| \leqslant \rho} u(z) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

现在我们有

$$M = u(z_0) \leqslant \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{|z - z_0| \leqslant \rho} u(z) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{|z - z_0| \leqslant \rho} M \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = M.$$

因此

$$u(z) = M, \forall |z - z_0| \leqslant \rho,$$

这就证明了 z_0 是 S 的内点, 从而 S 是开集.

由 G 连通得 $S=G$, 即 $u=M$ 恒成立.

例题 25.16 复分析 对于不经过原点的分段光滑闭曲线

$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2, s\mapsto (x(s),y(s)).$$

定义环绕数为

$$d(\gamma)\triangleq\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

1. 证明
$$d(\gamma)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z}\in\mathbb{Z}.$$
2. 对 $r\neq 0,\gamma(s)=re^{2\pi\sqrt{-1}ns}, s\in[0,1]$, 计算 $d(\gamma)$.
3. 两条光滑闭曲线 γ_0,γ_1 称为正则同伦的, 如果存在连续映射
$$H(s,t):[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$$
使得对每一个 $t\in[0,1]$ 有 $\gamma_t(s)\triangleq H(s,t)$ 是不过原点的光滑闭曲线且
$$\gamma_0(s)=H(s,0),\gamma_1(s)=H(s,1).$$
证明两条光滑闭曲线 γ_0,γ_1 正则同伦当且仅当有相同的环绕数.

证明

1. 由定义得
$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{x(s)y'(s)-y(s)x'(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s,$$
以及
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z}&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^1\frac{x'(s)+\sqrt{-1}y'(s)}{x(s)+\sqrt{-1}y(s)}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^1\frac{\left(x'(s)+\sqrt{-1}y'(s)\right)\left(x(s)-\sqrt{-1}y(s)\right)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^1\frac{x'(s)x(s)+y(s)y'(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{x(s)y'(s)-x'(s)y(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_0^1\frac{1}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}\left[x^2(s)+y^2(s)\right]+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{x(s)y'(s)-x'(s)y(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{x(s)y'(s)-x'(s)y(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$
这里最后一个等号来自 γ 是闭曲线, 从而
$$x^2(0)+y^2(0)=x^2(1)+y^2(1).$$
因此我们证明了 $d(\gamma)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z}$. 设
$$f(x)\triangleq e^{\int_0^x\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\mathrm{d}t}, x\in[0,1],$$
我们有
$$\left(\frac{f(x)}{\gamma(x)}\right)'=\frac{f'(x)\gamma(x)-\gamma'(x)f(x)}{\gamma^2(x)}=\frac{\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)}f(x)\gamma(x)-\gamma'(x)f(x)}{\gamma^2(x)}=0.$$
现在
$$\frac{f(1)}{\gamma(1)}=\frac{f(0)}{\gamma(0)},\gamma(1)=\gamma(0)\Rightarrow e^{\int_0^1\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\mathrm{d}t}=1=f(1)=f(0)=1,$$
即
$$d(\gamma)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\gamma\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^1\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\mathrm{d}t\in\mathbb{Z}.$$

2. 我们有

$$d(\gamma)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z}=n\int_{0}^{1}\frac{re^{2\pi\sqrt{-1}ns}\mathrm{d}s}{re^{2\pi\sqrt{-1}ns}}=n.$$

3. 必要性:

我们首先给出分段光滑闭曲线 γ_0,γ_1 有相同的环绕数的充分条件, 即 Rudin 实分析与复分析的 Lemma 10.39.

引理 25.2

若

$$|\gamma_1(s)-\gamma_0(s)|<|\gamma_0(s)|,\forall s\in[0,1],$$

则 $d(\gamma_0)=d(\gamma_1)$.

证明 由条件不等式得 $0\notin\gamma_0,\gamma_1$, 因此 $\gamma\triangleq\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ 满足

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}-\frac{\gamma_0'}{\gamma_0}.$$

现在

$$\begin{aligned}d(\gamma)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{\gamma}\frac{1}{z}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{\gamma_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{\gamma_0}\frac{1}{z}\mathrm{d}z\\&=d(\gamma_1)-d(\gamma_0).\end{aligned}$$

由条件不等式得

$$|\gamma-1|=\left|\frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma_0}\right|<1,$$

从而由 Cauchy 积分公式得 $d(\gamma)=0$, 这就证明了 $d(\gamma_0)=d(\gamma_1)$.

回到原题, 设光滑闭曲线 γ_0,γ_1 正则同伦, 于是满足条件的 H 存在. 因为 $H([0,1]\times[0,1])$ 紧且 $H\neq0$, 我们有 $\epsilon>0$ 使得

$$|H(s,t)|>2\epsilon,\forall s,t\in[0,1].$$

由 H 一致连续, 存在正整数 n 使得

$$|s-s'|+|t-t'|\leqslant\frac{1}{n}$$

时

$$|H(s,t)-H(s',t')|<\epsilon.$$

对 $k=0,1,2,\cdots,n$, 定义分段光滑闭曲线

$$\Gamma_k(s)\triangleq H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)(ns+1-i)+H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)(i-ns),s\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right],i=1,2,\cdots,n.$$

对 $k=0,1,2,\cdots,n,s\in[0,1]$, 设 $s\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right],i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\left|\Gamma_k(s)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\left|H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right|(ns+1-i)+\left|H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right|(i-ns)<\epsilon.$$

特别的, 考虑 $k=0,n$ 得

$$|\Gamma_0(s)-\gamma_0(s)|<\epsilon,|\Gamma_n(s)-\gamma_1(s)|<\epsilon.$$

我们还有

$$|\Gamma_k(s)|\geqslant\left|H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right|-\left|\Gamma_k(s)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right|>\epsilon,$$

以及对 $k=1,2,\cdots,n$, 我们还有

$$\left|\Gamma_{k-1}(s)-\Gamma_k(s)\right| \leqslant \left|H\left(\frac{i}{n},\frac{k-1}{n}\right)-H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)\right|(ns+1-i)+\left|H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k-1}{n}\right)-H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)\right|(i-ns)<\epsilon.$$

现在对

$$\gamma_0,\Gamma_0,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n,\gamma_1$$

反复用引理就得到 $d(\gamma_0)=d(\gamma_1)$.

充分性:

显然正则同伦是一个等价关系, 于是我们不妨设

$$\gamma_0(s)=Ae^{2\pi\sqrt{-1}ns}, s\in[0,1].$$

设 $\gamma_1(s)=(x(s),y(s))$, 考虑

$$r(x)\triangleq\sqrt{x^2(s)+y^2(s)}, \theta(x)\triangleq\int_0^x\frac{x(s)y'(s)-x'(s)y(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s.$$

我们有 $r,\theta\in C^1[0,1]$ 且可自行计算

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)+\sqrt{-1}y(t)}{e^{\sqrt{-1}\int_0^t\frac{x(s)y'(s)-x'(s)y(s)}{x^2(s)+y^2(s)}\mathrm{d}s}\cdot\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\right)=0.$$

因此存在 $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 使得

$$\gamma_1(s)=cr(s)e^{\sqrt{-1}\theta(s)}, s\in[0,1].$$

考虑连续映射

$$H(s,t)=[tcr(s)+A(1-t)]e^{\sqrt{-1}[t\theta(s)+2\pi ns(1-t)]}, s,t\in[0,1].$$

于是

$$\gamma_0(s)=H(s,0),\gamma_1(s)=H(s,1).$$

取 $A\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 使得

$$A\notin\left\{\frac{tcr(s)}{t-1}:t\in[0,1),s\in[0,1]\right\}.$$

现在 $H(s,t)\neq0$. 由 1 问和 γ_1 的卷绕数为 n 我们知道

$$r(1)=r(0),\theta(0)=0,\theta(1)=2\pi n,$$

, 因此对每一个 $t\in[0,1]$ 都有 $H(\cdot,t)$ 是连续可微的且

$$\begin{aligned}H(1,t)&=[tcr(1)+A(1-t)]e^{\sqrt{-1}[t\theta(1)+2\pi n(1-t)]}\\&=[tcr(0)+A(1-t)]e^{\sqrt{-1}[t2\pi n+2\pi n(1-t)]}\\&=tcr(0)+A(1-t)=H(0,t).\end{aligned}$$

因此我们证明了 γ_0,γ_1 正则同伦.

例题 25.17 调和分析 Q 表示 $\mathbb{R}^n$ 的方体. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是局部可积函数, 定义

$$||f||_{\mathrm{BMO}}\triangleq\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-\mathrm{Avg}_Qf|\,\mathrm{d}x\right),\mathrm{Avg}_Qf\triangleq\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们设 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 是 $||f||_{\mathrm{BMO}}<\infty$ 的函数全体. 证明:

1. $||\cdot||_{\mathrm{BMO}}$ 是半范数但不是范数.
2. $$L^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n),||f||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\leqslant2||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$
3. 如果存在 $A>0$ 使得对所有方体 Q, 存在 $c_Q\in\mathbb{C}$ 使得

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-c_Q|\,\mathrm{d}x\right)\leqslant A,$$

那么

$$f \in \mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right), ||f||_{\mathrm{BMO}} \leqslant 2A.$$

4. $L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是 $\mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 真子空间.

证明

1. 注意到 $||1||_{\mathrm{BMO}}=0$, 我们知道 $||\cdot||_{\mathrm{BMO}}$ 不是范数. 显然

$$||\lambda f||_{\mathrm{BMO}}=|\lambda| \cdot ||f||_{\mathrm{BMO}}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

对 $f, g \in \mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right), Q$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)+g(x)-\mathrm{Avg}_Q(f+g)| \,\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)-\mathrm{Avg}_Q f+g(x)-\mathrm{Avg}_Q g| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)-\mathrm{Avg}_Q f| \,\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|} \int_Q |g(x)-\mathrm{Avg}_Q g| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant ||f||_{\mathrm{BMO}}+||g||_{\mathrm{BMO}},
\end{aligned}$$

两边取上确界得

$$||f+g||_{\mathrm{BMO}} \leqslant ||f||_{\mathrm{BMO}}+||g||_{\mathrm{BMO}}.$$

因此我们证明了 $||\cdot||_{\mathrm{BMO}}$ 是半范数.

2. 对 $f \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 我们有

$$\begin{aligned}
||f||_{\mathrm{BMO}} &= \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)-\mathrm{Avg}_Q f| \,\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| \,\mathrm{d}x\right)+\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\mathrm{Avg}_Q f| \,\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant ||f||_{L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)}+\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q ||f||_{L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)} \,\mathrm{d}x\right)=2||f||_{L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)},
\end{aligned}$$

这就证明了所求.

3. 对条件中的 f, 注意到

$$|f-\mathrm{Avg}_Q f| \leqslant |f-c_Q|+|\mathrm{Avg}_Q f-c_Q| \leqslant |f-c_Q|+\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)-c_Q| \,\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)-\mathrm{Avg}_Q f| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{|Q|} \int_Q |f(x)-c_Q| \,\mathrm{d}x \leqslant 2A.$$

两边取上确界得

$$f \in \mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right), ||f||_{\mathrm{BMO}} \leqslant 2A.$$

4. 可以看到本题前三问的结果把方体改为一般的 $\mathbb{R}^n$ 的球 B 也对.

取 $f(x)=\ln|x| \notin L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$. 为了更方便的计算, 我们设 B_Q 为包含 Q 的最小的 $\mathbb{R}^n$ 的球, 然后我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|} \int_Q \left|f(x)-\mathrm{Avg}_{B_Q} f\right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{|B_Q|}{|Q|} \frac{1}{|B_Q|} \int_{B_Q} \left|f(x)-\mathrm{Avg}_{B_Q} f\right| \mathrm{d}x \\
&=\frac{a(n) \sqrt{n^n}}{2^n} \cdot \frac{1}{|B_Q|} \int_{B_Q} \left|f(x)-\mathrm{Avg}_{B_Q} f\right| \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

这里 $a(n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 单位球体积. 于是我们只需对任何 B, 找一个 $c_B \in \mathbb{C}$ 使得

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\ln|x|-c_B| \,\mathrm{d}x\right)<\infty.$$

Case 1 当 B 的半径为 1, 球心 x_0 满足 $|x_0| \leqslant 2$, 我们取 $c_B = 0$, 从而

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - c_B|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{a(n)}\int_{|x|\leqslant 3} |\ln|x||\,\mathrm{d}x.$$

Case 2 当 B 的半径为 1, 球心 x_0 满足 $|x_0| > 2$, 我们取 $c_B = \ln|x_0|$, 从而

$$\ln|x| - c_B = \ln\frac{|x|}{|x_0|} \leqslant \ln\frac{|x_0|+1}{|x_0|} \leqslant \ln\frac{3}{2};$$

$$c_B - \ln|x| = \ln\frac{|x_0|}{|x|} \leqslant \ln\frac{|x_0|}{|x_0|-1} \leqslant \ln 2,$$

于是我们有

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - c_B|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{|B|}\int_B \ln 2\mathrm{d}x = \ln 2.$$

Case 3 当 B 的半径为 R, 球心为 x_0, 我们换元得

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\ln|x| - c_B|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a(n)}\int_{|x-R^{-1}x_0|\leqslant 1} |\ln|x| + \ln R - c_B|\,\mathrm{d}x,$$

即可以选择 c_B 使得回到 **Case 1** 和 **Case 2** 的情况, 因此我们证明了

$$\ln|x| \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n),$$

即 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 真子空间.

例题 25.18 实变函数 设 f_n, f 都是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的几乎处处有限的可测函数且满足

$$f_n \to f, a.e, \sup_{n\geqslant 1}\int_E |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

若

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 回忆泛函分析结果[1]: 设 H 是一个 Hilbert 空间, 则在 H 中

$$x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x, ||x_n|| \to ||x||.$$

本题即取 $H \triangleq L^2(E)$.

首先法图引理表明

$$\int_E |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_E \varliminf_{n\to\infty} |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\int_E |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

然后 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\int_E |f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$ 表明 f_n 在 $L^2(E)$ 弱列紧, 因此结合弱收敛极限和几乎处处收敛极限函数相等可得 $f_{n_k} \rightharpoonup f$. 于是由泛函分析得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_{n_k}(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

现在数列 $\int_E |f_n(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ 的任意子列都有子列极限趋于 0, 因此这个数列只能收敛于 0, 我们得证.

例题 25.19 实变函数 设 $q \geqslant 1, f \in C^q[a,b]$ 满足

$$\left|f^{(q)}(t)\right| \geqslant \beta > 0, \forall t \in [a,b].$$

证明:

$$m\{t \in [a,b] : |f(t)| \leqslant \epsilon\} \leqslant 4\left(q!\frac{\epsilon}{2\beta}\right)^{\frac{1}{q}}, \forall \epsilon > 0,$$

[1] 你可以在张恭庆泛函分析上册习题 2.5.20 找到

这里 m 表示集合的勒贝格测度.

证明

引理 25.3

设 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$ 且 $f\in C[x_0,x_n]\bigcap D^n(x_0,x_n)$. 证明: 存在 $\zeta\in(x_0,x_n)$ 使得

$$f^{(n)}(\zeta)=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j-x_k)}f(x_j).$$

♡

证明 设 $p(x_j)=f(x_j),j=0,1,2,\cdots,n$ 是插值多项式, 即

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\prod\limits_{k\neq j}(x-x_k)}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j-x_k)}f(x_j).$$

对 $g(x)\triangleq f(x)-p(x)$, 因为 g 有 $n+1$ 个不同零点, 所以反复用罗尔中值定理可得

$$g^{(n)}(\zeta)=f^{(n)}(\zeta)-p^{(n)}(\zeta)=0.$$

而

$$p^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j-x_k)}f(x_j),$$

这就证明了

$$f^{(n)}(\zeta)=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j-x_k)}f(x_j).$$

回到原题, 回忆引理23.20, 我们知道

$$\cos(m\theta)=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant m}(-1)^k C_m^{2k}\left(1-\cos^2\theta\right)^k\cos^{m-2k}\theta,m\in\mathbb{N}_0.$$

于是可记

$$T_m(x)\triangleq\sum_{0\leqslant 2k\leqslant m}(-1)^k C_m^{2k}\left(1-x^2\right)^k x^{m-2k},m\in\mathbb{N}_0.$$

注意到

$$T_m^{(m)}(x)=m!\cdot\sum_{0\leqslant 2k\leqslant m}C_m^{2k}=m!2^{m-1},$$

以及

$$(-1)^j=\cos\left(m\cdot\frac{j\pi}{m}\right)=T_m\left(\cos\frac{j\pi}{m}\right),j=0,1,2,\cdots,m.$$

对 T_m 在 $\cos\frac{j\pi}{m},j=0,1,2,\cdots,m$ 用引理25.3得

$$m!2^{m-1}=\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j m!}{\prod\limits_{k\neq j}\left(\cos\frac{j\pi}{m}-\cos\frac{k\pi}{m}\right)}=\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{\prod\limits_{k\neq j}\left|\cos\frac{j\pi}{m}-\cos\frac{k\pi}{m}\right|}.$$

对固定的 $\epsilon>0$, 记

$$E\triangleq\{t\in[a,b]:|f(t)|\leqslant\epsilon\}.$$

不妨设 $mE>0$. 由勒贝格测度内正则性, 对任何 $\delta>0$, 存在紧集 $E_\delta\subset E$ 使得

$$m(E\setminus E_\delta)<\delta.$$

考虑递增连续函数

$$T_\delta:\mathbb{R}\to[0,mE_\delta],t\mapsto m\left(E_\delta\bigcap(-\infty,t]\right).$$

我们运用数学类函数性态分析习题148.有

$$|T_\delta(x)-T_\delta(y)|\leqslant|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R},T_\delta(E_\delta)=[0,mE_\delta$$

取 $x_j\in E_\delta$ 使得

$$T_\delta(x_j)=\frac{m(E_\delta)}{2}\left[\cos\frac{(q-j)\pi}{q}+1\right],j=0,1,2,\cdots,q.$$

现在

$$\begin{aligned}\beta&\leqslant\left|f^{(q)}(\zeta)\right|\leqslant\sum_{j=0}^{q}\frac{q!}{\prod\limits_{k\neq j}|x_k-x_j|}|f(x_j)|\leqslant\sum_{j=0}^{q}\frac{q!\epsilon}{\prod\limits_{k\neq j}|x_k-x_j|}\\&\leqslant\sum_{j=0}^{q}\frac{q!\epsilon}{\prod\limits_{k\neq j}|T_\delta(x_k)-T_\delta(x_j)|}=\frac{2^q}{m^q(E_\delta)}\sum_{j=0}^{q}\frac{q!\epsilon}{\prod\limits_{k\neq j}\left|\cos\frac{(q-k)\pi}{q}-\cos\frac{(q-j)\pi}{q}\right|}\\&=\frac{2^qq!2^{q-1}}{m^q(E_\delta)},\end{aligned}$$

即

$$m(E_\delta)\leqslant4\left(q!\frac{\epsilon}{2\beta}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由 δ 任意性可知

$$m\{t\in[a,b]:|f(t)|\leqslant\epsilon\}\leqslant4\left(q!\frac{\epsilon}{2\beta}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

例题 25.20 概率论 设 ξ,η 为相互独立的随机变量且 $\xi+\eta,\xi-\eta$ 相互独立. 证明:ξ,η 服从正态分布.

证明 考虑特征函数

$$f(t)\triangleq\mathbb{E}\left(e^{it\xi}\right),g(t)\triangleq\mathbb{E}\left(e^{it\eta}\right),$$

它们是满足

$$f(0)=g(0)=1,\overline{f(t)}=f(-t),\overline{g(t)}=g(-t)$$

的 $\mathbb{R}$ 上复值连续函数. ξ,η 相互独立给出

$$f(t)g(t)=\mathbb{E}\left(e^{it(\xi+\eta)}\right),f(t)g(-t)\triangleq\mathbb{E}\left(e^{it(\xi-\eta)}\right).$$

$\xi+\eta,\xi-\eta$ 相互独立给出

$$\begin{aligned}f(t)g(t)f(s)g(-s)&=\mathbb{E}\left(e^{it(\xi+\eta)}\right)\mathbb{E}\left(e^{is(\xi-\eta)}\right)\\&=\mathbb{E}\left(e^{i(t+s)\xi+i(t-s)\eta}\right)=f(t+s)g(t-s).\end{aligned}$$

若 $f(t_0)=0$, 则

$$f^2\left(\frac{t_0}{2}\right)g\left(\frac{t_0}{2}\right)g\left(-\frac{t_0}{2}\right)=0,$$

于是

$$f\left(\frac{t_0}{2}\right),g\left(\frac{t_0}{2}\right),g\left(-\frac{t_0}{2}\right)$$

必有一个为 0. 继续重复这个过程可得趋于 0 的序列使得 f 或者 g 取 0, 这就和 $f(0)=g(0)=1$ 矛盾!. 因此 f,g 恒不为 0.

考虑覆盖映射 $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\},z\mapsto e^z$, 我们可以由映射提升定理 (例如尤乘页点集拓扑定理 5.3) 得 $F,G\in C(\mathbb{R})$ 使得

$$f=e^F,g=e^G,F(0)=G(0)=1.$$

容易由 $\overline{f(t)}=f(-t),\overline{g(t)}=g(-t)$ 看到 F,G 实部是偶函数, 虚部是奇函数.

我们可以把方程写为

$$e^{G(s-t)+F(s+t)}=e^{F(s)+G(s)+F(t)+G(-t)}.$$

结合连续性我们有

$$\begin{aligned}
&G(s-t)+F(s+t)=F(s)+G(s)+F(t)+G(-t)\\
\Rightarrow\ &F(s+t)-F(s)-F(t)=G(s)+G(-t)-G(s-t)\\
\Rightarrow\ &F(t+s)-F(t)-F(s)=G(t)+G(-s)-G(t-s)\\
\Rightarrow\ &G(s)+G(-t)-G(s-t)=G(t)+G(-s)-G(t-s)\\
\Rightarrow\ &G(s)-G(-s)+G(-t)-G(t)=G(s-t)-G(t-s).
\end{aligned}$$

于是 G 的奇部 (同时也是 G 的虚部) 满足 Cauchy 方程. 由 Cauchy 方程的解12.8得 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Im}G(s)=ias,\forall s\in\mathbb{R}.$$

现在观察方程

$$G(s-t)+F(s+t)=F(s)+G(s)+F(t)+G(-t)$$

的虚部可以给出 $\mathrm{Im}F$ 也满足 Cauchy 方程, 于是同理可得 $b\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Im}F(s)=ibs,\forall s\in\mathbb{R}.$$

继续观察上述方程的实部, 并考虑 $t=s,t=-s$ 得

$$\mathrm{Re}G(2s)=\mathrm{Re}F(2s),\forall s\in\mathbb{R},$$

即设

$$U\triangleq\mathrm{Re}G=\mathrm{Re}F.$$

现在

$$U(s+t)+U(s-t)=2(U(s)+U(t)).$$

假设对

$$U(kt)=k^2U(t),k=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$\begin{aligned}
U((n+1)s)&=2(U(s)+U(ns))\\
&=\left(2(n^2+1)-(n-1)^2\right)U(s)\\
&=(n+1)^2U(s).
\end{aligned}$$

于是数学归纳法得

$$U(ns)=n^2U(s),\forall n\in\mathbb{N},s\in\mathbb{R}.$$

由 U 偶函数得

$$U(ns)=n^2U(s),\forall n\in\mathbb{Z},s\in\mathbb{R}.$$

对 $p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}$, 我们有

$$q^2U\left(\frac{p}{q}s\right)=U(ps)=p^2U(s),$$

即

$$U(rs)=r^2U(s),\forall r\in\mathbb{Q},s\in\mathbb{R}.$$

有理数在无理数稠密可得

$$U(rs)=r^2U(s),\forall r\in\mathbb{R},s\in\mathbb{R},$$

即

$$U(r)=U(1)r^2,\forall r\in\mathbb{R}.$$

于是我们可以写

$$f(t)=e^{ct^2+ibt},g(t)=e^{ct^2+iat},$$

这就给出了 $c\leqslant 0$ 且

$$\xi\sim N(b,-2c),\eta\sim N(a,-2c).$$

例题 25.21pde 考虑区间 $[0,1]$ 上的热方程

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)-\partial_{xx}u(t,x)=0, & \forall t>0,x\in(0,1)\\ u(t,0)=u(t,1), & \forall t>0\\ \partial_x u(t,0)=\partial_x u(t,1), & \forall t>0\end{cases}. \tag{25.7}$$

1. 给一个 $L^2[0,1]$ 正交基, 你无需给出证明. 设
$$\mathcal{F}=\left\{f\in H^2([0,1]):f(0)=f(1),f'(0)=f'(1)\right\}\subset L^2[0,1],$$
证明:$f\mapsto f''$ 是自伴算子.
2. 求一个函数 $h:(0,\infty)\times[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得对每一个 $y\in[0,1]$ 都有 $(t,x)\mapsto h(t,x,y)$ 是方程(25.7)的解且对每一个 $x\in[0,1]$ 和 $\mathbb{R}$ 上连续周期 1 函数 φ 都有
$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 h(t,x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\varphi(x).$$
3. 对固定 $t>0$, 求
$$\max_{(x,y)\in[0,1]^2}h(t,x,y)$$
并证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t,x,y)=1$ 关于 $(x,y)\in[0,1]^2$ 一致收敛. 最后, 记
$$d(x,y)\triangleq\min\{|x-y|,1-|x-y|\},$$
证明存在 $A,B,C,D>0$ 使得对
$$\frac{A}{\sqrt{t}}e^{-\frac{Bd^2(x,y)}{t}}\leqslant h(t,x,y)\leqslant\frac{C}{\sqrt{t}}e^{-\frac{Dd^2(x,y)}{t}},\forall t\in(0,1],x,y\in[0,1].$$

证明

1. 熟知 $\{\sin(2k\pi x),\cos(2k\pi x):k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $L^2[0,1]$ 的完备正交基, $H^2([0,1])$ 中的函数都是等价类, 如果你不疑惑为什么 $f(0),f(1),f'(0),f'(1)$ 有意义, 那么你并没有真正掌握此题. 实际上 $\mathcal{F}$ 中的函数准确含义应该理解为 $H^2(0,1)$ 函数在迹意义下相等的那些等价类. 当然经典的 Sobolev 嵌入定理告诉我们 $H^2(0,1)$ 到 $C^1[0,1]$ 是紧嵌入. 显然 $f\mapsto f''$ 是稠定闭算子且对 $f,g\in\mathcal{F}$, 我们分部积分有
$$\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x,$$
这就证明了 $f\mapsto f''$ 是 $\mathcal{F}$ 上的对称算子. 为了证明其自伴, 设 $g,h\in L^2[0,1]$ 使得
$$\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x,\forall f\in\mathcal{F}.$$
因为 $C_c^\infty(0,1)\subset\mathcal{F}$, 所以有弱导数 $g''=h\in L^2[0,1]$. 类似引理13.8, 我们可用卷积磨光的方法证明 $g\in H^2([0,1])$. 现在对 $f=1,\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}$ 和
$$\int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f'(1)g(1)-f'(0)g(0)-f(1)g'(1)+f(0)g'(0)+\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x$$
给出
$$g(0)=g(1),g'(0)=g'(1)\Rightarrow g\in\mathcal{F},$$

因此我们证明了 $f \mapsto f''$ 的伴随算子定义域也为 $\mathcal{F}$, 因此其是自伴算子.

2. 我们将证明

$$h(t,x,y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}$$

为所求. 首先显然有

$$h \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

且 h 关于分量 x,y 周期 1. 直接计算 (求导和求和可以交换) 看到 h 关于 t,x 满足方程(25.7). 对每一个 $x\in[0,1]$ 和 $\mathbb{R}$ 上连续周期 1 函数 φ, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}\right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-(y-m))^2}{4t}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-m}^{1-m} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y+m)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

现在对任何 $\delta>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |\varphi(y)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}y\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{|y-x|\geqslant\delta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |\varphi(y)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{|y-x|<\delta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |\varphi(y)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant 2\sup_{\mathbb{R}}|\varphi| \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{|y-x|\geqslant\delta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y \\
&\quad + \sup_{|y-x|<\delta} \frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y \\
&\leqslant 2\sup_{\mathbb{R}}|\varphi| \cdot \frac{e^{-\frac{\delta^2}{8t}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{8t}}\mathrm{d}y \\
&\quad + \sup_{|y-x|<\delta} |\varphi(y)-\varphi(x)| \\
&= 2\sqrt{2}\sup_{\mathbb{R}}|\varphi| \cdot \frac{e^{-\frac{\delta^2}{8t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \sup_{|y-x|<\delta} |\varphi(y)-\varphi(x)|.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \varlimsup_{t\to0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |\varphi(y)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}y\right) \\
&\leqslant \sup_{|y-x|<\delta} |\varphi(y)-\varphi(x)|,
\end{aligned}$$

即由 δ 任意性就有

$$\lim_{t\to0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |\varphi(y)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}y\right) = 0.$$

于是就有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right)\\&=\varphi(x)\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y\right)\\&=\varphi(x)\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\varphi(x).\end{aligned}$$

3. 首先对 $f(u)\triangleq\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{u^2}{4t}}$, 由 Poisson 求和公式, 即定理18.1得

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi in(x-y)}.$$

现在对 $t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi in(x-y)}&=\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi in(x-y)}\right|\\&\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}\left|e^{2\pi in(x-y)}\right|=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}\end{aligned}$$

且当 $x=y\in[0,1]$ 时等号成立, 因此

$$\max_{(x,y)\in[0,1]^2}h(t,x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}.$$

控制收敛定理, 即18.16容易给出

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\max_{(x,y)\in[0,1]^2}h(t,x,y)-1\right|=\lim_{t\to+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}e^{-4\pi^2n^2t}=0,$$

因此我们有 $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t,x,y)=1$ 关于 $(x,y)\in[0,1]^2$ 一致收敛.

当 $|x-y|\leqslant\frac{1}{2}$, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}.$$

当 $x-y>\frac{1}{2}$, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y-1)^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}.$$

当 $x-y<-\frac{1}{2}$, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y+1)^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}.$$

于是 $A=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},B=\frac{1}{4}$ 为所求.

为了证明上界, 我们可以不妨设 $x-y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 其余情况就如同下界证明一样是类似的 (也可以分析对称性直接得到). 现在就有

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-y+m)^2}{4t}}&=e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{(m+d(x,y))^2}{4t}}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{(m-d(x,y))^2}{4t}}\\&=e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{m^2+2md(x,y)}{4t}}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{m^2-2md(x,y)}{4t}}\right]\\&\leqslant e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{m^2}{4t}}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{m^2-m}{4t}}\right]\\&\leqslant e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{m^2}{4}}+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{m^2-m}{4}}\right].\end{aligned}$$

取

$$C \triangleq \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{4}}+\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2-m}{4}}\right), D \triangleq \frac{1}{4},$$

此时我们就有

$$\frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{Bd^2(x,y)}{t}} \leqslant h(t,x,y) \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{Dd^2(x,y)}{t}}, \forall t \in (0,1], x, y \in [0,1].$$

例题 25.22 实变函数, Sobolev 空间 设

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}), f_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

若

$$\lim_{h \to 0} ||f_h(x) - g(x)||_{L^2(\mathbb{R})} = 0, \tag{25.8}$$

证明: 存在常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + c, a.e.\ x \in \mathbb{R}.$$

证明 换元得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{-h}(x)\,\mathrm{d}x, \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{25.9}$$

由(25.8)得

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{25.10}$$

假设 $\mathrm{supp}\phi \subset [-n,n], n \in \mathbb{N}$, 当 $|h|<1$ 得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|\phi_{-h}(x) - \phi'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-n-1}^{n+1} |f(x)| \cdot \left|\phi'(x) - \frac{\phi(x)-\phi(x-h)}{h}\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-n-1}^{n+1} |f(x)| \cdot |\phi'(x) - \phi'(\theta_{x,h})|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\sup_{\mathbb{R}} |\phi'| \cdot \int_{-n-1}^{n+1} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,
\end{aligned}$$

这里 $\theta_{x,h}$ 介于 x 和 $x-h$ 之间且由拉格朗日中值定理得到. 于是由控制收敛定理得

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \lim_{h \to 0} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\phi_{-h}(x) - \phi'(x)]\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{h \to 0} \int_{-n-1}^{n+1} |f(x)| \cdot |\phi'(x) - \phi'(\theta_{x,h})|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-n-1}^{n+1} |f(x)| \cdot \lim_{h \to 0} |\phi'(x) - \phi'(\theta_{x,h})|\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{-h}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x, \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{25.11}$$

结合(25.9),(25.10),(25.11)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x, \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{25.12}$$

记 $h(x) = f(x) - \int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$, 由(25.12)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}).$$

这意味着广义导数下 $h'=0$, 因此存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $h(x) = c, a.e.\ x$. 对于不熟悉分布理论的读者, 我们可以不借助广义导数转而考虑卷积磨光核13.14得

$$h_\delta'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \delta > 0, h_\delta \overset{\text{内闭}L^2}{\to} h,$$

来说明存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $h(x) = c, a.e.\ x$, 这就完成了证明.

例题 25.23 设 $S = \left\{e^{2\pi i n x}\right\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2[a,b]$, 证明:

1. 若 $|b-a| \leqslant 1$, 则 $S^{\perp} = \{0\}$;

2. 若 $|b-a|>1$, 则 $S^{\perp}\neq\{0\}$.

证明 设 $f\in L^2[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,e^{2\pi inx}\mathrm{d}x=0,\forall n\in\mathbb{Z}. \tag{25.13}$$

1. 若 $|b-a|=1$, 因为三角函数系是完备的, 所以满足(25.13)的 f 只能是 0.

   当 $|b-a|<1$, 我们考虑

$$\widetilde{f}(x)\triangleq\begin{cases}f(x), & x\in[a,b]\\ 0, & x\in(b,a+1]\end{cases},$$

   则 $\widetilde{f}$ 满足 $|b-a|=1$ 的情况, 因此 $\widetilde{f}$ 只能是 0, 从而 f 也是. 故 $S^{\perp}=\{0\}$;

2. 若 $|b-a|>1$, 考虑[2]

$$v(x)\triangleq\begin{cases}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\int_a^{b-1}u(x)\,e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x\right)e^{2\pi inx}, & x\in(b-1,b]\\ u(x), & x\in[a,b-1]\end{cases},$$

   注意到对任何 $m\in\mathbb{Z}$ 成立

$$\begin{aligned}\int_a^b v(x)\,e^{2\pi imx}\mathrm{d}x&=\int_a^{b-1}u(x)\,e^{2\pi imx}\mathrm{d}x+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\int_a^{b-1}u(x)\,e^{-2\pi inx}\mathrm{d}x\right)\int_{b-1}^b e^{2\pi i(m-n)x}\mathrm{d}x\\&=\int_a^{b-1}u(x)\,e^{2\pi imx}\mathrm{d}x+\left(-\int_a^{b-1}u(x)\,e^{-2\pi imx}\mathrm{d}x\right)\int_{b-1}^b 1\mathrm{d}x\\&=0,\end{aligned}$$

   因此 f 满足(25.13)但是 $f\neq0$, 故 $S^{\perp}\neq\{0\}$.

例题 25.24 概率论 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_6$ 是服从标准正态分布的独立随机变量. 求

$$U^2=\frac{\left(Z_1Z_2+Z_3Z_4+Z_5Z_6\right)^2}{Z_2^2+Z_4^2+Z_6^2},V^2=\frac{U^2\left(Z_2^2+Z_4^2\right)}{U^2+Z_6^2}$$

的分布函数.

证明 注意 U^2 的分布函数为

$$F(t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{(x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6)^2\leqslant t\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2}{2}}\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

当 $t\leqslant0$, 显然 $F(t)=0$.

当 $t>0$, 设

$$\mathrm{d}S_1=\mathrm{d}S_1(x_1,x_3,x_5),\mathrm{d}S_2=\mathrm{d}S_2(x_2,x_4,x_6),$$

[2]满足条件的 u 有很多, 例如

$$v(x)\triangleq\begin{cases}a+1-b-\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{-2\pi inb}-e^{-2\pi in(a-1)}}{2\pi in}e^{2\pi inx}, & x\in(b-1,b]\\ 1, & x\in[a,b-1]\end{cases}.$$

现在

$$F(t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{(x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6)^2\leqslant t\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2}{2}}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{x_2^2+x_4^2+x_6^2}\cdot x_1\\ x_3=\sqrt{x_2^2+x_4^2+x_6^2}\cdot x_3\\ x_5=\sqrt{x_2^2+x_4^2+x_6^2}\cdot x_5 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\int_{|x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6|\leqslant\sqrt{t}}\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\left(x_1^2+x_3^2+x_5^2+1\right)\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$\overset{\text{余面积公式}}{=}\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}r\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{|x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6|=r}\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)e^{-\frac{\left(x_1^2+x_3^2+x_5^2+1\right)\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}S_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6$$

$$\overset{\text{Poisson公式}}{=}\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}r\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\sqrt{x_2^2+x_4^2+x_6^2}\cdot|x_1|=r}\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)e^{-\frac{\left(x_1^2+x_3^2+x_5^2+1\right)\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}S_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}r\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)e^{-\frac{\left(\frac{r^2}{x_2^2+x_4^2+x_6^2}+x_3^2+x_5^2+1\right)\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_5\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6$$

$$\overset{\text{球坐标计算}}{=}\frac{4\pi}{8\pi^3}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}r\int_0^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\rho^4e^{-\frac{r^2+\left(x_3^2+x_5^2+1\right)\rho^2}{2}}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_5\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\infty}\rho^4e^{-\frac{\rho^2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{\left(x_3^2+x_5^2\right)\rho^2}{2}}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_5\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\infty}\rho^2e^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{t}{2}}}^{\sqrt{\frac{t}{2}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{t}{2}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

下证 U^2,Z_2,Z_4,Z_6 独立, 当 $t>0$, 我们有

$$\frac{1}{8\pi^3}\int_{(x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6)^2\leqslant t\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right),x_2,x_4,x_6\leqslant t}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2}{2}}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}r\int_{x_2,x_4,x_6\leqslant t}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)e^{-\frac{\left(\frac{r^2}{x_2^2+x_4^2+x_6^2}+x_3^2+x_5^2+1\right)\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_5\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\int_{x_2,x_4,x_6\leqslant t}\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)e^{-\frac{x_2^2+x_4^2+x_6^2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{\left(x_3^2+x_5^2\right)\left(x_2^2+x_4^2+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_5\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\int_{x_2,x_4,x_6\leqslant t}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2+x_6^2}{2}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x_2^2}{2}}\mathrm{d}x_2\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x_4^2}{2}}\mathrm{d}x_4\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x_6^2}{2}}\mathrm{d}x_6\right),$$

即 U^2,Z_2,Z_4,Z_6 独立.

注意 V^2 的分布函数为 $G(t)$. 当 $t\leqslant 0$, 显然 $G(t)=0$. 当 $t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
G(t)&=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\int_0^{\infty}\int_{\frac{x\left(x_2^2+x_4^2\right)}{x+x_6^2}\leqslant t}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2+x_6^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{x^2\left(x_2^2+x_4^2\right)\leqslant t\left(x^2+x_6^2\right)}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2+x_6^2+x^2}{2}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6\mathrm{d}x\\
&\overset{x_6=x\cdot x_6}{=}\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{x_2^2+x_4^2\leqslant t\left(1+x_6^2\right)}xe^{-\frac{x_2^2+x_4^2+x^2\left(1+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi^2}\int_{x_2^2+x_4^2\leqslant t\left(1+x_6^2\right)}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2}{2}}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2\left(1+x_6^2\right)}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6\\
&=\frac{1}{2\pi^2}\int_{x_2^2+x_4^2\leqslant t\left(1+x_6^2\right)}\frac{1}{1+x_6^2}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2}{2}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6\\
&\overset{\begin{cases}x_2=\sqrt{1+x_6^2}\cdot x_2\\ x_4=\sqrt{1+x_6^2}\cdot x_4\end{cases}}{=}\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{x_2^2+x_4^2\leqslant t}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2}{2}\left(1+x_6^2\right)}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_6\\
&=\frac{1}{2\pi^2}\int_{x_2^2+x_4^2\leqslant t}\sqrt{\frac{2\pi}{x_2^2+x_4^2}}e^{-\frac{x_2^2+x_4^2}{2}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4=\frac{2\pi}{2\pi^2}\int_0^{\sqrt{t}}r\sqrt{\frac{2\pi}{r^2}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{t}{2}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

例题 25.25 设 X 是一个紧度量空间, $T:X\to X$ 满足

$$d\left(Tx,Ty\right)\geqslant d\left(x,y\right),\forall x,y\in X.$$

证明:T 是等距满射.

证明 设

$$T^n\triangleq\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{n次}.$$

对 $x,y\in X$, 由 X 是紧空间, 我们有严格递增的 $n_k\in\mathbb{N}$ 使得 $\{T^{n_k}(x)\}$ 是 Cauchy 列且

$$\lim_{k\to+\infty}\left(n_{k+1}-n_k\right)=+\infty.$$

然后由

$$d\left(z,T^{n_{k+1}-n_k}(z)\right)\leqslant d\left(T^{n_k}(z),T^{n_{k+1}}(z)\right),k=1,2,\cdots$$

得

$$\lim_{k\to\infty}T^{n_{k+1}-n_k}(z)=z.$$

现在对 $y\in X$, 类似的可得

$$\lim_{k\to\infty}T^{m_{k+1}-m_k}(y)=y.$$

现在

$$d(z,y)=\lim_{k\to\infty}d\left(T^{n_{k+1}-n_k}(z),T^{m_{k+1}-m_k}(y)\right)\geqslant d\left(T(z),T(y)\right)\geqslant d(z,y),$$

从而我们证明了 T 是等距的, 从而连续.

注意到 X 是紧的, T 是连续的, 所以 $T(X)$ 是紧的. 又从刚才证明可以看到

$$X\subset\overline{T(X)}=T(X)\subset X\Rightarrow X=T(X),$$

这就给出了 T 是满射.

例题 25.26 泛函分析 设

$$B \triangleq \left\{\mathbf{x} \in \ell^2 : ||\mathbf{x}|| \leqslant 1\right\}, S \triangleq \left\{\mathbf{x} \in \ell^2 : ||\mathbf{x}|| = 1\right\}.$$

构造一个连续映射 $f : B \to S$ 使得

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in S.$$

证明 设

$$T : B \to B, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \mapsto \left(\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}, x_1, x_2, \cdots\right).$$

显然

$$T(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in B,$$

然后考虑连续映射

$$f(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{x} + \left(\sqrt{\left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle^2 + 1 - ||\mathbf{x}||^2} - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle\right) \cdot \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||}.$$

假设 $\mathbf{x} \in S$, 我们有

$$|\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{x}) \rangle|^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i x_{i+1}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}^2 \leqslant 1 = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|^2 \Rightarrow \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle \geqslant 0,$$

于是

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle^2 + 1 - ||\mathbf{x}||^2} - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle \\ &= \left|\left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle\right| - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

即 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

假设 $\mathbf{x} \in B$, 我们记

$$\lambda \triangleq \sqrt{\left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle^2 + 1 - ||\mathbf{x}||^2} - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle.$$

然后

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{x})||^2 &= ||\mathbf{x}||^2 + 2\lambda \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle + \lambda^2 \left|\left| \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right|\right|^2 \\ &= ||\mathbf{x}||^2 + 2\lambda \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle + \lambda^2. \end{aligned}$$

注意到

$$\lambda^2 + 2\lambda \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle + ||\mathbf{x}||^2 - 1 = 0$$

有根

$$\sqrt{\left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle^2 + 1 - ||\mathbf{x}||^2} - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} - T(\mathbf{x})}{||\mathbf{x} - T(\mathbf{x})||} \right\rangle,$$

于是我们证明了 $||f(\mathbf{x})|| = 1$, 这就完成了证明.

例题 25.27 泛函分析 在复值连续函数空间 $X = C[-1, 1]$ 上赋予内积 $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x$. 令

$$M = \{f \in X : f(x) = 0, -1 \leqslant x < 0\},$$

求 $M^{\perp}$.

证明 注意到

$$g\in M^{\perp}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=0,\forall f\in M.$$

我们断言

$$M^{\perp}=\{g\in X:g(x)=0,0\leqslant x\leqslant 1\}. \tag{25.14}$$

一方面, 显然

$$\{g\in X:g(x)=0,0\leqslant x\leqslant 1\}\subset M^{\perp}.$$

另外一方面, 对 $g\in M^{\perp}$, 若 $g(0)=0$, 可取

$$f(x)\triangleq\begin{cases}g(x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & -1\leqslant x<0\end{cases}\in M,$$

则有

$$(f,g)=\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow g(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

若 $g(0)\neq 0$, 上述取法失效, 我们需要逼近. 考虑

$$f_\epsilon(x)=\begin{cases}g(x), & \epsilon\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{g(\epsilon)}{\epsilon}x & 0\leqslant x<\epsilon\\ 0, & -1\leqslant x<0\end{cases},\epsilon>0.$$

注意到

$$0\leqslant\lim_{\epsilon\to 0^+}\left|\frac{g(\epsilon)}{\epsilon}\int_0^\epsilon x\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{[-1,1]}|g|^2\cdot\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon x\mathrm{d}x\right)=0,$$

我们有

$$\int_0^1|g(x)|^2\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_\epsilon^1|g(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{g(\epsilon)}{\epsilon}\int_0^\epsilon x\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_0^1 f_\epsilon(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right)=0.$$

于是 $g(x)=0,\forall x\in[0,1]$, 即(25.14)成立.

例题 25.28 设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 是全纯的且

$$f(0)=0,f_n(z)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次复合}}(z).$$

若 $|f'(0)|<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)=0$.

证明 注意到 $\{f_n\}$ 是正规族, 于是存在 $g\in H(B(0,1))$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(z)=g(z).$$

取 $a\in(|f'(0)|,1)$ 使得对某个 $r\in(0,1)$ 有

$$|f(z)|\leqslant a|z|,\forall z\in B(0,r).$$

于是结合

$$|f(z)|\leqslant a|z|<ar<r,\forall z\in B(0,r)$$

我们知道

$$|f_n(z)|\leqslant a|f_{n-1}(z)|\leqslant\cdots\leqslant a^n|f_1(z)|,\forall z\in B(0,r).$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=0,\forall z\in B(0,r).$$

由解析函数唯一性定理得

$$g(z)=0,\forall z\in B(0,1).$$

Schwartz 引理告诉我们

$$|f(z)| \leqslant |z|, \forall z \in B(0,1),$$

从而 $|f_n(z)|$ 递减. 现在

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0,$$

我们完成了证明.

例题 25.29 傅立叶分析 证明: 设 $u \in L^2(\mathbb{R}), D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R})$, 则

$$\widehat{D^\alpha u} = (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{u}, \tag{25.15}$$

这里我们傅立叶变换采用

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i x y} \mathrm{d}y, f \in L^1(\mathbb{R}).$$

证明 容易知道对 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 成立

$$D^\alpha \widehat{\phi}(x) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \phi}(x).$$

回忆帕塞瓦尔恒等式的证明过程, 实际上我们有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x) \widehat{f}(x) \mathrm{d}x, \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

现在对任何 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{D^\alpha u}(x) \cdot \phi(x)\right] \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left[D^\alpha u(x) \cdot \widehat{\phi}(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(x) \cdot D^\alpha \widehat{\phi}(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(x) \cdot (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha \phi}(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{u}(x) (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \cdot \phi(x)\right] \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$\widehat{D^\alpha u}(x) = \widehat{u}(x) (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha.$$

例题 25.30 复变函数

1. 对解析函数 $f : B(0,1) \to B(0,1)$, 证明:

$$\left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| \leqslant 1 - |f(z)|^2. \tag{25.16}$$

2. 设 $f, F \in H(B(0,1))$ 满足 F 单叶且

$$f(0) = F(0), f(B(0,1)) \subset F(B(0,1)).$$

证明存在 $w \in B(0,1)$ 使得

$$f(z) = F(w(z)), |w(z)| \leqslant |z|.$$

3. 在第 2 问条件下证明 $|f'(0)| \leqslant |F'(0)|$ 并说明等号成立条件是存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得 $w(z) = e^{i\theta} z$.

证明

1. 对 $z_0 \in B(0,1)$, 考虑

$$g(z) \triangleq \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0} z}\right) - f(z_0)}{1 - \overline{z_0} f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0} z}\right)},$$

我们有 g 满足 Schwartz 引理条件, 从而

$$|g(z)|=\left|\frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)-f(z_0)}{1-\overline{z_0}f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)}\right|\leqslant|z|,\forall z\in B(0,1),$$

即

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{z_0}f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|,\forall z\in B(0,1).$$

现在

$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\leqslant\lim_{z\to z_0}\left|\frac{1-\overline{f(z_0)}f(z)}{1-\overline{z_0}z}\right|=\frac{1-|f(z_0)|^2}{1-|z_0|^2},$$

即(25.16)成立.

2. 因为开映射定理, 我们知道 $F(B(0,1))$ 是开集. 因为单叶解析函数的逆映射也解析, 我们有 $F^{-1}\in H(F(B(0,1)))$. 于是考虑

$$w(z)\triangleq F^{-1}(f(z)).$$

容易看到 w 满足 Schwartz 定理条件, 因此 $|w(z)|\leqslant|z|$.

3. 注意到 Schwartz 引理还给出了 $|w'(0)|\leqslant1$. 现在

$$|f'(0)|=|F'(w(0))w'(0)|\leqslant|F'(w(0))|=|F'(0)|.$$

因为 F 单叶解析, 故 $F'(0)\neq0$, 因此上述等号成立充要条件是 $|w'(0)|=1$. 即由 Schwartz 引理取等条件给出取等条件是存在 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得 $w(z)=e^{i\theta}z$.

例题 25.31 复变函数 设 f 在 $|z|\leqslant1$ 连续且在 $|z|<1$ 解析, 证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta\geqslant\left(1-|z|^2\right)\cdot|f(z)|,\forall|z|<1.\tag{25.17}$$

证明 由 Cauchy 积分公式得

$$\left(1-|z|^2\right)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{(1-\overline{z}\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\forall|z|<1.$$

我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{(1-\overline{z}\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\overline{z}e^{i\theta}\right)f\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}-z}e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1-\overline{z}e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right|\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta,$$

即(25.17)成立.

例题 25.32 泛函分析 设 H 是一个可分 Hilbert 空间, Frechet 可微映射

$$f:H\to H\times[0,+\infty)\subset H\times\mathbb{R}$$

满足对某个 $\mathbf{x}\in H$ 成立 $f(\mathbf{x})\in H\times\{0\}$, 则

$$Df(\mathbf{0})v\in H\times\{0\},\forall v\in H.\tag{25.18}$$

证明 如果存在某个 $\mathbf{x}\in H$ 成立 $f(\mathbf{x})\in H\times\{0\}$, 不失一般性假设 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

由 Gateaux 导数得

$$\lim_{t\to0}\frac{f(tv)-f(\mathbf{0})}{t}=Df(\mathbf{0})v.$$

记

$$\mu:H\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(\mathbf{x},t)\mapsto t,$$

我们有

$$\lim_{t\to0}\frac{\mu(f(tv))}{t}=\mu(Df(\mathbf{0})v).$$

注意到 $\mu\left(f\left(tv\right)\right)\geqslant 0$, 我们有 $\mu\left(Df\left(\mathbf{0}\right)v\right)=0$, 即(25.18)成立.

例题 25.33 证明: 2025 阶群不是单群.

注回忆 Sylow 第三定理, 我们知道[3]

定理 25.1

设 G 是有限阶群, 正素数 $p\left|\left|G\right|\right.$, t 是 G 的 Sylow$-p$ 群的个数且存在 $r\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left[P:P\bigcap P'\right]\geqslant p^r,\forall\text{不同的Sylow}-p\text{群}P,P',$$

则

$$t\equiv 1\left(\mathrm{mod}p^r\right).$$

♡

证明 设群 G 是 $2025=3^45^2$ 阶的, 则由 Sylow 定理知 G 的 Sylow-5 子群个数 t 满足

$$t\equiv 1\left(\mathrm{mod}5\right),t\left|3^4\right.,$$

即 $t=1,81$. 若 $t=1$, 则 Sylow-5 子群是正规的, 故 G 不单, 于是只需考虑 $t=81$.

Case 1 存在两个 Sylow-5 子群交非平凡.

设 P,P' 是两个不同的 Sylow-5 子群且 $P\bigcap P'$ 是 5 阶群. 因为 p^2 阶群 Abel 我们知道 P,P' 是 Abel 的. 注意到

$$\left[P:P\bigcap P'\right]=\left[P':P\bigcap P'\right]=5\Rightarrow P\bigcap P'\lhd P,P\bigcap P'\lhd P',$$

于是

$$P\bigcup P'\subset N_G\left(P\bigcap P'\right).$$

现在我们有 $N_G\left(P\bigcap P'\right)$ 至少有两个 Sylow-5 子群. 设 $N_G\left(P\bigcap P'\right)$ 的 Sylow-5 子群个数为 $1+5k>1$, 则

$$25\left|\left|N_G\left(P\bigcap P'\right)\right|\right.,1+5k\left|\left|N_G\left(P\bigcap P'\right)\right|\right.,\left|N_G\left(P\bigcap P'\right)\right|\left|2025\right.,$$

于是只能有

$$\left|N_G\left(P\bigcap P'\right)\right|=81\times 25,k=16.$$

所以

$$G=N_G\left(P\bigcap P'\right),$$

即 $P\bigcap P'$ 是 G 的正规子群.

Case 2 任意两个 Sylow-5 子群交非平凡.

设 P,P' 是两个不同的 Sylow-5 子群, 我们有

$$\left[P:P\bigcap P'\right]=5^2.$$

但是我们由定理25.1知道

$$81\equiv 1\left(\mathrm{mod}5^2\right),$$

即这种情况不可能发生.

综上所述, 我们证明了 2025 阶群不是单群.

例题 25.34 微分几何 设在一个光滑曲面 S 上固定点与一个主方向夹角为 θ 的切方向对应的法曲率为 $\kappa_n\left(\theta\right)$. 证明:

$$\int_0^{2\pi}\kappa_n\left(\theta\right)\mathrm{d}\theta=2\pi H,$$

这里 H 为平均曲率.

[3]看近世代数三百题的 1.8.14

证明 我们利用欧拉公式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\kappa_1\pi+\kappa_2\pi\right)=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=H,\end{aligned}$$

这里 κ_1,κ_2 是固定点处两个正交的单位向量 $\{e_1,e_2\}$ 对应的法曲率.

例题 25.35 设 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 严格递增. 证明:

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\lim_{k\to\infty}\sin(n_kx)\text{存在}\right\}\text{是0测集}.$$

证明 考虑

$$E_m\triangleq\left\{x\in[m,m+1):\lim_{k\to\infty}\sin(n_kx)\text{存在}\right\},m\in\mathbb{Z}.$$

若某个 $m(E_m)>0$, 由叶果洛夫定理, 我们知道存在可测集 $F_m\subset E_m, m(F_m)>0$ 使得 $\sin(n_kx)$ 在 F_m 一致收敛. 因此当 i,j 充分大, 我们有

$$|\sin(n_ix)-\sin(n_jx)|^2\leqslant\frac{1}{2},\forall x\in F_m.$$

黎曼引理9.2给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}m(F_m)&\geqslant\lim_{i\to\infty}\int_{F_m}|\sin(n_ix)-\sin(n_jx)|^2\,\mathrm{d}x\\ &=\lim_{i\to\infty}\int_{F_m}\left[|\sin(n_ix)|^2+|\sin(n_jx)|^2-2\sin(n_ix)\sin(n_jx)\right]\mathrm{d}x\\ &=\lim_{i\to\infty}\int_{F_m}\left\{|\sin(n_ix)|^2+|\sin(n_jx)|^2+\cos\left[(n_i+n_j)x\right]-\cos\left[(n_i-n_j)x\right]\right\}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x\int_{F_m}1\mathrm{d}x+\int_{F_m}|\sin(n_jx)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant\frac{1}{2}m(F_m),\end{aligned}$$

这就和 $m(F_m)>0$ 矛盾! 因此 $m(E_m)=0,\forall m\in\mathbb{Z}$.

现在我们有

$$m\left(\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}E_m\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}m(E_m)=0,$$

这就完成了证明.

例题 25.36 实变函数 设 (X,Ω,μ) 是测度空间, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 上可测函数且对几乎所有 $x\in X$ 都有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 设非负函数 $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ 成立

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\int_X\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)\mathrm{d}\mu<\infty.$$

证明: 对几乎所有 $x\in X$ 都有

$$\lim_{N\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)=0.$$

证明 注意到

$$\int_X\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\int_X\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)\mathrm{d}\mu<\infty,$$

于是对几乎所有 $x\in X$ 都有

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)<\infty.\tag{25.19}$$

固定 $x\in X$ 使得(25.19)成立且存在 $C>0$ 使得 $|f_n(x)|\leqslant C,\forall n\in\mathbb{N}$. 由命题8.3得

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M}\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)=0.$$

由

$$\begin{aligned}
&N\left[\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)-\varphi\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}f_n(x)\right)\right]\\
&=N\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}f_n(x)\right]\varphi'(\theta_N)\\
&=\left[f_N(x)-\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}f_n(x)\right]\varphi'(\theta_N)\\
&\geqslant-\left|f_N(x)-\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}f_n(x)\right|\cdot|\varphi'(\theta_N)|\\
&\geqslant-(C+C)\sup_{x\in[-C,C]}|\varphi'(x)|>-\infty
\end{aligned}$$

和反向 Stolz9.22得

$$\lim_{N\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right)=0.$$

这就证明了对几乎所有 $x\in X$ 都有上式成立

例题 25.37 实变函数 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正测度且存在 $1\leqslant p_0<q_0<\infty$ 使得

$$L^{q_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)\subset L^{p_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu).$$

证明存在 $\lambda>0$ 使得

$$||f||_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)}\leqslant\lambda||f||_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)}.\tag{25.20}$$

证明 考虑恒等算子

$$I:L^{q_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)\to L^{p_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu).$$

我们断言 I 连续. 设

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)}=0,\lim_{n\to\infty}||If_n-g||_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)}=0.$$

熟知 L^p 收敛蕴含依测度收敛, 现在由里斯引理和 $f_n\Rightarrow f$ 我们知道 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}=f,a.e.$ 注意到

$$\lim_{i\to\infty}||f_{n_i}-g||_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}\mu)}=0,$$

继续得到 $f_{n_i}\Rightarrow g$. 用里斯引理可得 $\lim\limits_{j\to\infty}f_{n_{i_j}}=g,a.e.$ 因此我们有 $f=g,a.e.$ 闭图像定理告诉我们 I 连续, 从而存在 $\lambda>0$ 使得(25.20)成立.

例题 25.38 点集拓扑 设 $n\geqslant2$, 证明 $\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0,\cdots,0)\}$ 是连通集.

证明 考虑连续满射

$$T:(0,+\infty)\times\underbrace{[0,\pi]\times[0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]}_{n-2个}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0,\cdots,0)\}$$

使得

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{cases}.$$

由连续映射保连通性, 我们知道 $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\cdots,0)\}$ 是连通集.

例题 25.39 抽象代数 研究交错群 A_n 共轭类的分类.

证明 第一种判断方法: 对 $g \in A_n$.

1. 若 $C_{S_n}(g) \subset A_n$, 则 g 在 S_n 中的共轭类分裂成两个共轭类;
2. 否则 g 在 A_n 中的共轭类就是 g 在 S_n 中的共轭类.

来看证明.

Method 1

注意到

$$\left\{\sigma^{-1}g\sigma : \sigma \in S_n\right\} = \left\{\sigma^{-1}g\sigma : \sigma \in A_n\right\} \bigcup \left\{\sigma^{-1}g\sigma : \sigma \in S_n \setminus A_n\right\} = O_1 \bigcup O_2.$$

对 $\sigma_0 \in S_n \setminus A_n, \tau \in A_n$, 我们有 $\sigma_0\tau \in S_n \setminus A_n$, 因此

$$\tau^{-1}\sigma_0^{-1}g\sigma_0\tau = (\sigma_0\tau)^{-1}\, g\sigma_0\tau \in O_2.$$

现在我们知道 O_2 确实也是 A_n 中的共轭类.

显然

$$O_1 \neq O_2 \Leftrightarrow g \notin O_2 \Leftrightarrow (S_n \setminus A_n) \bigcap C_S(g) = \emptyset \Leftrightarrow C_S(g) \subset A_n,$$

这就证明了第一种判段方法.

Method 2

计算 g 的共轭类元素个数即计算 g 所在共轭作用下的轨道元素个数. 显然

$$\langle g\rangle_{A_n} \subset \langle g\rangle_{S_n},$$

这里 $\langle g\rangle_G$ 表示 g 在群 G 中生成的共轭类全体. 由轨道稳定子定理得

$$\left|\langle g\rangle_{S_n}\right| = \frac{|S_n|}{|C_{S_n}(g)|}, \left|\langle g\rangle_{A_n}\right| = \frac{|A_n|}{|C_{A_n}(g)|}.$$

由 $|S_n| = 2|A_n|$ 得

$$\left|\langle g\rangle_{S_n}\right| = \left|\langle g\rangle_{A_n}\right| \Leftrightarrow |C_{S_n}(g)| = 2|C_{A_n}(g)| \Leftrightarrow C_{S_n}(g) \bigcap (S_n \setminus A_n) \neq \emptyset,$$

这里最后一个等号用到了置换群中奇偶置换如果都存在, 则各占一半. 第二种判段方法: 对 $g \in A_n$.

1. 设不动点提供 1 轮换, 若 g 的不交循环分解由互不重复的奇长度循环构成, 则 g 在 S_n 中的共轭类分裂成两个共轭类;
2. 否则 g 在 A_n 中的共轭类就是 g 在 S_n 中的共轭类.

作为一个应用, 来看新领军真题, 计算 A_7 共轭类个数.

首先写出 S_7 中所有可能的偶置换所在的共轭类的代表元

$$(1), (123), (12)(34), (12345), (1234)(56), (1234567), (123)(45)(67), (123)(456),$$

这里面会分裂的只有 (1234567), 因此 A_7 共有 9 个共轭类.

例题 25.40 点集拓扑 证明不可数的余可数拓扑空间 X 不道路连通.

证明 熟知[4]若拓扑空间 Y 是不少于两个点的离散空间, 则 X 连通的充要条件是每一个连续映射 $f:X\to Y$ 都是常值映射.

设 $x\neq y,x,y\in X$ 且有道路 $f:I=[0,1]\to X$ 使得 $f(0)=x,f(1)=y$. 若 $f(I)$ 可数集, 而 $f(I)$ 的拓扑是余可数拓扑, 因此显然是离散拓扑. 由结论和 $[0,1]$ 连通和 f 不是常值映射, 我们知道 $f(I)$ 是单点集而矛盾! 因此 $f(I)$ 不可数集.

设

$$B\triangleq\mathbb{Q}\bigcap[0,1],$$

我们知道 $f(B)$ 是可数集, 因此存在无理数 $r\in[0,1]$ 使得

$$f(r)\in C\triangleq f([0,1])\setminus f(B).$$

注意到 $X\setminus f(B)$ 是 X 的开集, 所以 $f^{-1}(C)$ 是 $[0,1]$ 中的开集且 $r\in f^{-1}(C)$. 因为

$$f^{-1}(C)=f^{-1}(X)\setminus f^{-1}(f(B))\subset[0,1]\setminus B,$$

而 $[0,1]$ 的无理数非空子集当然不是开集, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了 X 不道路连通.

例题 25.41 抽象代数 设 $G<S_n$ 且 G 中含有奇置换, 证明 G 中奇偶置换各一半.

证明 考虑

$$T:G\to\{-1,1\},\sigma\mapsto\begin{cases}1, & \sigma\text{是偶置换}\\ -1, & \sigma\text{是奇置换}\end{cases}.$$

容易验证 T 是群同态且

$$\ker T=\{\sigma\in S^n:\sigma\text{是偶置换}\}.$$

由群同态基本定理得

$$G/\ker T\cong\mathrm{Im}T=\{-1,1\}\Rightarrow 2=|G/\ker T|=\frac{|G|}{|\ker T|},$$

即偶置换占 G 的一半元素, 因此奇置换也占 G 的一半元素.

例题 25.42 抽象代数 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是互不相同的正素数, 证明:$1,\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\cdots,\sqrt{p_n}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

证明 记 $\mathbb{L}\triangleq\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\cdots,\sqrt{p_n}\right)$ 是可分多项式 $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x^2-p_i\right)$ 的分裂域, 我们知道 $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ 是有限 Galois 扩张. 注意到当正整数 d 不是完全平方数, $\sqrt{d}$ 自然不是 $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ 的不动点. 于是 $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ 中一半的元素把 $\sqrt{d}$ 映射为 $-\sqrt{d}$, 从而 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}\left(\sqrt{d}\right)=0$. 此外显然有

$$a\in\mathbb{Q},\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(a)=0\Rightarrow a=0.$$

设

$$c_0+\sum_{j=1}^{n}c_j\sqrt{p_j}=0,c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{Q},$$

则利用 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}$ 的线性性, 两边取 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}$ 得

$$c_0\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(1)=0,$$

即 $c_0=0$.

对每一个 $i=1,2,\cdots,n$, 注意到

$$c_ip_i+\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}c_j\sqrt{p_ip_j}=0.$$

两边取 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}$ 继续得

$$c_i\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{Q}}(p_i)=0,$$

[4]见尤乘业点集拓扑 P.66 习题

即 $c_i=0$. 现在我们就证明了 $1,\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\cdots,\sqrt{p_n}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

例题 25.43 实变函数 设 $p>1$ 且可测集 $|\Omega|<\infty$. 若 $f_n\in L^p(\Omega)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f,a.e$ 且 f_n 在 $L^p(\Omega)$ 中有界. 证明: 对 $q\in[1,p)$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||_{L^q(\Omega)}=0.$$

证明 设

$$\int_\Omega|f_n|^p\,\mathrm{d}x\leqslant M,\forall n=1,2,\cdots.$$

法图引理告诉我们

$$\int_\Omega|f|^p\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\varliminf_{n\to\infty}|f_n|^p\,\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n|^p\,\mathrm{d}x\leqslant M.$$

对任何 $\delta>0$, 由叶果罗夫定理, 我们知道存在 $E_\delta\subset\Omega$ 使得

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x),x\in E_\delta,m(\Omega\setminus E_\delta)\leqslant\delta.$$

现在由 Holder 不等式16.1和

$$|a-b|^p\leqslant c_p\left(a^p+b^p\right),\forall a,b\geqslant0$$

得

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}||f_n-f||_{L^q(\Omega)}^q&\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{E_\delta}|f_n-f|^q\,\mathrm{d}x+\varlimsup_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_\delta}|f_n-f|^q\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{E_\delta}\lim_{n\to\infty}|f_n-f|^q\,\mathrm{d}x+\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega\setminus E_\delta}|f_n-f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\cdot m^{1-\frac{q}{p}}(\Omega\setminus E_\delta)\\&\leqslant\int_{E_\delta}\lim_{n\to\infty}|f_n-f|^q\,\mathrm{d}x+c_p\delta7^{1-\frac{q}{p}}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega\setminus E_\delta}\left(|f_n|^p+|f|^p\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\\&\leqslant0+c_p(2M)^{\frac{q}{p}}\delta^{1-\frac{q}{p}}=c_p(2M)^{\frac{q}{p}}\delta^{1-\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

由 δ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||_{L^q(\Omega)}=0.$$

例题 25.44 复变函数 设 U 是 $\mathbb{C}$ 中一正 n 边形且是开的. 设边为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$. 中心为 z_0. 设 $f\in C\left(\overline{U}\right)\bigcap H(U)$ 以及

$$M_i\triangleq\sup_{z\in\ell_i}|f(z)|,i=1,2,\cdots,n,$$

证明

$$|f(z_0)|\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^nM_i}.$$

证明 由平移不变性, 不妨设 U 中心是原点. 设 w 是 n 次单位根, 考虑解析函数

$$g(z)\triangleq f(z)f(wz)f\left(w^2z\right)\cdots f\left(w^{n-1}z\right),$$

我们知道 $g\in C\left(\overline{U}\right)\bigcap H(U)$ 且

$$|g|_{\partial U}|\leqslant M_1M_2\cdots M_n.$$

由平面几何知, 对 $z\in\partial U,z,wz,w^2z,\cdots,w^{n-1}z$ 恰好分布在 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上. 故由最大模定理得

$$|g(z)|\leqslant M_1M_2\cdots M_n,\forall z\in U,$$

即

$$|g(0)| = |f(0)|^n \leqslant M_1 M_2 \cdots M_n \Rightarrow |f(0)| \leqslant \sqrt[n]{M_1 M_2 \cdots M_n}.$$

例题 25.45 抽象代数 设 $u = \frac{x^3}{1+x} \in \mathbb{Q}(x)$, 求 $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(u)]$.

证明 我们证明 $T^3 - uT - u$ 是 x 在 $\mathbb{Q}(u)$ 极小多项式. 若 $T^3 - uT - u$ 可约, 则存在 $p, q \in \mathbb{Q}[u]$ 使得

$$(p, q) = 1, \left(\frac{p(u)}{q(u)}\right)^3 = u\frac{p(u)}{q(u)} + u.$$

现在

$$p^3(u) = up(u)q^2(u) + uq^3(u).$$

注意到上式右端没有常数项, 所以 p 没有常数项. 因此再注意到上式右边第一项没有一次项, 而 q 有常数项的话, 则右边第二项有一次项, 但左边没有一次项, 矛盾! 故 p, q 都没有常数项, 这和 $(p, q) = 1$ 矛盾! 故 $T^3 - uT - u$ 在 $\mathbb{Q}(u)$ 不可约, 从而 $T^3 - uT - u$ 是 x 在 $\mathbb{Q}(u)$ 极小多项式.

现在

$$[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(u)] = [\mathbb{Q}(u)(x) : \mathbb{Q}(u)] = 3.$$

例题 25.46 抽象代数 设 R 是一个环, 如果对任何 $x \in R$ 都有 $x^2 = x$, 证明 R 是交换环. 若对任何 $x \in R$ 都有 $x^3 = x$ 呢? 实际上我们可以证明更强的: 若对任何 $x \in R$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x^n = x$, 则 R 是交换环.

证明 注意到

$$x^2 + y^2 + xy + yx = (x + y)^2 = x + y \Rightarrow xy + yx = 0,$$

我们有

$$x^2 + x^2 = x + x = 0 \Rightarrow x = -x \Rightarrow xy = -yx = yx.$$

更强的结论见答案.

证明 首先我们有

$$x + y + xy + yx = x^2 + xy + yx + y^2 = (x + y)^2 = x + y \Rightarrow xy = -yx,$$

即

例题 25.47 实变函数 设 f 是可测集 E 上的广义实值可测函数, 存在 E 上可数值可测函数列 f_n 使得对任何 $\epsilon, X > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\begin{cases} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, & |f(x)| < \infty \\ f_n(x) \geqslant X, & f(x) = +\infty \\ f_n(x) \leqslant -X, & f(x) = -\infty \end{cases}, \forall n \geqslant N. \tag{25.21}$$

证明 我们称 f 是 E 上可数值可测函数, 如果存在可测划分 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 和实数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{E}$ 使得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x).$$

对 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, 记

$$A_{+\infty} \triangleq \{x \in E : f(x) = +\infty\}, A_{-\infty} \triangleq \{x \in E : f(x) = -\infty\}, A_{n,m} \triangleq \left\{x \in E : \frac{m-1}{n} \leqslant f(x) < \frac{m}{n}\right\}.$$

我们考虑

$$f_n(x) \triangleq n\chi_{A_{+\infty}} - n\chi_{A_{-\infty}} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{m}{n} \chi_{A_{n,m}}(x), x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

于是对任何 $\epsilon, X>0$, 取 $N \triangleq \min\left\{\frac{1}{\epsilon}, X\right\}>0$. 然后对 $n \geqslant N$, 我们容易验证成立(25.21).

例题 25.48 实变函数 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的广义实值可测函数, 证明

$$g(x) \triangleq \sup_{h \in[0,1]} f(x+h) \text{是可测函数.}$$

证明

对 $c \in \mathbb{R}$, 考虑

$$E \triangleq\left\{x \in \mathbb{R}: \sup_{h \in[0,1]} f(x+h)>c\right\}.$$

设 $x_0 \in E$, 我们有 $h_0 \in[0,1]$ 使得 $f\left(x_0+h_0\right)>c$. 于是若 $h_0>0$, 我们有

$$\sup_{h \in[0,1]} f(x+h) \geqslant f\left(x+x_0+h_0-x\right)>c, \forall x \in\left[x_0, x_0+\frac{h_0}{2}\right),$$

即 $\left[x_0, x_0+\frac{h_0}{2}\right) \subset E$. 若 $h_0=0$, 我们有

$$\sup_{h \in[0,1]} f(x+h) \geqslant f\left(x+x_0-x\right)>c, \forall x \in\left(x_0-1, x_0\right],$$

即 $\left(x_0-1, x_0\right] \subset E$.

现在我们可以看到 E 是若干半开半闭区间之并, 因此我们有 E 可测, 从而 g 可测.

例题 25.49 实变函数

1. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上勒贝格 (Borel) 实值可测函数, 证明:$A=\{x \in \mathbb{R}: f'(x) \text{存在}\}$ 是勒贝格 (Borel) 可测的.
2. 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是勒贝格可测的且对几乎每一个 $y \in \mathbb{R}$ 都有 $x \mapsto f(x, y)$ 几乎处处可导, 证明:f 在 $\mathbb{R}^2$ 上几乎处处存在对 x 的偏导数.

证明

1. 设

$$g_1(x) \triangleq \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, g_2(x) \triangleq \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$
$$g_3(x) \triangleq \overline{\lim_{h \to 0-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, g_4(x) \triangleq \underline{\lim_{h \to 0-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

我们来证明 $g_i, i=1,2,3,4$ 可测.

我们来证明

$$g_n(x) \triangleq \sup_{h \in\left(0, \frac{1}{n}\right]}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}, n \geqslant 1$$

是可测的.

对任何 $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$, 我们知道

$$\left\{x \in \mathbb{R}: \sup_{h \in\left(0, \frac{1}{n}\right]}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}>c\right\}$$
$$=\left\{x \in \mathbb{R}: \sup_{h \in\left(0, \frac{1}{n}\right]}\{f(x+h)-c(x+h)-f(x)+c x\}>0\right\}.$$

于是我们只需对可测函数 F 验证

$$\left\{x \in \mathbb{R}: \sup_{h \in\left(0, \frac{1}{n}\right]}\{F(x+h)\}>F(x)\right\} \text{可测.}$$

更简单的, 只需验证

$$\left\{x \in \mathbb{R}: \sup_{h \in\left(0, \frac{1}{n}\right]}\{F(x+h)\}>0\right\} \text{可测.}$$

由例题25.48知

$$g_1(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{n\to\infty}\sup_{h\in\left(0,\frac{1}{n}\right]}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

是可测的. 类似的 $g_i, i=1,2,3,4$ 都是可测的.

现在

$$A=\{x\in(a,b):g_1(x)=g_2(x)=g_3(x)=g_4(x)\text{有限}\}$$

是可测集.

2. 设

$$g_1(x,y)\triangleq\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},g_2(x,y)\triangleq\underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h};$$
$$g_3(x,y)\triangleq\overline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},g_4(x,y)\triangleq\underline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

我们来证明 $g_i, i=1,2,3,4$ 可测.

对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 相似第 1 问我们有 $\sup\limits_{0\leqslant h\leqslant\frac{1}{n}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ 是可测的, 所以

$$g_1(x,y)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant h\leqslant\frac{1}{n}}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

是可测的. 类似的 $g_i, i=1,2,3,4$ 都是可测的.

现在

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:g_1(x,y)=g_2(x,y)=g_3(x,y)=g_4(x,y)\text{有限}\}$$

是可测集, 即

$$A\triangleq\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\text{存在}\right\}$$

是可测的.

记

$$W\triangleq\left\{y\in\mathbb{R}:\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\text{存在},a.e\text{于}x\in\mathbb{R}\right\}.$$

由条件和 Fubini 定理得

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus A}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}y\int_{\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\notin A\}}1\mathrm{d}x=\int_W 0\mathrm{d}y=0,$$

这就证明了 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上几乎处处存在对 x 的偏导数.

内容...

例题 25.50 点集拓扑 设 X 是一个 T_3 拓扑空间, 证明: X 的紧子集的闭包也紧致.

证明 设 $K\subset X$ 是紧的, $U_\alpha\subset X$ 是一族开集且

$$K\subset\overline{K}\subset\bigcup_\alpha U_\alpha.$$

由 K 紧性我们知道存在 $\{U_i\}_{i=1}^n\subset\{U_\alpha\}$ 使得

$$K\subset U\triangleq\bigcup_{i=1}^n U_i.$$

由 X 是 T_3 的, 对每一个 $x\in K$, 存在开邻域 V_x 使得 $\overline{V_x}\subset U$. 于是结合 $K\subset\bigcup\limits_{x\in K}V_x$ 和 K 的紧性得 $\{V_i\}_{i=1}^m\subset\{V_x\}_{x\in K}$ 成立

$$K\subset\bigcup_{i=1}^m V_i.$$

现在

$$\overline{K} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} V_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{V_i} \subset U,$$

即我们对 $\overline{K}$ 的开覆盖 $\bigcup_{\alpha} U_\alpha$ 找到了有限子覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^{n}$, 因此我们证明了 X 的紧子集的闭包也紧致.

例题 25.51 点集拓扑 设 X 是满足 T_2, C_1 公理的拓扑空间, 证明:$f \in C(X)$ 的充要条件是:

1. 对紧集 $K \subset X$, $f(K)$ 是紧集;
2. 对 X 的递减紧集列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, 我们有

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(E_k). \tag{25.22}$$

证明 必要性: 若 $f \in C(X)$, 则对紧集 $K \subset X$, $f(K)$ 是紧集是课本定理. 现在对 X 的递减紧集列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, 平凡的成立

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(E_k).$$

设 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(E_k)$, 则存在 $y_k \in E_k, k = 1, 2, \cdots$ 使得

$$f(y_k) = x, k = 1, 2, \cdots.$$

考虑 X 是 Haudorff 的[5], 可以知道 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 是紧的 C_1 拓扑空间, 于是是列紧空间, 因此存在 $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 和 $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{y_i\}$ 使得 $\lim_{i\to\infty} y_{k_i} = y$. 于是

$$f(y) = \lim_{i\to\infty} f(y_{k_i}) = x,$$

即

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f(E_k) \subset f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right),$$

即(25.22)成立.

充分性: 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 则考虑递减紧集

$$E_k \triangleq \{x_k, x_{k+1}, \cdots\} \bigcup \{x_0\}, k = 1, 2, \cdots.$$

注意我们有 $f(E_k), k = 1, 2, \cdots$ 是紧集且成立(25.22), 从而

$$\{f(x_0)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\{f(x_k), f(x_{k+1}), \cdots\} \bigcup \{f(x_0)\}\right). \tag{25.23}$$

如果存在 $f(x_0)$ 的邻域 V 使得 V 不包含 $\{f(x_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$. 注意到 $\{x_{k_i} : i = 1, 2, \cdots\} \bigcup \{x_0\}$ 是紧的, 于是

$$\{f(x_{k_i}) : i = 1, 2, \cdots\} \bigcup \{f(x_0)\}$$

是紧的, 因此存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\left\{x_{k_{i_j}}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty} f\left(x_{k_{i_j}}\right) = f\left(x_{k_{i_0}}\right) \neq f(x_0).$$

注意到 $\{f(x_k), f(x_{k+1}), \cdots\} \bigcup \{f(x_0)\}$ 是闭集, 我们有

$$f\left(x_{k_{i_0}}\right) \in \{f(x_k), f(x_{k+1}), \cdots\} \bigcup \{f(x_0)\}, \forall k \in \mathbb{N},$$

这和(25.23)矛盾! 因此我们证明了 $f \in C(X)$.

例题 25.52 实变函数 设连续函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 存在所有偏导数, 证明: f 至少在 $\mathbb{R}^n$ 的一个稠密子集上可微.

证明 考虑映射

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right),$$

[5]Haudorff 空间紧集是闭集, 闭集的交还是闭集, 紧集的闭子集此时紧.

以及连续映射

$$T_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\mathbf{x}\mapsto m\left(f\left(\mathbf{x}+\frac{1}{m}e_1\right)-f\left(\mathbf{x}\right),f\left(\mathbf{x}+\frac{1}{m}e_2\right)-f\left(\mathbf{x}\right),\cdots,f\left(\mathbf{x}+\frac{1}{m}e_n\right)-f\left(\mathbf{x}\right)\right),m\in\mathbb{N}.$$

我们有

$$\lim_{m\to\infty}T_m\left(\mathbf{x}\right)=T\left(\mathbf{x}\right),\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n.$$

由连续函数列的极限函数必然有稠密的连续点知 T 的连续点在 $\mathbb{R}^n$ 稠密. 由偏导数连续的点函数可微知 f 至少在 $\mathbb{R}^n$ 的一个稠密子集上可微.

例题 25.53Sobolev 空间

1. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集且 $f:U\to\mathbb{R}$ 是局部可积函数. 若
$$\int_U f\left(\mathbf{x}\right)\phi^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\geqslant 0,\forall\phi\in C_c^\infty\left(U\right).\tag{25.24}$$
证明: $f\geqslant 0,a.e于U.$
2. 设 $S^{n\times n}$ 是 n 阶实对称矩阵全体, $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集且 $f:U\to S^{n\times n}$ 是局部 Bochner 可积的. 若
$$\int_U f\left(\mathbf{x}\right)\phi^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\geqslant 0,\forall\phi\in C_c^\infty\left(U\right).\tag{25.25}$$
证明: $f\geqslant 0,a.e于U.$

证明

1. 由 Lindelof 性和可数个 0 测集的并也 0 测, 我们只需要对每一个开集 $V\subset\subset U$ 使得 $f\in L^1\left(V\right)$ 来证明 $f\geqslant 0,a.e于V.$
现在考虑卷积磨光13.14得
$$\phi_\delta\left(\mathbf{x}\right)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\{\mathbf{z}\in V:f(\mathbf{z})<0\}}\left(\mathbf{y}\right)\chi_\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\mathrm{d}\mathbf{y}.$$
熟知当 $\delta>0$ 充分小时有
$$\phi_\delta\in C_c^\infty\left(U\right),\lim_{\delta\to 0^+}\int_V\left|\phi_\delta\left(\mathbf{x}\right)-\chi_{\{\mathbf{z}\in V:f(\mathbf{z})<0\}}\left(\mathbf{x}\right)\right|\mathrm{d}\mathbf{x}=0.$$
里斯引理告诉我们
$$\lim_{i\to\infty}\phi_{\delta_i}=\chi_{\{\mathbf{z}\in V:f(\mathbf{z})<0\}},a.e于V.$$
注意到
$$0\leqslant\phi_\delta\left(\mathbf{x}\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\{\mathbf{z}\in V:f(\mathbf{z})<0\}}\left(\mathbf{y}\right)\chi_\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\chi_\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\mathrm{d}\mathbf{y}=1,$$
我们由控制收敛定理和(25.24)得
$$\lim_{i\to\infty}\int_V f\left(\mathbf{x}\right)\phi_{\delta_i}^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}=\lim_{i\to\infty}\int_V f\left(\mathbf{x}\right)\chi_{\{\mathbf{z}\in V:f(\mathbf{z})<0\}}\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\geqslant 0,$$
即 $\{\mathbf{z}\in V:f\left(\mathbf{z}\right)<0\}$ 是 0 测的, 因此我们证明了 $f\geqslant 0,a.e于U.$
2. 对 $\mathbf{v}\in\mathbb{Q}^n$, 我们利用(25.25)有
$$\mathbf{v}^T\cdot\int_U f\left(\mathbf{x}\right)\phi^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=\int_U\mathbf{v}^Tf\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{v}\cdot\phi^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\geqslant 0,\forall\phi\in C_c^\infty\left(U\right),$$
由第 1 问得 0 测集 $N_\mathbf{v}\subset U$ 使得
$$\mathbf{v}^Tf\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{v}\geqslant 0,\forall\mathbf{x}\in U\setminus N_\mathbf{v}.$$
设
$$N\triangleq\bigcup_{\mathbf{v}\in\mathbb{Q}^n}N_\mathbf{v},$$
我们知道 $N\subset U$ 是 0 测集. 现在对 $\mathbf{x}\in U\setminus N$, 我们知道
$$\mathbf{v}^Tf\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{v}\geqslant 0,\forall\mathbf{v}\in\mathbb{Q}^n.$$

由 $\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密知

$$\mathbf{v}^T f(\mathbf{x})\mathbf{v} \geqslant 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

现在我们就证明了 $f \geqslant 0, a.e于U.$

例题 25.54Sobolev 空间 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集且

$$A: U \to \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x})$$

是有界可测的. 若存在 $c, \theta > 0$ 使得

$$\int_U |Dv|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}\mathbf{x} + c\int_U |v|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}, \forall v \in C_c^\infty(U), \tag{25.26}$$

则

$$A(\mathbf{x}) \geqslant \theta I_n, a, e, \mathbf{x} \in U. \tag{25.27}$$

证明 约定记号 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 首先对任何 $v, u \in C_c^\infty(U)$, 如果(25.26)成立, 利用 A 是 Hermite 的, 我们有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_i\eta_j = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\eta_i, \forall \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in \mathbb{R}, \tag{25.28}$$

从而利用(25.28)得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\frac{\partial\left(u+\sqrt{-1}v\right)}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial\left(u+\sqrt{-1}v\right)}{\partial x_j}}\mathrm{d}\mathbf{x} + c\int_U \left|v+\sqrt{-1}v\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\mathbf{x} + c\int_U \left(|u|^2+|v|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\mathbf{x} + c\int_U \left(|u|^2+|v|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\geqslant \int_U \left(|Du|^2+|Dv|^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_U \left|D\left(u+\sqrt{-1}v\right)\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x},
\end{aligned}$$

即我们可以把 $v \in C_c^\infty(U)$ 扩充为复值函数.

设 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, 考虑

$$e^{\sqrt{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}v(\mathbf{x}) \in C_c^\infty(U),$$

利用(25.26)我们有

$$\int_U \left|D\left(e^{\sqrt{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}v\right)\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\frac{\partial\left(e^{\sqrt{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}v\right)}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial\left(e^{\sqrt{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}v\right)}{\partial x_j}}\mathrm{d}\mathbf{x} + c\int_U \left|e^{\sqrt{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}v\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

利用(25.28)化简得

$$\int_U |Dv|^2\mathrm{d}\mathbf{x} + ||\mathbf{v}||^2\int_U |v|^2\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U a_{ij}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+v_iv_jv^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x} + c\int_U |v|^2\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

于是对固定的 v, 我们有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_U \left(\frac{a_{ij}(\mathbf{x})}{\theta}v_iv_j - ||\mathbf{v}||^2\right)|v(\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x} > -\infty.$$

记 $B(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{\theta}A(\mathbf{x}) - I$, 我们有

$$\mathbf{v}^T\int_U B(\mathbf{x})|v(\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} > -\infty, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

即

$$\int_U B(\mathbf{x})|v(\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x} \geqslant 0, \forall v \in C_c^\infty(U).$$

例题25.53告诉我们

$$B(\mathbf{x}) \geqslant 0, a.e于U,$$

即(25.27)成立.

第 26 章 非数学模拟

内容提要

- 非数学决赛水平测试 26.1
- 2024 非数学类模拟一 26.2
- 2024 非数学类模拟二 26.3
- 2024 非数学类模拟三 26.4
- 2024 非数学类模拟四 26.5
- 2024 非数学类模拟五 26.6
- 2024 非数学类模拟六 26.7
- 2025 非数学类模拟一 26.8
- 2025 非数学类模拟二 26.9
- 2025 非数学类模拟三 26.10
- 2025 非数学类模拟四 26.11
- 2025 非数学类模拟五 26.12
- 2025 非数学类模拟六 26.13

注模拟答案可以在正版课程文件中找到.

26.1 全国大学生数学竞赛非数学决赛水平测试

填空题 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy}=$ _____.

填空题 2 z 由 $2x^3z-3x^2y^2-2xyz^2-4y^3z+4=0$ 确定的 x,y 的隐函数, 计算 $dz|_{(2,1,2)}$_____

填空题 3 曲线 $\begin{cases}x+y-z=2\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$ 上距离原点最近的点是 $=$ _____.

填空题 4 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ 的收敛域和和函数分别为 _____.

填空题 5 已知 3 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 的所有特征值之和为 1, 所有特征值之积为 -12 且 $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $(A^*-4E)X=0$ 的解, 则二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix}x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4\\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ -x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ -x_4 & a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ 的规范型为 _____.

解答题 1 设 $a>0$, 计算曲面积分

$$\iint_S xyz\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)dS,$$

这里

$$S:\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=a^2,x,y,z>0\right\}.$$

解答题 2 对 $p\in\mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left[n+(-1)^{n-1}\right]^p}$ 的收敛性和是否绝对收敛.

解答题 3 设 $\Omega=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$, f 是 Ω 上的二阶连续可微函数, g 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=g\left(x^2+y^2+z^2\right). \tag{26.1}$$

计算

$$\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dxdydz-\pi\int_0^1\sqrt{t}(t-1)g(t)\,dt.$$

解答题 4 设连续函数 $f,g:[a,b]\to[a,b]$ 且 f 单调递增, 若

$$f(g(x))=g(f(x)),\forall x\in[a,b]. \tag{26.2}$$

证明存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=g(x_0)=x_0$.

解答题 5 设 f 是 $[-1,1]$ 上的连续函数且 $f(-1)\geqslant f(1)$, $x+f(x)$ 在 $[-1,1]$ 递增, $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$, 证明

$$\int_{-1}^{1}f^2(x)\,dx\leqslant\frac{2}{3}. \tag{26.3}$$

解答题 6 设非 0 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$a_{ij}\in\{0,-1\},\ \forall i\neq j,\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=0,\ \forall j=1,2,...,n.$$

证明

$$\lambda_{\max}(A)\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}+1.$$

这里 $\lambda_{\max}(A)$ 表示 A 的最大特征值.

26.2 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟一

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2024)

第一次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 求极限: $\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$ _____.

(2) 设 z 具有二阶连续偏导数, 且 $3\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$. 若换元 $\begin{cases}u=x+ay\\ v=x-3y\end{cases}$ 可将方程转化为 $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=0$, 则 $a=$_____.

(3) $w=e^{-2y}\ln\left(x+z^2\right)$ 在点 $\left(e^2,1,e\right)$ 处沿着曲面 $\begin{cases}x=e^{u+v}\\ y=e^{u-v}\\ z=e^{uv}\end{cases}$ 的法线方向的方向导数为_____.

(4) 设函数 $y=\frac{1}{1+x-2x^2}$ 则 $y^{(n)}(0)=$_____.

(5) 计算 $\int_0^{\pi}\left(\int_0^x e^{\cos y}\mathrm{d}y\right)\cos x\mathrm{d}x=$_____.

二、**(本题满分 14 分)** 设区域 D 是由 $y=x,x^2+y^2=2x$ 以及 x 轴围成的第一象限的区域.

(1): 求区域 D 面积.

(2): 求区域 D 绕 $x=2$ 旋转一周形成旋转体体积.

三、**(本题满分 14 分)** 求下述微分方程通解

$$\left(3y+4xy^2\right)dx+\left(4x+5x^2y\right)dy=0.$$

四、(本题满分 14 分) 设 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i,|x|<1$, 求 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i,n\in\mathbb{N}$.

五、(本题满分 14 分) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上二阶可微函数且 $f(0)=2,f'(0)=-2,f(1)=1$. 证明: 存在 $c\in(0,1)$ 使得

$$f(c)f'(c)+f''(c)=0.$$

六、(本题满分 14 分) 设 $s_n=\int_0^1\sin^n(nx)\,\mathrm{d}x,n\in\mathbb{N}$.

(1): 证明: $s_n\leqslant\frac{2}{n},\forall n\in\mathbb{N}$ 且 n 为奇数.

(2): 求 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

26.3 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟二

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2024)

第二次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-1}\right)}{\cos\left(\pi\sqrt{4n^2-3}\right)}\right)^{n^2}$: _____.

(2) 若 $kx-\frac{1}{x}+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有一根, 则 k 的取值范围为_____.

(3) 设 $f(3,4)=a$, 且 $f(x,y)$ 可微, 且曲面 $z=f(x,y)$ 上任何一点法线均与 z 轴相交, 求 $f\left(\sqrt{\frac{25}{2}},\sqrt{\frac{25}{2}}\right)=$_____.

(4) 设 f 二阶可微且 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, 则 $u=$_____.

(5) 设 $a>0, f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$, 计算 $\iint_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=$_____.

二、**(本题满分 14 分)** 设 f 在 $x=0$ 邻域内 n 阶可导且

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0, f^{(n)}(0)\neq 0,$$

计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}.$$

三、**(本题满分 14 分)** 计算 $I=\iiint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 这里 D 由 $z=xy, x+y+z=1, z\geqslant 0$ 围成的第一象限的区域.

四、**(本题满分 14 分)**

设 $\varphi\in C(\mathbb{R})$ 满足周期 1 且 $\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0$. 则对 $f\in C^1[0,1]$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,\mathrm{d}x\right)^2$ 收敛.

五、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C^1[a,b]$ 满足 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

(1)

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t, \forall x\in[a,b];$$

(2)

$$\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

六、**(本题满分 14 分)** 设 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 满足 $f''(x)-2f'(x)+f(x)=2e^x$.

(1)求 f 所有可能的表达式;

(2)存在 f 是上述微分方程的解使得 $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ 且存在 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f'(x)\leqslant 0$.

(3)若 $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, 证明: $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

26.4 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟三

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2024)

第三次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

(1) 设 $n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}} =$ _____.

(2) 计算 $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \mathrm{d}x =$ _____.

(3) 设 $u \in C^2(\mathbb{R}), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u(x, 2x) = x, u'_x(x, 2x) = x^2$, 则 $u''_{xx}(x, 2x) + u''_{xy}(x, 2x) + u''_{yy}(x, 2x) =$ _____.

(4) 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 则曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 上每个点处的切平面都过定点_____.

(5) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} \mathrm{d}x =$ _____.

二、(本题满分 14 分) 设 $f \in C[-1, 1]$ 使得 $f(1) = 0$, 若

$$f(x) = x^2 + x \int_0^{x^2} f\left(x^2 - t\right) \mathrm{d}t + \iint_D f(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant x\right\},$$

计算 $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$.

三、(本题满分 14 分) 计算

$$\oint_C (y - z) \mathrm{d}x + (z - x) \mathrm{d}y + (x - y) \mathrm{d}z,$$

这里 C 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, a, h > 0$ 交线. 从 x 轴正向看过去, 方向为逆时针.

四、(本题满分 14 分) 设 $f \in C^2[a, b]$, 证明: 对任何 $r > 0, x_0 \in (a, b)$ 且 $x_0 \pm r \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (x_0 - r, x_0 + r)$ 使得

$$f''(\xi) = \frac{3}{r^3} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [f(x) - f(x_0)] \mathrm{d}x.$$

五、(本题满分 14 分)

设 $f \in C[0, 2\pi]$, 证明:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin(nx)| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{d}x.$$

六、(本题满分 14 分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, 解答下列问题:

(1)证明: 级数 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ 收敛;

(2)求 S 可能的最大值.

26.5 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟四

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2024)

第四次模拟

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

(1) 对 $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(a+x) \cdot \tan(a-x) - \tan^2 a}{1 - \cos x} =$ _____.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} =$_____.

(3) 设 $a > 0$, 曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, x^2 + y^2 = 2ax$ 在 $\left(a, a, \sqrt{2}a\right)$ 的切线方程为_____.

(4) 设 $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = e^y, f(x, 0) = x^2 - e^{-x}$, 则 $f(x, y) =$_____.

(5) 对 $n \in \mathbb{N}, x \neq 0$, 计算 $\left[x^{n-1} \sin \frac{1}{x}\right]^{(n)} - \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right) =$ _____.

二、(本题满分 14 分) 设 $f \in C[a, b]$ 满足

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right], \forall a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

求 f 表达式

三、(本题满分 14 分) 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且 $\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right)$, 取下侧, 则计算

$$I = \iint_{\Sigma} \left[xf(xy) + 2x - y\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[yf(xy) + 2y + x\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left[zf(xy) + z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

四、(本题满分 14 分) 计算:

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^n \frac{\arctan \frac{x}{n}}{(1+x)\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x.$$

五、(本题满分 14 分) 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 满足 $f(x) F(x) = \cos(2x), F(0) = 1, F'(x) = f(x)$. 设

$$a_n = \int_0^{n\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots,$$

计算幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域和和函数.

六、(本题满分 14 分) 记

$$T=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3:a,b,c\text{可以构成某个三角形的三边长}\right\}.$$

求下述级数的值

$$\sum_{(a,b,c)\in T}\frac{2^a}{3^b5^c}.$$

26.6 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟五

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2024)

第五次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题(本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2-x+3}-2x\right)=b$, 则 $\frac{1}{a}+b=$_____.

(2) $y=\frac{1}{2}x^2,x\in[0,1]$ 的长度是 =_____.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 由 $x+y-z=e^z$ 确定. 若 x,y 都是 t 的函数且满足 $xe^x=\tan t,y=\cos t$, 计算 $\frac{d^2z}{dt^2}|_{t=0}=$_____.

(4) 设 $lx+my+nz=\lambda,\lambda\neq0$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 则 $\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{\lambda^2}=$_____.

(5) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=$_____.

二、(本题满分 14 分) 设

$$xf''(x)+3x\left[f'(x)\right]^2=1-e^{-x}.$$

(1)若 f 在 $x=c\neq0$ 取得极值, 证明:$x=c$ 是 f 极小值点.

(2)若 f 在 $x=0$ 取得极值, 则 $x=0$ 是 f 极小值点还是极大值点?

三、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C[a,b],\lambda\in\mathbb{R}$ 满足

$$f(x)=\frac{3}{b-a}+\lambda\int_x^b f(t)f(a+t-x)\,\mathrm{d}t,\forall x\in(a,b).$$

证明: $\lambda\leqslant\frac{1}{6}$.

四、(本题满分 14 分) 设 $V=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0,y^2\geqslant 2zx\right\}$, 计算 $I=\iiint_V|y|\,dV$.

五、(本题满分 14 分) 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}\sin x$ 满足 $y(0)=0,y'(0)=-\frac{1}{5}$ 的解,

$$g(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{5(n+1)^2}(n\pi\leqslant x<(n+1)\pi,n=0,1,2,\cdots).$$

求积分

$$\int_0^\infty\min\{f(x),g(x)\}\,\mathrm{d}x.$$

六、(本题满分 14 分)

设 $a_0=\frac{5}{2},a_k=a_{k-1}^2-2,k=1,2,\cdots$, 计算

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a_k}\right).$$

26.7 2024 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟六

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2024)

第六次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^{\cot^2 x}$ _____.

(2) 设 $z=f(x,y),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y,f(x,0)=x^2,f(0,y)=y$, 则 $f(x,y)=$_____.

(3) $f(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3(1-3x)}$ 在 $x=0$ 展开为幂级数的收敛域是_____.

(4) 直线 $\begin{cases} y=z \\ x=1 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面方程为_____.

(5) 设 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$, 则对 $n\in\mathbb{N}_0$, $f^{(n)}(0)=$ _____.

二、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\left(x^2+y^2\right)},$$

计算

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三、**(本题满分 14 分)** 设 $\varphi,\psi\in C^1(\mathbb{R}),\varphi(0)=-2,\psi(0)=1$ 满足对任何简单光滑曲线 L, 都有

$$I=\int_L 2\left[x\varphi(y)+\psi(y)\right]\mathrm{d}x+\left(x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)\right)\mathrm{d}y$$

与路径无关.

(a)求 φ,ψ

(b)设 L 是从 $(0,0)$ 到 $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ 的分段光滑曲线, 求 I.

四、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 且

$$g(x,y)=f\left(e^{xy},x^2+y^2\right),f(x,y)=1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right),(x,y)\to(1,0),$$

证明: $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值并判断是极小值还是极大值和计算出极值.

五、**(本题满分 14 分)** 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $(x+1)y''=y'$ 满足 $y(0)=3,y'(0)=-2$ 的解. 证明: 对任何整数 $n>1$ 和所有实数 $x\geqslant 0$ 都有

$$\int_0^x f(t)\sin^{2n-2}t\mathrm{d}t\leqslant\frac{4n+1}{n\left(4n^2-1\right)}.$$

六、**(本题满分 14 分)** 设 $f,g\in C[a,b],a\leqslant f,g\leqslant b$ 且 f 单调递增. 若

$$f(g(x))=g(f(x)),\forall x\in[a,b],$$

证明: 存在 $x_0\in[a,b]$ 使得

$$f(x_0)=g(x_0)=x_0.$$

26.8 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟一

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2025)

第一次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2-x}+x}\right)=$_____.

(2) 设 $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right), g\in C^2\left(\mathbb{R}\right), z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$, 计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

(3) 设 Π 是椭球面 $x^2+3y^2+z^2=1$ 在第一卦限的切平面, 则 Π 被三个坐标平面截出三角形的最小面积为 =_____.

(4) 计算 $\frac{1/2}{1+\sqrt{2}}+\frac{1/4}{1+\sqrt[4]{2}}+\frac{1/8}{1+\sqrt[8]{2}}+\frac{1/16}{1+\sqrt[16]{2}}+\cdots=$_____.

(5) 设 $g\left(x\right)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 计算 $\oint_{|x|+|y|=1} e^{|x|}g\left(y-x\right)\mathrm{d}s=$_____.

二、(本题满分 14 分) 求解微分方程

$$\left(x^2y^2-1\right)y'+2xy^3=0.$$

三、(本题满分 14 分) 设 L 是不经过点 $(\pm2,0)$ 的简单光滑闭曲线. 计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y.$$

四、(本题满分 14 分) 设 $f\in C\left[a,b\right], \lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$f\left(x\right)=\frac{3}{b-a}+\lambda\int_x^b f\left(t\right)f\left(a+t-x\right)\mathrm{d}t, \forall x\in\left(a,b\right).$$

证明:$\lambda\leqslant\frac{1}{6}$.

五、(本题满分 14 分) 设 $\{x\}\triangleq x-\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的小数部分, 求下面幂级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n!}{e}\right\}x^n.$$

六、(本题满分 14 分) 记

$$A\triangleq\left\{f\in C\left[0,1\right]:\int_{x^2}^{x}f\left(y\right)\mathrm{d}y\geqslant\frac{x^n-x^{2n}}{2}, \forall x\in\left[0,1\right]\right\};$$

$$B\triangleq\left\{f\in C\left[0,1\right]:\int_{x}^{1}f\left(y\right)\mathrm{d}y\geqslant\frac{1-x^n}{2}, \forall x\in\left[0,1\right]\right\}.$$

(1)证明

$$\min_{f\in B}\int_0^1\left|f\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{n^2}{8n-4}.$$

(2)证明

$$\min_{f\in A}\int_0^1\left|f\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{n^2}{8n-4}.$$

26.9 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟二

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2025)

第二次模拟

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

(1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^5+k^4}=$_____.

(2) 设 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, 计算 $y'(0)=$_____.

(3) 设曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 上的点 P 处切平面平行平面 $2x+2y-z=0$, 则 P 的坐标为_____.

(4) 设 $f(x,y,z,t),g(y,z,t),h(u,v,w)$ 是可微函数且 $u(x,y)$ 由方程组

$$u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$$

确定. 若 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$, 计算 $\frac{\partial u}{\partial y}=$_____.

(5) 设 $a>0,b>a+2$, 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\right]=$_____.

二、(本题满分 14 分)

求解微分方程

$$x^2y''-xy'+2y=x\ln x.$$

三、(本题满分 14 分) 设 $f\in D^2[0,1]$ 使得

$$f(0)=0,\int_0^{\frac{1}{3}}f(x)\,\mathrm{d}x=0,f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)=0.$$

证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)+[f(\xi)f'(\xi)]^2=0.$$

四、(本题满分 14 分) 设 $R,a,h>0,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 计算

$$\int_L (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z,$$

这里

(1) :

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=R^2,\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\right\}.$$

从 z 轴正向看过是逆时针方向.

(2) :

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=a^2,y=x\tan\alpha\right\}.$$

从 y 轴正向看过是逆时针方向.

五、(本题满分 14 分) 设 $x_1=-2,y_1=1,z_1=-1$, 且对 $n\geqslant 1$ 有

$$\begin{cases}x_{n+1}=3x_n-6y_n-z_n\\ y_{n+1}=-x_n+2y_n+z_n\\ z_{n+1}=x_n+3y_n-z_n\end{cases}.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n+z_n}{3^n+5^n}$.

六、(本题满分 14 分) 设

$$x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{\sqrt{n}},n=1,2,\cdots.$$

求 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的范围使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

26.10 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟三

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2025)

第三次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin(x-t)^3\mathrm{d}t}{x\int_0^x\sin(x-t)^3\mathrm{d}t}=$ _____.

(2) $f(x)=\left|x^3-4x\right|\sqrt[3]{x^2-2x-8}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的的不可导点的数量为_____.

(3) 设 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 满足 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1},n=1,2,\cdots$, 则对 $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}(0)=$_____.

(4) 设 $F\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right),a,b\neq 0,a\frac{\partial F}{\partial u}+b\frac{\partial F}{\partial v}\neq 0$, 则曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ 上任一点处的切平面都平行于一条固定直线为_____.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n}=$_____.

二、**(本题满分 14 分)** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f'(0)=a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

计算 f 表达式.

三、**(本题满分 14 分)** 设

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x^2+y^2}-x\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}+x\right\}.$$

计算

(1)D 的面积;

(2)D 边界的周长;

(3)D 绕 y 轴旋转一周的旋转体体积.

四、**(本题满分 14 分)** 在球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2},x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 上取 $(1,0,0),(0,1,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为顶点的球面三角形 Σ. Σ 上的法向量满足第三个分量 $\cos\gamma>0$, 计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}.$$

五、**(本题满分 14 分)** 设 $f,g\in C[a,b]$, g 在 (a,b) 可微且 $g(a)=0$. 若 $\lambda\neq 0$, 使得

$$|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant|g(x)|,x\in(a,b).\tag{26.4}$$

证明 $g(x)=0,\forall x\in[a,b]$.

六、**(本题满分 14 分)** 设 a_n 递减到 0 且 $b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\geqslant 0,n=1,2,\cdots$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$ 收敛并计算值.

26.11 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟四

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2025)

第四次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.

2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

(1) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$_____.

(2) 设柱面的准线 $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ z=0\end{cases}$, 母线方向为 $(5,3,2)$, 计算柱面方程_____.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+z^2=xyf\left(z^2\right)$ 确定. 若 f 是可微函数, 则化简 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(4) 设 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$, 计算 $\int_L xy\mathrm{d}s=$_____.

(5) 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上一个点 $(x,f(x)), x\neq 0$ 处作切线, 此切线在 x 轴截距为 μ. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(\mu)}{\mu f(x)}=$_____.

二、(本题满分 14 分) 设 $f\in D^2[0,1]$ 满足 $f'(0)=0, f'(1)+2f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+\left(2+4\xi^2\right)f(\xi)=0.$$

三、(本题满分 14 分) 计算

$$\int_L\left(x^2-|x|y\right)\mathrm{d}x+\left(2x|y|+y^2\right)\mathrm{d}y+\left(3-x-y+e^{-z^2}\right)\mathrm{d}z,$$

这里从 $(0,1,1)$ 到 $(-1,0,-1)$ 到 $(0,-1,-1)$ 到 $(1,0,1)$ 沿着 $L=\begin{cases}|x|+|y|=1\\ z=\frac{4}{\pi}\arctan(x+y)\end{cases}$ 进行.

四、(本题满分 14 分)

(a)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A\in\mathbb{R}$, 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}.$$

(b)若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

收敛.

五、(本题满分 14 分) 考虑可微函数 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 满足 $|f'|\leqslant 1$. 记

$$m\triangleq\min_{x\in[0,1]}f(x), M\triangleq\max_{x\in[0,1]}f(x), \beta\triangleq\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x,$$

(a)证明:

$$e^x+e^y-2<e^{x+y}-1, \forall x,y>0.$$

(b)设

$$h_1(t)\triangleq\frac{e^{(\alpha+1)\int_0^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1}{1+\alpha}f^{\alpha+1}(t)-\int_0^t f^{\alpha}(x)\mathrm{d}x,$$

判断 h_1 在 $[0,1]$ 的单调性.

(c)证明: 对 $\alpha>-1$ 有

$$\int_0^1 f^\alpha(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(e^{(\alpha+1)\beta}-1\right).$$

六、(本题满分 14 分) 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 是非负的且满足

$$f'(x)\geqslant 4-f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

证明:

$$f(x)\geqslant 2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

26.12 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟五

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2025)

第五次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\sqrt[5]{\frac{3x^3+7}{3x^3-x}}-x\sin\frac{1}{x}\right]=$_____.

(2) 设可微函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$. 则 z 在 $x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1$ 上的最大值和最小值之和为_____.

(3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转一周形成旋转曲面方程为_____.

(4) 微分方程 $(xy+y+\sin y)\,\mathrm{d}x+(x+\cos y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解为_____.

(5) 区域 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqslant 1$ 围成的面积为_____.

二、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 考虑 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 若有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}},\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t}{x}=-1,$$

求 f 表达式.

三、**(本题满分 14 分)** $x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1$ 的公共部分的体积为?

四、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C^1[0,1]$ 且不恒为 0. 若 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x>2\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{26.5}$$

五、**(本题满分 14 分)** 设 $f\in C^2[a,b], |f(x)|\leqslant A, |f''(x)|\leqslant B$, 且存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $|f'(x_0)|\leqslant D$, 证明

$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}+D, \forall x\in[a,b].$$

六、**(本题满分 14 分)** 设

$$a_1=5, 3a_{n+1}=(1+a_n)^3-5, n=1,2,\cdots,$$

计算

(1):$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}$.

(2)是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{3^n}$ 存在?

26.13 2025 全国大学生数学竞赛预赛非数学类模拟六

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(非数学 A&B 类, 2025)

第六次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\ln(1-x)-\ln\left(1-x^2\right)}{x^4}=$_____.

(2) 设 $z=f(u)$, 方程 $u=g(u)+\int_y^x p(t)\,\mathrm{d}t$ 确定 u 为 x,y 的函数. 若 $f(u), g(u), p(t)$ 均可微, 则 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(3) 顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} x^2 = 2py \\ z = k \end{cases}$ $(k, p \neq 0)$ 的锥面方程为_____.

(4) 设 $a \in \mathbb{R}$, 计算

$$\iint_{x^2+y^2 \leqslant ax} \left(x^3 y + y^3 \sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

_____.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n 2^{2n} (1-x)^n x^n$ 的收敛域是 _____.

二、**(本题满分 14 分)** 计算

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^2-k} - e \right) \right].$$

三、**(本题满分 14 分)** 设 $f \in D^3[-1,1]$ 满足

$$f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0.$$

证明存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $|f'''(\xi)| \geqslant 3$.

四、**(本题满分 14 分)**

设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且 $\Sigma : z = \sqrt{x^2+y^2}\left(1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\right)$, 取下侧, 则计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [yf(xy) + 2y + x]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [zf(xy) + z]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

五、**(本题满分 14 分)** 设正值函数 $f, g \in C[0,1]$ 和正值函数 $K \in C[0,1]^2$ 满足

$$f(x) = \int_0^1 g(y) K(x,y)\,dy, g(x) = \int_0^1 f(y) K(x,y)\,dy.$$

证明

$$f(x) = g(x), \forall x \in [0,1].$$

六、**(本题满分 14 分)** 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,+\infty), 0 < p < 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^{1-p},$$

且右端系数 $\frac{1}{1-p}$ 是最佳的.

第 27 章 数学类模拟

内容提要

- 低年级决赛水平测试 27.1
- 高年级决赛水平测试 27.2
- 2024 数学类模拟一 27.3
- 2024 数学类模拟二 27.4
- 2024 数学类模拟三 27.5
- 2024 数学类模拟四 27.6
- 2024 数学类模拟五 27.7
- 2024 数学类模拟六 27.8
- 2025 数学类模拟一 27.9
- 2025 数学类模拟二 27.10
- 2025 数学类模拟三 27.11
- 2025 数学类模拟四 27.12
- 2025 数学类模拟五 27.13
- 2025 数学类模拟六 27.14

注模拟答案可以在正版课程文件中找到.

27.1 全国大学生数学竞赛数学低年级决赛水平测试

填空题 6 已知曲面 $z=xy$, 在曲面上找一点使得该点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直, 则该点的坐标为 _____.

填空题 7 设 C 是被积函数定义域内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线,
则 $\oint_C \left[x\ln\left(x^2+y^2-1\right)dx+y\ln\left(x^2+y^2-1\right)dy\right]=$ _____.

填空题 8 设二次型 $f(x,y,z)=\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)+3y^2-4xy-2xz+4yz$ 为实一次多项式的完全平方, 则求 $\lambda=$ _____.

填空题 9 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数满足 $y(x)=\frac{1}{1+x^2}+\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$, 则 $y(x)=$ _____.

解答题 7
1. 求不等于 1 的正实数 a,b 的范围, 使得存在平面与曲面 $\frac{x^2}{b^2}+y^2+\frac{z^2}{16}=1, \frac{x^2}{a^2}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$ 交线都是圆.
2. 对于上述范围中的 a,b, 求出存在的平面的方程.

解答题 8
1. 对于 n 是奇数和 $A=(a_{ij})\in\mathbb{Z}^{n\times n}$, 如果 $a_{ii}, 1\leqslant i\leqslant n$ 是偶数且 $a_{ij}+a_{ji}, i\neq j$ 是偶数, 证明 $\det A$ 是偶数.
2. 如果 n 为偶数, 是否仍然有 $\det A$ 是偶数?.

解答题 9 设 $0\leqslant a<b$, 是否存在 $f\in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)x^{2n}\mathrm{d}x>0, \int_a^b f(x)x^{2n+1}\mathrm{d}x<0, n=0,1,2,\cdots. \tag{27.1}$$

如果存在, 请给出存在, 如果不存在, 请给出理由.

解答题 10 设数列 x_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(14(n+2)x_{n+2}-15(n+1)x_{n+1}+nx_n\right)=13,$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求值.

解答题 11 设 $A=\begin{pmatrix}4 & -\sqrt{5}\\ 2\sqrt{5} & -3\end{pmatrix}$ 且 $n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}, |m|\leqslant n$. 求 (m,n) 的范围使得 $A^n-\left(m+n^2\right)A$ 的每个元素都是整数.

解答题 12 证明微分方程 $y'=\sin y^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在解, 但不存在无界解.

27.2 全国大学生数学竞赛数学高年级决赛水平测试

27.2.1 必做部分

填空题 10 已知曲面 $z=xy$, 在曲面上找一点使得该点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直, 则该点的坐标为 _____.

填空题 11 设 C 是被积函数定义域内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线,
则 $\oint_C \left[x\ln\left(x^2+y^2-1\right)dx+y\ln\left(x^2+y^2-1\right)dy\right]=$ _____.

填空题 12 设二次型 $f(x,y,z)=\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)+3y^2-4xy-2xz+4yz$ 为实一次多项式的完全平方, 则求 $\lambda=$ _____.

填空题 13 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数满足 $y(x)=\frac{1}{1+x^2}+\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt$, 则 $y(x)=$ _____.

解答题 13 1. 求不等于 1 的正实数 a,b 的范围, 使得存在平面与曲面 $\frac{x^2}{b^2}+y^2+\frac{z^2}{16}=1, \frac{x^2}{a^2}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$ 交线都是圆.

2. 对于上述范围中的 a,b, 求出存在的平面的方程.

解答题 14 1. 对于 n 是奇数和 $A=(a_{ij})\in\mathbb{Z}^{n\times n}$, 如果 $a_{ii}, 1\leqslant i\leqslant n$ 是偶数且 $a_{ij}+a_{ji}, i\neq j$ 是偶数, 证明 $\det A$ 是偶数.

2. 如果 n 为偶数, 是否仍然有 $\det A$ 是偶数?.

解答题 15 设 $0\leqslant a<b$, 是否存在 $f\in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)x^{2n}\mathrm{d}x>0, \int_a^b f(x)x^{2n+1}\mathrm{d}x<0, n=0,1,2,\cdots. \tag{27.2}$$

如果存在, 请给出存在, 如果不存在, 请给出理由.

27.2.2 选做部分

五题任选三题.

解答题 16 (实变函数) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导, 证明 : $\forall\delta>0$, 存在可测集 $E_\delta\subset[a,b], m([a,b]/E_\delta)<\delta$, 使得

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}=f'(x), \text{关于} x\in E_\delta \text{一致}.$$

解答题 17 (复变函数) 求所有整函数 f, 使得

$$|f(z)|\leqslant e^{\Re(z)\cdot\Im(z)}, \forall z\in\mathbb{C}. \tag{27.3}$$

解答题 18 (抽象代数) 设 150 阶群 G 有两个不同的 *Sylow*-5 子群, 证明 G 有同构 $\mathbb{Z}_5$ 的 5 阶正规子群.

解答题 19 (微分几何) 1. 如果在曲面 S 上存在两族相互正交的曲线, 每族内曲线的的测地曲率是绝对常数, 求证此曲面必是负常 *Gauss* 曲率曲面或可展曲面.

2. 证明曲面 S 上测地圆均具有常测地曲率的充分必要条件是 S 为常 *Gauss* 曲率的曲面.

解答题 20 (概率论) 假定 $X_1,X_2,\cdots$ 为一族实值随机变量, $c\in\mathbb{R}$. 证明: 存在常数列 $a_n,b_n, n\in\mathbb{N}$ 使得 $a_n>0, n\in\mathbb{N}$ 且 $a_n^{-1}(X_1+X_2+\cdots+X_n-b_n)$ 依分布收敛到随机变量 c.

解答题 21 (数值分析) 已知解常微分方程初值问题 $\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ 的某线性二步法的第一特征, 第二特征多项式分别为

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}, \sigma(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda^2. \tag{27.4}$$

解决如下问题

1. 给出此线性二步法的表达式, 并求其局部截断误差主项.
2. 讨论其收敛性.
3. 求其绝对稳定区间.

27.3 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟一

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2024)

第一次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 设 $a, b > 0$, 求 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 上相互垂直的直母线的交点轨迹.

二、**(本题满分 15 分)** 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且有周期 $T > 0$, F 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数, 证明:

$$\int_0^T \left[F(nx) - F(x) - f(x)\frac{(n-1)T}{2} \right] dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

三、**(本题满分 20 分)** 设矩阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(1): 若 A, B 可逆且存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 有 $A^k \sim B^k, \forall k \geqslant N$. 证明: 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $A^k \sim B^k$.

(2): 若 A, B 不可逆, (1) 是否仍然成立?

四、**(本题满分 15 分)**

(1): 设 $m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, 证明: 存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant m$ 成立

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \alpha_{i_j} \right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|.$$

(2): 设 $m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, 证明: 存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant m$ 成立

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \alpha_{i_j} \right| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|.$$

五、(本题满分 15 分) 设 $n,m\in\mathbb{N}$, 考虑矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1^n & 2^n & \cdots & m^n\\ 2^n & 3^n & \cdots & (m+1)^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m^n & (m+1)^n & \cdots & (2m-1)^n\end{pmatrix}.$$

(1): 若 $m\geqslant n+2$, 求 $\det A$.

(2): 若 $m\geqslant n+1$, 求矩阵 A 的秩.

六、(本题满分 20 分)

设 $m,k\in\mathbb{N}$, k 充分大, 证明: 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 存在取值 ±1 的数列 $\{a_n\}_{n=2024^m}^{\infty}$ 使得

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\cdots\cdot\underbrace{\ln\ln\cdots\ln}_{m个}n}=x.$$

27.4 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟二

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2024)

第二次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 求不等于 1 的正实数 a,b 满足的关系, 使得某个平面与两曲面 $\frac{x^2}{b^2}+y^2+\frac{z^2}{16}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$ 的截线都是圆.

二、**(本题满分 15 分)** 设 A 是三阶实对称矩阵, $|A|=-1$, $A^2=E$, A 的两个特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

若 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 不是 A 的特征向量, 求 A, $\left|A^{2022}+2021A^*\right|$, 这里 A^* 是 A 的伴随矩阵.

三、**(本题满分 20 分)**

设 $f\in C[0,1]$, $g(t)=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: $g\in C(\mathbb{R})$ 的充要条件是 $f(0)=0$.

四、(本题满分 15 分) 设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 单位球, u 是 $\mathbb{R}^2$ 上二阶连续可微函数且满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geqslant u, & (x,y)\in U \\ u(x,y)=0, & (x,y)\in \partial U \end{cases}.$$

证明:

$$u(x,y)\leqslant 0, \forall (x,y)\in \overline{U}.$$

五、(本题满分 15 分) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^3=0$, 证明:

(1)存在唯一的 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $X+AX+XA^2=A$;

(2)证明上述解 X 是 A 多项式并把 X 用 A 表示出来.

六、(本题满分 20 分) 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 是严格递减函数且 $f([0,1])\subseteq[0,1]$.

(1)证明: 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $a_n\in(0,1)$ 使得是 $f(x)=x^n$ 的解, 并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2)若 $f(1)=0, f'(1)<0$, 求 α 的取值范围, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\alpha}$ 收敛.

27.5 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟三

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2024)

第三次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、(本题满分 15 分) 由椭球面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0$ 中心 O 任意引三条相互垂直的射线, 与 S 交于 A,B,C. 证明:

$$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}+\frac{1}{|OC|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

二、(本题满分 15 分) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\sqrt[n^2]{1^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot n^n}\right)-\ln\sqrt{n}\right].$$

三、(本题满分 20 分) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是幂等矩阵使得

$$A_iA_j=-A_jA_i, \forall 1\leqslant i<j\leqslant k.$$

证明: 存在一个 $i=1,2,\cdots,k$ 使得 $\operatorname{rank}(A_i)\leqslant\frac{n}{k}$.

四、(本题满分 15 分) 设 a_n 递减到 0, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n2^{-n}$ 同敛散, 这里

$$b_n\triangleq\max\left\{k:a_k\geqslant 2^{-n}\right\}.$$

五、(本题满分 15 分) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且存在 $n+1$ 个不同实数 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$ 使得

$$A+t_iB,i=1,2,\cdots,n+1$$

是幂零矩阵, 证明 A,B 都是幂零矩阵.

六、(本题满分 20 分) 设 $f\in C^2[0,+\infty),g\in C^1[0,+\infty)$ 且存在 $\lambda>0$ 使得 $g(x)\geqslant\lambda,\forall x\geqslant 0$.

若 g' 至多只有有限个零点且

$$f''(x)+g(x)f(x)=0,\forall x\geqslant 0,$$

证明: f 在 $[0,+\infty)$ 有界.

27.6 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟四

第十六届全国大学生数学竞赛预赛
(数学 A&B 类, 2024)
第四次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、(本题满分 15 分) 设直线 $\begin{cases}x=2t\\y=k\\z=t\end{cases}$ 绕 z 轴旋转得到一个曲面, 这里 $k\neq 0$ 是给定实数, t 是参数,

(1)求该曲面方程,

(2)求该曲面上与上述直线垂直相交的直母线方程.

二、(本题满分 15 分) 是否存在双射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^2}<\infty.$$

如果存在, 请给出例子, 如果不存在, 请说明理由.

三、(本题满分 20 分)

设非负函数 $f\in C^3(\mathbb{R})$ 且满足 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)>0$. 设

$$g(x)=\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)', & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

解决下述问题:

(1)证明 g 在 $x=0$ 邻域内有界;

(2)如果 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 则 (1) 是否还成立?

四、(本题满分 15 分) 设 $n\in\mathbb{N},n\geqslant 2$, 求所有的 $k\in\mathbb{N}$ 使得对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 成立

$$A^kA^*=A\Rightarrow A^*=A,$$

这里 A^* 表示 A 的共轭转置.

五、(本题满分 15 分) 设 $n>1$ 是奇数, 矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 满足

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & i=j\\ 1, & i-j\equiv\pm2\,(\mathrm{mod}\,n)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

计算 $\det A$.

六、(本题满分 20 分) 设 $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0,k=0,1,2,\cdots,n-1$, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)!}\int_0^1\left|f^{(n)}(x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

27.7 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟五

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2024)

第五次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、(本题满分 15 分) 证明: 集合

$$\left\{\left\{\frac{t}{1+t^2+t^4},\frac{t^2}{1+t^2+t^4},\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\right\}:t\in\mathbb{R}\right\}$$

在一个球面上, 并求出球面方程.

二、(本题满分 15 分) 设 $a_0=\frac{5}{2},a_k=a_{k-1}^2-2,k=1,2,\cdots$, 计算

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a_k}\right).$$

三、(本题满分 20 分) 设 Q 是实 n 阶正交矩阵, $u\in\mathbb{R}^n$ 是一个单位列向量, $P=I-2uu^T$. 证明: 若 1 不是 Q 特征值, 则 1 是 PQ 特征值.

四、(本题满分 15 分) 设 $f\in C^1[0,1],m\in\mathbb{N},A=f(1),B=\int_0^1 x^{-\frac{1}{m}}f(x)\,\mathrm{d}x$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right).$$

五、(本题满分 15 分) 设 A 是可逆复矩阵, 证明: $X^2=A$ 只有有限个解 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的充要条件是和 A 乘法可交换的矩阵只能是 A 的多项式.

六、(本题满分 20 分) 设 $f\in C^2(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+} f''(x)=+\infty.$$

证明:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{f'(x)}=0.$$

27.8 2024 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟六

第十六届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2024)

第六次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、(本题满分 15 分) 平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 的交线是两条直线, 证明: $A^2+B^2=C^2+D^2$.

二、(本题满分 15 分) 假设 T 是数域上的线性空间 V 上的线性变换且存在 $v\in V$ 使得 $v,Tv,\cdots,T^{n-1}v$ 是 V 的一组基, T 的极小多项式为 $m(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, 这里 $\{\lambda_i\}$ 互不相同, 证明: 该数域上的多项式 p 满足存在 $u\in V$ 使得 $u,p(T)u,\cdots,p^{n-1}(T)u$ 也是 V 的一组基当且仅当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 时 $p(\lambda_i)\neq p(\lambda_j)$ 且 $n_i>1$ 时 $p'(\lambda_i)\neq 0$.

三、(本题满分 20 分) 设 $||u||$ 表示实数 u 到最近整数的距离, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n\left|\left|\frac{n}{x}\right|\right|\mathrm{d}x.$$

四、(本题满分 15 分) 设 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty},\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b]$, 若

$$h_n\geqslant h_{n+1},g_{n+1}\geqslant g_n,n=1,2,\cdots,\lim_{n\to\infty}h_n=\lim_{n\to\infty}g_n\text{存在.}$$

证明: $\{g_n\}_{n=1}^{\infty},\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛.

五、(本题满分 15 分) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间, φ,ψ 是 V 上线性变换满足 $\varphi\psi=\psi\varphi$. 证明: 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\mathrm{Im}(\varphi^m+\psi^m)=\mathrm{Im}\varphi^m+\mathrm{Im}\psi^m.$$

六、(本题满分 20 分) 证明存在 $c_1,c_2>0$ 使得

(a).

$$\left|\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{c_1}{k^{\frac{3}{2}}},\forall k>1;$$

(b).

$$\left|\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{c_2}{k}, \forall k > 1.$$

27.9 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟一

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2025)

第一次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 已知椭圆抛物面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$, 求过点 $(1,0,1)$ 且与椭圆抛物面交线是圆的所有平面方程.

二、**(本题满分 15 分)** 设 $a_n \downarrow 0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n \ln n\}$ 有界且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\ln n$ 收敛.

三、**(本题满分 20 分)** 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}, u,v\in\mathbb{R}^n$ 且 A,u,v 元素都是正数并满足 $Au=v, Av=u$. 证明:$u=v$.

四、**(本题满分 15 分)** 设 $f\in C[0,+\infty)\bigcap D^1(0,+\infty)$ 满足

$$f(0)\geqslant 0, f'(x)\geqslant f^3(x), \forall x>0.$$

证明:

$$f(x)=0, \forall x\geqslant 0.$$

五、**(本题满分 15 分)** 设 $n\geqslant 1$ 次不可约多项式 $f\in\mathbb{Q}[x]$ 的 n 个根是实数且成等差数列, 证明:$n\leqslant 2$.

六、**(本题满分 20 分)** 设

$$x_n=\int_0^1 \ln(1+x+\cdots+x^n)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots.$$

(1)证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(2)计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\ln n}(2-x_n)\right]$.

27.10 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟二

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2025)

第二次模拟

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 设 $a,b,c>0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 求经过这个曲面腰椭圆上任意一个点的两条直母线所决定的平面和腰椭圆所在平面的夹角.

二、**(本题满分 15 分)** 设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 满足

$$|f(x)|\leqslant e^{-\sqrt{x}},f'(x)=-3f(x)+6f(2x),\forall x\geqslant 0.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\int_0^\infty x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

收敛并且证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n!}\int_0^\infty x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)=0$$

的充要条件是 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

三、**(本题满分 20 分)** 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, $A,B,M\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $AM=MB$ 且 A,B 有相同的特征多项式, 证明: 对任何 $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 都有

$$\det(A-MX)=\det(B-XM). \tag{27.5}$$

四、**(本题满分 15 分)** 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{2025\times 2025}$ 满足

$$a_{ii}=i^3+3i^2+2i,a_{ij}=\begin{cases}3(i-j)+1, & i<j\\ 3(i+j)+2, & i>j\end{cases}.$$

证明:$3|\det A$.

五、**(本题满分 15 分)** 设连续函数 $g:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足 g 单调递减. 设

$$x_0>0,x_{n+1}=x_n+g(x_n),n=0,1,2,\cdots,$$

以及 $x\in D^1[0,+\infty)$ 满足

$$x(0)=x_0,x'(t)=g(x(t)),\forall t\geqslant 0.$$

证明

$$x_n=x(n)+O(1),n\to\infty.$$

六、**(本题满分 20 分)** 设 $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ 是连续满射且满足对某个 $M>0,\alpha\in(0,1)$ 有

$$|\gamma(s)-\gamma(t)|\leqslant M|s-t|^\alpha,\forall s,t\in[0,1].$$

证明:$\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

本题在 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时存在满足条件的例子, 即 Peano 曲线, 希望读者可以查阅并学习 Peano 曲线的构造, 如果考试, 是可能把这个构造加进来的.

27.11 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟三

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2025)

第三次模拟

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 设双叶双曲面 $S: x^2+y^2-z^2=-2$, 以 $(1,1,-1)$ 为顶点且与 S 的上半叶相切的所有切线构成的锥面为 σ. 求 σ 的方程和所有切点构成的平面方程.

二、**(本题满分 15 分)** 设 $p\in\mathbb{Z}[x]$ 使得 p 在 7 个不同整数点取值为 7, 证明 p 没有整数根.

三、**(本题满分 20 分)** 设

$$E\triangleq\left\{u\in C[0,1]: u^2(t)\leqslant 1+4\int_0^t s|u(s)|\,\mathrm{d}s, \forall t\in[0,1]\right\},$$

计算

$$\max_{u\in E}\int_0^1\left[u^2(s)-u(s)\right]\mathrm{d}s.$$

四、**(本题满分 15 分)**设

$$S_n=\sum_{k=0}^n a_k,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n S_k=+\infty.$$

假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x\in(-1,1)$ 收敛, 证明:

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty.$$

五、**(本题满分 15 分)**

(1)证明: 不存在 $A,B,C\in\mathbb{Z}^{2\times2}$ 使得

$$\det A=\det B=\det C=1, A^4+B^4=C^4.$$

(2)是否存在 $A,B,C\in\mathbb{Z}^{2\times2}$ 使得

$$\det A=\det B=\det C=1, A^2+B^2=C^2?$$

六、**(本题满分 20 分)** 给定 $f,g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 且 f 连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. 若有不等式

$$|f(x)-f(y)|\leqslant g(x)\sup_{t\in[x,y]}f(t), \forall 0\leqslant x<y. \tag{27.6}$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

27.12 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟四

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2025)

第四次模拟

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 设 L_1, L_2 是两条互不相交的异面直线且分别通过 L_1, L_2 作两个互相垂直的平面. 求证交线轨迹是单叶双曲面或者两张相交平面.

二、**(本题满分 15 分)** 求 p, q 的范围使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p+n^q x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

三、**(本题满分 20 分)** 设 $f \in C(0,1]$ 且对某个 $\mu > 1$ 有

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[f(\mu x) - f(x)\right] = A.$$

证明: $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)$ 存在.

四、**(本题满分 15 分)**给定 n 阶实矩阵 A, 设 A^TA 的特征值是 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$, 且

$$1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0,$$

证明

$$|E_n - A| \geqslant (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n).$$

五、**(本题满分 15 分)** 设

$$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, n = 1, 2, \cdots,$$

证明当 $1 \leqslant i < j$, 我们有 p_i, p_j 互素.

六、**(本题满分 20 分)** 证明:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2} = -1. \tag{27.7}$$

27.13 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟五

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2025)

第五次模拟

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 用通过坐标轴的平面和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(0<a<b<c)$ 相截, 证明有且仅有两个平面使得截面曲线是圆. 并说明两张截面的位置.

二、**(本题满分 15 分)** 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}^{n}}x^n$.

(1)求出 f 的定义域并证明:

$$x(x-4)f'(x)+(x+2)f(x)=-x, x\in(-4,4).$$

(2)计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}^{n}}$.

三、**(本题满分 20 分)** 设 $A=\begin{pmatrix}4 & -\sqrt{5}\\ 2\sqrt{5} & -3\end{pmatrix}$, 求所有 $n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}$ 使得 $|m|\leqslant n$ 且 $A^n-\left(m+n^2\right)A$ 是整数矩阵.

四、**(本题满分 15 分)**设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是有限段分段单调的连续函数. 且在每个段上 f 是严格单调的. 我们用 $l(f)$ 表示 f 的极大的严格单调的区间的个数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ell\left(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次复合}}\right)}$$

收敛.

例如对

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2x-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ \frac{5}{2}(1-x), & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases},$$

我们有 $l(f)=l(g)=2$.

五、**(本题满分 15 分)** 设 $A,B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $AB-BA=\overline{C}C^T$. 设 $a,b\in\mathbb{C}$ 使得

$$f(A,B)=0, f\in\mathbb{C}[x,y]\Rightarrow f(a,b)=0.$$

证明存在 $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 使得 $Av=av, Bv=bv$.

六、**(本题满分 20 分)** 设非负函数 $f\in C[0,1]$, 证明

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{9}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^3. \tag{27.8}$$

27.14 2025 全国大学生数学竞赛预赛数学类模拟六

第十七届全国大学生数学竞赛预赛

(数学 A&B 类, 2025)
第六次模拟

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.
4. $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, $\mathbb{N}_0$ 表示全体非负整数.

一、**(本题满分 15 分)** 证明: 在空间直角坐标系中, 顶点在坐标原点的二次锥面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx=0$$

有三条相互垂直的直母线的充要条件是 $A+B+C=0$.

二、**(本题满分 15 分)** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$, 求解线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0;\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0;\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0.\end{cases}$$

三、**(本题满分 20 分)** 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是双射, 证明下述之一必然成立:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+f(n)}=+\infty,\ \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{f(n)}\right)=+\infty.$$

四、(本题满分 15 分)设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵, $Q\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 满足 $Q^TQ=I_m$. 证明:$Q^TA^{-1}Q-\left(Q^TAQ\right)^{-1}$ 是半正定矩阵.

五、(本题满分 15 分) 设 $f\in C^1(1,+\infty)$ 满足

$$f(x)\leqslant x^2\ln x,f'(x)>0,\forall x\in(1,+\infty).$$

证明:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x=+\infty.$$

六、(本题满分 20 分) 设严格递增数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$, 并记 $N(x)\triangleq\sum\limits_{a_n\leqslant x}1$. 若

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_n}=+\infty,$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{\ln x}=+\infty$.

第 28 章 数学专业考研模拟数学分析

28.1 2026 考研数学分析一

绝密 ★ 启用前　　试卷类型：考研数学

清疏数学考研全程班 26 考研模拟和答案购买
全新清疏数学 26-27 考研竞赛全程班 点我购买

数学分析

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。
6. 本次考试时长为 3 小时。

试卷条形码

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

解答题。（共 10 个大题，共 150 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将解答写在答题卡指定位置上。）

1. 计算题. (每题 10 分, 共 30 分)
   (1) 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;
   (2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$;
   (3) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

2. (每题 5 分, 共 15 分)

(1) 设 Σ 是空间任意光滑封闭曲面, 方向朝外. 设

$$I(\Sigma)=\iint_{\Sigma}(xz-2x^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(yz+2y^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z-z^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求 $I(\Sigma)$ 的最大值;

(2) 计算 $I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 这里

$$L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x,y,z\geqslant 0\right\},$$

从 $(1,0,0)$ 到 $(0,0,1)$;

(3) 判断收敛性 $\iint_{|x|+|y|\leqslant a^2}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. (本题满分 10 分) 设 $u=x+y,v=x+2y$, 则化简关于 $z=z(x,y)$ 的偏微分方程

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

并以此求 z 表达式.

4. (本题满分 15 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数且 $f(0,1)=f(1,0)$, 证明存在单位圆周上两个不同的点使得 $y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}$.

5. (本题满分 15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上可微且 $f'(a)=f'(b)$, 证明存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$f(c)-f(a)=(c-a)f'(c).$$

6. (本题满分 10 分) 证明: $f(x)=x^\alpha\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续的充要条件是 $\alpha\in(0,1)$.

7. (本题满分 15 分) 设 f 在 $[0,1]$ 上递增, 对任何 $a\in\mathbb{R}$, 证明

$$\int_0^1|f(x)-a|\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}x.$$

8. (本题满分 15 分) 设 f 在闭区间 $[0,1]$ 二阶可导且 $f(0)=0$. 若 f 满足

$$xf''(x)+2f'(x)-f(x)=0,$$

证明 $f(x)=0,\forall x\in[0,1]$.

9. (本题满分 15 分) 设 $f(\lambda)=\int_0^\infty x\sin\left(x^3-\lambda x\right)\mathrm{d}x$, 证明 $f\in C(\mathbb{R})$.

10. (本题满分 10 分) 判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^ne^{-nx^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 的一致收敛性.

28.2 2026 考研数学分析二

绝密 ★ 启用前　　**试卷类型：考研数学**

清疏数学考研全程班 26 考研模拟和答案购买

全新清疏数学 26-27 考研竞赛全程班 点我购买

数学分析

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。
6. 本次考试时长为 3 小时。

试卷条形码

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

解答题。（共 10 个大题，共 150 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将解答写在答题卡指定位置上。）

1. 计算题. (每题 10 分, 共 30 分)

   (1) 设 $t \in [0,2]$, 计算

   $$\int_0^t \frac{\arctan x}{\arctan\left(\frac{t}{x^2-tx+1}\right)}\mathrm{d}x.$$

   (2) 对 $n \in \mathbb{N}$, 计算

   $$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sqrt{x^2+k}\right).$$

   (3) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}\left(n^2+i^2\right)^{\frac{1}{n}}\right)$.

2. (每题 5 分, 共 15 分)

   (1) 设

   $$V \triangleq \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z>0, x+y+z<1\right\},$$

   计算

   $$I = \iiint_V \sin\frac{z}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

   (2) 计算 $I = \int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} |y|\,\mathrm{d}s\ (a>0)$;

   (3) 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在 $z=0$ 和 $z=xy$ 之间部分的面积.

3. (本题满分 10 分) 设 $u=u(x,y)$ 有二阶连续偏导数满足

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u(x,2x)=x, u'_x(x,2x)=x^2.$$

计算

$$u''_{xx}(x,2x),u''_{xy}(x,2x),u''_{yy}(x,2x).$$

4. (本题满分 15 分) 求 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=3$ 确定的 $z=z(x,y)$ 的极值.

5. (本题满分 15 分) 设 $f\in C[0,1]\bigcap D^2(0,1)$ 且 $f''(x)\neq 0$. 若

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0, f(0)=f(1)>0,$$

证明:

(1): $f''(x)>0,\forall x\in(0,1)$;

(2): $f(x)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 上恰有两根;

(3): 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi)=\int_\xi^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. (本题满分 10 分) 判断下列函数在指定区间的一致连续性

(1): $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$;

(2): $f(x)=\sin(x\sin x), x\in[0,+\infty)$.

7. (本题满分 15 分) 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^\alpha x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛性.

8. (本题满分 15 分) 设 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 存在, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)$, 证明 f 在 $(0,a]$ 一致连续.

9. (本题满分 15 分) 证明 $\int_1^\infty e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in(0,1)$ 一致收敛.

10. (本题满分 10 分) 设 $a_k>0$ 满足

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(a_k x)}{k^2}\right|\leqslant|\tan x|, x\in(-1,1).$$

证明: $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_k}{k^2}=0$.

第 29 章 数学专业考研模拟高等代数

29.1 2026 考研高等代数一

绝密 ★ 启用前　　试卷类型：考研数学

清疏数学考研全程班 26 考研模拟和答案购买
全新清疏数学 26-27 考研竞赛全程班 点我购买

高等代数

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。
6. 本次考试时长为 3 小时。

试卷条形码

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

解答题。（共 8 个大题，共 150 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将解答写在答题卡指定位置上。）

1. (每题 5 分, 共 30 分) 设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是某个 $\mathbb{Q}[x]$ 中非 0 多项式的根. 令

$$S \triangleq \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\alpha) = 0\}.$$

(1) 证明:S 中存在唯一的首一多项式 p 使得 S 中的任一 f 都可以被 p 整除;

(2) 证明 (1) 中的 p 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;

(3) 对 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, 给出这样一个 p.

(4) 给定 $f(x)=x^3+3x^2+3$, 证明 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;

(5) 若 $\alpha\in\mathbb{C}$ 是 (4) 中 f 的一个根, 定义

$$\mathbb{Q}[\alpha]=\left\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2:a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Q}\right\}.$$

证明对任何 $g\in\mathbb{Q}[x]$ 都有 $g(\alpha)\in\mathbb{Q}[\alpha]$;

(6) 若 $\alpha\in\mathbb{C}$ 是 (4) 中 f 的一个根. 证明: 若 $\beta\in\mathbb{Q}[\alpha]$ 且 $\beta\neq0$, 则存在 $\gamma\in\mathbb{Q}[\alpha]$ 使得 $\beta\gamma=1$.

2. (第一题 5 分, 第二题 10 分, 共 15 分)

(1) 设 $x^3-x^2-4x+1=0$ 在 $\mathbb{C}$ 上的三个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 求

$$F=\alpha_1^3\alpha_2+\alpha_1\alpha_2^3+\alpha_2^3\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^3+\alpha_1\alpha_3^3+\alpha_1^3\alpha_3.$$

(2) 设 $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ 是整系数首一多项式且在 $\mathbb{C}$ 上可以分解为

$$f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i),g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-b_i).$$

证明: 若存在 $u,v\in\mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$, 则

$$\left|\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(a_i-b_j)\right|=1.$$

3. (本题满分 10 分) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n},a_{ij}=a_i-b_j,a_i,b_j\in\mathbb{R}$, 解答

(1) 求 $\det A$;

(2) 当 $n\geqslant2$ 且 $a_1\neq a_2,b_1\neq b_2$, 求齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数和一个基.

4. (本题满分 20 分) 设 $m\in\mathbb{N},B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵. 证明存在 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A^m=B$.

5. (本题满分 20 分) 设 $a_{ij}=a_{ji},a_{ij},b_i,b\in\mathbb{R},\forall i,j=1,2,...,n$, 给定

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+b,$$

且 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 正定. 求 $f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的最小值.

6. (本题满分 20 分) 设 $\mathscr{A}$ 是数域 $\mathscr{F}$ 上有限维空间上的线性变换, 证明

$$\dim\left(R(\mathscr{A})\bigcap\ker\mathscr{A}\right)=r(\mathscr{A})-r\left(\mathscr{A}^2\right).$$

7. (本题满分 20 分) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, V 是 $\mathbb{F}$ 上一个有限维线性空间. 若 V 上非退化双线性函数 f 是全迷向的[1], 证明: 存在一个 V 的子空间 W, 使得

$$W=W^{\perp}\triangleq\{v\in V:f(u,v)=0,\forall u\in W\}. \tag{29.1}$$

且 $\varphi:V\to W^*,v\mapsto f(v,\cdot)$ 为满的线性映射, 其核为 W, 并且 $\dim V$ 为偶数.

8. (本题满分 15 分) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A^2+B^2=2AB$, 证明 A,B 有相同的特征多项式且可同时相似上三角化.

29.2 2026 考研高等代数二

绝密 ★ 启用前　　**试卷类型: 考研数学**

[1]即 $f(\alpha,\alpha)=0,\forall\alpha\in V$.

清疏数学考研全程班 26 考研模拟和答案购买
全新清疏数学 26-27 考研竞赛全程班 点我购买

高等代数

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。
6. 本次考试时长为 3 小时。

试卷条形码

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号														
考生姓名														

解答题。（共 8 个大题，共 150 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将解答写在答题卡指定位置上。）

1. (每题 5 分, 共 20 分) 设 $a,b\in\mathbb{R}$, 考虑有三个线性无关解的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}.$$

(1) 证明线性方程组系数矩阵的秩为 2;
(2) 求 a,b 的值;
(3) 求线性方程组的全部解;
(4) 求线性方程组在 $x_3-x_4=0$ 上长度最小的特解.

2. (第一题 5 分, 第二题 10 分, 共 15 分)

(1) 求所有整数 a 使得 x^2-x+a 可整除 $x^{13}+x+90$.

(2) 求所有 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 x^4-mx^2+1 在有理数上可约.

3. (本题满分 10 分) 设 $n\geqslant 2,\mathbb{K}$ 是一个数域. 设 $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 满足 $AB=0,\operatorname{tr}(A^*)=0$. 证明:$A^*B=0$.

4. (每题满分 20 分) 设 A 是 2021 阶矩阵, 且对角元都为 0, 并且每行恰好有 1010 个 1 和 1010 个 -1, 求 A 所有可能的秩.

5. (本题满分 20 分) 设 $\mathbb{E}_1\subset\mathbb{E}_2\subset\mathbb{E}_3$ 都是域. 若 $\mathbb{E}_2$ 视为 $\mathbb{E}_1$ 上的线性空间维数是 m, $\mathbb{E}_3$ 视为 $\mathbb{E}_2$ 上的线性空间维数是 n. 证明 $\mathbb{E}_3$ 视为 $\mathbb{E}_1$ 上的线性空间维数是 mn.

6. (本题满分 20 分) 对 $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n & x & 2 & & \\ & n-1 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}.$$

7. (本题满分 20 分) 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 是两两正交的. 记 $A=\alpha\beta^T+\beta\gamma^T+\gamma\alpha^T$, 证明 $r(A)=3$ 并判断 A 是否可以相似对角化.

8. (本题满分 15 分) 设 $\mathbb{P}$ 为一数域, $a\in\mathbb{P}$, 证明:

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$$

恰有 $n+1$ 个不同的不变子空间.

第 30 章 习题解答

30.1 非数学类数学分析常识

1. (1.)注本结果以后可以直接使用. 非数学类实数系基本定理互推也只需要会这个.
   注意到
   $$a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1,$$
   我们由单调有界必收敛得
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = c,\ \lim_{n\to\infty} b_n = d,$$
   这里 $a_1 \leqslant c \leqslant d \leqslant b_1$. 显然
   $$[c,d] \subset [a_n,b_n], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow [c,d] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n].$$
   设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n]$, 则 $a_n \leqslant x \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 故让 $n \to +\infty$ 得 $c \leqslant x \leqslant d$, 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \subset [c,d]$. 现在我们知道
   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \subset [c,d].$$
   显然若 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) > 0$ 则 $d > c$. 若 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ 则 $d = c$. 我们完成了证明.
2. (2.) 实际上对任何固定的 $\epsilon > 0$, 由(7.9), 我们知道
   $$g_1(\epsilon) \triangleq \lim_{n\to\infty} f_1(n,\epsilon) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant g_2(\epsilon) \triangleq \lim_{n\to\infty} f_2(n,\epsilon).$$
   由 ϵ 任意性[1]可得 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

笔记 上述过程是严谨的且可以呈现在试卷上. 那么如果要类似命题7.3的证明一样写成 $\epsilon - \delta$ 语言的证明如下:

因为 $\lim_{\epsilon\to 0^+} g_1(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} g_2(\epsilon) = A$, 于是对任何 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得
$$g_1(\delta) > A - \frac{\eta}{2}, g_2(\delta) < A + \frac{\eta}{2}. \tag{30.1}$$
由于 $\lim_{n\to\infty} f_1(n,\delta) = g_1(\delta)$, $\lim_{n\to\infty} f_2(n,\delta) = g_2(\delta)$, 因此存在 $N' \in \mathbb{N}$, 使得
$$f_1(n,\delta) \geqslant g_1(\delta) - \frac{\eta}{2}, f_2(n,\delta) \leqslant g_2(\delta) + \frac{\eta}{2}, \forall n \geqslant N'. \tag{30.2}$$
于是由(7.9), 我们知道存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得
$$f_1(n,\delta) \leqslant a_n \leqslant f_2(n,\delta), \forall n \geqslant N.$$
因此当 $n > \max\{N, N'\}$, 结合式(30.1),(30.2), 我们知道 $A - \eta < a_n < A + \eta$, 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. 证毕!

30.2 极限和渐近分析方法非数学类

1. (1.)(答案).

[1] 或者你令 $\epsilon \to 0^+$.

2. (2.)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{t}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt$$

$$\overset{\text{Stolz9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt=\lim_{n\to\infty}n\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{t+n\pi}dt=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}.$$

3. (3.) 先来看第一问, 事实上取 $x_0=0$, 注意到 $\int_0^x f(y)\,dy$ 是连续严格递增函数, 因此由连续函数介值定理, 存在存在唯一的 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n\in[0,1]$, 使得

$$\int_0^{x_k}f(x)\,dx=\frac{k}{n}\int_0^1 f(x)\,dx,\forall k=1,2,\cdots,n.$$

这恰好是

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx,\forall k=1,2,\cdots,n. \tag{30.3}$$

再来看第二问, 由(30.3), 我们知道

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx\geqslant(x_k-x_{k-1})\min_{t\in[0,1]}f(t),\forall k=1,2,\cdots,n.$$

由Cantor 定理, 我们知道 f 在 $[0,1]$ 一致连续, 因此对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $x,y\in[0,1],|x-y|\leqslant\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\epsilon}{\max\limits_{t\in[0,1]}f(t)}. \tag{30.4}$$

因此当正整数 $n>\frac{\int_0^1 f(x)dx}{\delta\min\limits_{t\in[0,1]}f(t)}$, 我们有

$$|x_k-x_{k-1}|\leqslant\delta,\forall k=1,2,\cdots,n.$$

于是利用(30.4), 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f^2(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_0^1 f(x)f(x_k)\,dx\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\left[f(x)-f(x_k)\right]dx\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^n\max_{t\in[0,1]}f(t)\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)|\,dx\\&\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}1dx=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_0^1 f(x)f(x_k)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n f(x_k),$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n f(x_k)=\frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

我们完成了证明.

4. (4.) 由等价替换, 洛必达法则和含参积分求导公式. 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[e^{(x-t)^2}-1\right]\sin t dt}{x\tan^3 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[e^{(x-t)^2}-1\right]\sin t dt}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x(x-t)e^{(x-t)^2}\sin t dt}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x te^{t^2}\sin(x-t)dt}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x te^{t^2}\cos(x-t)dt}{12x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}-\int_0^x te^{t^2}\sin(x-t)dt}{12x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+2x^2\right)e^{x^2}-\int_0^x te^{t^2}\cos(x-t)dt}{12}\\&=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

5. (5.) 由均值不等式, 注意到

$$\frac{n+\sum\limits_{k=2}^{n}1}{n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{n+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2\sqrt{n}+(k-2)}{k}}{n}=1+\frac{2\sqrt{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+(n-1)-2\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{n},$$

这里第二个不等号

$$n^{\frac{1}{k}}=\left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\cdots\cdot1}_{k-2\text{个}}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+(k-2)}{k}.$$

利用

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-2\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{n}=0.$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sum\limits_{k=2}^{n}1}{n}=2,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\sqrt{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+(n-1)-2\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{n}\right)=2.$$

由夹逼准则就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}}{n}=2.$$

6. (6.) 首先注意到

$$0\leqslant x_{n+2}+\frac{1}{2}x_{n+1}\leqslant x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n, n=1,2,\cdots,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n\right)$ 存在. 记

$$b_n=x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n, n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$(-2)^{n+1}b_n=(-2)^{n+1}x_{n+1}-(-2)^n x_n.$$

于是求和得

$$x_{n+1}=\frac{-2x_1+\sum\limits_{j=1}^{n}(-2)^{j+1}b_j}{(-2)^{n+1}},$$

因此用 stolz 定理分奇偶计算子列极限得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_{n+1}&=\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{2m}(-2)^{j+1}b_j}{-2^{2m+1}}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{m\to\infty}\frac{(-2)^{2m+3}b_{2m+2}+(-2)^{2m+2}b_{2m+1}}{4^{m+1}-4^m}\\ \lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{2m-1}(-2)^{j+1}b_j}{4^m}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{(-2)^{2m+2}b_{2m+1}+(-2)^{2m+1}b_{2m}}{4^{m+1}-4^m}\end{cases}\\&=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n\right).\end{aligned}$$

因此我们完成了证明.

7. (7.) 注意到

$$a_1=1,a_n=\sqrt{\frac{1}{n}+a_{n-1}},n=2,3,\cdots.$$

显然 $a_n\geqslant 1$, 我们加强归纳为

$$a_n\leqslant 1+\frac{2}{n}.$$

事实上 $n=1$ 不等式显然成立, 假设 $n-1$ 时不等式成立, 当 n 时有

$$a_n\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}+a_{n-1}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}+1+\frac{2}{n-1}}.$$

注意到

$$\sqrt{\frac{1}{n}+1+\frac{2}{n-1}}\leqslant 1+\frac{2}{n}\Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-\frac{1}{n}-1-\frac{2}{n-1}=\frac{n^2+n-4}{n^2(n-1)}\geqslant 0,$$

即当 $n\geqslant 2$, 确实有 $a_n\leqslant 1+\frac{2}{n}$. 现在由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

8. (8.) 事实上, 显然 x_n 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$. 考虑 $y_n=3-x_n$, 则 $y_{n+1}=3-\sqrt{9-y_n}$. 注意到求导可证函数不等式

$$\frac{1}{3-\sqrt{9-x}}-\frac{6}{x}+\frac{1}{6}<0,\forall x>0.$$

求极限有

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3-\sqrt{9-x}}-\frac{6}{x}\right)=-\frac{1}{6},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_{n+1}}-\frac{6}{y_n}+\frac{1}{6}\right)=0.$$

考虑 $z_n\triangleq\frac{1}{y_{n+1}}-\frac{6}{y_n}+\frac{1}{6}<0$, 然后

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{z_j}{6^{j+1}}-\frac{1}{6^{j+2}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{6^{j+1}y_{j+1}}-\frac{1}{6^jy_j}\right)=\frac{1}{6^{n+1}y_{n+1}}-\frac{1}{6y_1}.$$

换言之

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{n+1}y_{n+1}}&=\frac{1}{6\left(3-x_1\right)}-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6^{j+2}}-\frac{z_j}{6^{j+1}}\right)\\&=\frac{1}{6\left(3-x_1\right)}-\frac{1}{180}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{6^{j+1}}\left(\frac{1}{y_{j+1}}-\frac{6}{y_j}+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{6\left(3-x_1\right)}-\frac{1}{180}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{6^{j+1}}\left(\frac{1}{3-x_{j+1}}-\frac{6}{3-x_j}+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{6\left(3-x_1\right)}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{6^{j+1}}\left(\frac{1}{3-x_{j+1}}-\frac{6}{3-x_j}\right).\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}6^n\left(x_n-3\right)=-\frac{1}{\frac{1}{6(3-x_1)}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{6^{j+1}}\left(\frac{1}{3-x_{j+1}}-\frac{6}{3-x_j}\right)},$$

注意到这里分母如果为 0, 极限值则为 ∞.

9. (9.) 显然 a_n 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln a_n}{a_n}\right)=1.$$

注意到

$$a_{n+1}-a_n\geqslant\ln 2\Rightarrow a_n\geqslant 2+(n-1)\ln 2\geqslant\ln 2\cdot n,$$

以及 $a_1\leqslant 2\cdot 1^2$. 假设 $a_n\leqslant 2n^2$, 那么

$$a_{n+1}\leqslant 2n^2+\ln\left(2n^2\right)\leqslant 2n^2+\ln 2+2\left(n-1\right)\leqslant 2\left(n^2+2n+1\right)=2\left(n+1\right)^2,$$

由归纳法我们知道 $a_n\leqslant 2n^2,\forall n\in\mathbb{N}$. 因此

$$\ln 2+2\ln n\geqslant a_{n+1}-a_n=\ln a_n\geqslant\ln\ln 2+\ln n.$$

于是

$$\ln 2\cdot n+2\sum_{j=1}^{n}\ln j\geqslant\sum_{j=1}^{n}\left(a_{j+1}-a_j\right)\geqslant\ln\ln 2\cdot n+\sum_{j=1}^{n}\ln j.$$

注意到

$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1)-n=&\int_1^{n+1}\ln x dx=\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1}\ln x dx\geqslant\sum_{j=1}^{n}\ln j,\\\sum_{j=1}^{n}\ln j\geqslant&\sum_{j=2}^{n}\int_{j-1}^{j}\ln x dx=\int_1^n\ln x dx=n\ln n-n+1.\end{aligned}$$

于是我们知道存在 $C_2,C_1>0$, 使得

$$C_1 n\ln n\leqslant a_n\leqslant C_2 n\ln n,\forall n\geqslant 2.$$

由 Stolz 定理9.1我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}.$$

又

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln C_1+\ln n+\ln\ln n}{\ln n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\ln C_2+\ln n+\ln\ln n}{\ln n}=1,$$

因此我们就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=1,$$

于是

$$a_{n+1}-a_n=\ln a_n=\ln\left(n\ln n+o\left(n\ln n\right)\right)=\ln n+\ln\ln n+o\left(1\right).$$

注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln\ln n-\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)+n\ln n}{n\ln n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln\ln n}{n\ln n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{n\ln n}-\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)}{n\ln n}\\=&\quad 0,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\ln\ln\left(n+1\right)-n\ln\ln n}{\ln\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}{\ln\ln n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln\left(n+1\right)}{\ln\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right)}{\ln\ln n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n\cdot\ln\ln n}+1+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)}{\ln\ln n}\\&=1.\end{aligned}$$

因此由 Stolz 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n\ln n}{n\ln\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n-\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)+n\ln n}{\left(n+1\right)\ln\ln\left(n+1\right)-n\ln\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln\ln n-\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)+n\ln n+o\left(1\right)}{\left(n+1\right)\ln\ln\left(n+1\right)-n\ln\ln n}\\&=1.\end{aligned}$$

10. (10.) 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{\int_a^b f^{n+2}\left(x\right)g\left(x\right)dx}{\int_a^b f^{n+1}\left(x\right)g\left(x\right)dx}\geqslant\frac{\int_a^b f^{n+1}\left(x\right)g\left(x\right)dx}{\int_a^b f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx}\\\Leftrightarrow&\int_a^b f^{n+2}\left(x\right)g\left(x\right)dx\cdot\int_a^b f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx\geqslant\left(\int_a^b f^{n+1}\left(x\right)g\left(x\right)dx\right)^2,\end{aligned}$$

由 cauchy 不等式16.1我们知道 $\frac{\int_a^b f^{n+1}(x)g(x)dx}{\int_a^b f^{n}(x)g(x)dx}$ 递增. 所以由 Stolz 定理的推论8.13, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f^{n+1}\left(x\right)g\left(x\right)dx}{\int_a^b f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx}.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx}\leqslant\max_{x\in[a,b]}f\left(x\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g\left(x\right)dx}=\max_{x\in[a,b]}f\left(x\right).\tag{30.5}$$

设 $x_0\in[a,b]$ 是 f 最大值点, 不妨设 $x_0\in(a,b)$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f^{n}\left(x\right)g\left(x\right)dx}\\\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=}&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f^n\left(\alpha_n\right)\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} g\left(x\right)dx}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f^n\left(\alpha_n\right)\frac{\min\limits_{x\in[a,b]}g\left(x\right)}{2n}}\\=&\lim_{n\to\infty}f\left(\alpha_n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\min\limits_{x\in[a,b]}g\left(x\right)}{2n}}=f\left(x_0\right)=\max_{x\in[a,b]}f\left(x\right),\end{aligned}$$

这里

$$\alpha_n \in \left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n = x_0 \overset{f\text{连续}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(x_0).$$

于是我们证明了(8.65)和(8.64).

当 g 非负但只能有孤立零点时, 注意若 g 有无穷多个零点, 则这族零点必然收敛到 g 的某个非孤立零点, 这就是一个矛盾! 因此 g 的零点必然有限, 从对任何 $[a,b]$ 的子区间 $[c,d]$ 都有 $\int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. 注意到放缩(30.5)仍成立, 比值极限转化为根值极限过程也成立. 但是根值极限的另外一侧的放缩需要一些技术改进. 事实上, 不妨设 f 不恒为 0, $M \triangleq \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则对任何 $\delta\in(0,M)$ 有 $\int_{|f|\geqslant M-\delta} g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. 现在

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x} &\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{|f|\geqslant M-\delta} f^n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}\\ &\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{(M-\delta)^n\int_{|f|\geqslant M-\delta} g(x)\,\mathrm{d}x} = M-\delta,\end{aligned}$$

由 δ 任意性得

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x} \geqslant M.$$

现在就有(8.65)和(8.64)成立.

11. (11.) 我们仅证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n \sin\sqrt{k}}{n}=0$, 另外一个是类似的. 事实上, 我们有 $\int_1^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx \overset{x=t^2}{=\!=} 2\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ 是收敛的.

我们断言

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\sin\sqrt{k}}{k}-\int_k^{k+1}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx\right)$$

存在. 事实上由积分中值定理, 我们知道存在 $x_k\in(k,k+1)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\theta_k\in(k,k+1)$, 使得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\sin\sqrt{k}}{k}-\int_k^{k+1}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left[\int_k^{k+1}\left(\frac{\sin\sqrt{k}}{k}-\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right)dx\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\frac{\sin\sqrt{k}}{k}-\frac{\sin\sqrt{x_k}}{x_k}}{k-x_k}\left[\int_k^{k+1}(k-x)\,dx\right]\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\frac{\sin\sqrt{k}}{k}-\frac{\sin\sqrt{x_k}}{x_k}}{k-x_k}\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{\theta_k}\cos\sqrt{\theta_k}-2\sin\sqrt{\theta_k}}{2\theta_k^2}.\end{aligned}$$

又注意到

$$\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{\sqrt{\theta_k}\cos\sqrt{\theta_k}-2\sin\sqrt{\theta_k}}{2\theta_k^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty\frac{\sqrt{k+1}+2}{k^2}<\infty.$$

由于绝对收敛的级数必然收敛, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\sin\sqrt{k}}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\sin\sqrt{k}}{k}-\int_k^{k+1}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx\right)+\int_1^\infty\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx.$$

运用命题8.3, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n\sin\sqrt{k}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n k\cdot\frac{\sin\sqrt{k}}{k}}{n}=0,$$

这就证明了习题11..

12. (12.) 相似例题8.2, 我们归纳易证

$$\underbrace{\tan\tan\cdots\tan}_{\text{复合}n\text{次}}x-\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{\text{复合}n\text{次}}x=\frac{n}{2}x^3+o\left(x^3\right),x\to 0,$$

这就给出了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\underbrace{\tan\tan\cdots\tan}_{\text{复合}n\text{次}}x-\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{\text{复合}n\text{次}}x}{x^3}=\frac{n}{2}.$$

13. (13.) 类似例题8.2归纳得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\underbrace{\arcsin\arcsin\cdots\arcsin}_{n\text{次复合}}x}{x^3}=-\frac{n}{6}.$$

14. (14.) 凑裂项得

$$(n+1)\,\theta_{n+1}-n\theta_n=\theta_n-\theta_{n-1},n=2,3,\cdots.$$

对 $n=2,3,\cdots,m$ 求和得

$$(m+1)\,\theta_{m+1}-2\theta_2=\theta_m-\theta_1,$$

即

$$(m+1)!\theta_{m+1}-m!\theta_m=3m!,m=2,3,\cdots.$$

于是

$$(n+1)!\theta_{n+1}-2\theta_2=3\sum_{m=2}^{n}m!.$$

现在

$$\theta_{n+1}=\frac{4}{(n+1)!}+\frac{3}{(n+1)!}\sum_{m=2}^{n}m!,n=2,3,\cdots.$$

一方面

$$(n+1)\,\theta_{n+1}=\frac{4}{n!}+\frac{3}{n!}\sum_{m=2}^{n}m!>\frac{3}{n!}n!=3,n=2,3,\cdots.$$

注意到

$$(n+1)\,\theta_{n+1}=\frac{4}{n!}+\frac{3}{n!}\sum_{m=2}^{n}m!,$$

当 $n=2$ 时, 直接验证可知道

$$(n+1)\,\theta_{n+1}-3<\frac{6}{n}.\tag{30.6}$$

为了对 $n>2$ 证明(30.6), 下面只需断言

$$\frac{4}{n!}+\frac{3}{n!}\sum_{m=2}^{n-1}m!<\frac{6}{n},n=3,4,\cdots.\tag{30.7}$$

记 $c_n=6\,(n-1)!-3\sum_{m=2}^{n-1}m!,n=3,4,\cdots$, 我们有

$$c_{n+1}-c_n=6n!-6\,(n-1)!-3n!=(3n-6)\,(n-1)!\geqslant 0,$$

因此

$$c_n>c_3=6\,(3-1)!-3\sum_{m=2}^{2}m!=12-3\cdot 2=6>4,$$

这就证明了30.7, 从而给出了(30.6). 我们完成了证明.

15. (15.) 考虑 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,n\in\mathbb{N}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{k}\overset{\text{Abel 变换8.2}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k+\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\ln n}$$
$$\overset{\text{Stolz9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=A.$$

16. (16.)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{m+2}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|i-j|^m=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k^{m+2}}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|i-j|^m$$
$$\overset{\text{Stolz9.1}}{=}\lim_{k\to\infty}\frac{2}{(k+1)^{m+2}-k^{m+2}}\left[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}(j-i)^m-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}(j-i)^m\right]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2\sum\limits_{i=1}^{k}(k+1-i)^m}{(m+2)\,k^{m+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\sum\limits_{i=1}^{k}i^m}{(m+2)\,k^{m+1}}=\frac{2}{m+2}\int_0^1x^m\mathrm{d}x=\frac{2}{(m+2)\,(m+1)}.$$

17. (17.)

(a). 我们首先有

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{a}}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[a]{\frac{n}{\frac{1}{a_n^a}}}=\sqrt[a]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^a}}}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\sqrt[a]{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^a}-\frac{1}{a_n^a}}}$$
$$=\sqrt[a]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{f^a(a_n)}-\frac{1}{a_n^a}}}=\sqrt[a]{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{1}{f^a(x)}-\frac{1}{x^a}}}=\sqrt[a]{\lim_{x\to0^+}\frac{x^af^a(x)}{x^a-f^a(x)}}$$
$$=\sqrt[a]{\lim_{x\to0^+}\frac{x^{2a}}{x^a-\left(x-Ax^{1+a}+O\left(x^{1+2a}\right)\right)^a}}$$
$$=\sqrt[a]{\lim_{x\to0^+}\frac{x^a}{1-\left(1-Ax^a+O\left(x^{2a}\right)\right)^a}}=\sqrt[a]{\lim_{x\to0^+}\frac{x^a}{1-\left(1-Aax^a+O\left(x^{2a}\right)\right)}}$$
$$=\left(\frac{1}{aA}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

然后

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{a}}}{\ln n}\left[a_n-\frac{1}{n^{\frac{1}{a}}(aA)^{\frac{1}{a}}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{a}}}{\ln n}\left[\left(a_n^{-a}\right)^{-\frac{1}{a}}-(naA)^{-\frac{1}{a}}\right]$$
$$\overset{\text{拉格朗日中值定理保持阶不变}}{=}-\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{a}}\left[a_n^{-a}-naA\right]}{\ln n}(naA)^{-\frac{1}{a}-1}$$
$$=-\frac{(aA)^{-\frac{1}{a}-1}}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{-a}-naA}{\ln n}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}-\frac{(aA)^{-\frac{1}{a}-1}}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{-a}-a_n^{-a}-aA}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$=-\frac{(aA)^{-\frac{1}{a}-1}}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-a}(a_n)-a_n^{-a}-aA}{\frac{1}{n}}=-\frac{(aA)^{-\frac{1}{a}-1}}{a}\lim_{n\to\infty}n\left[f^{-a}(a_n)-a_n^{-a}-aA\right]$$
$$=-\frac{(aA)^{-\frac{1}{a}-1}}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{-a}}{aA}\left[f^{-a}(a_n)-a_n^{-a}-aA\right]=-\frac{(aA)^{-\frac{1}{a}-1}}{a}\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-a}}{aA}\left[f^{-a}(x)-x^{-a}-aA\right].$$

现在由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}
f^{-a}(x) &= \left(x - Ax^{1+a} + Bx^{1+2a} + O\left(x^{1+3a}\right)\right)^{-a} \\
&= x^{-a}\left(1 - Ax^a + Bx^{2a} + O\left(x^{3a}\right)\right)^{-a} \\
&= x^{-a}\left(1 - a\left(-Ax^a + Bx^{2a}\right) + \frac{(-a)(-a-1)}{2}\left(-Ax^a + Bx^{2a} + O\left(x^{3a}\right)\right)^2 + O\left(x^{3a}\right)\right) \\
&= x^{-a}\left(1 - a\left(-Ax^a + Bx^{2a}\right) + \frac{(-a)(-a-1)}{2}\left(-Ax^a\right)^2 + O\left(x^{3a}\right)\right) \\
&= x^{-a}\left(1 + Aax^a - aBx^{2a} + \frac{a(a+1)}{2}A^2x^{2a} + O\left(x^{3a}\right)\right) \\
&= x^{-a} + Aa + \left(\frac{a(a+1)}{2}A^2 - aB\right)x^a + O\left(x^{2a}\right),
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x\to 0^+}\left\{x^{-a}\left[f^{-a}(x) - x^{-a} - aA\right]\right\} = \frac{a(a+1)}{2}A^2 - aB.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{a}}}{\ln n}\left[a_n - \frac{1}{n^{\frac{1}{a}}(aA)^{\frac{1}{a}}}\right] = \frac{1}{(aA)^{2+\frac{1}{a}}}\left(B - \frac{(a+1)}{2}A^2\right),$$

这就证明了第一问.

(b). 我们首先有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{a}}a_n &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[a]{\frac{n}{\frac{1}{a_n^a}}} = \sqrt[a]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^a}}} \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} \sqrt[a]{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^a} - \frac{1}{a_n^a}}} \\
&= \sqrt[a]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{f^a(a_n)} - \frac{1}{a_n^a}}} = \sqrt[a]{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{f^a(x)} - \frac{1}{x^a}}} = \sqrt[a]{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a f^a(x)}{x^a - f^a(x)}} \\
&= \sqrt[a]{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2a}}{x^a - \left(x - Ax^{1+a} + O\left(x^{1+2a}\ln x\right)\right)^a}} \\
&= \sqrt[a]{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a}{1 - \left(1 - Ax^a + O\left(x^{2a}\ln x\right)\right)^a}} = \sqrt[a]{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a}{1 - \left(1 - Aax^a + O\left(x^{2a}\ln x\right)\right)}} \\
&= \left(\frac{1}{aA}\right)^{\frac{1}{a}}.
\end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^2 n}\left[n^{\frac{1}{a}}(aA)^{\frac{1}{a}}a_n - 1\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{nn^{\frac{1}{a}}}{\ln^2 n}\left[\left(\frac{1}{aA}a_n^{-a}\right)^{-\frac{1}{a}} - n^{-\frac{1}{a}}\right] \\
&\overset{\text{拉格朗日中值定理保持阶不变}}{=} -\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{a}}}{\ln^2 n}\left[\frac{1}{aA}a_n^{-a} - n\right]n^{-\frac{1}{a}-1} \\
&= -\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\left[\frac{1}{aA}a_n^{-a} - n\right] \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} -\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}\left[\frac{1}{aA}a_{n+1}^{-a} - \frac{1}{aA}a_n^{-a} - 1\right] \\
&= -\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\ln n}\left[\frac{1}{aA}f^{-a}(a_n) - \frac{1}{aA}a_n^{-a} - 1\right] = -\frac{1}{2a^2A}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left[f^{-a}(a_n) - a_n^{-a} - aA\right].
\end{aligned}$$

由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}
f^{-a}(x) &= \left(x - Ax^{1+a} + Bx^{1+2a}\ln x + O\left(x^{1+3a}\right)\right)^{-a} \\
&= x^{-a}\left(1 - Ax^{a} + Bx^{2a}\ln x + O\left(x^{3a}\right)\right)^{-a} \\
&= x^{-a}\left(1 - a\left(-Ax^{a} + Bx^{2a}\ln x + O\left(x^{3a}\right)\right)\right) \\
&\quad + x^{-a}\left(\frac{(-a)(-a-1)}{2}\left(-Ax^{a} + Bx^{2a}\ln x + O\left(x^{3a}\right)\right)^{2} + O\left(x^{3a}\right)\right) \\
&= x^{-a}\left(1 - a\left(-Ax^{a} + Bx^{2a}\ln x\right)\right) + x^{-a}\left(\frac{(-a)(-a-1)}{2}\left(-Ax^{a} + Bx^{2a}\ln x\right)^{2} + O\left(x^{3a}\right)\right) \\
&= x^{-a}\left(1 + aAx^{a} - aBx^{2a}\ln x + \frac{a(a+1)A^{2}}{2}x^{2a} - a(a+1)ABx^{3a}\ln x + O\left(x^{3a}\right)\right) \\
&= x^{-a} + aA - aBx^{a}\ln x + \frac{a(a+1)A^{2}}{2}x^{a} - a(a+1)ABx^{2a}\ln x + O\left(x^{2a}\right),
\end{aligned} \tag{30.8}$$

即

$$f^{-a}(x) - x^{-a} - aA \sim -aBx^{a}\ln x, x \to 0^{+}.$$

现在就得到

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2a^{2}A}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\left[f^{-a}(a_n) - a_n^{-a} - aA\right] = \frac{B}{2aA}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}a_n^{a}\ln a_n \\
&= \frac{B}{2a^{2}A^{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n} \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} \frac{B}{2a^{2}A^{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{B}{2a^{2}A^{2}}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{f(a_n)}{a_n}\right) = \frac{B}{2a^{2}A^{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^{a}aA}\ln\left(\frac{f(a_n)}{a_n}\right) \\
&= \frac{B}{2a^{3}A^{3}}\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{a}}\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{B}{2a^{3}A^{3}}\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{a}}\ln\left(1 - Ax^{a} + o\left(x^{a}\right)\right) \\
&= -\frac{B}{2a^{3}A^{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{2} n}\left[n^{\frac{1}{a}}(aA)^{\frac{1}{a}}a_n - 1\right].
\end{aligned}$$

最后, 为了计算最后一层极限, 依旧可以类似上述计算过程反复使用 Stolz 定理9.1得到, 但此时要经过三次 Stolz 定理, 计算大得失去了意义. 所以基本第三层极限的最好方法是直接使用渐近方法8.2, 由于计算过于复杂, 留给有兴趣的读者自行完成.

18. (18.) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2^{n}}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k}}{k} \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n+1}}{\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2 - \frac{n+1}{n}} = 2,$$

于是我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k}}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}, n \to \infty.$$

19. (19.) 事实上

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\frac{(k+1)^{k}}{k^{k}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)e^{1-\frac{1}{k}}}{\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(n+1)!e^{n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{n!e^{n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\sqrt{2\pi n}\frac{n^{n}}{e^{n}}e^{n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n^{n}e^{\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{n}{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}e^{\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty}e^{n\left[\frac{n}{n+1}-1\right]}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}e^{-\gamma} = e^{-1}\cdot\sqrt{2\pi}e^{-\gamma} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}}.
\end{aligned}$$

20. (20.) 事实上由夹逼准则就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{2}.$$

21. (21.) 由命题8.1和结论8.2知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{n}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{b_n}{n!}}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)\,b_n}=\frac{b}{e}.\tag{30.9}$$

一个式(30.9)的推论是

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{b_n}}{n}=\ln\frac{b}{e}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln b_n}{n}-\ln n\right)=\ln\frac{b}{e}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ln b_n}{n^2}=0.\tag{30.10}$$

由 Stolz 定理9.1知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{2n+1}=\frac{a}{2},\tag{30.11}$$

运用(30.9)和(30.10)知

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{b_{n+1}}-\sqrt[n]{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\ln b_{n+1}}{n+1}}-e^{\frac{\ln b_n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln b_n}{n}}\left(e^{\frac{\ln b_{n+1}}{n+1}-\frac{\ln b_n}{n}}-1\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln b_n}{n}}\left(e^{\frac{\ln b_{n+1}-\ln b_n}{n+1}-\frac{\ln b_n}{n(n+1)}}-1\right)\overset{(30.9)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}n\left(\frac{\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}}{n+1}-\frac{\ln b_n}{n\,(n+1)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}\frac{\ln b_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}\ln\frac{b_{n+1}}{nb_n}-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}\left(\frac{\ln b_n}{n+1}-\ln n\right)\\
&=\frac{b}{e}\ln b-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}\ln\frac{\sqrt[n]{b_n}}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{b}{e}\left(\frac{\ln b_n}{n}-\frac{\ln b_n}{n+1}\right)=\frac{b}{e}\ln b-\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}+0=\frac{b}{e}.
\end{aligned}$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{b_{n+1}}-\sqrt[n]{b_n}\right)=\frac{b}{e}.\tag{30.12}$$

现在结合(30.9), (30.11), (30.10),(30.12)就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}-\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}\sqrt[n]{b_n}-a_n\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}\sqrt[n]{b_n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}\sqrt[n]{b_n}-a_n\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{\left(\frac{b}{e}\right)^2n\,(n+1)}\\
&=\left(\frac{e}{b}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{(a_{n+1}-a_n)\sqrt[n]{b_n}}{n^2}+\left(\frac{e}{b}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(\sqrt[n]{b_n}-\sqrt[n+1]{b_{n+1}}\right)}{n^2}\\
&=\left(\frac{e}{b}\right)^2\frac{ab}{e}-\left(\frac{e}{b}\right)^2\frac{a}{2}\frac{b}{e}=\frac{ae}{2b}.
\end{aligned}$$

22. (22.)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+53^{\frac{1}{x}}+49069^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}e^{3x\ln\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+53^{\frac{1}{x}}+49069^{\frac{1}{x}}}{3}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{3x\left[\frac{2^{\frac{1}{x}}+53^{\frac{1}{x}}+49069^{\frac{1}{x}}}{3}-1\right]}\\
&=\lim_{t\to0}e^{\frac{2^t+53^t+49069^t-3}{t}}=\lim_{t\to0}e^{\frac{\ln2\cdot2^t+\ln53\cdot53^t+\ln49069\cdot49069^t}{1}}=e^{\ln2+\ln53+\ln49069}=5201314.
\end{aligned}$$

23. (23.) 事实上,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{x+(k-1)\,\pi}{1+n^2\cos^2x}dx.$$

注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{(k-1)\,\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{x+(k-1)\,\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{k\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx.$$

于是利用 $\cos^2 x$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称以及 $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\tan^2 x+1$. 一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{k\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\pi}{\tan^2 x+n^2+1}d\tan x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi^2}{2\sqrt{n^2+1}}=\frac{\pi^2}{2},$$

另外一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\frac{(k-1)\,\pi}{1+n^2\cos^2 x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(k-1)\,\pi}{\tan^2 x+n^2+1}d\tan x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\,\pi^2}{2\sqrt{n^2+1}}=\frac{\pi^2}{2}.$$

因此我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2}.$$

24. (24.) 注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to+\infty}\left|\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{\sin^2 x}dx-\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right|\\&\leqslant\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a\left|f(x)\sin^2(sx)\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\right|dx\\&\leqslant\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a\left|\frac{f(x)\left(x^2-\sin^2 x\right)}{x^2\sin^2 x}\right|dx=0,\end{aligned}$$

这里由 $\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\frac{1}{6}x^3}{x^4}=\frac{1}{3}$ 知上式右边积分是常意积分. 故

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{\sin^2 x}dx=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx.$$

然后对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\epsilon,\forall x\in[0,\delta].$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to+\infty}\left|\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx-\frac{1}{s}\int_0^a f(0)\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right|\\&\leqslant\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{s}\int_0^a|f(x)-f(0)|\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right)\\&\leqslant\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{s}\int_0^\delta|f(x)-f(0)|\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right)+\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{s}\int_\delta^a|f(x)-f(0)|\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right)\\&\leqslant\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{\epsilon}{s}\int_0^\delta\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right)+\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{2\max|f|}{s}\int_\delta^a\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right)\\&\leqslant\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{\epsilon}{s}\int_0^\infty\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\right)+\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{2\max|f|}{s}\int_\delta^a\frac{1}{x^2}dx\right)\\&\overset{sx=y}{=}\lim_{s\to+\infty}\left(\epsilon\int_0^\infty\frac{\sin^2 y}{y^2}dy\right),\end{aligned}$$

由 ϵ 任意性我们可得

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx&=f(0)\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\int_0^a\frac{\sin^2(sx)}{x^2}dx\\&=f(0)\lim_{s\to+\infty}\int_0^{sa}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy=f(0)\int_0^\infty\frac{\sin^2 y}{y^2}dy=\frac{\pi}{2}f(0).\end{aligned}$$

25. (25.) 首先

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\ln(1+x))}{\tan x}-1+x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\ln\left(1+x\right)\right)-\tan x+x\tan x}{x^2\tan x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+x\cdot x+o\left(x^3\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3}-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{5}{6},\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\ln\left(1+\ln\left(1+x\right)\right)}{\tan x}=1-x+\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right).$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\ln\left(1+x\right)\right]^{\frac{1}{\tan x}}+e\left(x-1\right)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\ln(1+x))}{\tan x}}+e\left(x-1\right)}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+\ln(1+x))}{\tan x}-1}+x-1}{x^2}\\&=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x+\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right)}+x-1}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{1-x+\frac{5}{6}x^2+\frac{\left(-x+\frac{5}{6}x^2\right)^2}{2}+x-1+o\left(x^2\right)}{x^2}\\&=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{4}{3}e.\end{aligned}$$

26. (26.) 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}&\overset{\text{stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{n^2}}{n}}{\int_{n-1}^{n}e^{x^2}dx}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{e^{y^2}}{y}}{\int_{y-1}^{y}e^{x^2}dx}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{2y^2e^{y^2}-e^{y^2}}{y^2}}{e^{y^2}-e^{(y-1)^2}}\\&=\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{2y^2-1}{y^2}}{1-e^{(y-1)^2-y^2}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{1-e^{(y-1)^2-y^2}}\cdot\lim_{y\to+\infty}\frac{2y^2-1}{y^2}=2.\end{aligned}$$

27. (27.) 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\frac{x^{n-2}}{x^{2n}+x^n+1}dx=\lim_{n\to\infty}(n-1)\int_0^1\frac{x^{n-2}}{x^{2n}+x^n+1}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{x^{2n}+x^n+1}dx^{n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{y^{\frac{2n}{n-1}}+y^{\frac{n}{n-1}}+1}dy=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y^{\frac{2n}{n-1}}+y^{\frac{n}{n-1}}+1}\right)dy=\int_0^1\frac{1}{y^2+y+1}dy=\frac{\pi}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

这里交换积分极限顺序可以通过

$$\int_0^1\left|\frac{1}{y^{\frac{2n}{n-1}}+y^{\frac{n}{n-1}}+1}\right|dy\leqslant\int_0^1\frac{1}{1}dy<\infty$$

和一致收敛得到.

28. (28.) 由条件, 我们有

$$x_{n+2}\leqslant\alpha x_{n+1}+(1-\alpha)x_n,n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$x_{n+2}+(1-\alpha)x_{n+1}\leqslant x_{n+1}+(1-\alpha)x_n,n\in\mathbb{N}.$$

现在 $x_{n+1}+(1-\alpha)x_n$ 非负递减, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}+(1-\alpha)x_n\right)$ 存在. 由例题8.31知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

29. (29.) 本题来自当年百度高等数学吧极限竞赛我当时无题可出随手用软件出的一个原创题. 利用

$$\tan x+\sin x=\frac{(x-\pi)^3}{2}+o\left((x-\pi)^3\right),x\to\pi.$$

我们只需计算

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\pi \left[\sqrt[n]{\sin x}-1\right]dx=\lim_{n\to\infty} n\int_0^\pi \left[e^{\frac{\ln\sin x}{n}}-1\right]dx=\int_0^\pi \ln\sin x dx=-\pi\ln 2,$$

这里换序来自控制收敛定理

$$\int_0^\pi \left|n\left[e^{\frac{\ln\sin x}{n}}-1\right]\right|dx=\int_0^\pi n\left(1-e^{\frac{\ln\sin x}{n}}\right)dx\leqslant\int_0^\pi \ln\frac{1}{\sin x}dx<\infty.$$

现在就有

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left[\tan\left(\int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x}dx\right)+\sin\left(\int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x}dx\right)\right]=-\frac{\pi^3\ln^3 2}{2}.$$

30. (30.) 利用定积分定义有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\int_k^n\frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{n-x}}dx&\overset{x=ny}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\int_{\frac{k}{n}}^1\frac{1}{y\sqrt{y}\sqrt{1-y}}dy=\int_0^1\int_x^1\frac{1}{y\sqrt{y}\sqrt{1-y}}dydx\\&=\int_0^1\frac{1}{y\sqrt{y}\sqrt{1-y}}dy\int_0^y dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y\left(1-y\right)}}dy\\&=\arcsin\left(2y-1\right)|_0^1=\pi.\end{aligned}$$

31. (31.) 直接计算有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\beta\left(\beta+1\right)\left(\beta+2\right)\cdots\left(\beta+n\right)}{\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)\cdots\left(\alpha+n\right)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\beta+n+1\right)\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\alpha+n+1\right)}\\&\overset{\text{斯特灵公式9.4}}{=}\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta\right)}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi\left(n+\beta+1\right)}\left(\frac{\beta+n+1}{e}\right)^{\beta+n+1}}{\sqrt{2\pi\left(\alpha+n+1\right)}\left(\frac{\alpha+n+1}{e}\right)^{\alpha+n+1}}\\&=\frac{e^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta\right)}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\beta+n+1\right)^{\beta+n+1}}{\left(\alpha+n+1\right)^{\alpha+n+1}}\\&=\frac{e^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta\right)}\lim_{n\to\infty}e^{\left(\beta+n+1\right)\ln\left(\beta+n+1\right)-\left(\alpha+n+1\right)\ln\left(\alpha+n+1\right)}\\&\overset{\text{Taylor}}{=}\frac{e^{\alpha-\beta}\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta\right)}\lim_{n\to\infty}e^{\left(\beta-\alpha\right)\left(1+\ln n\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)}=\begin{cases}0, & \beta<\alpha\\ \infty, & \beta>\alpha\\ 1, & \beta=\alpha\end{cases}.\end{aligned}$$

32. (32.) 等价替换得

$$\lim_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}=\ln b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{k}{n}}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\left|\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}-\sin b^{\frac{k}{n}}\right|\\&\overset{\text{拉中}}{\leqslant}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\left(b^{\frac{2k+1}{2n}}-b^{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{2k}{n}}\left(b^{\frac{1}{2n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{2n}}-1\right)\cdot\int_0^1 b^{2x}dx=0,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{2k+1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b^{\frac{k}{n}}\sin b^{\frac{k}{n}}=\ln b\int_0^1 b^x\sin b^x dx=\cos 1-\cos b.$$

33. (33.)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}dy\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln 2}{n}}-1}{e^{\frac{\ln(2n+1)}{n}}}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}dy\right)\\
&=\ln 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}dy\right)\\
&\overset{\bigstar}{=}\ln 2\cdot\int_0^1\int_1^x e^{-y^2}dydx=-\ln 2\cdot\int_0^1\int_0^y e^{-y^2}dxdy\\
&=-\ln 2\cdot\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{\ln 2}{2e}-\frac{\ln 2}{2},
\end{aligned}$$

这里 ★ 来自区间 n 等分之后取中点划分的定积分定义.

34. (34.) 注意到
$$\frac{\sqrt{1+4t^2}}{\ln(1+e^t)}=2+\frac{1}{4t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right),t\to+\infty,$$

于是我们有
$$\begin{aligned}
\int_x^{x+1}\frac{\sqrt{1+4t^2}}{\ln(1+e^t)}dt&=\int_x^{x+1}2dt+\int_x^{x+1}\frac{1}{4t^2}dt+o\left(\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}dt\right)\\
&=2+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x+4}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&=2+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),x\to+\infty.
\end{aligned}$$

35. (35.) 定义 $y_n=\frac{x_n-a}{b-a},n\in\mathbb{N}$, 然后我们有
$$y_{n+1}=\frac{\sqrt{1+y_n}-\sqrt{1-y_n}}{2},n\in\mathbb{N}.$$

因此 $y_{n+1}^2=\frac{1-\sqrt{1-y_n^2}}{2},n\in\mathbb{N}$. 注意到 $y_1=\frac{x_1-a}{b-a}\in(0,1)$, 于是存在 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $y_1=\sin\theta$. 因此归纳可证
$$y_n=\sin\frac{\theta}{2^{n-1}},n\in\mathbb{N},$$

这就给出了
$$\lim_{n\to\infty}2^n(x_n-a)=(b-a)\lim_{n\to\infty}2^ny_n=(b-a)\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}=2(b-a)\theta=2(b-a)\arcsin\frac{A-a}{b-a}.$$

36. (36.) 一方面
$$\ln\left(1+\sin^2x\right)=\sin^2x-\frac{\sin^4x}{2}+o\left(\sin^4x\right),$$

另外一方面
$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{2-\cos x}&=1+\frac{1}{3}(1-\cos x)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}(1-\cos x)^2+o\left[(1-\cos x)^2\right]\\
&=1+\frac{1}{3}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}(1-\cos x)^2+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

于是就得到
$$\lim_{x\to0}\left|\frac{\ln\left(1+\sin^2x\right)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}\right|=\frac{7}{12},$$

于是 $p+q=19$.

37. (37.) 首先由 Stolz 定理9.1得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\sum_{k=2}^n\frac{1}{\ln k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln n}}\frac{1}{\ln(n+1)}=1.$$

然后由求和对称性和单独一项不影响极限, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\cdot\ln(n-k)}&=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{\ln k\cdot\ln(n-k)}\\&\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n\ln\frac{n}{2}}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{\ln k}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\sum_{2\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{\ln k}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\ln\left[\frac{n}{2}\right]}=1,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\cdot\ln(n-k)}&=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n-2}\frac{1}{\ln k\cdot\ln(n-k)}\\&\geqslant 2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n\ln(n-2)}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n-2}\frac{1}{\ln(n-k)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{\ln k}=1.\end{aligned}$$

由夹逼准则我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\cdot\ln(n-k)}=1.$$

38. (38.) 直接由洛必达法则, 区间再现14.1和含参积分求导公式, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t\ln t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^{x-t}-e^{y-t}}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^{-x}-e^{-y}}{y-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{t\to+\infty}t\left(\int_0^t\frac{e^{-x}-e^{-t}}{t-x}\mathrm{d}x+\int_0^t\frac{e^{-t}-e^{-y}}{y-t}\mathrm{d}y\right)\\&=2\lim_{t\to+\infty}t\int_0^t\frac{e^{-x}-e^{-t}}{t-x}\mathrm{d}x=2\lim_{t\to+\infty}t\int_0^1\frac{e^{-tu}-e^{-t}}{1-u}\mathrm{d}u=2\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}\int_0^1\frac{e^{t(1-u)}-1}{1-u}\mathrm{d}u\\&=2\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{te^t-e^t}{t^2}}\int_0^1 e^{t(1-u)}\mathrm{d}u=2\lim_{t\to+\infty}t\int_0^1 e^{-tu}\mathrm{d}u=2\lim_{t\to+\infty}\left(1-e^{-t}\right)=2.\end{aligned}$$

39. (39.) 显然 a_n 递增到正无穷, 所以 $b_n=\frac{1}{a_n}$ 递减到 0 且满足

$$b_1>0,b_{n+1}=b_ne^{-b_n},n=1,2,\cdots.$$

由 Taylor 公式我们有

$$xe^{-x}=x-x^2+\frac{x^3}{2}+O\left(x^4\right),x\to0^+.$$

由定理8.2, 我们有

$$b_n=\frac{1}{n}-\frac{3}{2}\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),n\to\infty,$$

从而

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{3}{2}\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}=n\left(\frac{1}{1-\frac{3\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\right)\\&=n\left(1+\frac{3\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)=n+\frac{3\ln n}{2}+o\left(\ln n\right),n\to\infty.\end{aligned}$$

40. (40.) 本题属于 n 可以解出来的类型. 注意到

$$0<x_n<1,n=\frac{\ln\left(2023-2023x_n\right)}{\ln x_n}.$$

显然画出 $f(x)=\frac{\ln(2023-2023x)}{\ln x}$ 的图像并类似例题8.45知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. 于是由洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}x_n^n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(2023-2023x_n)}{\ln x_n}}{\ln\left(\frac{\ln(2023-2023x_n)}{\ln x_n}\right)}e^{\frac{\ln(2023-2023x_n)}{\ln x_n}\cdot\ln x_n}=2023\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\frac{\ln(2023-2023x)}{\ln x}}{\ln\left(\frac{\ln(2023-2023x)}{\ln x}\right)}\\&=-2023\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(2023-2023x)}{\ln\left(\frac{\ln(2023-2023x)}{\ln x}\right)}=-2023\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{-1}{(2023-2023x)\ln(2023-2023x)}-\frac{1}{x\ln x}}\\&=-2023\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\frac{1}{2023\ln(2023-2023x)}+\frac{1-x}{x\ln x}}=-2023\cdot\frac{1}{0-1}=2023.\end{aligned}$$

41. (41.)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{1+x}|_0^1=2\sqrt{2}-2.\end{aligned}$$

42. (42.) 我们写成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+1)}}{n^2+k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1\cdot2}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2\cdot3}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n^2+n}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+1)}}{n^2+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k(k+1)}}{n^2+k}-\frac{k}{n^2}\right)\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2\sqrt{k(k+1)}-k\left(n^2+k\right)}{\left(n^2+k\right)n^2}\right|\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{n^2\sqrt{k(k+1)}-kn^2-k^2}{n^4}\right|\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+1)}-k}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}}{n^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+1)}}{n^2+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\int_0^1x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

43. (43.) 一方面，由幂平均不等式8.2和推论8.1我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{a_k}}{n}\right)^n\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a.$$

另外一方面, 继续由幂平均不等式和 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{a_k}}{n}\right)^n\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a.$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n=a.$$

44. (44.) 一方面, 利用单调性, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1(1+a_nx^n)^n\,\mathrm{d}x}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1(1+a_n)^n\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1+a.$$

另外一方面, 采用压缩区间的思想, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1(1+a_nx^n)^n\,\mathrm{d}x}&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1(1+a_nx^n)^n\,\mathrm{d}x}\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1\left(1+a_n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)^n\mathrm{d}x}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+a_ne^{n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=1+a.\end{aligned}$$

因此由夹逼准则我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1(1+a_nx^n)^n\,\mathrm{d}x}=1+a.$$

45. (45.) 由单调性, 我们有

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\frac{a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}}{n}\right)^n\mathrm{d}x}\\&\leqslant\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}\right)^n\mathrm{d}x}\\&=1+\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}.\end{aligned}$$

由均值不等式, 我们有

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\frac{a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}}{n}\right)^n\mathrm{d}x}\\&\geqslant\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\sqrt[n]{a_1a_3\cdots a_{2n-1}x^{1+3+\cdots+2n-1}}\right)^n\mathrm{d}x}\\&=\sqrt[n]{\int_0^1(1+\sqrt[n]{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}x^n)^n\,\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

由 Stolz 定理9.1我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=a.$$

由 Stolz 定理的推论8.13, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_3\cdots a_{2n+1}}{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=a.$$

于是结合例题44.的结果和夹逼准则我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1\left(1+\frac{a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}}{n}\right)^n\mathrm{d}x}=1+a.$$

46. (46.) 我们主要利用根值极限和比值极限的关系8.1和8.2. 一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdots\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdots\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{(n+1)!\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdots\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}=\frac{1}{e}.$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n-1)!!}{(2n+1)!!n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdots\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdots\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{1}{2e}.$$

47. (47.) 首先

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}-1}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{m-\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}{(x-1)\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}\\&=\frac{1}{m}\lim_{x\to1}\frac{m-\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}{x-1}=\frac{1}{m}\lim_{x\to1}\frac{-1-2x-\cdots-(m-1)x^{m-2}}{1}\\&=-\frac{1}{m}\frac{(m-1)m}{2}=\frac{1-m}{2}.\end{aligned}$$

然后就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\frac{\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}-1}{x-1}-\frac{1-m}{2}}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{m-\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)-\frac{1-m}{2}(x-1)\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}{(x-1)^2\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}\\&=\frac{1}{m}\lim_{x\to1}\frac{m-\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)-\frac{1-m}{2}(x-1)\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}{(x-1)^2}\\&=\frac{1}{m}\lim_{x\to1}\frac{-\sum_{j=1}^{m-1}jx^{j-1}-\frac{1-m}{2}(x-1)\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)'-\frac{1-m}{2}\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)}{2(x-1)}\\&=\frac{1}{m}\lim_{x\to1}\frac{-\sum_{j=2}^{m-1}j(j-1)x^{j-2}-\frac{1-m}{2}\sum_{j=1}^{m-1}jx^{j-1}}{2}-\frac{1-m}{4m}\lim_{x\to1}\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)'\\&=\frac{1}{m}\frac{-\sum_{j=2}^{m-1}j(j-1)-\frac{1-m}{2}\sum_{j=1}^{m-1}j}{2}-\frac{1-m}{4m}\sum_{j=1}^{m-1}j=\frac{m^2-1}{12}.\end{aligned}$$

于是我们就得到了 $x\to1$ 时有

$$\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}=1+\frac{1-m}{2}(x-1)+\frac{m^2-1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).$$

48. (48.) 我们这里不追寻技巧, 而是给出一个一般性方法. 注意到

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\-1&2&1\\1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix},$$

于是有

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{相似对角化}}{=} \left[\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} \right]^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-3\cdot 5^{n+1}+(-2)^n}{7} \\ \frac{5^{n+1}+2\cdot(-2)^n}{7} \\ -(-2)^n \end{pmatrix}.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n+y_n+z_n}{5^n+3^n} = -\frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5^n + 4\cdot(-2)^{n-1}}{5^n+3^n} = -\frac{2}{7}.$$

49. (49.) 由周期性和对称性, 不妨设 $\theta \in [0,\pi)$, 于是一方面有

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \left(1-\frac{|t|}{x}\right) \cos(\theta - t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \int_{-1}^{1} (1-|t|)\cos(\theta - xt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \cos(\theta-\alpha t) \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\mathrm{d}t = \cos(\theta) \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,\mathrm{d}t.$$

另外一方面有

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \left(1-\frac{|t|}{x}\right) \cos(\theta - t)\,\mathrm{d}t = -\lim_{x\to 0^-} \int_{1}^{-1} (1+|t|)\cos(\theta + xt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \cos(\theta+\alpha t) \int_{-1}^{1} (1+|t|)\,\mathrm{d}t = \cos(\theta) \int_{-1}^{1} (1+|t|)\,\mathrm{d}t.$$

于是为了极限存在必然有 $\cos(\theta)=0$, 从而 $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, n\in\mathbb{Z}$.

50. (50.) 我们归纳证明

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant a_n \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0,1,2,\cdots. \tag{30.13}$$

事实上, $n=0$ 显然不等式(30.13)成立. 假设 n 时(30.13)成立, 当 $n+1$ 时, 我们运用 $x+\cos x$ 递增有

$$a_{n+1} = a_n + \cos a_n + \pi \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2} + \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \pi = (n+1)\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$a_{n+1} = a_n + \cos a_n + \pi \geqslant n\pi - \frac{\pi}{2} + \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \pi = (n+1)\pi - \frac{\pi}{2}.$$

这就证明了(30.13)成立. 于是由夹逼准则我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \pi$.

51. (51.) 设 $x_1 = \sqrt{x}, x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}, n = 1,2,\cdots$, 注意到到不动点是 2, 于是当 $x = 2,3$ 皆有 $x_1 < 2$. 又当 $x = 2,3$, 分别有

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} > x_1 = \sqrt{3},$$

于是由递增递推的数列必定单调, 且和不动点大小关系恒定[2], 我们知道当 $x=2,3$, 一定有 x_n 递增且有上界 2. 现在有

$$\lim_{n\to\infty} A_n(2) = \lim_{n\to\infty} A_n(3) = \sqrt{2-\lim_{n\to\infty} x_n} = 0.$$

[2] 即8.4.1.

利用

$$2\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2+2\cos\alpha},\alpha\in(-\pi,\pi).$$

归纳可得

$$\alpha=2\arccos\frac{\sqrt{x}}{2},x_n=2\cos\frac{\alpha}{2^n},n=1,2,\cdots.$$

现在考虑

$$\alpha_1=2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2},\alpha_2=2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},$$

则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(2)}{A_n(3)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-2\cos\frac{\alpha_1}{2^n}}}{\sqrt{2-2\cos\frac{\alpha_2}{2^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{3\cdot2^n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}}{\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

52. (52.) 注意到对任何 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k-x\right|&=\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x_k-x)\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=0}^{N}C_n^k(x_k-x)\right|+\frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k(x_k-x)\right|\\&\leqslant\frac{\sup\limits_{k\geqslant1}|x_k|+|x|}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k+\frac{\sup\limits_{k\geqslant N+1}|x_k-x|}{2^n}\cdot\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k\\&\leqslant\frac{\sup\limits_{k\geqslant1}|x_k|+|x|}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k+\frac{\sup\limits_{k\geqslant N+1}|x_k-x|}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^k\\&=\frac{\sup\limits_{k\geqslant1}|x_k|+|x|}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k+\sup_{k\geqslant N+1}|x_k-x|.\end{aligned}$$

于是利用 $\sum\limits_{k=0}^{N}C_n^k$ 是一个多项式我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k-x\right|\leqslant\sup_{k\geqslant N+1}|x_k-x|.$$

由 N 任意性我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx_k=x.$$

53. (53.) 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin^2 k}{n^2+k\sin^2 k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k\sin^2 k}{n^2}}{1+\frac{k\sin^2 k}{n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\sin^2 k}{n^2}+O\left(\frac{k^2\sin^4 k}{n^4}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\sin^2 k}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sin^2 k}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cos(2k)}{2n^2}\\
&\overset{\text{Abel 变换8.2}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{4n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left[-\sum_{j=1}^{k}\cos(2j)\right]+n\sum_{j=1}^{n}\cos(2j)}{2n^2}\\
&= \frac{1}{4}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}\cos(2j)}{2(n+1)^2-2n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}\cos(2j)}{2n}=\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 Stolz 定理9.1和 $\sum_{j=1}^{n}\cos(2j)=\frac{\sin n\cdot\cos(n+1)}{\sin 1}$ 是有界的.

54. (54.) 一方面

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{x}{n^2+x^2}\mathrm{d}y \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{x}{y^2+x^2}\mathrm{d}y\\
&= \int_1^{\infty}\frac{x}{y^2+x^2}\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{x^2}{x^2t^2+x^2}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{x}{n^2+x^2}\mathrm{d}y \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{x}{y^2+x^2}\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\infty}\frac{x}{y^2+x^2}\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^2t^2+x^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

于是我们由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

55. (55.) 先归纳证明 $0<a_{n+1}<a_n\leqslant 1$. 当 $n=1$ 时问题显然成立, 假设 n 时有 $0<a_{n+1}<a_n\leqslant 1$, 当 $n+1$ 时有

$$0<\frac{a_{n+1}}{2}=a_{n+1}-\frac{a_{n+1}}{2}\leqslant a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{a_na_{n+1}}{2}<a_{n+1}\leqslant 1,$$

这就证明了

$$0<a_{n+1}<a_n\leqslant 1,\forall n\in\mathbb{N}.$$

现在 a_n 递减且由单调有界知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 存在. 代入 a 到递推得

$$a=a-\frac{a^2}{2}\Rightarrow a=0.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{2}\right)=1,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{2}}{-\frac{a_na_{n+1}}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=1.$$

然后继续用 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(a_{n+1} - a_{n+2}\right)}{a_n - a_{n+1}} = 2.$$

56. (56.) 注意到[3]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{n} &= n + \sqrt{n} + \sum_{3\leqslant k\leqslant \ln^2 n} e^{\frac{\ln n}{k}} + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant \sqrt{n}\ln n} e^{\frac{\ln n}{k}} + \sum_{\sqrt{n}\ln n<k\leqslant n} e^{\frac{\ln n}{k}} \\
&= n + \sqrt{n} + O\left(\sum_{3\leqslant k\leqslant \ln^2 n} e^{\frac{\ln n}{3}}\right) + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant \sqrt{n}\ln n} \left(1 + \frac{\ln n}{k} + O\left(\frac{\ln^2 n}{k^2}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{\sqrt{n}\ln n<k\leqslant n} \left(1 + \frac{\ln n}{k} + O\left(\frac{\ln^2 n}{k^2}\right)\right) \\
&= n + \sqrt{n} + O\left(\sqrt[3]{n}\ln^2 n\right) + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant \sqrt{n}\ln n} \left(1 + \frac{\ln n}{k} + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{\sqrt{n}\ln n<k\leqslant n} \left(1 + \frac{\ln n}{k} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n + \sqrt{n} + O\left(\sqrt[3]{n}\ln^2 n\right) + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant \sqrt{n}\ln n} \left(1 + \frac{\ln n}{k}\right) + O\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{\ln^2 n}\right) + \sum_{\sqrt{n}\ln n<k\leqslant n} \left(1 + \frac{\ln n}{k}\right) + O(1) \\
&= n + \sqrt{n} + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant \sqrt{n}\ln n} \left(1 + \frac{\ln n}{k}\right) + O\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{\ln^2 n}\right) + \sum_{\sqrt{n}\ln n<k\leqslant n} \left(1 + \frac{\ln n}{k}\right) \\
&= n + \sqrt{n} + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant n} \left(1 + \frac{\ln n}{k}\right) + O\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{\ln^2 n}\right) \\
&= n + \sqrt{n} + n + \sum_{\ln^2 n<k\leqslant n} \frac{\ln n}{k} + O\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{\ln^2 n}\right) \\
&= 2n + \sqrt{n} + O\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{\ln^2 n}\right),
\end{aligned}$$

这里最后一个等号用到了8.6. 因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{n} - 2n\right) = 1.$$

57. (57.) 由 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n-2} + x_{2n-3}}{2n - 2(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n} - x_{2n-2}}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n-1} - x_{2n-3}}{2} = 0,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{2n-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n-3} + x_{2n-4}}{2n - 1 - (2(n-1) - 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n-1} - x_{2n-3}}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n-2} - x_{2n-4}}{2} = 0.
\end{aligned}$$

于是由命题7.4, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

58. (58.) 设 $f(x) = \sinh x - x\cosh x, x \in (0,1)$, 则

$$f'(x) = \cosh x - \cosh x - x\sinh x = -x\sinh x < 0,$$

故

$$f(x) < f(0) \Rightarrow \sinh x - x\cosh x < 0 \Rightarrow \frac{\sinh x}{x} < \cosh x.$$

[3]注意合理吸收进余项.

因此

$$\cosh b_n = \frac{\sinh a_n}{a_n} < \cosh a_n \Rightarrow a_n > b_n, n = 1, 2, \cdots.$$

由命题7.4, 如果(8.67)的极限不成立, 设有子列极限

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_{n_k} - a_{n_k}}{a_{n_k}} \right|^{n_k} = \lim_{k\to\infty} e^{n_k \ln\left(1-\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}\right)} \neq 0,$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(1 - \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = 0.$$

现在

$$1 = \lim_{k\to\infty} \cosh b_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sinh a_{n_k}}{a_{n_k}} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0,$$

这是因为 $\begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0,1)$ 严格递增且连续, 所以存在连续的反函数. 于是利用

$$\frac{\sinh x}{x} = 1 + O\left(x^2\right), \frac{\sinh^2 x}{x^2} = 1 + \frac{x^2}{3} + O\left(x^4\right), x \to 0^+,$$

我们有

$$b_{n_k} = \ln\left(\frac{\sinh a_{n_k}}{a_{n_k}} + \sqrt{\frac{\sinh^2 a_{n_k}}{a_{n_k}^2} - 1}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}} a_{n_k} + O\left(a_{n_k}^2\right)\right) \sim \sqrt{\frac{1}{3}} a_{n_k}, k \to \infty,$$

这和 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} = 0$ 矛盾! 因此我们证明了(8.67).

59. (59.) 首先来看一个经典模型:

结论

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}. \tag{30.14}$$

笔记 [♠] 本结论的渐近方法和无穷阶渐近见习题29..

证明 倒序求和得

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

Method 1 利用 $\ln(1+x) \leqslant x$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

对任何 $m \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n &\geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{m} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{m} e^{-k}. \end{aligned}$$

由 m 任意性得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

故由夹逼准则得(30.14).

Method 2 ♠ 利用 $\ln(1+x) \leqslant x$ 和分类讨论, 我们有

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \chi_{\{0,1,\cdots,n\}}(k) \leqslant e^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是利用 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k}=\frac{e}{e-1}<\infty$ 和级数的控制收敛定理18.16得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{0,1,2,\cdots\}}(k)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\chi_{\{0,1,2,\cdots\}}(k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}=\frac{e}{e-1},\end{aligned}$$

这就证明了(30.14).

回到原题, 由结论59., 我们有

$$1^n+2^n+\cdots+n^n\sim\frac{e}{e-1}n^n,n\to\infty.$$

又

$$0\leqslant\frac{n^1+n^2+\cdots+n^{n-2}}{n^n}\leqslant\frac{(n-2)\cdot n^{n-2}}{n^n}=\frac{n-2}{n^2}\to0,n\to\infty,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^1+n^2+\cdots+n^n}{n^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n+n^{n-1}}{n^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n^1+n^2+\cdots+n^{n-2}}{n^n}\\&=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n^1+n^2+\cdots+n^{n-2}}{n^n}=1.\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^1+n^2+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{\frac{e}{e-1}n^n}=\frac{e-1}{e}.$$

60. (60.) 直接由 Taylor 公式得

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{an}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{an}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{an}\left(\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{an}\frac{k}{n^2}+o(1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(1+an)an}{2n^2}+o(1)}=e^{\frac{a^2}{2}}.$$

61. (61.) 由 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{2j}{n^2+n+j}&=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{2j}{1+\frac{n+j}{n^2}}=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}2j\left(1-\frac{n+j}{n^2}+O\left(\frac{(n+j)^2}{n^4}\right)\right)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}2j\left(1-\frac{1}{n}-\frac{j}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}2j\left(1-\frac{1}{n}-\frac{j}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=\frac{(n+1)\left(3n^2-5n-1\right)}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{2j}{n^2+n+j}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{2j}{n^2+n+j}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

62. (62.) 作出 x^2 和 $\tan x$ 的图形可知

$$\pi+n\pi<\sqrt{r_n}<\frac{3}{2}\pi+n\pi,n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$r_n=\tan\left(\sqrt{r_n}-(n+1)\pi\right)\Rightarrow\sqrt{r_n}=\arctan r_n+(n+1)\pi.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}r_n=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{r_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan r_n+(n+1)\pi}{n}=\pi,$$

即 $r_n\sim n^2\pi^2, n\to\infty$. 现在利用 $\cot\arctan x=\frac{1}{x}, x>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\cot\sqrt{r_k}\right)^2&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cot\left(\arctan r_k+(k+1)\,\pi\right)\right)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cot\left(\arctan r_k\right)\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k^2}\sim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4\pi^4}, n\to\infty,\end{aligned}$$

故原级数收敛.

63. (63.) 注意到 f_n 递增且 $f_n(1)=1>0, f_n(0)=1-e^n<0, n\in\mathbb{N}$, 于是由零点定理知有唯一的 $r_n\in(0,1)$ 使得 $f_n(r_n)=0$. 现在

$$e^{nr_n}-e^n+r_n=0\Rightarrow r_n=\frac{\ln\left(e^n-r_n\right)}{n}=\frac{n+\ln\left(1-r_ne^{-n}\right)}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}r_n=1.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}ne^n\left(1-r_n\right)=-\lim_{n\to\infty}e^n\ln\left(1-r_ne^{-n}\right)=\lim_{n\to\infty}r_n=1.$$

64. (64.) 注意到

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{3k+3}\\x_{3k+2}\\x_{3k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{3k}\\x_{3k-1}\\x_{3k-2}\end{pmatrix},k\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\begin{pmatrix}x_{3k+3}\\x_{3k+2}\\x_{3k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{3k}\\x_{3k-1}\\x_{3k-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_{3k-3}\\x_{3k-4}\\x_{3k-5}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}.$$

于是作相似对角化得

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\sqrt5&0&3+\sqrt5\\\sqrt5-1&-1&-\sqrt5-1\\\sqrt5-1&0&-\sqrt5-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-\sqrt5&0&3+\sqrt5\\\sqrt5-1&-1&-\sqrt5-1\\\sqrt5-1&0&-\sqrt5-1\end{pmatrix}^{-1}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}3-\sqrt5&0&3+\sqrt5\\\sqrt5-1&-1&-\sqrt5-1\\\sqrt5-1&0&-\sqrt5-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k&0&0\\0&1&0\\0&0&\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-\sqrt5&0&3+\sqrt5\\\sqrt5-1&-1&-\sqrt5-1\\\sqrt5-1&0&-\sqrt5-1\end{pmatrix}^{-1}.$$

因此我们有

$$\begin{pmatrix}x_{3k+3}\\x_{3k+2}\\x_{3k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5+\sqrt5}{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k+\frac{5-\sqrt5}{10}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k\\\frac{5+3\sqrt5}{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k+\frac{5-3\sqrt5}{10}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k-1\\\frac{5+3\sqrt5}{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k+\frac{5-3\sqrt5}{10}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k\end{pmatrix},k\in\mathbb{N}_0.$$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(c_1x_{3k+1}+c_2x_{3k+2}+c_3x_{3k+3}\right)$ 存在, 则由 $\frac{1+\sqrt5}{2}>1, \left|\frac{1-\sqrt5}{2}\right|<1$ 知

$$c_1\frac{5+3\sqrt5}{10}+c_2\frac{5+3\sqrt5}{10}+c_3\frac{5+\sqrt5}{10}=0\Leftrightarrow c_3=-\frac{\sqrt5+1}{2}\left(c_1+c_2\right)$$

为所求条件.

65. (65.) 约定 $0^0=1$, 把 $f(n)=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ 看成整体用例题8.14即得(8.68).

66. (66.) 对 $n \geqslant 2$, 将三个递推相加得

$$\begin{aligned} a_n+b_n+c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}\right) \\ &= \cdots \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(a_1+b_1+c_1\right) \\ &= \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

这里直接演算发现 $n=1$ 也成立. 三个递推平方之和相加得

$$\begin{aligned} a_n^2+b_n^2+c_n^2 &= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)+\frac{2}{n}\left(a_{n-1}b_{n-1}+c_{n-1}a_{n-1}+c_{n-1}b_{n-1}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)+\frac{1}{n}\left[\left(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}\right)^2-\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)\right] \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)+\frac{n}{4}=\frac{n^2-n+1}{n^2}\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)+\frac{n}{4}. \end{aligned}$$

基于上述观察, 我们得

$$\begin{aligned} x_n &\triangleq \left(a_n-b_n\right)^2+\left(b_n-c_n\right)^2+\left(c_n-a_n\right)^2=2a_n^2+2b_n^2+2c_n^2-2a_nb_n-2a_nc_n-2b_nc_n \\ &= 2\left(a_n^2+b_n^2+c_n^2\right)-\left[\left(a_n+b_n+c_n\right)^2-a_n^2-b_n^2-c_n^2\right]=3\left(a_n^2+b_n^2+c_n^2\right)-\frac{(n+1)^2}{4} \\ &= 3\frac{n^2-n+1}{n^2}\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)+\frac{3n}{4}-\frac{(n+1)^2}{4}=3\frac{n^2-n+1}{n^2}\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)-\frac{n^2-n+1}{4} \\ &= \frac{n^2-n+1}{n^2}\left[3\left(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2\right)-\frac{n^2}{4}\right]=\frac{n^2-n+1}{n^2}x_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$0 \leqslant x_n = x_1\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2}=x_1e^{\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{k-1}{k^2}\right)} \leqslant x_1e^{-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right)} \leqslant Ce^{-\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}=Ce^{-\ln\frac{n+1}{2}} \leqslant \frac{2C}{n+1},$$

这里用到了 $\ln(x+1) \leqslant x$ 且 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty$. 于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=0$.

67. (67.) 当 $m=1$, 类似定理9.10的证明得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2}=\frac{A-C}{2}.$$

当 $m>1$, 取 $g(x) \triangleq mx^{m-1}f\left(x^m\right)$, 我们有

$$B=m\int_0^1 x^{m-2}f\left(x^m\right)\mathrm{d}x,\ \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在对 $k=1,2,\cdots,n$ 我们有

$$\begin{aligned} \frac{k^m-(k-1)^m}{n^m} &= \frac{(k-1+1)^m-(k-1)^m}{n^m}=\frac{m(k-1)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}(k-1)^{m-2}+\cdots+1}{n^m} \\ &= \frac{m}{n^m}(k-1)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2n^m}(k-1)^{m-2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}.$$

注意到

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} n\left|\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{n^3}\right)f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{[0,1]}|f|\cdot\left|O\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right)=0,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\frac{m(k-1)^{m-1}}{n^m}f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)}{2n^m}(k-1)^{m-2}f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)}{2n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{m-2}f\left(\frac{(k-1)^m}{n^m}\right)\\
&=\frac{g(1)-g(0)}{2}-\frac{m-1}{2}\int_0^1 mx^{m-2}f(x^m)\,\mathrm{d}x=\frac{mf(1)}{2}-\frac{(m-1)B}{2}=\frac{mA}{2}+\frac{1-m}{2}B.
\end{aligned}$$

68. (68.) 注意到

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^{1+\frac{2k}{n^2}}-\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)\right]\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{2k}{n^2}}\right)\right]\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2k}{n^2}}\right)\right]\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n^2}}\right)\right]\\
&=\left[1-\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{2}{n}}\right]\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)=\left[1-\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{2}{n}}\right]\cdot\left(1+\frac{n+1}{2n}\right)\to 0,n\to\infty,
\end{aligned}$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)^{1+\frac{2k}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{2n}\right)=\frac{3}{2}.$$

69. (69.) 把递推两边同时除以 $\frac{1}{n(n+1)^2(n+2)}$ 得

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{3}{n+1}\cdot\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{3^{n+1}}{n+1},n\in\mathbb{N}.$$

凑裂项结构得

$$\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{n!}{3^n}\cdot\frac{a_n}{n(n+1)}+n!,n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}n!&=\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\frac{n!}{3^n}\cdot\frac{a_n}{n(n+1)}\right]\\
&=\frac{(m+1)!}{3^{m+1}}\frac{a_{m+1}}{(m+1)(m+2)}-\frac{a_1}{6}\\
&=\frac{(m+1)!}{3^{m+1}}\frac{a_{m+1}}{(m+1)(m+2)}-1,
\end{aligned}$$

即 $\frac{a_m}{m(m+1)}=\frac{3^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-1}n!,m\in\mathbb{N}$. 注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{n=0}^{m-1}n!}{m\sum_{n=0}^{m-2}n!}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}+\frac{(m-1)!}{m\sum_{n=0}^{m-2}n!}\right)\\
&\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{m!}{m+1}-\frac{(m-1)!}{m}}{(m-1)!}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{mm!-(m+1)(m-1)!}{(m+1)!}\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}-\frac{1}{m}\right)=1.
\end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{\ln a_m}{m}&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\frac{a_m}{m\,(m+1)}=\ln 3+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\left(\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{m-1}n!\right)\\&=\ln 3+\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\sum\limits_{n=0}^{m-1}n!-\sum\limits_{k=1}^{m}\ln k}{m}\\&\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\ln 3+\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\sum\limits_{n=0}^{m-1}n!-\ln\sum\limits_{n=0}^{m-2}n!-\ln m}{m-(m-1)}\\&=\ln 3+\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1}n!}{m\sum\limits_{n=0}^{m-2}n!}\right)=\ln 3.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2n-1}\ln a_n}=e^{\frac{\ln 3}{2}}=\sqrt{3}.$$

70. (70.) 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{2023}\int_k^n\frac{1}{x^{2025}+n^{2025}}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2023}\left(\int_{\frac{k}{n}}^1\frac{1}{x^{2025}+1}\mathrm{d}x\right)\right]\\&=\int_0^1x^{2023}\mathrm{d}x\int_x^1\frac{1}{y^{2025}+1}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{y^{2025}+1}\mathrm{d}y\int_0^yx^{2023}\mathrm{d}x=\frac{1}{2024}\int_0^1\frac{y^{2024}}{1+y^{2025}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2024\cdot 2025}\int_0^1\frac{1}{y^{2025}+1}\mathrm{d}y^{2025}=\frac{1}{2024\cdot 2025}\int_0^1\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t=\frac{\ln 2}{2024\cdot 2025}.\end{aligned}$$

71. (71.) 读者当然可以无脑洛必达计算, . 我们从估阶角度直接有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[e^{(t-x)^2}-1\right]\sin t\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(t-x)^2\,t\mathrm{d}t}{x^4}\overset{t=xu}{=}\int_0^1(u-1)^2\,u\mathrm{d}u=\frac{1}{12}.$$

有同学疑惑我在积分号内如此替换严格吗? 实际上我们已经观察到了 $(t-x)^2, t$ 在 $x\to 0$ 时都是一致趋于 0 的, 于是可以用 Taylor 公式和 $\epsilon-\delta$ 语言实现严格化. 当然这样的估阶步骤严格写出超出了非数学范围.

72. (72.) 对任何 $\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\int_0^{\delta}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^{\delta}\frac{\sin^n\delta}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x\\&\leqslant\sin^n\delta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x+\sqrt{\pi-2\delta}.\end{aligned}$$

现在

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\pi-2\delta},$$

由 δ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x=0.$$

注[♠] 由 Laplace 方法9.3还可以得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{n\ln\sin x}}{\sqrt{\pi-2x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{n\ln\cos x}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x\sim\int_0^{\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{2\arccos\frac{1}{e^x}}}\mathrm{d}\sqrt{\arccos\frac{1}{e^x}}\sim 2^{-\frac{5}{4}}\int_0^{\infty}x^{-\frac{3}{4}}e^{-nx}\mathrm{d}x=\frac{2^{-\frac{5}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt[4]{n}},n\to\infty.$$

73. (73.) 注意到

$$f(x)=x-\ln x+\frac{2}{x}-3, f'(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{(x+1)(x-2)}{x^2},$$

我们有 f 在 $[2,+\infty)$ 严格递增, 于是结合

$$f(2)=2-\ln 2+1-3=-\ln 2<0, \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

知 f 在 $(2,+\infty)$ 有且只有一个实根 a.

注意到递推函数 $\ln x-\frac{2}{x}+3$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增, 所以由结论8.4.1知 x_n 单调且和不动点大小关系恒定. 于是注意到 f 的单调性, 我们有

$$x<\ln x-\frac{2}{x}+3, \forall x\in(2,a),$$

因此

$$x_1<\ln x_1-\frac{2}{x_1}+3=x_2,$$

从而 x_n 递增且有上界 a, 因此我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

考试书写: 归纳证明

$$a>x_{n+1}>x_n, n=1,2,\cdots. \tag{30.15}$$

注意到 f 的单调性和 a 是递推数列不动点, 我们有

$$x<\ln x-\frac{2}{x}+3, \forall x\in(2,a),$$

因此

$$x_1<x_2=\ln x_1-\frac{2}{x_1}+3<\ln a-\frac{2}{a}+3=a.$$

于是 $n=1$ 时有(30.15)成立. 假设 n 时有(30.15)成立, 当 $n+1$ 时我们有

$$x_{n+1}=\ln x_n-\frac{2}{x_n}+3<x_{n+2}=\ln x_{n+1}-\frac{2}{x_{n+1}}+3<\ln a-\frac{2}{a}+3=a.$$

因此由数学归纳法知(30.15)对一切 $n\in\mathbb{N}$ 都成立. 从而由单调有界必收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c>2$. 此时

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n-\frac{2}{x_n}+3\right)\Rightarrow c=\ln c-\frac{2}{c}+3\Rightarrow c=a,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

74. (74.) 注意到

$$(x5^x)'=(1+\ln 5\cdot x)5^x>0, \forall x>0,$$

于是 $x5^x$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增, 因此其反函数 f 也在 $(0,+\infty)$ 严格递增. 显然

$$\lim_{x\to+\infty} x5^x=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

当 x 充分大使得 $f(x)>2$, 则

$$2<f(x)=\frac{\ln x}{\ln 5}-\frac{\ln f(x)}{\ln 5}<\frac{\ln x}{\ln 5}.$$

现在

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\frac{1}{\ln 5}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln 5\cdot\ln x}=\frac{1}{\ln 5},$$

这里用到了夹逼准则

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{\ln 5\cdot\ln x}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln 5\cdot\ln x}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{\ln x}{\ln 5}}{\ln 5\cdot\ln x}=0.$$

75. (75.) 我们先证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}}{x^2}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}. \tag{30.16}$$

利用不等式

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\geqslant\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R},$$

我们有

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\left(1-\frac{(2xt)^2}{2}\right)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty e^{-t^2}\left(1-\frac{(2xt)^2}{2}+\frac{(2xt)^4}{24}\right)\mathrm{d}t.$$

直接计算可由夹逼准则得(30.16).

现在由(30.16)知原极限当 $0<\alpha<2$ 时为正无穷, $\alpha>2$ 时为 0. $\alpha=2$ 时为 $-\frac{1}{2}$.

76. (76.) 因为 $f'\in(0,1)$, 我们有 f 严格递增, $f-x$ 严格递减. 现在

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f^{k+1}(t)}{t-f(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{k+1}}{-\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}t^{k+1}}=-\frac{(k+1)!}{f^{(k+1)}(0)}>0.\tag{30.17}$$

下证

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}.\tag{30.18}$$

首先当 $n=1$, (30.18)显然成立, 假设(30.18)对 n 也成立, 则 $n+1$ 时我们有

$$x_{n+1}=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)>f(0)=0.$$

注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i=-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}x_i+\frac{x_n}{n}\leqslant-\frac{(n-1)x_n}{n(n-1)}+\frac{x_n}{n}=0,$$

我们有

$$x_{n+1}=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\leqslant f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)=x_n,$$

这就证明了(30.18)对一切自然数 n 都成立.

由(30.18)和单调有界必收敛知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\in[0,+\infty).$$

于是由 Stolz 定理9.1得

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)=f(a),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a=0.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)}{f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}\right)=1,$$

这里用到了

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}\right)\overset{(30.18)}{\leqslant}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n-1}x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0.$$

现在

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n^k \ln n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{x_n^k}} \overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{x_{n+1}^k}-\frac{1}{x_n^k}} \\ &\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=} -\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{x_{n+1}-x_n}\cdot\theta_n^{k+1} \\ &\overset{\text{等价替换, 注意运用}x_{n+1}\sim x_n\sim\theta_n}{=} \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{x_n-x_{n+1}}\cdot x_n^{k+1} \\ &= \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)-f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}\cdot f^{k+1}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right) \\ &\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=} \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot\frac{1}{f'(\xi_n)}\cdot f^{k+1}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right) \\ &= \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot f^{k+1}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot f^{k+1}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)}{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n-1}x_i-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)} \\ &= \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty} \frac{f^{k+1}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i-f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)} = \frac{1}{k}\lim_{t\to0^+}\frac{f^{k+1}(t)}{t-f(t)} \overset{(30.17)}{=} -\frac{(k+1)!}{kf^{(k+1)}(0)},\end{aligned}$$

这就得到了(8.69).

77. (77.)**Method 1**

由 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nx_n^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{f^2(x_n)}-\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x\to0}\frac{x^2f^2(x)}{x^2-f^2(x)} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{x^4}{(x-f(x))(x+f(x))} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-f(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\arctan\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\arctan\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\left[\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+o(x^3)\right]} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} = 1.\end{aligned}$$

Method 2

首先有

$$\frac{1}{\arctan^2\sin x} = \frac{1}{x^2}+1+o(1), x\to0,$$

于是

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{\arctan^2\sin x_n} = \frac{1}{x_n^2}+1+o(1), n=1,2,\cdots.$$

现在得

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{1}{x_1^2}+n+no(1), n=1,2,\cdots,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} nx_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1^2}+n+no(1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{n}+1+o(1)} = 1.$$

78. (78.) 显然 $x_n>0$. 由

$$1-x_n = \frac{(1-a_n)(1-x_{n-1})}{1+a_nx_{n-1}}$$

归纳可证 $x_n<1$. 然后

$$x_{n-1}-x_n=\frac{a_n\left(x_{n-1}^2-1\right)}{1+a_nx_{n-1}}<0,$$

因此我们证明了 x_n 递增有上界, 故极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\in[a_0,1].$$

现在若 $A\neq1$, 则

$$x_n=\frac{a_n+x_{n-1}}{1+a_nx_{n-1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{1-x_nx_{n-1}}=0,$$

这和 $a_n>\frac{1}{2}$ 矛盾! 因此我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

79. (79.) 首先由 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{kn-1}}{kn}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{kn}}}{\sqrt{kn}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{1}{2kn}+o\left(\frac{1}{kn}\right)}{\sqrt{kn}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\sqrt{k}n^{\frac{3}{2}}}\right)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\&=2.\end{aligned}$$

80. (80.) **Step 1**

设

$$f(x)\triangleq e^{-x}+\cos(2x)+x\sin x,$$

我们有

$$f'(x)=-e^{-x}-2\sin(2x)+\sin x+x\cos x.$$

对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}&f\left((2n-1)\pi\right)=e^{-(2n-1)\pi}+1>0;\\&f\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=e^{-(2n-1)\pi-\frac{\pi}{2}}-1-(2n-1)\pi-\frac{\pi}{2}<0;\\&f(x)=e^{-x}+\cos^2x+(x-\sin x)\sin x>0,\forall x\in\left[2n\pi,(2n+1)\pi\right),\end{aligned}$$

于是存在

$$x_{2n-1}\in\left((2n-1)\pi,(2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right),x_{2n}\in\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2},2n\pi\right)$$

使得

$$f(x_{2n-1})=f(x_{2n})=0,x_{2n-1}<x_{2n}.$$

Step 2

注意到

$$\begin{aligned}&-2\sin(2x)+\sin x>0,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right);\\&-2\sin(2x)+\sin x<0,\forall x\in\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

我们有

$$f(x)<1+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)<0,\forall x\in\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{4},(2n-1)\pi+\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$f'(x)>-1+0+\frac{\sqrt{2}}{2}\left((2n-1)\pi+\frac{3\pi}{4}\right)>0,\forall x\in\left((2n-1)\pi+\frac{3\pi}{4},2n\pi\right);$$

$$f'(x)<0+0-\frac{\sqrt{2}}{2}(2n-1)\pi<0,\forall x\in\left((2n-1)\pi,(2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right).$$

于是

$$x_{2n-1}\in\left((2n-1)\pi,(2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right),x_{2n}\in\left((2n-1)\pi+\frac{3\pi}{4},2n\pi\right)$$

是 f 在区间 $((2n-1)\pi,(2n+1)\pi)$ 的唯二零点.

Step 3

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 故

$$\begin{aligned}1&=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-x_n}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\sin x_n\left(2\sin x_n-x_n\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\left(x_n-n\pi\right)\left(2\sin x_n-x_n\right)\right],\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-n\pi\right)=0$. 进一步得

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\left(x_n-n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n\left(x_n-n\pi\right)}{(-1)^n\sin\left(x_n-n\pi\right)\left(2\sin x_n-x_n\right)}$$

$$\overset{\text{等价无穷小替换}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\sin x_n-x_n}\overset{\text{等价无穷大替换}}{=}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}\overset{\text{分奇偶子列}}{=}-\frac{1}{\pi}.$$

81. (81.) 注意到 $x+2\ln(1+x)$ 是严格递增函数, 所以其反函数也是严格递增的. 于是本题符合递增递推数列结论8.4.1. 注意到不动点是 $x=0$, 我们归纳易证 $x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant 0$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

注意到

$$\lim_{x\to\to 0}\left(\frac{1}{x+2\ln(1+x)}-\frac{1}{3x}\right)=\frac{1}{9},$$

我们有

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_{n+1}+2\ln\left(1+x_{n+1}\right)}=\frac{1}{3x_{n+1}}+\frac{1}{9}+o(1).$$

于是

$$\frac{1}{3^n x_n}=\frac{1}{3^{n+1}x_{n+1}}+\frac{1}{3^{n+2}}+o\left(\frac{1}{3^n}\right),$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{3^n x_n}-\frac{1}{3^{n+1}x_{n+1}}\right)&=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{3^{n+2}}+\sum_{n=1}^{m}o\left(\frac{1}{3^n}\right)=C-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+2}}-\sum_{n=m+1}^{\infty}o\left(\frac{1}{3^n}\right)\\&=C-\frac{\frac{1}{3^{m+3}}}{1-\frac{1}{3}}+o\left(\frac{1}{3^m}\right)=C-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{m+2}}+o\left(\frac{1}{3^m}\right).\end{aligned}$$

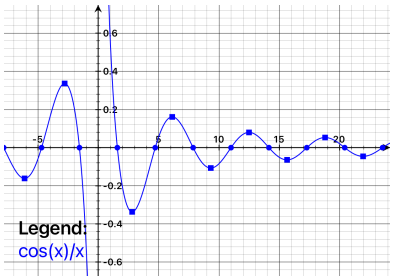
现在就有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{m+1}x_{m+1}}=C-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{m+2}}+o\left(\frac{1}{3^m}\right)\Rightarrow\frac{1}{3^m x_m}=C'+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{m+2}}+o\left(\frac{1}{3^m}\right)\\&\Rightarrow x_m=\frac{1}{C'\cdot 3^m+\frac{1}{18}+o(1)}=\frac{1}{3^m C'}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{18\cdot C'\cdot 3^m}+o\left(\frac{1}{3^m}\right)}\\&\Rightarrow x_m=\frac{1}{3^m C'}(1+o(1))=\frac{C''}{3^m}+o\left(\frac{1}{3^m}\right),\end{aligned}$$

于是我们证明了 $\lim\limits_{m\to\infty}3^m x_m$ 存在. 那么更有 $\lim\limits_{m\to\infty}2^m x_m=0$.

82. (82.) 解决本题的最好方式是做出

图 30.2.1: $\frac{\cos x}{x}$ 图像



注意到

$$\lim_{s\to 0^+} x_k = \frac{(2k-1)\,\pi}{2}, k = 1, 2, \cdots . \tag{30.19}$$

现在由 $x_k > \frac{(2k-3)}{2}\pi, k = 2, 3, \cdots$ 和级数的控制收敛定理18.16我们得

$$\lim_{s\to 0^+} \sum_{k=1}^{N(s)-1} \frac{1}{x_k x_{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{x_k x_{k+1}} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\,(2k+1)} = \frac{2}{\pi^2}.$$

83. (83.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \ln (n+k) - \frac{n+1}{2n} \ln n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln n}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) - \frac{n+1}{2n} \ln n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1) \ln n}{2n} + \int_0^1 x \ln (1+x)\, \mathrm{d}x - \frac{n+1}{2n} \ln n \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln (1+x)\, \mathrm{d}x^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

84. (84.) 注意到

$$\begin{cases} ax \geqslant 1-x, & \forall x \in \left[\frac{1}{a+1}, 1 \right]; \\ ax < 1-x, & \forall x \in \left[0, \frac{1}{a+1} \right). \end{cases}$$

于是一方面

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a+1}} \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a+1}}^1 \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{a+1}} \sqrt[n]{(1-x)^n}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a+1}}^1 \sqrt[n]{a^n x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a+1}\right)^2 + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{(a+1)^2}\right) \\
&= \frac{a^2+a+1}{2a+2}.
\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a+1}} \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a+1}}^1 \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{a+1}} \sqrt[n]{2\,(1-x)^n}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a+1}}^1 \sqrt[n]{2a^n x^n}\mathrm{d}x = \sqrt[n]{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a+1}\right)^2 + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{(a+1)^2}\right)\right] \\
&= \sqrt[n]{2}\frac{a^2+a+1}{2a+2}.
\end{aligned}$$

因此由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{a^n x^n + (1-x)^n}\mathrm{d}x = \frac{a^2+a+1}{2a+2}.$$

85. (85.) 一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}+\frac{k}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\int_0^1\left[\ln\left(1+y+z\right)-\ln\left(y+z\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\left[z\ln z-2\left(1+z\right)\ln\left(1+z\right)+\left(z+2\right)\ln\left(z+2\right)\right]\mathrm{d}z=\frac{9}{2}\ln 3-6\ln 2.$$

另外一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}+\frac{k}{n}}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\frac{1}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\frac{9}{2}\ln 3-6\ln 2.$$

现在由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{i+j+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}+\frac{k}{n}}=\frac{9}{2}\ln 3-6\ln 2.$$

86. (86.) 运用例题8.9, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}C_n^k}}{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}C_n^k}}{\frac{2^n}{n}}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)^{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

87. (87.) 用 $f\left(Tx\right)$ 代替 $f(x)$, 我们知道可以不妨设 $T=1$.

对每一个 $t\geqslant 1$, 存在唯一的 $n_t\in\mathbb{N}$ 使得 $n_t\leqslant t<n_t+1$. 于是利用 $n_t\sim t, t\to+\infty$ 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n_t}\int_0^t f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

又

$$0\leqslant\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{n_t}\int_0^t f\left(x\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{n_t}\int_0^{n_t}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{n_t}\int_{n_t}^t f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n_t}\int_{n_t}^{1+n_t}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{n_t}\cdot\int_0^1\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x\right)=0,$$

以及

$$\frac{1}{n_t}\int_0^{n_t}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{n_t}\cdot n_t\cdot\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x,$$

我们有(8.70)成立.

88. (88.) 由

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{2n}}-1}-2n\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left[\frac{\pi}{e^{\frac{1}{2n}}-1}\right]=\lim_{n\to\infty}\sin\left[\frac{\pi}{e^{\frac{1}{2n}}-1}-2n\pi\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

89. (89.) 设 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n$, 则由递推得

$$f(x)=-1+xf^2(x),f(0)=-1,$$

即

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2x}=\frac{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{n}(4x)^n}{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n2^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{n!(2n-1)}x^{n-1}.$$

现在

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!(2n+1)}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n!}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\\&=2\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}[\ln(2k-1)-\ln k]}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}2\lim_{n\to\infty}e^{\ln\frac{2n-1}{n}}=4.\end{aligned}$$

90. (90.) 注意到

$$\int_0^1\frac{e^{-x}-1}{x}\mathrm{d}x,\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

收敛, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(nx)}{x}e^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin(nx)}{x}e^{-x}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sin(nx)}{x}e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin(nx)}{x}\left(e^{-x}-1\right)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sin(nx)}{x}e^{-x}\mathrm{d}x\\&\overset{\text{黎曼引理9.2}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

91. (91.) 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2(nx)}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{\sin\frac{x}{n}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin\frac{x}{n}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{x+k\pi}{n}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\frac{x+k\pi}{n}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\frac{2x-\pi}{2n}\right)}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\sqrt{2},\end{aligned}$$

这里最后一极限可以如下夹逼.

一方面

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\frac{2x-\pi}{2n}\right)}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x.$$

另外一方面

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\frac{2x-\pi}{2n}\right)}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1-\frac{\left(\frac{2x-\pi}{2n}\right)^2}{2}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x.$$

92. (92.) 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{1+|\sin x|}{x}\mathrm{d}x=\ln 2+\lim_{n\to\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\\&=\ln 2+\lim_{n\to\infty}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}\mathrm{d}x\overset{\text{黎曼引理}9.2}{=}\ln 2+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\ln 2.\end{aligned}$$

93. (93.) 注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{2k(k-1)}{2k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n+\frac{2k(k-1)}{2k-1}}-\frac{1}{n+k}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|n+k-n-\frac{2k(k-1)}{2k-1}\right|}{\left(n+\frac{2k(k-1)}{2k-1}\right)(n+k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left(n+\frac{2k(k-1)}{2k-1}\right)(2k-1)(n+k)}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{2k(k-1)}{2k-1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

94. (94.) 一方面有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\pi}\frac{x+k\pi}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\pi}\frac{k\pi}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\pi}{\cos^2 x}}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\infty}\frac{k\pi}{1+n^2+t^2}\mathrm{d}t}{n}\right)\\&=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n\sqrt{n^2+1}}\right)=\frac{\pi^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

另外一方面有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\pi}\frac{x+k\pi}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\pi}\frac{(k+1)\pi}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(k+1)\pi}{\cos^2 x}}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\int_0^{\infty}\frac{(k+1)\pi}{1+n^2+t^2}\mathrm{d}t}{n}\right)\\&=\pi\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\pi}{n\sqrt{n^2+1}}\right)=\frac{\pi^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

于是由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x}{n}\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

95. (95.) 对 $m\in\mathbb{N}$, 由 Taylor 级数得

$$\sin 1=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}.$$

由交错级数不等式18.4得

$$0\leqslant(2m-1)!\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\leqslant\frac{1}{2m+1},m\text{为偶数};$$

$$-\frac{1}{2m+1}\leqslant(2m-1)!\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\leqslant 0,m\text{为奇数}.$$

于是于是利用 $\{x\}\triangleq x-\lfloor x\rfloor$ 是周期 1 函数, 当 m 充分大, 我们有

$$\{(2m-1)!\sin 1\}=\left\{(2m-1)!\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\right\}=\begin{cases}0, & m\text{为偶数}\\ 1, & m\text{为奇数}\end{cases},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(n!\sin 1-\lfloor n!\sin 1\rfloor\right)$$

不存在.

96. (96.) 设

$$f_n(x)=e^{-x}\left[a_n\cos(ax)+b_n\sin(ax)\right],n=0,1,2,\cdots,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty}f_n(y)\,\mathrm{d}y&=\int_x^{+\infty}e^{-y}\left[a_n\cos(ay)+b_n\sin(ay)\right]\mathrm{d}y\\&=e^{-x}\left[\frac{\cos(ax)-a\sin(ax)}{a^2+1}a_n+\frac{\sin(ax)+a\cos(ax)}{a^2+1}b_n\right]\\&=e^{-x}\left[\frac{a_n+ab_n}{a^2+1}\cos(ax)+\frac{b_n-aa_n}{a^2+1}\sin(ax)\right],\end{aligned}$$

即

$$a_0=0,b_0=1,a_{n+1}=\frac{a_n+ab_n}{a^2+1},b_{n+1}=\frac{b_n-aa_n}{a^2+1},n=0,1,2,\cdots.$$

我们写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2+1}&\frac{a}{a^2+1}\\-\frac{a}{a^2+1}&\frac{1}{a^2+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix},n=0,1,2,\cdots.$$

设

$$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}&\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\\-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}&\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\end{pmatrix},$$

我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2+1}&\frac{a}{a^2+1}\\-\frac{a}{a^2+1}&\frac{1}{a^2+1}\end{pmatrix}^{n+1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}&\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\\-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}&\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\end{pmatrix}^{n+1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\begin{pmatrix}\cos[(n+1)\theta]&-\sin[(n+1)\theta]\\\sin[(n+1)\theta]&\cos[(n+1)\theta]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\begin{pmatrix}-\sin[(n+1)\theta]\\\cos[(n+1)\theta]\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

当 $a\neq 0$, 因为 $\frac{1}{(a^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\to 0$, 显然有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

当 $a=0$, 此时 $\theta=0$, 因此还有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

97. (97.) 注意到

$$\begin{aligned}x+1&=\sqrt{1+x(x+2)}=\sqrt{1+x(1+x+1)}\\&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(1+x+2)}}\\&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(1+x+3)}}}\\&\cdots\\&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots}}}}.\end{aligned}$$

代入 $x=2$ 即得

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}=3.$$

98. (98.) 你当然可以考虑生成级数来强行计算, 我们下面给一种有趣的方法.
读者也可以归纳验证

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=a_0\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right)+a_1\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\\a_{2n}&=a_0\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\right)+a_1\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\end{aligned},n\geqslant 1.$$

于是利用 wallis 公式9.18得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{(\pi-2)a_0+2a_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

99. (99.) 由 Taylor 公式得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right),$$

然后我们有

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n^2+k}{n^2-k}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1+\frac{k}{n^2}}{1-\frac{k}{n^2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n^2}+\frac{2k^3}{3n^6}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&=\frac{n+1}{n}+\frac{(n+1)^2}{6n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to\infty,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\frac{n^2+k}{n^2-k}&=e\cdot e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=e\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=e\left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n^2+k}{n^2-k}-e\right)\right]=e.$$

100. (100.) 首先

$$\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\cdots+\sqrt[n]{n}}}\geqslant 1,$$

对给定 $n\in\mathbb{N}$, 考虑递推数列

$$x_1=1, x_{m+1}=\sqrt[n]{1+x_m}, m=1,2\cdots.$$

考虑 $t_n\in(1,+\infty)$ 使得

$$t_n=\sqrt[n]{1+t_n}, n=1,2,\cdots.$$

注意到

$$n=\frac{\ln(1+t_n)}{\ln t_n}\to+\infty\Rightarrow t_n\to 1,$$

以及由递增递推数列结论8.4.1我们得

$$\lim_{m\to\infty}x_m=t_n.$$

现在对 $n\geqslant 2$ 我们有

$$\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}\leqslant\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{n^n+\sqrt[n]{n^{n^2}+\cdots+\sqrt[n]{n^{n^{n-1}}}}}}$$
$$=\sqrt[n]{1+n\cdot\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{1+\cdots+\sqrt[n]{1}}}}\leqslant\sqrt[n]{1+nt_n},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+nt_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(1+nt_n)}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n+\ln t_n+\ln\left(1+\frac{1}{nt_n}\right)}{n}}=1.$$

于是由夹逼准则我们知道计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\cdots+\sqrt[n]{n}}}=1.$$

101. (101.) 首先读者容易证明

$$\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\cos(t+\cos t)}{\sin(t+\sin t)}-\frac{\cos 1}{2t}\right)=-\frac{\sin 1}{2}.$$

因此我们有

$$\int_0^1\left(\frac{\cos(t+\cos t)}{\sin(t+\sin t)}-\frac{\cos 1}{2t}\right)\mathrm{d}t$$

收敛, 即

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\left(\frac{\cos(t+\cos t)}{\sin(t+\sin t)}-\frac{\cos 1}{2t}\right)\mathrm{d}t=0.$$

于是我们有

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\left(\frac{\cos(t+\cos t)}{\sin(t+\sin t)}\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{\cos 1}{2t}\mathrm{d}t=\frac{\ln 2\cdot\cos 1}{2}.$$

102. (102.) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right]^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)^\beta\right]^{\alpha+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{\alpha(\beta+1)}n^{\beta+1}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1}{2n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{(2n)^{\beta(\alpha+1)}n^{(\alpha+1)}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1}{2n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}$$
$$\overset{\text{定积分定义或者例题14.9}}{=}2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^1x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^1x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\beta+1}}{\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)^{(\beta+1)}}.$$

103. (103.) 首先

$$\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{x^n}{x_{n+1}}\right)=\prod_{n=1}^{m}\frac{nx_n}{x_{n+1}}=m!\frac{x_1}{x_{m+1}}=\frac{m!}{x_{m+1}},m=1,2,\cdots.$$

然后

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{x_{n+1}}{n!}-\frac{x_n}{(n-1)!}\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{n!},m=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\frac{x_{m+1}}{m!}=\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!},m=1,2,\cdots.$$

现在我们就有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{x_{n+1}}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\right)^{-1}=e^{-x}.$$

104. (104.) 首先

$$\begin{aligned}\int_0^x\sin\left(\frac{1}{t^\beta}\right)\mathrm{d}t&\overset{t=y^{-\frac{1}{\beta}}}{=}\frac{1}{\beta}\int_{\frac{1}{x^\beta}}^{\infty}\frac{\sin y}{y^{\frac{1}{\beta}+1}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\beta}x^{1+\beta}\cos\frac{1}{x^\beta}-\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\int_{\frac{1}{x^\beta}}^{\infty}\frac{\cos y}{y^{\frac{1}{\beta}+2}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\beta}x^{1+\beta}\cos\frac{1}{x^\beta}+\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)x^{1+2\beta}\sin\frac{1}{x^\beta}-\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(2+\frac{1}{\beta}\right)\int_{\frac{1}{x^\beta}}^{\infty}\frac{\sin y}{y^{\frac{1}{\beta}+3}}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

以及

$$\left|\left(2+\frac{1}{\beta}\right)\int_{\frac{1}{x^\beta}}^{\infty}\frac{\sin y}{y^{\frac{1}{\beta}+3}}\mathrm{d}y\right|\leqslant\left(2+\frac{1}{\beta}\right)\int_{\frac{1}{x^\beta}}^{\infty}\frac{1}{y^{\frac{1}{\beta}+3}}\mathrm{d}y=x^{2\beta+1},$$

因此

$$\int_0^x\sin\left(\frac{1}{t^\beta}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}x^{1+\beta}\cos\frac{1}{x^\beta}+O\left(x^{1+2\beta}\right),x\to0^+.$$

当 $\alpha<\beta+1$ 原极限为 0, 当 $\alpha=\beta+1$ 原极限不存在.

可以看到对任何 $\gamma>0$, 当分部积分足够对次我们可以推出

$$\int_0^x\sin\left(\frac{1}{t^\beta}\right)\mathrm{d}t=A_\gamma(x)+O\left(x^\gamma\right),x\to0^+.$$

于是当 $\alpha>\beta+1$, 选取 $\gamma>\alpha$, 容易看到

$$\lim_{x\to0^+}\frac{A_\gamma(x)}{x^\alpha}$$

不存在, 因此我们知道原极限存在的充要条件是 $\alpha<\beta+1$.

105. (105.) 首先 $x+2\ln(1+x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 严格递增, 所以存在递增反函数 g 且成立

$$x_{n+1}=g(x_n),n=1,2,\cdots.$$

又由递增函数确定的递推数列一定单调且和不动点大小关系恒定8.4.1我们知道 x_n 单调且以 0 为下界.

又由

$$1+2\ln(1+1)>1\Rightarrow x_2<1=x_1$$

知 x_n 单调递减.

由单调有界必收敛可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\in[0,1]$, 然后我们有

$$a=a+2\ln(1+a)\Rightarrow a=0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=1+2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_{n+1})}{x_{n+1}}=3.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n x_n}{2^{n+1}x_{n+1}}=\frac{3}{2}>1,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n x_n\right)<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(2^n x_n\right)=0.$$

106. (106.)Stolz 定理9.1, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^{\lambda T}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(\lambda+1)-\ln\lambda}\int_{\lambda T}^{(\lambda+1)T}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}\int_0^T\frac{\varphi(x+\lambda T)}{x+\lambda T}\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^T\frac{\lambda}{x+\lambda T}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^T\frac{\lambda}{x+\lambda T}\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^T\frac{1}{T}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\int_0^T\frac{x}{T(x+\lambda T)}\cdot|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{1}{T^2}\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^T x\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x=0.
\end{aligned}$$

注[♠] 我们把结果推广到 $\lambda\in(0,+\infty)$.

事实上把上述证明的 Stolz 定理改成函数 Stolz 定理13.10得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^T\frac{\lambda\varphi(x+\lambda T)}{x+\lambda T}\mathrm{d}x\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^T\frac{\lambda\varphi(x+\lambda T)}{x+\lambda T}\mathrm{d}x-\int_0^T\frac{\varphi(x+\lambda T)}{T}\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^T\frac{x}{T(x+\lambda T)}\cdot|\varphi(x+\lambda T)|\,\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant\frac{1}{T^2}\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^T x\,|\varphi(x+\lambda T)|\,\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant\frac{1}{T}\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda T}^{(\lambda+1)T}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{T}\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^T|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\right)\\
&=0.
\end{aligned}$$

现在就有

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\lambda}\int_0^T\frac{\varphi(\lambda x)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^T\frac{\varphi(x+\lambda T)}{T}\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_{\lambda T}^{(\lambda+1)T}\frac{\varphi(x)}{T}\mathrm{d}x\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^T\frac{\varphi(x)}{T}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

107. (107.) 首先

$$\begin{aligned}0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}}-\frac{1}{1+\frac{k\delta}{n}}\right)\right|&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha}{\left(1+\frac{\alpha+k\delta}{n}\right)\left(1+\frac{k\delta}{n}\right)}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}=0,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k\delta}{n}}.$$

不失一般性, 假设 $\alpha>\beta$, 然后由拉格朗日中值定理知存在 $\theta_k\in\left(\frac{\beta+k\delta}{n},\frac{\alpha+k\delta}{n}\right)$ 使得

$$\ln\left(1+\frac{\alpha+k\delta}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{\beta+k\delta}{n}\right)=\frac{\alpha-\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\theta_k}.$$

注意到

$$\frac{\alpha-\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\beta+k\delta}{n}}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\theta_k}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}},$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\beta+k\delta}{n}}\right)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{\alpha+k\delta}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{\beta+k\delta}{n}\right)\right]\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha-\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}}\right).$$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}}{1+\frac{\beta+k\delta}{n}}\right)=(\alpha-\beta)\int_0^1\frac{1}{1+\delta x}\mathrm{d}x=\frac{\alpha-\beta}{\delta}\ln(1+\delta),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+\frac{\alpha+k\delta}{n}}{1+\frac{\beta+k\delta}{n}}=(1+\delta)^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}.$$

108. (108.)

(1): 注意到是递增递推, 由递增递推数列的性质8.4.1, 我们容易证明 $a_n\uparrow+\infty$.

注意到

$$\frac{1}{2+a_n}-\frac{1}{2+a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{(2+a_n)(2+a_{n+1})}=\frac{\frac{(1+a_n)^3-5}{3}-a_n}{(2+a_n)\left(2+\frac{(1+a_n)^3-5}{3}\right)}=\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}.$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n-1}{a_n^2+a_n+1}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2+a_n}-\frac{1}{2+a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2+a_1}=\frac{1}{7}.$$

(2): 我们有

$$\ln a_{n+1}=\ln\frac{(1+a_n)^3-5}{3}=3\ln a_n-\ln 3+\ln\left(1+\frac{3}{a_n}+\frac{3}{a_n^2}-\frac{4}{a_n^3}\right).$$

变形得

$$\frac{\ln a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{\ln a_n}{3^n}-\frac{\ln 3}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\ln\left(1+\frac{3}{a_n}+\frac{3}{a_n^2}-\frac{4}{a_n^3}\right).$$

显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln a_n}{3^n}-\frac{\ln a_{n+1}}{3^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln 3}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\ln\left(1+\frac{3}{a_n}+\frac{3}{a_n^2}-\frac{4}{a_n^3}\right)\right]$$

收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{3^n}$ 存在.

109. (109.) 首先对 $s\geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_s^{s+\pi}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_s^{s+\pi}\left(\int_x^{\frac{\pi}{2}+x}|\sin t|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_s^{s+\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin(t+x)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_s^{s+\pi}|\sin(t+x)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{t+s}^{t+s+\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\pi.\end{aligned}$$

由函数 Stolz 定理13.10得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x+\pi}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x+\pi-x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi}f(t)\,\mathrm{d}t}{\pi}=\frac{\pi}{\pi}=1.\end{aligned}$$

110. (110.) 显然 $a_n>0$ 且 F 严格递增到 $+\infty$. 记 $b_n\triangleq F^{-1}(n)$ 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$. 显然 a_n 递增到正无穷.

注意到

$$a_n\geqslant b_n\Leftrightarrow F(a_n)\geqslant F(b_n)\Leftrightarrow\int_0^{a_n}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant n.$$

由

$$\begin{aligned}\int_0^{a_n}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{a_{n-1}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{a_{n-1}}^{a_{n-1}+\frac{1}{f(a_{n-1})}}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant F(a_{n-1})+\frac{f(a_{n-1})}{f(a_{n-1})}=F(a_{n-1})+1,\end{aligned}$$

得

$$F(a_n)\geqslant F(a_{n-1})+1\geqslant F(a_{n-2})+2\geqslant\cdots\geqslant F(a_0)+n\geqslant n.$$

现在我们知道 $a_n\geqslant b_n$. 注意到

$$F(a_n)-F(b_n)=(a_n-b_n)f(c_n)\geqslant(a_n-b_n)f(b_n),c_n\in[b_n,a_n],$$

我们有

$$a_n-b_n\leqslant\frac{F(a_n)-n}{f(b_n)}=\frac{F(a_n)-n}{f(a_n)}\cdot\frac{f(a_n)}{f(b_n)}.\tag{30.20}$$

一方面由 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{F(a_n)-n}{f(a_n)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{F(a_n)-F(a_{n-1})-1}{f(a_n)-f(a_{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)(a_n-a_{n-1})-1}{f(a_n)-f(a_{n-1})}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{f(a_n)}{f(a_{n-1})}-1}{f(a_n)-f(a_{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(a_{n-1})}=0.\end{aligned}$$

另外一方面得

$$\begin{aligned}0\leqslant 1-\frac{f(b_n)}{f(a_n)}&=\frac{f(a_n)-f(b_n)}{f(a_n)}\leqslant\sup f'\cdot\frac{a_n-b_n}{f(a_n)}\\&\leqslant\sup f'\cdot\frac{F(a_n)-n}{f(a_n)}\cdot\frac{1}{f(b_n)}.\end{aligned}$$

因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)}{f(a_n)}=1$, 结合(30.20)得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

111. (111.) 显然 $f(0)=0$. 归纳易证

$$0<x_{n+1}=f(x_n)<x_n<a,\forall n\in\mathbb{N}.$$

单调有界表明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\in[0,a).$$

现在

$$a=f(a)\Rightarrow a=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

即

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)+xf'(x)}{-f''(0)x}\\&=-\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to0^+}f'(x)\\&=-\frac{2f'(0)}{f''(0)}=-\frac{2}{f''(0)}.\end{aligned}$$

112. (112.) 设

$$S_n\triangleq a_1+a_2+\cdots+a_n,\frac{na_n}{S_n}=L+\epsilon_n,$$

我们有

$$\frac{(n+1)(S_{n+1}-S_n)}{S_n}=L+\epsilon_{n+1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{S_{n+1}}{S_n}&=\frac{1}{1-\frac{L+\epsilon_{n+1}}{n+1}}=1+\frac{L+\epsilon_{n+1}}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+\frac{L}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

现在求和得

$$\ln S_{n+1}-\ln S_1=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{L}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{L}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)=L\ln n+o(\ln n),$$

即

$$\ln S_n=L\ln n+o(\ln n).$$

从而

$$\ln a_n=\ln S_n-\ln n+\ln\left(\frac{na_n}{S_n}\right)=(L-1)\ln n+o(\ln n),$$

这就是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln(n+1)}=L-1.$$

113. (113.) 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_x^{2x}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(x\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{\sin y}{y^2}\mathrm{d}y\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sin(xy)}{y^2}\mathrm{d}y\right)\\&\overset{\text{黎曼引理9.2}}{=}0.\end{aligned}$$

114. (114.) 设拟合 $f(a), f\left(\frac{a+b}{2}\right), f(b)$ 的 f 的插值多项式为 g, 考虑

$$h(y)\triangleq\int_a^y[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$h(a)=h'(a)=h'\left(\frac{a+b}{2}\right)=h'(b)=0.$$

插六个点

$$h(a), h\left(\frac{a+b}{2}\right), h(b), h'(a), h'\left(\frac{a+b}{2}\right), h'(b),$$

对应 5 次插值多项式 p, 此时是我们的 $h^{(5)}=p^{(5)}$ 模型, 即考虑 $h(x)-p(x)$ 反复罗尔可得 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$h^{(5)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)=p^{(5)}(\xi)=5!\cdot p\text{首系数}.$$

事实上我们可以写出[4]

$$p(x)=h\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{16(x-a)^2(x-b)^2}{(b-a)^4}+h(b)\frac{(x-a)^2(2x-a-b)^2(7b-a-6x)}{(b-a)^5},$$

即首系数为

$$-\frac{24}{(b-a)^5}\int_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x,$$

于是我们得到了

$$f^{(5)}(\xi)=-\frac{2880}{(b-a)^5}\int_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

我们还可以算得[5]

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

对 $i=1,2,\cdots,n$, 设 g_i 是 f 拟和 $f\left(\frac{2i-2}{n}\right), f\left(\frac{2i-1}{n}\right), f\left(\frac{2i}{n}\right)$ 的插值多项式. 于是用刚才得到的中值公式得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^4\left(\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)+4f\left(\frac{2i-1}{n}\right)+f\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^4\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{2i-2}{n}}^{\frac{2i}{n}}[f(x)-g_i(x)]\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{f^{(4)}(\xi_{i,n})}{90}\right)\right]\\&=-\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f^{(3)}(0)-f^{(3)}(2)}{180}.\end{aligned}$$

115. (115.) 首先

$$1=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^2-1}\leqslant\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^2+\sin k}\leqslant\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^2+1}=1,$$

即由 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k^2+\sin k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{k^2+\sin k}\right)=1.$$

[4]见命题11.1, 实际做题中只需要知道 p 首系数即可, 无需知道其他系数.

[5]最简单的方法并非写出 g 表达式硬算, 而是只需要对 $1,x,x^2$ 验算, 由线性性自动扩充到所有 2 次多项式.

然后继续由 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{\ln\left((n+1)!\right)}{n+1}-\frac{\ln\left(n!\right)}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{n\ln\left((n+1)!\right)-(n+1)\ln\left(n!\right)}{n\left(n+1\right)}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{n\ln\left(n+1\right)-\ln\left(n!\right)}{n\left(n+1\right)}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\ln\left(n+1\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n+1}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)\ln\left(n+2\right)-n\ln\left(n+1\right)-\ln\left(n+1\right)}{1}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]=1.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\ln\left((n+1)!\right)}{n+1}-\frac{\ln\left(n!\right)}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k^2+\sin k}\right].\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{\ln\left((n+1)!\right)}{n+1}-\frac{\ln\left(n!\right)}{n}\right)\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k^2+\sin k}\right]\\
&=1\cdot 1=1.
\end{aligned}$$

116. (116.) 显然 $x_n\uparrow+\infty$. 由 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{x_n}\right)=2,$$

以及

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{\ln n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{x_n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\ln n}\frac{x_n-2n}{2nx_n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\ln n}\frac{x_n-2n}{2n\cdot 2n}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n-2n}{\ln n}\right)\\
&=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_{n+1}-x_n-2}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

现在我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{x_n}\right|<\infty.$$

现在设

$$t_n\triangleq 2n+\frac{\ln n}{2}-x_n,n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\begin{aligned}
t_{n+1}-t_n&=2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}-\left(x_{n+1}-x_n\right)\\
&=2+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-2-\frac{1}{x_n}\\
&=\frac{1}{2n}-\frac{1}{x_n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to\infty,
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|t_{n+1}-t_n\right|<\infty,$$

这就给出了 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n$ 存在.

117. (117.) 显然 a_n 是递增正数列. 注意到[6]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2a_1^2}<\infty,\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O\left(1\right),$$

于是我们有

$$a_{n+1}^2=a_1^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ka_k^2}=2\ln n+O\left(1\right),n\to\infty.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{\ln n}=2$.

118. (118.) 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i}{n^2}\right)\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}+o\left(\frac{i^2}{n^4}\right)\right)\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\int_0^1x\ln\left(1+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

119. (119.) 记

$$S_n\left(x\right)\triangleq1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n},$$

我们有

$$\frac{S_{n-1}^{n+1}\left(x\right)}{S_n^n\left(x\right)}\leqslant S_{n-1}\left(x\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}S_{n-1}\left(x\right)=1-\ln(1-x).$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}^{n+1}\left(x\right)}{S_n^n\left(x\right)}&=\left(1-\ln\left(1-x\right)\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{x^n}{n}}{S_n\left(x\right)}\right)^n\\&=\left(1-\ln\left(1-x\right)\right)\lim_{n\to\infty}e^{-n\frac{\frac{x^n}{n}}{S_n\left(x\right)}}\\&=\left(1-\ln\left(1-x\right)\right)\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{x^{n+1}}{S_n\left(x\right)}}\\&=1-\ln\left(1-x\right),\forall x\in[0,1)\end{aligned}$$

以及

$$\int_0^1\left(1-\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x<\infty.$$

于是我们由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)^n}\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\left(1-\ln\left(1-x\right)\right)\mathrm{d}x=2.$$

120. (120.) 一方面

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^2\sqrt[n]{x^{\frac{n}{2}}+x^{2n}}\mathrm{d}x\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\sqrt[n]{2x^{\frac{n}{2}}}\mathrm{d}x+\int_1^2\sqrt[n]{2x^{2n}}\mathrm{d}x\right)\\&=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=3.\end{aligned}$$

[6] 见例题8.6

另外一方面

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^2 \sqrt[n]{x^{\frac{n}{2}}+x^{2n}}\mathrm{d}x\right)\geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{x^{\frac{n}{2}}}\mathrm{d}x+\int_1^2 \sqrt[n]{x^{2n}}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=3.$$

于是由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^2 \sqrt[n]{x^{\frac{n}{2}}+x^{2n}}\mathrm{d}x\right)=3.$$

121. (121.) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k+1)!!}\right]^{(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)!!}-\frac{1}{(2k+1)!!}\right)\right]^{(2n)!!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)!!}\right]^{(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}e^{(2n)!!\ln\left(1-\frac{1}{(2n+1)!!}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1}}=1,$$

这里倒数第二个等号用到了 Wallis 公式9.3.

122. (122.) 由定积分定义得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i}\left(j\sin\left(\frac{n-i}{n}\right)^3\right)\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(\frac{n-i}{n}\right)^3\frac{(n+1-i)(n-i)}{2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(1-\frac{i}{n}\right)^3\frac{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{i}{n}\right)}{2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(1-\frac{i}{n}\right)^3\frac{\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}{2}\right)$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(1-\frac{i}{n}\right)^3\frac{\left(1-\frac{i}{n}\right)}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\sin(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sin x^3\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^1\sin x^3\mathrm{d}x^3=\frac{1-\cos 1}{6}.$$

123. (123.) 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{1+e^x}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^x t\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^x t\mathrm{d}t\right)$$
$$\overset{t=\arctan u}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^1\frac{u^x}{1+u^2}\mathrm{d}u\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u^{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 u^{x+1}\mathrm{d}\frac{1}{1+u^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\int_0^1\frac{2u^{x+2}}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2},$$

这里

$$0\leqslant\int_0^1\frac{2u^{x+2}}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^1 2u^{x+2}\mathrm{d}u=\frac{2}{x+3}\to 0,x\to+\infty.$$

124. (124.) 首先

$$\frac{f(\widehat{x})f''(\widehat{x})}{[f'(\widehat{x})]^2}=0,$$

于是存在 $r>0$ 满足

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},\forall x\in[\widehat{x}-r,\widehat{x}+r]\subset(a,b).$$

考虑

$$g(x)\triangleq x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

然后对任何 $x_0\in U\triangleq(\widehat{x}-r,\widehat{x}+r)$ 都有

$$|g(x)-\widehat{x}|=|g(x)-g(\widehat{x})|\leqslant\frac{1}{2}|x-\widehat{x}|\leqslant\frac{1}{2}r<r,$$

因此

$$x_n\in[\widehat{x}-r,\widehat{x}+r],n=0,1,2,\cdots.$$

现在对 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\widehat{x}|&=|g(x_n)-g(\widehat{x})|\\&\leqslant\frac{1}{2}|x_n-\widehat{x}|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^n}|x_1-\widehat{x}|,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\widehat{x}$.

125. (125.) 首先

$$\frac{1}{4}\geqslant x(1-x),\forall x\in\mathbb{R},$$

于是对 $n\in\mathbb{N}$ 成立

$$\cos a_{n+1}-\cos a_n\cos a_{n-1}>\frac{1}{4}\geqslant\cos a_{n+1}-\cos a_{n+1}^2,$$

即

$$\cos a_n\cos a_{n-1}\leqslant\cos^2 a_{n+1}.$$

现在我们知道

$$\ln\cos a_n+\frac{1}{2}\ln\cos a_{n-1}\leqslant\ln\cos a_{n+1}+\frac{1}{2}\ln\cos a_n\leqslant 0,\forall n\in\mathbb{N},$$

即单调有界给出

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\cos a_n+\frac{1}{2}\ln\cos a_{n-1}\right)=a\in(-\infty,0].$$

由例题8.31就有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\cos a_n=\frac{2}{3}a.$$

又

$$e^{\frac{2}{3}a}-e^{\frac{4}{3}a}=\lim_{n\to\infty}[\cos a_{n+1}-\cos a_n\cos a_{n-1}]\geqslant\frac{1}{4}\geqslant e^{\frac{2}{3}a}-e^{\frac{4}{3}a},$$

即

现在

$$e^{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\arccos e^{\frac{2}{3}a}=\frac{\pi}{3}.$$

126. (126.) 由定积分定义得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2+k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k^2}{n^2}}\right)=\int_0^1\frac{x\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

分部积分得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{x\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}\ln\left(1+x^2\right)\\&=\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设

$$F(\alpha) \triangleq \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\alpha x^2\right)}{1+x}\mathrm{d}x.$$

对任何 $\alpha > 0$ 都有

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^2}{(1+\alpha x^2)(1+x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x-1}{(\alpha+1)(\alpha x^2+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(x+1)}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha\ln 2}{\alpha^2+\alpha} + \frac{\ln(\alpha+1)}{2\alpha^2+2\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha}\arctan\sqrt{\alpha}}{\alpha^2+\alpha}. \end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x}\mathrm{d}x &= F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\alpha\ln 2}{\alpha^2+\alpha} + \frac{\ln(\alpha+1)}{2\alpha^2+2\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha}\arctan\sqrt{\alpha}}{\alpha^2+\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha \\ &= \ln^2 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(x+1)}\mathrm{d}x - \arctan^2\sqrt{x}\big|_0^1 \\ &= \ln^2 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{16} \\ &= \ln^2 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{16} \\ &= \frac{3}{4}\ln^2 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - \frac{\pi^2}{16} \\ &= \frac{3}{4}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{48}. \end{aligned}$$

于是

$$I = \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{48}\right) = \frac{\ln^2 2}{8} + \frac{\pi^2}{96}.$$

127. (127.)

(a). 当 n 为奇数, f_n 递增. 由

$$f_n(0) < 0, f_n(1) = 1 > 0$$

和零点定理得 f_n 有唯一零点 $x_n \in (0,1)$.

当 n 为偶数, f_n 在 $[0,+\infty)$ 递增. 因此同理得 f_n 在 $[0,+\infty)$ 有唯一零点 $x_n \in (0,1)$.

由

$$f_n(-2) = 2^n - 3 \geqslant 1, f_n(-1) = -1$$

可得 f_n 在 $(-\infty,0]$ 有唯一零点 $y_n \in (-2,-1)$.

(b). 我们有

$$x_n^n = 1 - x_n \Rightarrow n = \frac{\ln(1-x_n)}{\ln x_n}, n = 1,2,\cdots.$$

考虑严格递增函数 $\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ 在 $(0,1)$ 反函数 g 可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(n) = 1.$$

我们有

$$(-y_n)^n = 1 - y_n \Rightarrow n = \frac{\ln(1-y_n)}{\ln(-y_n)}, n = 1,2,\cdots.$$

考虑严格递增函数 $\frac{\ln(1-x)}{\ln(-x)}$ 在 $(-2,-1)$ 反函数 h 可得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} h(n) = -1,$$

这里极限沿着 n 为偶数进行.

128. (128.) 首先连续周期函数必有界, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = -\infty, \lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = +\infty.$$

零点定理表明存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $f(c)=c$.

由

$$0 \leqslant |x_{n+1}-c| = |f(x_n)-f(c)| \leqslant |x_n-c|, \forall n \geqslant 1$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} |x_n-c| = \ell.$$

注意到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 我们设

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a,$$

从而

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k+1} = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(a).$$

现在就有

$$\ell = \lim_{n\to\infty} |x_{n_k}-c| = |a-c|, \ell = \lim_{n\to\infty} |x_{n_k+1}-c| = |f(a)-f(c)|.$$

于是 $a=c$, 由命题7.4得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ 且与初值无关.

129. (129.) 显然 a_n 递增. 若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in (0,+\infty),$$

则由 Stolz 定理9.1得

$$0 = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{S_n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}.$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n^{\alpha+1}} \left(\frac{na_n}{S_n}\right)^{\alpha}\right) = 1.$$

我们有由 Stolz 定理和拉格朗日中值定理我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{\alpha+1}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1}^{\alpha+1} - a_n^{\alpha+1}\right) = (\alpha+1) \lim_{n\to\infty} \left[\theta_n^{\alpha} (a_{n+1}-a_n)\right] \\ &= (\alpha+1) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\theta_n}{S_n}\right)^{\alpha} = (\alpha+1) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{na_n}{S_n}\right)^{\alpha},\end{aligned}$$

这里

$$\theta_n \in (a_n, a_{n+1}), \theta_n \sim a_n, n\to\infty.$$

继续由 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{S_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}+n\left(\frac{n}{S_n}\right)^{\alpha}}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n^{\alpha+1}} \left(\frac{na_n}{S_n}\right)^{\alpha},\end{aligned}$$

这就得到了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{S_n} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{\alpha+1}}{n} = (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)^{\alpha}.$$

有趣的是, 我们可以不需要预先假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{na_n}{S_n}$ 存在.

注[♠, ∗] 首先由 Bernouli 不等式得

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{\alpha+1} &= \left(a_n + \left(\frac{n}{S_n}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha+1} \geqslant \left(a_n + \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha+1} \\ &= a_n^{\alpha+1}\left(1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \geqslant a_n^{\alpha+1}\left(1 + (\alpha+1)\left(\frac{1}{a_n}\right)^{\alpha+1}\right) \\ &= \alpha + 1 + a_n^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

即裂项求和得某个 $c_1 > 0$ 有

$$a_n^{\alpha+1} \geqslant c_1 n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

又

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{n}{S_n}\right)^{\alpha} \leqslant a_n + \frac{1}{c_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\left(\frac{n}{\sqrt[\alpha+1]{1} + \sqrt[\alpha+1]{2} + \cdots + \sqrt[\alpha+1]{n}}\right)^{\alpha},$$

继续裂项求和以及利用[7]

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt[\alpha+1]{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt[\alpha+1]{1} + \sqrt[\alpha+1]{2} + \cdots + \sqrt[\alpha+1]{k}}\right)^{\alpha}\right] = \frac{(\alpha+2)^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha-1}}$$

得某个 $c_2 > 0$ 有

$$a_n^{\alpha+1} \leqslant c_2 n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha+1}}} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

可得存在 $c_3 > 0$ 使得

$$c_3 \geqslant \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{n^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha+1}}} \geqslant \frac{na_n}{S_n} \geqslant 1.$$

记有界数列

$$p_n \triangleq \frac{a_n^{\alpha+1}}{n}, q_n \triangleq \frac{na_n}{S_n}.$$

由

$$\epsilon_n \triangleq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{\left(\frac{n}{S_n}\right)^{\alpha}}{a_n} = \frac{q_n^{\alpha}}{np_n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

我们有

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \frac{n}{n+1}(1+\epsilon_n)^{\alpha+1} \\ &= p_n\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(1 + (\alpha+1)\epsilon_n + o(\epsilon_n)\right) \\ &= p_n\left(1 + (\alpha+1)\epsilon_n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= p_n + (\alpha+1)p_n\epsilon_n - \frac{p_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= p_n + \frac{(\alpha+1)q_n^{\alpha} - p_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

[7] 反复利用定理 Stolz9.1即可.

以及

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{(n+1)\,a_{n+1}}{S_{n+1}} = q_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\epsilon_n)}{1+\frac{q_n(1+\epsilon_n)}{n}} \\ &= q_n\left(1+\frac{1}{n}+\epsilon_n\right)\left(1-\frac{q_n\,(1+\epsilon_n)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= q_n\left(1-\frac{q_n}{n}+\frac{1}{n}+\epsilon_n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= q_n+\frac{q_n\,(1-q_n)+\frac{q_n^{\alpha+1}}{p_n}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

合起来写就有

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} (\alpha+1)\,q_n^{\alpha}-p_n \\ q_n\,(1-q_n)+\frac{q_n^{\alpha+1}}{p_n} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

接下来有数学类极限习题112.即得答案.

130. (130.) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$, 对任何 $\alpha>1$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$1+\alpha x \geqslant e^x \geqslant 1+x, \forall x\in(0,\delta).$$

于是当 $n \geqslant \frac{1}{\delta}\sup\limits_{k\geqslant 1}\ln a_k$, 我们有

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{\ln a_k}{n}}-1\right)} \geqslant \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln a_k}{n}} \\ &\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=\!=} e^{\ln a} = a, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n = \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}-1\right)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{\ln a_k}{n}}-1\right)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} e^{\alpha\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln a_k}{n}} \\ &\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=\!=} e^{\alpha\ln a} = a^{\alpha}. \end{aligned}$$

由 α 任意性得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n \leqslant a,$$

于是就有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)^n = a.$$

131. (131.) 首先

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{a_{n+1}\,(a_{n+1}-a_n)}{a_n+a_{n+1}}, n=0,1,2,\cdots.$$

于是归纳易得 a_n 严格递增. 考虑

$$b_n \triangleq \frac{a_{n+1}}{a_n}, n=0,1,2,\cdots,$$

我们有

$$b_n>1, b_{n+1}=\frac{2b_n}{1+b_n}, n=0,1,2,\cdots.$$

现在就有

$$0\leqslant |b_{n+1}-1| \leqslant \left|\frac{b_n-1}{1+b_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}|b_n-1|, n=0,1,2,\cdots,$$

即得

$$0<\ln b_n<b_n-1\leqslant\frac{1}{2^n}\left(b_0-1\right),n=0,1,2,\cdots.$$

现在就有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ln a_{n+1}-\ln a_n\right)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_0-1}{2^n}<\infty,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且为正数.

132. (132.) 对任何 $\epsilon>0$, 因为 f 在 $x=1$ 连续, 所以存在 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$|f(x)-f(1)|\leqslant\epsilon,\forall x\in[1-\delta,1].$$

注意因为

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n^{p-1}}}=1,$$

所以存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\min\left\{a^{\frac{1}{n^p}},a^{\frac{1}{n^{p-1}}}\right\}\geqslant1-\delta,\forall n\geqslant N.$$

现在当 $n\geqslant N$ 有

$$a^{\frac{k}{n^p}}\geqslant\min\left\{a^{\frac{1}{n^p}},a^{\frac{1}{n^{p-1}}}\right\}\geqslant1-\delta,k=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a^{\frac{k}{n^p}}\right)-f(1)\right|&=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(a^{\frac{k}{n^p}}\right)-f(1)\right]\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(a^{\frac{k}{n^p}}\right)-f(1)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon=\epsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a^{\frac{k}{n^p}}\right)\right]=f(1).$$

30.3 极限和渐近分析方法数学类

1. (1.) 注意到由条件和级数的 Cauchy 收敛准则 我们有

$$0=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn}^{qn}a_k\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(qn-pn+1)a_n=(q-p)\varliminf_{n\to\infty}na_n,$$

即 $\varliminf\limits_{n\to\infty}na_n\geqslant0$.

另外一方面, 注意到我们将条件改写一下

$$a_n\geqslant a_m,\frac{m}{q}\leqslant n\leqslant\frac{m}{p},n,m\in\mathbb{N},$$

即有

$$0=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=\left[\frac{m}{q}\right]+1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}a_k\geqslant\varlimsup_{m\to\infty}\left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m\geqslant\varlimsup_{m\to\infty}\left(\frac{m}{p}-1-\frac{m}{q}\right)a_m=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\varlimsup_{m\to\infty}ma_m.$$

于是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}na_n\leqslant0$. 这当然给出了

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

2. (2.) 问题集中在 $x=\frac{\pi}{4}$, 因此基础较好的读者应该直接可以用 Laplace 方法得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx\\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{n\ln\tan x}dx\\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2n\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx\\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\infty} e^{-2nx}dx=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

下面用严格的步骤展示过程. 事实上运用Taylor 公式的 Peano 余项我们有

$$\ln\tan x=-2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+o\left(\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right).$$

换言之, 对任何一个 $\epsilon\in(0,2)$, 存在 $\delta>0$, 使得 $x\in\left[\frac{\pi}{4}-\delta,\delta\right]$ 时, 我们有

$$-2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\epsilon\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\leqslant\ln\tan x\leqslant-2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\epsilon\left(\frac{\pi}{4}-x\right),\tag{30.21}$$

于是

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx\\ &=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}-\delta}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx\\ &\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}-\delta}\frac{1}{1+x^n}dx+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}}e^{-n(2-\epsilon)\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx\\ &\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\delta}e^{-n(2-\epsilon)x}dx\\ &\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\infty}e^{-n(2-\epsilon)x}dx\\ &=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n^2}\frac{1}{2-\epsilon}=\frac{1}{2-\epsilon}.\end{aligned}$$

由 ϵ 任意性即得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx\leqslant\frac{1}{2}.$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx &\geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx\\ &\geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_{\frac{\pi}{4}-\delta}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}e^{-n(2+\epsilon)\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx\\ &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{1+\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}\int_0^{\delta}e^{-n(2+\epsilon)x}dx\\ &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}\cdot\frac{1}{2+\epsilon}\int_0^{n(2+\epsilon)}e^{-x}dx\\ &=\frac{1}{2+\epsilon}.\end{aligned}$$

由 ϵ 任意性即得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx\geqslant\frac{1}{2}.$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^n}\tan^n x dx=\frac{1}{2}.$$

3. (3.) 首先 $y_x > y_{x+1} > 0$, 因此我们假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} y_x = y \geqslant 0$. 解二次函数并利用 $y_x > 0$, 注意到

$$y_{x+1} = \frac{\sqrt{x^2+4xy_x}-x}{2}.$$

于是

$$y_{x+1} = x\frac{\sqrt{1+\frac{4y_x}{x}}-1}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{2y_x}{x} - \frac{2y_x^2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = y_x - \frac{y_x^2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = y_x - \frac{y_x^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

由于 y_x 的系数为 1, 根据经验这必须要取倒数才能渐近估计, 于是

$$\frac{1}{y_{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+4xy_x}-x} = \frac{1}{2y_x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4y_x}{x}}+1\right) = \frac{1}{2y_x}\left(2+\frac{2y_x}{x}+O\left(\frac{y_x^2}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{y_x}+\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

因此求和得

$$\frac{1}{y_{x+1}} = \frac{1}{y_1} + \sum_{j=1}^{x}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{x} O\left(\frac{1}{j^2}\right) = C - \sum_{j=x+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{j^2}\right) + \ln x + O\left(\frac{1}{x}\right) = C + \ln x + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1)\cdot y_{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{C+\ln x + O\left(\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

我们完成了证明.

4. (4.) 我们将 $\frac{y}{x}$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ 展开为二元 Taylor 公式得

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) + 2\left(y-\frac{1}{3}\right) + \frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right) + o\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2\right].$$

注意到一个初等的计算有

$$n\left[\int_{[0,1]^n}\left(-\frac{4}{3}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}-\frac{1}{3}\right)\right)dx_1\cdots dx_n\right] = 0.$$

我们断言

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_{[0,1]^n}\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^n x_i}dx_1\cdots dx_n - \frac{2}{3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\int_{[0,1]^n}\left[\frac{8}{3}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}-\frac{1}{3}\right)\right]dx_1\cdots dx_n\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{8}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}n+\frac{n(n-1)}{4}}{n^2}-\frac{1}{4}\right)-4\left(\frac{\frac{1}{4}n+\frac{n(n-1)}{6}}{n^2}-\frac{1}{6}\right)\right]\right\}\\
&= -\frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

显然, 如果我们把 $\frac{y}{x}$ 展开到足够多项式的二元 Taylor 公式, 我们可以把极限完成任意阶渐近估计. 那么为什么这是对的呢? 并且这是万能通法.

考虑

$$f(x,y) \triangleq \frac{y}{x} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) + 2\left(y-\frac{1}{3}\right) + \frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right),$$

以及

$$A_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}, B_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}.$$

注意到 $B_n \leqslant A_n$, 以及

$$|f(x,y)| \leqslant 1+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \triangleq C>0, \forall x,y\in[0,1], y\leqslant x.$$

由二元 Taylor 公式的 Peano 余项, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x,y)| \leqslant \epsilon\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\right], \forall \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 \leqslant \delta^2.$$

于是我们记

$$S_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n : \left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^2 \leqslant \delta^2\right\},$$

则有

$$\begin{aligned}
&n\int_{[0,1]^n}|f(A_n,B_n)|\,dx_1\cdots dx_n\\
&=n\int_{[0,1]^n\setminus S_n}|f(A_n,B_n)|\,dx_1\cdots dx_n+n\int_{S_n}|f(A_n,B_n)|\,dx_1\cdots dx_n\\
&\leqslant Cn\int_{[0,1]^n\setminus S_n}\frac{\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2}{\delta^4}dx_1\cdots dx_n+\epsilon n\int_{S_n}\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^2\right]dx_1\cdots dx_n\\
&\leqslant Cn\int_{[0,1]^n}\frac{\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2}{\delta^4}dx_1\cdots dx_n+\epsilon n\int_{[0,1]^n}\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^2\right]dx_1\cdots dx_n\\
&=\frac{Cn}{\delta^4}\int_{[0,1]^n}\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^4+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^4+2\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^2\right]dx_1\cdots dx_n+\frac{31\epsilon}{180}\\
&\leqslant\frac{2Cn}{\delta^4}\int_{[0,1]^n}\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^4+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^4\right]dx_1\cdots dx_n+\frac{31\epsilon}{180}.
\end{aligned}$$

我们有

$$\int_{[0,1]^n}\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^4+\left(B_n-\frac{1}{3}\right)^4\right]dx_1\cdots dx_n=\frac{5n-2}{240n^3}+\frac{16(7n-2)}{4725n^3}=O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

最后一个等号可以通过(9.80),(9.81),(9.82)和(9.83)得到. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2Cn}{\delta^4}\int_{[0,1]^n}\left[\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^4+\left(B_n-\frac{1}{2}\right)^4\right]dx_1\cdots dx_n=0.$$

由 ϵ 任意性表明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{[0,1]^n}|f(A_n,B_n)|\,dx_1\cdots dx_n=0.$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_{[0,1]^n}\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}dx_1\cdots dx_n-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}.$$

5. (5.) 事实上由Bernouli 不等式, 我们有

$$x_{n+1}\leqslant -1+1+\frac{1}{n}\cdot nx_n=x_n, n=1,2,\cdots.$$

显然 $x_n\geqslant 0$, 因此设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 我们有

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\sqrt[n]{1+nx_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-1+e^{\frac{\ln(1+nx_n)}{n}}\right)=0.$$

注意到对任何 $c\geqslant 3$, 我们有

$$(n+1)\left(-1+\sqrt[n]{1+c}\right)<c, \forall n\geqslant 2, \tag{30.22}$$

因此取 $c=\max\{3,2a_2\}$, 则 $2a_2\leqslant c$, 设 $na_n\leqslant c$, 则

$$(n+1)\,a_{n+1}=(n+1)\left(-1+\sqrt[n]{1+na_n}\right)\leqslant(n+1)\left(-1+\sqrt[n]{1+c}\right)<c.$$

由归纳法就有 $x_n\leqslant\frac{c}{n},\forall n\geqslant 2$. 记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,nx_n=b<\infty$, 两边取上极限有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1+x_{n+1})^n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,e^{n\ln(1+x_{n+1})}=e^{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,nx_{n+1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1+nx_n)=1+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,nx_n,$$

这暗示 $e^b=1+b$, 因此 $b=0$, 结合 $x_n\geqslant 0$, 于是我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 这就完成了证明.

我们补充证明(30.22), 考虑 $x=\frac{1}{n}$, 这等价于

$$-1+e^{x\ln(1+c)}\leqslant\frac{cx}{1+x},\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],c\geqslant 3.$$

考虑 $f(x,c)=\ln\left(\frac{cx}{1+x}+1\right)-\ln(1+c)\cdot x$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,c)=\frac{c}{(x+1)(cx+x+1)}-\ln(1+c),$$

即 $f(x,c)$ 关于 x 先增后减或者递增或者递减, 因此

$$f(x,c)\geqslant\min\left\{f(0,c),f\left(\frac{1}{2},c\right)\right\}=\min\left\{0,\ln\left(\frac{c}{3}+1\right)-\frac{\ln(1+c)}{2}\right\}\geqslant 0,$$

这里最后一个不等号来自

$$\frac{d}{dc}\left(\ln\left(\frac{c}{3}+1\right)-\frac{\ln(1+c)}{2}\right)=\frac{c-1}{2(c+1)(c+3)}>0\Rightarrow\ln\left(\frac{c}{3}+1\right)-\frac{\ln(1+c)}{2}\geqslant\ln\left(\frac{3}{3}+1\right)-\frac{\ln 4}{2}=0.$$

这就证明了不等式(30.22).

我们对本题做更多一些说明. 在有了 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$ 这个最主要结果之后, 问题的推广已经变成了繁而不难的东西. 事实上 Taylor 展开 $x_{n+1}=-1+(1+nx_n)^{\frac{1}{n}}=x_n+\cdots$, 我们知道要取倒数来估计, 如下结果留作读者尝试.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(n^2x_n-4\right)=\frac{52}{3}.$$

6. (6.) 注意到 $\sin x\leqslant x,\forall x\geqslant 0$, 我们知道经典方法中使用的 Taylor 展开得到的不等式对本题变动的 $a_1=\frac{1}{\sqrt{n}},a_{m+1}=\sin a_m,m=1,2,\cdots$ 仍然适用 (因为不管怎么迭代, 值会变小, 都会落在不等式成立的定义域中). 所以本题可以类似经典方法照抄即可. 但为了照顾感受不到的读者, 我们下面割舍掉余项书写, 用严格的不等式来体现证明.

记 $a_1=\frac{1}{\sqrt{n}},a_{m+1}=\sin a_m,m=1,2,\cdots$, 注意到 $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+o(1)$, 对任何 $\epsilon\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, 我们知道存在 $\delta>0$, 使得

$$\frac{1}{3}-\epsilon\leqslant\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{3}+\epsilon,\forall x\in(0,\delta).$$

于是当 $n>\frac{1}{\delta^2}$, 利用 $0<a_m\leqslant a_1=\frac{1}{\sqrt{n}}<\delta$, 我们有

$$\frac{1}{3}-\epsilon\leqslant\frac{1}{a_{m+1}^2}-\frac{1}{a_m^2}\leqslant\frac{1}{3}+\epsilon,m=1,2,\cdots.$$

因此求和得

$$\left(\frac{1}{3}-\epsilon\right)m\leqslant\frac{1}{a_{m+1}^2}-\frac{1}{a_1^2}\leqslant\left(\frac{1}{3}+\epsilon\right)m\Rightarrow\frac{4}{3}-\epsilon\leqslant\frac{1}{na_{n+1}^2}\leqslant\frac{4}{3}+\epsilon,$$

这里取了 $m=n$ 并利用了 $a_1=\frac{1}{\sqrt{n}}$. 因此得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}^2}=\frac{4}{3}$, 从而我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. (7.) 首先

$$a_{n+1}\geqslant 2\sqrt{\lambda},n=1,2,\cdots.$$

于是记

$$M \triangleq \max\left\{a_1, a_2, \frac{1}{(1-\lambda)\,2\sqrt{\lambda}}\right\} > 0,$$

我们归纳证明

$$M \geqslant a_n \geqslant \min\left\{2\sqrt{\lambda}, a_1\right\}, n = 1, 2, \cdots.$$

事实上, 下界是明显的, 假定 $a_n \leqslant M, n \geqslant 2$, 则

$$a_{n+1} \leqslant \lambda M + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \leqslant M.$$

现在可记

$$A \triangleq \varlimsup_{n\to\infty} a_n, B \triangleq \varliminf_{n\to\infty} a_n,$$

我们有

$$A = \varlimsup_{n\to\infty} a_{n+1} \leqslant \lambda \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lambda A + \frac{1}{B};$$
$$B = \varliminf_{n\to\infty} a_{n+1} \geqslant \lambda \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lambda B + \frac{1}{A},$$

即 $AB = \frac{1}{1-\lambda}$.

取一个子列 a_{n_k} 使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k+1} = A, \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = s,$$

于是

$$A = \lim_{k\to\infty} a_{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(\lambda a_{n_k} + \frac{1}{a_{n_k}}\right) = \lambda s + \frac{1}{s} \leqslant \lambda A + \frac{1}{B} = \lambda A + (1-\lambda)\,A = A,$$

即上述不等式实际是等式, 因此 $A = B = s$, 这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

8. (8.) 事实上, 若 $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \geqslant \epsilon \in (0,1)$, 则存在 $n_k \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \cdots$, 使得

$$n_0 = 1, n_k > 2\left(1 - k + \sum_{j=1}^{k} n_{j-1}\right), k = 1, 2, \cdots$$

且 $a_{n_k} \geqslant \frac{\epsilon}{2}$. 运用 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x, y < \delta$ 时有 $f(x,y) < \frac{\epsilon}{2}$. 当 $m + n = n_k, k \in \{1, 2, \cdots\}$, 我们由

$$\frac{\epsilon}{2} \leqslant a_{m+n} \leqslant f(a_m, a_n)$$

知 a_m, a_n 必有一个不小于 δ.

现在对固定的 $N \in \mathbb{N}$, 我们有

$$n_k > 2\left(1 - k + \sum_{j=1}^{k} n_{j-1}\right) \geqslant 2n_{k-1}, \forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}.$$

然后

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{n_N} a_m}{n_N} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{n_N} a_n + \sum\limits_{m=1}^{n_N} a_m}{2n_N} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=n_{j-1}}^{n_j - n_{j-1}} (a_k + a_{n_j - k})}{2n_N} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=n_{j-1}}^{n_j - n_{j-1}} \delta}{2n_N}$$
$$= \delta\frac{\sum\limits_{j=1}^{N}(n_j - 2n_{j-1} + 1)}{2n_N} = \delta\frac{n_N - 1 - \sum\limits_{j=1}^{N} n_{j-1} + N}{2n_N} = \delta\left(\frac{1}{2} - \frac{1 + \sum\limits_{j=1}^{N} n_{j-1} - N}{2n_N}\right) > \frac{\delta}{4}.$$

这就和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j}{n}=0$ 矛盾!, 因此我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

9. (9.) 运用9.3, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\left(1+x^2\right)^n}dx=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\cos x e^{-n\ln\left(1+x^2\right)}dx=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-nx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

10. (10.)

Method 1 相似定理9.10的证明, 实际上

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]dx\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)-f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\right]dx\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{f(x)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)-f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)}{\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)^2}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)^2dx\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\theta_{k,n})-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)-f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\left(\theta_{k,n}-\frac{2k-1}{2n}\right)}{\left(\theta_{k,n}-\frac{2k-1}{2n}\right)^2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)^2dx\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(\eta_{k,n})}{2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)^2dx\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(\eta_{k,n})}{24n^3}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24}\int_0^1 f''(x)\,dx\\
&=\frac{1}{24}\left[f'(1)-f'(0)\right],
\end{aligned}$$

这里倒数第四个等号来自 Taylor 中值定理.

Method 2 相似定理9.11也可以证明, 但计算太大故不推荐, 证明的想法是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{2n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right),$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)=2\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

然后直接套用9.11的结果即可.

11. (11.) 实际上, 显然 $\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\cos(2\pi xy)\,dx\in C(\mathbb{R})$ 且当 $y\to\infty$, 一个简单的分部积分有

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\cos(2\pi xy)\,dx=O\left(\frac{1}{|y|^{n+1}}\right),n=1,2,\cdots. \tag{30.23}$$

于是当 $n>\frac{s-1}{2}$, 我们知道 $2n+2-s>1$, 于是 I_n 收敛.

我们再来看第二问, 稍微有基础的读者很容易注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}|y|^s\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\cos(2\pi xy)\,dx\right)^2dy\sim\int_{-\infty}^{\infty}|y|^s\left(\int_0^{\infty}e^{-nx^2}\cos(2\pi xy)\,dx\right)^2dy\\
&=\frac{\pi}{4n}\int_{-\infty}^{\infty}|y|^s e^{-\frac{2\pi^2y^2}{n}}dy=2^{-\frac{s+1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{4\pi^s}n^{\frac{s-1}{2}}.
\end{aligned}$$

相信读者可以意识到这个事情并没有那么简单, 那么该如何严格证明呢?

12. (12.) 一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=2}^{n}\int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2(k-1)}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=2}^{n}\int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2(k-1)}}\frac{|\sin kx|}{x}dx$$

$$\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}n\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2(n-1)}}\frac{|\sin nx|}{x}dx=\lim_{n\to\infty}n\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2(n-1)}}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2(1-y)}}\frac{|\sin x|}{x}dx}{y}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\frac{\pi}{2(1-y)^2}\frac{\left|\sin\frac{\pi}{2(1-y)}\right|}{\frac{\pi}{2(1-y)}}}{1}=1,$$

另外一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}dx=1,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx=1.$$

注意到

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x}dx=0,$$

以及

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}kx}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\cdot n\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{0}^{\pi}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\sin kx|}{x}dx=1.$$

13. (13.) 先考虑 $b=0$, 则

$$\lim_{a\to1^+}(a-1)^{c+d-1}\int_1^a\frac{1}{(t-1)^c(a-t)^d}dt=\lim_{a\to1^+}(a-1)^{c+d-1}\int_1^a\frac{1}{(t-1)^c(a-t)^d}dt\overset{u=\frac{a-t}{t-1}}{=}\lim_{a\to1^+}\int_0^\infty\frac{(1+u)^{c+d-2}}{u^d}du.$$

另外一方面, 我们有

$$\beta(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\overset{x=\frac{u}{u+1}}{=}\int_0^\infty\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du,$$

对比上面两个式子我们可取 $p=1-d,q=1-c$, 则

$$\lim_{a\to1^+}(a-1)^{c+d-1}\int_1^a\frac{1}{(t-1)^c(a-t)^d}dt=\beta(1-c,1-d).$$

当 $b\neq0$, 通过 $\begin{cases}1\leqslant t^b\leqslant a^b, & b>0\\ a^b\leqslant t^b\leqslant1, & b<0\end{cases}$ 夹逼可得

$$\lim_{a\to1^+}(a-1)^{c+d-1}\int_1^a\frac{t^b}{(t-1)^c(a-t)^d}dt=\beta(1-c,1-d).$$

14. (14.) 首先因为对称性, 不妨设 sup 对 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 取的. 由等比数列求和得

$$\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)^n+x^n(x-1)}{1-2x}.$$

一方面

$$\varliminf_{n\to\infty}n\sup_{x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)}\frac{x(1-x)^n+x^n(x-1)}{1-2x}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{1}{n}\right)^n(1-n)}{1-\frac{2}{n}}=\frac{1}{e}.$$

另外一方面, 对任何 $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 因为 $0<\frac{1}{2(1-\delta)}<1$. 我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sup_{x\in[\delta,\frac{1}{2})}\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^{n-k}x^k &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n(1-\delta)^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k\\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n(1-\delta)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2(1-\delta)}\right)^k=0.\end{aligned}$$

以及[8]

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sup_{x\in(0,\delta)}\frac{x(1-x)^n+x^n(x-1)}{1-2x} &\leqslant \frac{1}{1-2\delta}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sup_{x\in(0,\delta)}x(1-x)^n\\ =\frac{1}{1-2\delta}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n &=\frac{e^{-1}}{1-2\delta},\end{aligned}$$

由 δ 的任意性即得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sup_{x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)}\frac{x(1-x)^n+x^n(x-1)}{1-2x}\leqslant\frac{1}{e}.$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} n\sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{e}.$$

15. (15.) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a,\ \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=x,$$

我们设 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{y_n}{x_n}>\frac{a}{2},x_{n+1}-x_n>c>0,\forall n\geqslant N.$$

又 $(\ln f)'=\frac{f'}{f}$ 递减可知 $\ln f$ 下凸. 故其恒在切线下方, 即我们有不等式

$$\ln f(x)\leqslant f'(1)(x-1),\forall x\in(0,1].$$

现在当 $n>N$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{x_k}{x_n}\right)\right]^{y_n}&=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{x_{n-k+1}}{x_n}\right)\right]^{y_n}=\sum_{k=1}^{n}e^{y_n\ln f\left(\frac{x_{n-k+1}}{x_n}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{y_n}{x_n}f'(1)(x_{n-k+1}-x_n)}\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{n}e^{-\frac{a}{2}f'(1)(x_n-x_{n-k+1})}\leqslant\sum_{k=1}^{N}e^{-\frac{a}{2}f'(1)(x_n-x_{n-k+1})}+\sum_{k=N+1}^{n}e^{-\frac{a}{2}f'(1)(x_n-x_{n-k+N})}\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{N}1+\sum_{k=N+1}^{\infty}e^{-\frac{a}{2}f'(1)c(k-N)}<\infty,\end{aligned}$$

于是由级数18.16控制收敛定理我们得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{x_k}{x_n}\right)\right]^{y_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{x_{n-k+1}}{x_n}\right)\right]^{y_n}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}e^{y_n\ln f\left(\frac{x_{n-k+1}}{x_n}\right)}\\ =\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}e^{y_n\left[f\left(\frac{x_{n-k+1}}{x_n}\right)-1\right]}&=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}e^{y_nf'(1)\left[\frac{x_{n-k+1}}{x_n}-1\right]}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ax(k-1)f'(1)}=\frac{1}{1-e^{-axf'(1)}}\end{aligned}$$

[8]注意当 n 充分大时必有 $\frac{1}{n+1}\in(0,\delta)$.

16. (16.) 事实上对任何 $t\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}&=\sum_{0\leqslant k\leqslant n^{\frac{1}{3}}}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}+\sum_{n^{\frac{1}{3}}<k\leqslant tn}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}+\sum_{tn<k\leqslant n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}\\&=\sum_{0\leqslant k\leqslant n^{\frac{1}{3}}}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}+\sum_{n^{\frac{1}{3}}<k\leqslant tn}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}+\sum_{tn<k\leqslant n-1}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}\\&\leqslant\sum_{0\leqslant k\leqslant n^{\frac{1}{3}}}e^{-(n-k)\frac{k}{n}}+\sum_{n^{\frac{1}{3}}<k\leqslant tn}e^{(n-tn)\ln\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)}+\sum_{tn<k\leqslant n-1}e^{(n-k)\ln(1-t)}\\&\leqslant\sum_{0\leqslant k\leqslant n^{\frac{1}{3}}}e^{-k+\frac{k^2}{n}}+\sum_{n^{\frac{1}{3}}<k\leqslant tn}e^{-(1-t)n^{\frac{1}{3}}}+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}(1-t)^{n-k}\\&\leqslant e^{n^{\frac{1}{3}}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}+\sum_{0<k\leqslant n}e^{-(1-t)n^{\frac{1}{3}}}+\sum_{k=1}^{\infty}(1-t)^{k}\\&=e^{n^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1-e^{-1}}+ne^{-(1-t)n^{\frac{1}{3}}}+\frac{1-t}{t},\end{aligned}$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}\leqslant\frac{e}{e-1}+\frac{1-t}{t},$$

由 t 任意性知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}\leqslant\frac{e}{e-1}.$$

对任给 $m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{m}e^{-k},$$

由 m 任意性, 我们知道

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}=\frac{e}{e-1}.$$

综上, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{k}=\frac{e}{e-1}.$$

17. (17.) 首先注意到 $f(y)\sim y, f(y)-y\sim a_3y^3, y\to0$, 于是

$$\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{f^2(y)}-\frac{1}{y^2}\right)=\lim_{y\to0}\frac{y^2-f^2(y)}{y^2f^2(y)}=\lim_{y\to0}\frac{(y-f(y))(y+f(y))}{y^4}=\lim_{x\to0}\frac{-2a_3y^4}{y^4}=-2a_3.$$

然后对 $\epsilon\in(0,-2a_3)$, 存在 $\delta>0$, 使得对每一个 $0<|y|<\delta$, 都有

$$-2a_3-\epsilon\leqslant\frac{1}{f^2(y)}-\frac{1}{y^2}\leqslant-2a_3+\epsilon.\tag{30.24}$$

考虑数列 $a_1=\frac{x}{\sqrt{n}}, a_{m+1}=f(a_m), m=1,2,\cdots$., 注意 $\lim\limits_{y\to0^+}\frac{f(y)-y}{y^3}<0$, 于是存在 $\delta_2>0$, 使得[9] $0<f(y)<y, \forall y\in(0,\delta_2)$. 当整数 $n>\frac{|x|^2}{\min\{\delta,\delta_2\}^2}$, 我们有

$$0<a_m\leqslant a_1, \forall m\geqslant1.$$

故由(30.24)知

$$-2a_3-\epsilon\leqslant\frac{1}{a_{m+1}^2}-\frac{1}{a_m^2}\leqslant-2a_3+\epsilon, m=1,2,\cdots.$$

[9] 如果 f 取到 0 的话必有子列极限为 ∞.

我们求和得

$$(-2a_3-\epsilon)\,m\leqslant\frac{1}{a_{m+1}^2}-\frac{1}{a_1^2}\leqslant(-2a_3+\epsilon)\,m,m=1,2,\cdots.$$

取 $m=n$, 我们就有

$$(-2a_3-\epsilon)\,n\leqslant\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{n}{x^2}\leqslant(-2a_3+\epsilon)\,n,$$

即

$$(-2a_3-\epsilon)\leqslant\frac{1}{na_{n+1}^2}-\frac{1}{x^2}\leqslant(-2a_3+\epsilon)\,.$$

容易看到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}^2}-\frac{1}{x^2}=-2a_3,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}f^{\circ n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=\frac{x}{\sqrt{1-2a_3x^2}}.$$

18. (18.) 不妨设 $L=0$ 且 f 递减, 记 $s_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$, 由 abel 变换8.2, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]s_k+\frac{f\left(1\right)s_n}{n}.$$

注意到对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|s_k|\leqslant\epsilon k,\forall k\geqslant N.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)x_k\right|&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|\cdot|x_k|\right)\right)+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|f\left(1\right)\right|\frac{s_n}{n}\\&\leqslant\epsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}\left(k\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|\right)\right)\\&=\epsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}\left(kf\left(\frac{k}{n}\right)-kf\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\\&=\epsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}\left(kf\left(\frac{k}{n}\right)-(k+1)\,f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)+\epsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\\&=\epsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\left(Nf\left(\frac{N}{n}\right)-nf\left(1\right)\right)+\epsilon\int_0^1f\left(x\right)dx\\&=-\epsilon f\left(1\right)+\epsilon\int_0^1f\left(x\right)dx,\end{aligned}$$

由 ϵ 任意性即得证明.

19. (19.) 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1g\left(x\right)f\left(x^n\right)dx&=f\left(0\right)\int_0^1g\left(x\right)dx+g\left(1\right)\int_0^1\left[f\left(x^n\right)-f\left(0\right)\right]dx+\int_0^1\left[g\left(x\right)-g\left(1\right)\right]\left[f\left(x^n\right)-f\left(0\right)\right]dx\\&=f\left(0\right)\int_0^1g\left(x\right)dx+\frac{g\left(1\right)}{n}\int_0^1\frac{f\left(y\right)-f\left(0\right)}{y}y^{\frac{1}{n}}dy+\int_0^1\left[g\left(x\right)-g\left(1\right)\right]\left[f\left(x^n\right)-f\left(0\right)\right]dx\\&=f\left(0\right)\int_0^1g\left(x\right)dx+B+C.\end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned}B&=\frac{g(1)}{n}\int_0^1\frac{f(y)-f(0)}{y}dy+\frac{g(1)}{n}\int_0^1\frac{f(y)-f(0)}{y}\left(y^{\frac{1}{n}}-1\right)dy\\&=\frac{g(1)}{n}\int_0^1\frac{f(y)-f(0)}{y}dy+O\left(\frac{1}{n}\int_0^1\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|\left(1-e^{\frac{\ln y}{n}}\right)dy\right)\\&=\frac{g(1)}{n}\int_0^1\frac{f(y)-f(0)}{y}dy+O\left(\frac{1}{n^2}\int_0^1\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|\cdot|\ln y|\,dy\right)\\&=\frac{g(1)}{n}\int_0^1\frac{f(y)-f(0)}{y}dy+O\left(\frac{1}{n^2}\right),n\to\infty.\end{aligned}$$

对任何 $\delta>0$, 再注意到

$$\begin{aligned}|nC|&=n\left|\int_0^1[g(x)-g(1)][f(x^n)-f(0)]\,dx\right|\leqslant n\int_0^1|g(x)-g(1)|\cdot|f(x^n)-f(0)|\,dx\\&=n\int_{1-\delta}^1|g(x)-g(1)|\cdot|f(x^n)-f(0)|\,dx+n\int_0^{1-\delta}|g(x)-g(1)|\cdot|f(x^n)-f(0)|\,dx\\&\leqslant\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot n\int_{1-\delta}^1|f(x^n)-f(0)|\,dx+2n\sup_{y\in[0,1]}|g(y)|\int_0^{1-\delta}|f(x^n)-f(0)|\,dx\\&=\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_{(1-\delta)^n}^1\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|\cdot y^{\frac{1}{n}}dy+2\sup_{[0,1]}|g|\int_0^{(1-\delta)^n}\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|\cdot y^{\frac{1}{n}}dy\\&\leqslant\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_0^1\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|dy+2\sup_{[0,1]}|g|\int_0^{(1-\delta)^n}\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|dy\\&\to\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_0^1\left|\frac{f(y)-f(0)}{y}\right|dy,n\to\infty.\end{aligned}$$

于是由 δ 任意性我们证明了(9.147).

20. (20.) **Method 1** 高手看. 注意到

$$\int_0^\infty\left|f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)g(x)\right|dx\leqslant\sup|f|\cdot\int_0^\infty|g(x)|\,dx<\infty,$$

于是由控制收敛定理就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)g(x)\,dx=\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)g(x)\,dx=f(0)\int_0^\infty g(x)\,dx.$$

Method 2 新手看. 对任何 $M>0$, 注意到

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\infty f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)g(x)\,dx-f(0)\int_0^\infty g(x)\,dx\right|\leqslant\int_0^M\left|f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)-f(0)\right|\cdot|g(x)|\,dx+\int_M^\infty\left|f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)-f(0)\right|\cdot|g(x)|\,dx\\&\leqslant\sup_{x\in\left[0,\frac{M}{n^\alpha}\right]}|f(x)-f(0)|\cdot\int_0^M|g(x)|\,dx+2\sup|f|\cdot\int_M^\infty|g(x)|\,dx.\end{aligned}$$

结合

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\left[0,\frac{M}{n^\alpha}\right]}|f(x)-f(0)|=0,$$

我们知道

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^\infty f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)g(x)\,dx-f(0)\int_0^\infty g(x)\,dx\right|\leqslant2\sup|f|\cdot\int_M^\infty|g(x)|\,dx.$$

由 M 的任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^\infty f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)g(x)\,dx-f(0)\int_0^\infty g(x)\,dx\right|=0,$$

这就完成了证明.

21. (21.) 我们直接统一处理, 即对 $z\in\mathbb{C},|z|\leqslant 1,z\neq 1$, 计算

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^t}.$$

计算的想法即 Abel 变换改善阶8.2. 事实上由 Abel 变换8.2, 我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{z^n}{n^t}=\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{1}{(n+1)^t}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k+\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}z^k}{m^t}.$$

注意到

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}z^k}{m^t}=\lim_{m\to\infty}\frac{z-z^{m+1}}{m^t\left(1-z\right)}=0,$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^t}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{1}{(n+1)^t}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{1}{(n+1)^t}\right)\frac{z-z^{n+1}}{1-z}\\&=\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{1}{(n+1)^t}\right)\left(1-z^n\right)=\frac{z}{1-z}-\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{1}{(n+1)^t}\right)z^n\\&\xlongequal{\text{Abel 变换8.2你同样的可以先对}m\text{建立再对}m\text{取极限来得到, 和刚才一致.}}\frac{z}{1-z}-\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{2}{(n+1)^t}+\frac{1}{(n+2)^t}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k.\end{aligned}$$

由拉格朗日插值定理 (对 $n+1$ 插 $n,n+2$), 我们知道存在 $\theta\in(n,n+2)$ 使得对 $t\in(0,1)$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{n^t}-\frac{2}{(n+1)^t}+\frac{1}{(n+2)^t}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k\right|&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{n^t}-\frac{2}{(n+1)^t}+\frac{1}{(n+2)^t}\right|\cdot\left|\frac{z-z^{n+1}}{1-z}\right|\right)\\&\xlongequal{\text{中值定理}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t\left(t+1\right)}{\theta^{t+2}}\cdot\left|\frac{z-z^{n+1}}{1-z}\right|\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^{t+2}}\cdot\left|\frac{z-z^{n+1}}{1-z}\right|\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}\cdot\left|\frac{z-z^{n+1}}{1-z}\right|\right)<\infty\end{aligned}$$

于是由级数的控制收敛18.16, 我们知道

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{2}{(n+1)^t}+\frac{1}{(n+2)^t}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{n^t}-\frac{2}{(n+1)^t}+\frac{1}{(n+2)^t}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k=0,$$

这就证明了

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^t}=\frac{z}{1-z}.$$

取 $z=e^{ix},x\neq 0$, 就有

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n^t}=\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cot\left(\frac{x}{2}\right),$$

从而得到了

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(nx\right)}{n^t}=-\frac{1}{2},\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(nx\right)}{n^t}=\frac{1}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right).$$

22. (22.) 首先, 读者容易计算得

$$\lim_{x\to 1^-}\left|\frac{1}{|\ln x|^{\alpha}}-\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\right|=0,\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{1}{|\ln x|^{\alpha}}-\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\right|=1,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\left|\int_0^1 \frac{x^n}{|\ln x|^\alpha}-\frac{x^n}{(1-x)^\alpha}dx\right|\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 x^n\cdot\left|\frac{1}{|\ln x|^\alpha}-\frac{1}{(1-x)^\alpha}\right|dx\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 x^n dx\cdot\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{1}{|\ln x|^\alpha}-\frac{1}{(1-x)^\alpha}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\alpha}}{n+1}\cdot\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{1}{|\ln x|^\alpha}-\frac{1}{(1-x)^\alpha}\right|=0.\end{aligned}$$

注意到当 $n\to+\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^n}{(1-x)^\alpha}dx &\overset{x=1-y^{\frac{1}{1-\alpha}}}{=} \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\left(1-y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^n dy=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 e^{n\ln\left(1-y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)}dy\\ &\overset{\text{Laplace 方法}}{\sim}\frac{1}{1-\alpha}\int_0^\infty e^{-ny^{\frac{1}{1-\alpha}}}dy\overset{y=z^{1-\alpha}}{=}\int_0^\infty z^{-\alpha}e^{-nz}dz=n^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).\end{aligned}$$

于是就有

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1\frac{x^n}{|\ln x|^\alpha}dx=\Gamma(1-\alpha),\alpha\in(0,1).$$

23. (23.) 因为 h 是 C^1 的, 所以存在 $C>0$ 使得

$$|h(x)-h(1)|\leqslant C|1-x|,\forall x\in[0,1].$$

注意到

$$\begin{aligned}n\int_0^1\left|h\left(\sqrt[n]{x}\right)-h(1)\right|\cdot|f(x)|dx &\leqslant Cn\int_0^1\left(1-\sqrt[n]{x}\right)\cdot|f(x)|dx\\ &= Cn\int_0^1\left(1-e^{\frac{\ln x}{n}}\right)\cdot|f(x)|dx\overset{e^t\geqslant t+1}{\leqslant} C\int_0^1\ln\frac{1}{x}\cdot|f(x)|dx<\infty,\end{aligned}$$

所以由控制收敛定理, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left[h\left(\sqrt[n]{x}\right)-h(1)\right]f(x)dx &= \int_0^1\lim_{n\to\infty} n\left[h\left(\sqrt[n]{x}\right)-h(1)\right]f(x)dx\\ &= \int_0^1\lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)\lim_{n\to\infty}\frac{h\left(x^{\frac{1}{n}}\right)-h(1)}{x^{\frac{1}{n}}-1}f(x)dx\\ &= h'(1)\int_0^1\ln x\cdot f(x)dx.\end{aligned}$$

24. (24.)

例题 30.1 计算 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\left(\frac{1}{2\alpha}-\int_1^\infty\frac{1}{\sinh(\pi\alpha x)\sqrt{x^2-1}}dx\right)$.

证明 首先注意到

$$\int_1^\infty\frac{1}{\pi\alpha x\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\arctan\sqrt{x^2-1}}{\alpha\pi}\Big|_1^\infty=\frac{1}{2\alpha},\alpha>0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to0^+}\left(\frac{1}{2\alpha}-\int_1^\infty\frac{1}{\sinh(\pi\alpha x)\sqrt{x^2-1}}dx\right)=\lim_{\alpha\to0^+}\left[\int_1^\infty\left(\frac{1}{\pi\alpha x}-\frac{1}{\sinh(\pi\alpha x)}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx\right]\\ &\overset{x=\frac{y}{\alpha}}{=}\lim_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^\infty\left(\frac{1}{\pi y}-\frac{1}{\sinh(\pi y)}\right)\frac{1}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}dy=\int_0^\infty\left(\frac{1}{\pi y}-\frac{1}{\sinh(\pi y)}\right)\frac{1}{y}dy\\ &\overset{\text{有理分式展开18.2}}{=}\int_0^\infty\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+y^2}dy=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\int_0^\infty\frac{1}{n^2+y^2}dy=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln2.\end{aligned}$$

实际上, 我们还有更一般的结果: 对任何 $m\in\mathbb{N}$, 当 $\alpha\to 0^+$, 都有

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sinh(\pi\alpha x)\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2\alpha}-\ln 2-\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(1-\frac{1}{4^k}\right)\zeta(2k+1)\,a^{2k}+O\left(a^{2m+2}\right).$$

25. (25.) 注意到对每个 $n\in\mathbb{N}$, 我们考虑

$$B(x_n,y_n)\triangleq\left\{t\in\mathbb{R}:|x_n-t|<\frac{y_n}{2}\right\},n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$B(x_n,y_n)\bigcap B(x_m,y_m)=\emptyset,\forall m>n\geqslant 1,$$

这是因为若不然, 设 $t\in B(x_n,y_n)\bigcap B(x_m,y_m)$, 则

$$|x_n-t|<\frac{y_n}{2},|x_m-t|<\frac{y_m}{2}\Rightarrow|x_n-x_m|<\frac{y_n}{2}+\frac{y_m}{2}\leqslant y_n,$$

这就是一个矛盾! 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 注意到 $\{y_n\}$ 有界, 于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B(x_n,y_n)$ 有界. 但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|B(x_n,y_n)|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=+\infty$, 这就是一个矛盾! 于是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界.

26. (26.) 注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left[2\ln 2-1-\frac{1}{n}\int_0^n\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{1+x}dx\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[2\ln 2-1-n\int_0^1\frac{x\ln(1+x)}{1+nx}dx\right]\\&=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1\ln(1+x)\,dx-\int_0^1\frac{nx\ln(1+x)}{1+nx}dx\right]=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n\ln(1+x)}{1+nx}dx\\&=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\end{aligned}$$

这里的换序由控制收敛定理是显然的.

27. (27.) 由控制收敛定理容易得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^n\frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx=\int_0^{\infty}\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4},$$

这里控制函数可以使用

$$\int_0^{\infty}\frac{n\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx\leqslant\int_0^{\infty}\frac{n\cdot\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx=\int_0^{\infty}\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx<\infty.$$

更一般的, 注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{n^2x}{(1+nx)(1+n^2x^2)}dx\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\pi}{4}-\int_0^n\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx\right]\\&=\lim_{n\to\infty}n\int_n^{\infty}\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx\overset{\text{直接求原函数}}{=}1.\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\pi}{4}-n\int_0^n\frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\pi}{4}-n^2\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+nx)(1+n^2x^2)}dx\right]\\&=1+\lim_{n\to\infty}n\left[n^2\int_0^1\frac{x}{(1+nx)(1+n^2x^2)}dx-n^2\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+nx)(1+n^2x^2)}dx\right]\\&=1+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n^3(x-\arctan x)}{(1+nx)(1+n^2x^2)}dx=1+\int_0^1\frac{x-\arctan x}{x^3}dx=\frac{\pi+2}{4}.\end{aligned}$$

你能证明更强的吗

$$\int_0^n\frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4n}-\frac{\pi+2}{4n^2}+\frac{\left(\frac{5}{18}+\frac{\pi}{6}-\frac{\ln 2}{6}\right)}{n^3}+\frac{\ln n}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\left[\frac{n}{\ln n}\left[n\left[\frac{\pi}{4}-n\int_0^n\frac{\arctan\frac{x}{n}}{(1+x)(1+x^2)}dx\right]-\frac{\pi+2}{4}\right]+\frac{1}{3}\right]=\frac{3\ln 2-3\pi-5}{18}.$$

28. (28.) 利用 $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 和

$$\sin\frac{ax+a}{2} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{ax+a}{2}, \sin\frac{a-ax}{2} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{a-ax}{2}, a \in (0,1], x \in [0,1],$$

我们有

$$\frac{a}{\sqrt{\cos(ax)-\cos a}} = \frac{a}{\sqrt{2\sin\frac{ax+a}{2}\sin\frac{a-ax}{2}}} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{ax+a}{2}\frac{a-ax}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{x+1}{2}\frac{1-x}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

注意到 $\int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx < \infty$, 于是就可以直接换序得到

$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{\cos(ax)-\cos a}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{a\to 0^+}\frac{a}{\sqrt{\cos(ax)-\cos a}}dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

更强的, 我们有

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{\cos(ax)-\cos a}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{32}a^2+\frac{11}{6144}a^4+\frac{173}{1474560}a^6+\frac{22931}{2642411520}a^8+\frac{1319183}{1902536294400}a^{10}+O\left(a^{12}\right), a \to 0^+.$$

29. (29.) 事实上

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \\
&= 1+\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n + \sum_{\sqrt{n}<k\leqslant n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \\
&= 1+\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} + \sum_{\sqrt{n}<k\leqslant n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \\
&= 1+\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} + O\left(\left(n-\sqrt{n}+1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\right) \\
&= 1+\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} + O(ne^{-\sqrt{n}}).
\end{aligned}$$

因为 $\ln(1-x) = -x+o(x)$, 现在对任意 $\epsilon > 0$, 当 n 充分大, 对 $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$, 都有

$$-(1+\epsilon)\frac{k}{n} \leqslant \ln\left(1-\frac{k}{n}\right) \leqslant -(1-\epsilon)\frac{k}{n},$$

又

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{-k\epsilon} \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k\epsilon},$$

在上述不等式两边令 $n\to\infty$, 我们知道

$$\frac{e^{-(1+\epsilon)}}{1-e^{-(1+\epsilon)}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} \leqslant \frac{e^{-(1-\epsilon)}}{1-e^{-(1-\epsilon)}},$$

现在当然令 $\epsilon\to 0$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n = 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} = \frac{e}{e-1}.$$

从证明中可以看到, 我们在 $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} e^{-k}e^{k+n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)}$ 中对 ln 使用类似的 Taylor 展开的不等式, 容易得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}\sim\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}e^{-\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{k^j}{jn^{j-1}}}&=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{k^j}{jn^{j-1}}\right)^m}{m!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\sum\limits_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\frac{\left(k^{\mathbf{j}}\right)^{\alpha}}{\mathbf{j}^{\alpha}\left(n^{\mathbf{j}-1}\right)^{\alpha}}}{m!}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\frac{\left(k^{\mathbf{j}}\right)^{\alpha}}{\mathbf{j}^{\alpha}\left(n^{\mathbf{j}-1}\right)^{\alpha}}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k}\left(k^{\mathbf{j}}\right)^{\alpha}}{\mathbf{j}^{\alpha}\left(n^{\mathbf{j}-1}\right)^{\alpha}}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k}k^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j}}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)^{\alpha_j}\cdot n^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j}}\\
&=\sum_{\alpha\text{除有限个分量外为0}}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j}\phi\left(\frac{1}{e},-\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j,0\right)}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[\alpha_j!\,(j+1)^{\alpha_j}\right]\cdot n^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j}}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j=m}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j}\phi\left(\frac{1}{e},-\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j,0\right)}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[\alpha_j!\,(j+1)^{\alpha_j}\right]\cdot n^{m}}.
\end{aligned}$$

因此记

$$\begin{aligned}
c_m&=\sum_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j=m,\alpha_i\in\mathbb{N}_0,i=1,2,\cdots}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j}\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k}k^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j}}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[\alpha_j!\,(j+1)^{\alpha_j}\right]}\\
&=\sum_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j=m,\alpha_i\in\mathbb{N}_0,i=1,2,\cdots}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j}\phi\left(\frac{1}{e},-\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j,0\right)}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[\alpha_j!\,(j+1)^{\alpha_j}\right]},
\end{aligned}\tag{30.25}$$

这里 ϕ 是 Hurwitz Lerch transcendent(或者不引入特殊函数, 见(30.25)第一个等号), 我们得到了

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{n\left[\cdots n\left[n\left[n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{n}-c_0\right]-c_1\right]-c_2\right]-\cdots\right]}_{m\text{个}n}=c_m.$$

记

$$\begin{aligned}
c_m&=\sum_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j=m,\alpha_i\in\mathbb{N}_0,i=1,2,\cdots}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j}\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k}k^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j}}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[\alpha_j!\,(j+1)^{\alpha_j}\right]}\\
&=\sum_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}j\alpha_j=m,\alpha_i\in\mathbb{N}_0,i=1,2,\cdots}\frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j}\phi\left(\frac{1}{e},-\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j+1)\alpha_j,0\right)}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left[\alpha_j!\,(j+1)^{\alpha_j}\right]},
\end{aligned}\tag{30.26}$$

这里 ϕ 是 Hurwitz Lerch transcendent(或者不引入特殊函数, 见(30.26)第一个等号), 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{n\left[\cdots n\left[n\left[n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n - c_0\right] - c_1\right] - c_2\right] - \cdots\right]}_{m\text{个}n} = c_m.$$

30. (30.) 由函数 Stolz 定理13.10, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{x+\pi} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\int_x^{x+\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}\\ = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t} &= \frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)(\tan^2 t+2)}\mathrm{d}\tan t}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\tan^2 t+2}\mathrm{d}\tan t} = 2-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

31. (31.) 一方面

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n-1} &\geqslant \frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^y-1}\mathrm{d}y = \frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^y-1}\mathrm{d}y\\ &= \frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_1^{\infty}\frac{1}{e^{y\ln x}-1}\mathrm{d}y = \frac{x-1}{\ln x}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{e^y-1}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n-1} &\geqslant \lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{e^y-1}\mathrm{d}y\\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{\ln\frac{1}{e^t-1}}\int_t^{\infty}\frac{1}{e^y-1}\mathrm{d}y \overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{e^t-1}}{\frac{e^t}{e^t-1}} = 1.\end{aligned}$$

另外一方面,

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x^n-1} &\leqslant \frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^y-1}\mathrm{d}y = \frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^y-1}\mathrm{d}y\\ &= \frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_1^{\infty}\frac{1}{e^{y\ln x}-1}\mathrm{d}y = \frac{x-1}{\ln x}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{e^y-1}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

于是结合 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\cdot\frac{1}{x-1}=0$, 我们知道

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to1^+}}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n-1} &= \overline{\lim_{x\to1^+}}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x^n-1}\\ \leqslant \overline{\lim_{x\to1^+}}\frac{x-1}{\ln x}\cdot\overline{\lim_{x\to1^+}}\frac{1}{\ln\frac{1}{x-1}}\int_{\ln x}^{\infty}\frac{1}{e^y-1}\mathrm{d}y &= 1.\end{aligned}$$

于是我们证明了

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln\frac{1}{x-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n-1} = 1.$$

32. (32.)

引理 30.1 (∗)

我们对 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n}x}{x^{2n}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\,(2n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^k\,(n-k)^{2n-1};$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n-1}x}{x^{2n-1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\,(2n-2)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n-1}^k\left(\frac{2n-1}{2}-k\right)^{2n-2}.$$

♡

注只需会算具体的 n 即可.

证明 引理证明: 仅以偶数为例子, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n}x}{x^{2n}}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2\left(2n-1\right)!}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^{2n}x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{(2n-1)}\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{1}{2\left(2n-1\right)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\sin^{2n}x\right)^{(2n-1)}}{x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2^{2n+1}i^{2n}\left(2n-1\right)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^{2n}\right)^{(2n-1)}}{x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{y\to+\infty}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2^{2n+1}i^{2n}\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\int_{\delta<|x|<y}\frac{\left(e^{i(2n-2k)x}\right)^{(2n-1)}}{x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{y\to+\infty}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2^{2n+1}i^{2n}\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(2n-2k\right)^{2n-1}i^{2n-1}\int_{\delta<|x|<y}\frac{e^{i(2n-2k)x}}{x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{y\to+\infty}\lim_{\delta\to0^+}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2^{2n+1}i^{2n}\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(2n-2k\right)^{2n-1}i\int_{\delta<|x|<y}\frac{e^{i(2n-2k)x}}{x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{y\to+\infty}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2^{2n+1}\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(2n-2k\right)^{2n-1}\int_{\delta<|x|<y}\frac{\sin\left[\left(2n-2k\right)x\right]}{x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left[\left(2n-2k\right)x\right]}{x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}-\frac{\pi}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}\\
&=\frac{\pi}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}-\frac{\pi\left(-1\right)^n}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k C_{2n}^{k+n}\left(-k\right)^{2n-1}\\
&=\frac{\pi}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}+\frac{\pi\left(-1\right)^n}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k C_{2n}^{n-k}k^{2n-1}\\
&=\frac{\pi}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}+\frac{\pi}{4\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}\\
&=\frac{\pi}{2\left(2n-1\right)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k C_{2n}^k\left(n-k\right)^{2n-1}.
\end{aligned}$$

回到原题, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k\frac{\left(n-k\right)^{2n-1}}{k!\left(2n-k\right)!}&\overset{30.1}{=}\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n}x}{x^{2n}}\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{Laplace 方法9.3}}{=}\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{3}n}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

33. (33.) 运用斯特灵公式9.4有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{k-1}\left(n-k\right)^{2n-k}}{\left(n-k\right)!k!}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{k-1}}{k!}\frac{\left(n-k\right)^{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n}{\left(n-k\right)!}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^{k-1}}{k!}e^{-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\frac{\left(n-k\right)^{n-k}e^{k-n}}{\left(n-k\right)!}\\
&\overset{\text{斯特灵公式和估阶}}{=}\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^{k-1}}{k!}\frac{e^{-2k}}{\sqrt{2\pi\left(n-k\right)}}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!}e^{-2k}=-W_0\left(-\frac{1}{e^2}\right),
\end{aligned}$$

其中换序理由可以通过对求和分段进行. 例如分为

$$1 \leqslant k \leqslant n^{\alpha}, k > n^{\alpha}, \alpha \in (0,1).$$

34. (34.) 注意到 $xy(1-x)(1-y)$ 最大值点集中在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 且是双侧极大值点, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{n!^2}\right)^2\iint_{[0,1]^2}(xy(1-x)(1-y))^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{n!^2}\right)^2\frac{1}{16^n}\iint_{[0,1]^2}e^{n\ln(xy(1-x)(1-y))+n\ln 16}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\overset{\text{Laplace 方法9.3}}{=} f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{n!^2 4^n}\right)^2\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-4n\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{n!^2 4^n}\right)^2\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4nx^2}\mathrm{d}x\right)^2\\
&=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!\,(2n)!!}{(2n)!!^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4n}\\
&=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4n}\\
&\overset{\text{Wallis 公式9.18}}{=} f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4n}=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

35. (35.) 令

$$A_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n},n\in\mathbb{N}.$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\right)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_{[0,1]^n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i^2x_j^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{5}+\left(n^2-n\right)\frac{1}{9}}{n^2}=\frac{1}{9},\tag{30.27}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n}{3}=\frac{1}{3}.\tag{30.28}$$

对任意 $\epsilon>0$, 取 $\delta>0$ 充分小, 使得

$$\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|\mathrm{d}x\leqslant\epsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[0,1]^n}\left(\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|\mathrm{d}x+\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\geqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|\mathrm{d}x+\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\delta^2}\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\geqslant\delta}\delta^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|\mathrm{d}x+\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\delta^2}\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\geqslant\delta}\left|A_n-\frac{1}{3}\right|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant\epsilon+\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\delta^2}\int_{[0,1]^n}\left|A_n-\frac{1}{3}\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\epsilon+\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\delta^2}\left(\int_{[0,1]^n}A_n^2\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\int_{[0,1]^n}A_n\mathrm{d}x+\frac{1}{9}\right),
\end{aligned}$$

利用算得的极限(30.27)和(30.28)得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{[0,1]^n}\left(\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\epsilon.$$

再由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{[0,1]^n}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

36. (36.) 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 由题目条件极限知任意 $C>1$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_n}>C,\forall n>N,$$

即

$$S_n>C\left(S_n-S_{n-1}\right),\forall n>N\Rightarrow S_{n-1}>\frac{C-1}{C}S_n,\forall n>N.$$

递推得

$$S_n<\frac{C}{C-1}S_{n-1}<\left(\frac{C}{C-1}\right)^2S_{n-2}<\cdots<\left(\frac{C}{C-1}\right)^{n-N}S_N,\forall n>N.$$

注意到充分大的 x, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left(\frac{C}{C-1}\right)^{n-N}S_N\leqslant x<\left(\frac{C}{C-1}\right)^{n+1-N}S_N.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{\ln x}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{N\left(\left(\frac{C}{C-1}\right)^{n-N}S_N\right)}{\ln\left(\left(\frac{C}{C-1}\right)^{n+1-N}S_N\right)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln\left(\left(\frac{C}{C-1}\right)^{n+1-N}S_N\right)}=\frac{1}{\ln\frac{C}{C-1}}.$$

让 $C\to+\infty$ 即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{\ln x}=+\infty.$$

37. (37.) 我们来证明

$$a_n\leqslant a_1\cdot n^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}},\forall n\in\mathbb{N}.\tag{30.29}$$

$n=1$ 时命题显然成立, 假定命题对一般的 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 当 $n+1$ 时, 利用 $\frac{(n+1)^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}-n^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}}{n^{2\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}-2}}$ 递增, 我们有不等式

$$\frac{(n+1)^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}-n^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}}{n^{2\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}-2}}\geqslant 2^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}-1=a_1,\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是我们有

$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}\leqslant a_1\cdot n^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}+a_1^2n^{2\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}-2}\leqslant a_1\cdot(n+1)^{\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}},$$

这就证明了(30.29). 运用(30.29), 我们有

$$a_{n+1}=a_1\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=a_1\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right)=a_1\prod_{k=1}^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{k^{2-\frac{\ln(a_1+1)}{\ln 2}}}\right)\right),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a_1\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right).$$

38. (38.) 答案是不一定存在. 例如取

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\text{为偶数}\\ \frac{1}{e^n}, & n\text{为奇数}\end{cases},$$

则若满足题目条件的 y_n 存在, 那么存在 $a,b>0,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$ay_n\leqslant x_n\leqslant by_n,\forall n\geqslant N. \tag{30.30}$$

于是利用(30.30)就有

$$\frac{1}{2bn}=\frac{1}{b}x_{2n}\leqslant y_{2n}\leqslant y_{2n-1}\leqslant\frac{1}{a}x_{2n-1}=\frac{1}{ae^{2n-1}},\forall n\geqslant N,$$

这和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^{2n-1}}=0$ 矛盾! 于是所求 y_n 不存在.

39. (39.) 注意到

$$n\int_0^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\mathrm{d}x=\sum_{k=n}^{\infty}n\int_0^1\frac{x^k}{k}\mathrm{d}x=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k\left(k+1\right)}=1.$$

由11.4, 我们有

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}=\int_0^x\frac{\left(x-t\right)^{n-1}}{\left(1-t\right)^n}\mathrm{d}t,x\in[0,1)\,.$$

于是对 $\delta\in(0,1)$ 有

$$\begin{aligned}
&\left|n\int_0^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\left[f\left(x\right)-f\left(1\right)\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_0^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|\mathrm{d}x\\
&=n\int_0^{1-\delta}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|\mathrm{d}x+n\int_{1-\delta}^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|\mathrm{d}x\\
&\leqslant2\sup_{x\in[0,1]}\left|f\left(x\right)\right|\cdot n\int_0^{1-\delta}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(1-\delta\right)^k}{k}\mathrm{d}x+\sup_{x\in[1-\delta,1]}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|\cdot n\int_0^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\mathrm{d}x\\
&=2\sup_{x\in[0,1]}\left|f\left(x\right)\right|\cdot n\int_0^{1-\delta}\int_0^{1-\delta}\frac{\left(1-\delta-t\right)^{n-1}}{\left(1-t\right)^n}\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\sup_{x\in[1-\delta,1]}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|\\
&\leqslant2\left(1-\delta\right)\sup_{x\in[0,1]}\left|f\left(x\right)\right|\cdot n\int_0^{1-\delta}\left(\frac{1-\delta-t}{1-t}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+\sup_{x\in[1-\delta,1]}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|.
\end{aligned}$$

然后运用 Laplace 方法9.3有

$$\begin{aligned}
n\int_0^{1-\delta}\left(\frac{1-\delta-t}{1-t}\right)^{n-1}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t&=n\left(1-\delta\right)^n\int_0^{1-\delta}\left(\frac{1-\delta-t}{\left(1-t\right)\left(1-\delta\right)}\right)^{n-1}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t\\
&\sim n\left(1-\delta\right)^n\int_0^{\infty}e^{-(n-1)\frac{\delta t}{1-\delta}}\mathrm{d}t\\
&=n\left(1-\delta\right)^n\cdot\frac{1-\delta}{\delta\left(n-1\right)}\\
&\sim\frac{\left(1-\delta\right)^{n+1}}{\delta}.
\end{aligned}$$

现在我们就知道

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n\int_0^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\left[f\left(x\right)-f\left(1\right)\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{x\in[1-\delta,1]}\left|f\left(x\right)-f\left(1\right)\right|.$$

由 δ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(1\right).$$

40. (40.) 若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n<e,$$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1.$$

从而存在 $N\in\mathbb{N},\epsilon\in(0,1)$, 使得

$$\frac{\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\leqslant 1-\epsilon,\forall n\geqslant N.$$

因此

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\leqslant \sqrt[n]{1-\epsilon}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right),\forall n\geqslant N.$$

这就是

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{(n+1)\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{1-\epsilon}}\leqslant\frac{x_n}{n\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt[k]{1-\epsilon}},\forall n\geqslant\max\{N,2\}\triangleq N',$$

因此

$$\sum_{j=N'}^{n}\frac{x_1}{(j+1)\prod\limits_{k=1}^{j}\sqrt[k]{1-\epsilon}}\leqslant\frac{x_{N'}}{N'\prod\limits_{k=1}^{N'-1}\sqrt[k]{1-\epsilon}}-\frac{x_{n+1}}{(n+1)\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{1-\epsilon}}\leqslant\frac{x_{N'}}{N'\prod\limits_{k=1}^{N'-1}\sqrt[k]{1-\epsilon}}<\infty,$$

注意到

$$(n+1)\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{1-\epsilon}\sim ne^{\ln(1-\epsilon)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=ne^{\ln(1-\epsilon)\ln n+\ln(1-\epsilon)\cdot\gamma+o(1)}\sim(1-\epsilon)^{\gamma}n^{1+\ln(1-\epsilon)},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=N'}^{n}\frac{x_1}{(j+1)\prod\limits_{k=1}^{j}\sqrt[k]{1-\epsilon}}=+\infty,$$

矛盾!, 这就完成了证明.

设 $x_1=\epsilon>0,x_n=n,n\geqslant 2$, 我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\epsilon+n+1}{n}\right)^n=e^{1+\epsilon}.$$

由 ϵ 任意性得 e 不可改进.

41. (41.) 先来证一个核心估计

$$\sup_{x>0,y\in[0,1)}\left|\int_0^x\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\sin(ty)\,\mathrm{d}t\right|<\infty.\tag{30.31}$$

因为在长度不超过 1 的区间 $[a,b]$ 上必有

$$\left|\int_a^b\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\sin(ty)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b\frac{1}{2}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2},$$

于是进一步不妨设 $x=n\in\mathbb{N}$. 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^n\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\sin(ty)\,\mathrm{d}t&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\sin(ty)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(ty+ky)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sin(ty+ky)\,\mathrm{d}t\\&\overset{\text{结论18.4}}{=}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}y\right)}{\sin\frac{y}{2}}\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin\left(ty+\frac{n-1}{2}y\right)\mathrm{d}t=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}y\right)\cos\left(\frac{n}{2}y\right)\left(2\sin\frac{y}{2}-y\cos\frac{y}{2}\right)}{y^2\sin\frac{y}{2}},\end{aligned}$$

于是我们有

$$\sup_{n\in\mathbb{N},y\in[0,1)}\left|\int_0^n\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)\sin(ty)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sup_{y\in(0,1)}\left|\frac{2\sin\frac{y}{2}-y\cos\frac{y}{2}}{2y^2\sin\frac{y}{2}}\right|.$$

又 $\lim\limits_{y\to0^+}\left(\frac{2\sin\frac{y}{2}-y\cos\frac{y}{2}}{2y^2\sin\frac{y}{2}}\right)$ 存在, 这就证明了(30.31).

由 EM 公式9.9, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}&=\frac{\cos x+\frac{\cos(mx)}{m^{\alpha}}}{2}+\int_1^m\frac{\cos(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t+\int_1^m b_1(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos(tx)}{t^{\alpha}}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\cos x+\frac{\cos(mx)}{m^{\alpha}}}{2}+\int_1^m\frac{\cos(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t-\int_1^m b_1(t)\frac{xt\sin(tx)+\alpha\cos(tx)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而让 $m\to+\infty$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}=\frac{\cos x}{2}+\int_1^{\infty}\frac{\cos(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t-\int_1^{\infty}b_1(t)\frac{xt\sin(tx)+\alpha\cos(tx)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

现在

$$\begin{aligned}&\int_1^{\infty}b_1(t)\frac{\cos(tx)-1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}b_1(t)\frac{\cos(tx)-1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(2t-1)\frac{\cos(tx+nx)-1}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\cos(tx+nx)-1}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}\left(t^2-t\right)\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(t^2-t\right)\mathrm{d}\left(\frac{\cos(tx+nx)-1}{(t+n)^{\alpha+1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(t^2-t\right)\frac{x(t+n)\sin(tx+nx)+(\alpha+1)[\cos(tx+nx)-1]}{(t+n)^{\alpha+2}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即随着分母次数的提高使得估计容易进行.

注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left|\left(t^2-t\right)\frac{(t+n)\sin(tx+nx)}{(t+n)^{\alpha+2}}\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{t-t^2}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t-t^2}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t<\infty,\end{aligned}$$

于是由控制收敛定理[10]得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left[\left(t^2-t\right)\frac{(t+n)\sin(tx+nx)}{(t+n)^{\alpha+2}}\right]\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\lim_{x\to0^+}\left[\left(t^2-t\right)\frac{(t+n)\sin(tx+nx)}{(t+n)^{\alpha+2}}\right]\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(t^2-t\right)\frac{\cos(tx+nx)-1}{(t+n)^{\alpha+2}}\mathrm{d}t\right|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(t-t^2\right)\frac{\sin^2\frac{tx+nx}{2}}{(t+n)^{\alpha+2}}\mathrm{d}t\\&\leqslant|x|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(t-t^2\right)\frac{\left|\sin\frac{tx+nx}{2}\right|}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

继续类似由控制收敛定理有

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(t-t^2\right)\frac{\left|\sin\frac{tx+nx}{2}\right|}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\lim_{x\to0^+}\left(t-t^2\right)\frac{\left|\sin\frac{tx+nx}{2}\right|}{(t+n)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t=0.$$

[10]视 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1$ 为乘积测度.

现在我们知道

$$\int_1^{\infty} b_1(t)\frac{\cos(tx)-1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = o(x) \Rightarrow \int_1^{\infty} b_1(t)\frac{\cos(tx)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \int_1^{\infty}\frac{b_1(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t + o(x). \tag{30.32}$$

由(30.31)和一致收敛的 A-D 判别法, 我们有 $\int_1^{\infty} b_1(t)\frac{\sin(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1)$ 一致收敛, 从而

$$\lim_{x\to 0^+}\int_1^{\infty} b_1(t)\frac{\sin(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \int_1^{\infty}\lim_{x\to 0^+} b_1(t)\frac{\sin(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = 0,$$

故

$$x\int_1^{\infty} b_1(t)\frac{\sin(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = o(x). \tag{30.33}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}\sin t = \frac{\sin x}{x^{\alpha}} + \alpha\int_0^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\\ &= x^{1-\alpha} + O\left(x^{3-\alpha}\right) + \alpha\int_0^x\left(\frac{1}{t^{\alpha}} + O\left(t^{2-\alpha}\right)\right)\mathrm{d}t\\ &= x^{1-\alpha} + O\left(x^{3-\alpha}\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha}x^{1-\alpha} + O\left(x^{3-\alpha}\right)\\ &= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O\left(x^{3-\alpha}\right),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{\cos(tx)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t &= x^{\alpha-1}\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = x^{\alpha-1}\left(\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t - \int_0^x\frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t\right)\\ &= x^{\alpha-1}\left(\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O\left(x^{3-\alpha}\right)\right)\\ &= x^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t - \frac{1}{1-\alpha} + O\left(x^2\right).\end{aligned}$$

结合上式, (30.32),(30.33)和 $\cos x = 1 + O\left(x^2\right)$ 就有 $A, B \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{A}{x^{1-\alpha}} - B\right) = 0.$$

42. (42.) 这是 Laplace 方法9.3的标准习题, 注意到 $1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2} + o\left(\theta^2\right)$, 我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda(1-\cos\theta)}\mathrm{d}\theta = \lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}\theta^2}\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-\theta^2}\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

43. (43.) 先断言

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m C_n^k = 0, \forall n > m. \tag{30.34}$$

反复求导得

$$\begin{aligned}(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k &\Rightarrow n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}\\ &\Rightarrow nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k\\ &\Rightarrow n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1}\\ &\Rightarrow n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k\\ &\vdots,\end{aligned}$$

代入 $x=-1$ 得(30.34). 显然(9.149)对线性运算封闭, 因此对一切多项式 p 都有(9.149)成立.

现在当 $f=x^m, m\in\mathbb{N}_0$, 由(30.34)知(9.149)成立. 注意到

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\sup_{[0,1]}|f|\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k=\sup_{[0,1]}|f|,$$

由章节9.4的 Friedrichs mollifier technique 和 SW 定理13.45我们知道对所有 $f\in C[0,1]$ 都有(9.149)成立.

44. (44.) 首先

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{\sum_{k=2}^{n}x_{k-1}}{n-1}=0.$$

记

$$m_n=\sup\left\{1\leqslant s\leqslant n:x_s=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}x_k\right\}.$$

如果 x_n 无上界, 则显然有 $\lim_{n\to\infty}m_n=+\infty$. 此时

$$\begin{aligned}0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}{n^p}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^{p-1}x_1+x_2^{p-1}x_2+...+x_n^{p-1}x_n}{n^p}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{x_{m_n}^{p-1}}{m_n^{p-1}}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=0.\end{aligned}$$

若 x_n 有上界 M, 则

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}{n^p}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{M^{p-1}}{n^{p-1}}\frac{x_1+x_2...+x_n}{n}=0,$$

于是我们完成了证明.

45. (45.) 首先有

$$\begin{aligned}&\left|n^2\left(\int_0^1\sqrt[n]{f(x^n)}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)-g(1)\int_0^1\frac{\ln f(x)}{x}\mathrm{d}x\right|\\&=n^2\int_0^1\left(\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right)(g(x)-g(1))\,\mathrm{d}x+g(1)\left[n^2\int_0^1\left(\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln f(x)}{x}\mathrm{d}x\right]\\&=A_n+g(1)B_n,\end{aligned}$$

可积必有界有 $M>0$ 使得

$$\left|\frac{\ln f(x)}{x}\right|\leqslant M,\forall x\in[0,1].$$

然后对任何 $\delta\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}|A_n|&\leqslant n^2\int_0^{1-\delta}\left|\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right|\cdot|g(x)-g(1)|\,\mathrm{d}x+n^2\int_{1-\delta}^1\left|\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right|\cdot|g(x)-g(1)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g(1)|\,n^2\int_0^{1-\delta}\left|\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right|\mathrm{d}x+n^2\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_{1-\delta}^1\left|\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right|\mathrm{d}x\\&=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g(1)|\,n\int_0^{(1-\delta)^n}\left|e^{\frac{\ln f(y)}{n}}-1\right|y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y+n\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_{(1-\delta)^n}^1\left|e^{\frac{\ln f(y)}{n}}-1\right|y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\\&\overset{✠}{\leqslant}\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g(1)|\,n\int_0^{(1-\delta)^n}\left(e^{\frac{|\ln f(y)|}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y+n\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\int_{(1-\delta)^n}^1\left(e^{\frac{|\ln f(y)|}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\\&\leqslant\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g(1)|\,n\int_0^{(1-\delta)^n}\left(e^{\frac{My}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y+n\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_{(1-\delta)^n}^1\left(e^{\frac{My}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\\&\overset{★}{\leqslant}\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g(1)|\,n\left(e^{\frac{M(1-\delta)^n}{n}}-1\right)\int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y+n\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\int_0^1 2\frac{My}{n}y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\\&=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g(1)|\,n^2\left(e^{\frac{M(1-\delta)^n}{n}}-1\right)+2M\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

这里 ✠ 来自 $|e^t-1|\leqslant e^{|t|}-1,\forall t\in\mathbb{R}$, ★ 来自当 $t\geqslant 0$ 充分小的时候必有 $e^t-1\leqslant 2t$. 现在

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|A_n|\leqslant 2M\sup_{x\in[1-\delta,1]}|g(x)-g(1)|.$$

由 δ 任意性和 g 在 1 连续有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|A_n|=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}A_n=0$.

又

$$n^2\int_0^1\left(\sqrt[n]{f(x^n)}-1\right)\mathrm{d}x=n\int_0^1\left(e^{\frac{\ln f(y)}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y,$$

类似之前的放缩, 有

$$\begin{aligned}n\int_0^1\left|e^{\frac{\ln f(y)}{n}}-1\right|y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y&\leqslant n\int_0^1\left(e^{\left|\frac{\ln f(y)}{n}\right|}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\leqslant n\int_0^1\left(e^{\frac{My}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\\&\leqslant 2n\int_0^1\frac{My}{n}y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y\leqslant 2M\int_0^1 1\mathrm{d}y<\infty.\end{aligned}$$

用控制收敛定理[11], 我们有

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left(e^{\frac{\ln f(y)}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y=\int_0^1\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{\ln f(y)}{n}}-1\right)y^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\ln f(y)}{y}\mathrm{d}y,$$

这就证明了(9.150).

46. (46.) 初等不等式表明

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}=e^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\geqslant e^{-x},\forall x>0,n\in\mathbb{N}.$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}-e^{-x}\right]=0,\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}-e^{-x}\right]|_{x=0}=0.$$

故 $\left|e^{-x}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\right|$ 在 $x_n\in(0,+\infty)$ 取得最大值, 因此

$$\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}-e^{-x}\right]'=-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1}+e^{-x}\Rightarrow\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{-n-1}=e^{-x_n}.$$

注意到

$$n\left|e^{-x_n}-\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{-n}\right|=n\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{-n-1+1}-e^{-x_n}\right]=x_ne^{-x_n}.$$

现在 $e^{\frac{x_n}{n+1}}-1-\frac{x_n}{n}=0$, 初等数学求导计算表明

$$e^{\frac{x}{n+1}}-1-\frac{x}{n}>0,\forall x>3,n\geqslant 1,$$

于是 $0<x_n<3$.

若 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=0$ 或者 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty}n_k\max_{x>0}\left|e^{-x}-\left(1+\frac{x}{n_k}\right)^{-n_k}\right|=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}e^{-x_{n_k}}=0.$$

但是

$$\lim_{k\to\infty}\left[n_k\max_{x>0}\left|e^{-x}-\left(1+\frac{x}{n_k}\right)^{-n_k}\right|\right]\geqslant\lim_{k\to\infty}n_k\left[\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{-n_k}-e^{-1}\right]=\frac{1}{2e}>0,$$

这就是一个矛盾! 故 x_n 是有正下界和上界的数列.

现在

$$e^{\frac{x_n}{n+1}}=1+\frac{x_n}{n}=1+\frac{x_n}{n+1}+\frac{x_n^2}{2(n+1)^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),n\to\infty,$$

于是

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{x_n}{2(n+1)^2}+O\left(\frac{1}{n^3x_n}\right),n\to\infty,$$

[11] 也可以类似 A_n 的极限作分段估计, 留给读者思考.

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2(n+1)^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} n\max_{x>0}\left|e^{-x}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\right| = \lim_{n\to\infty} x_n e^{-x_n} = \frac{2}{e^2}.$$

47. (47.) 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = +\infty$, 故不妨设 $c=-1$, 否则用 $-cx_n$ 代替 x_n.

注意到当 $c\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, 有 $x+c^x$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

考虑

$$a_1>1,\ a_{n+1}=a_n+c^{a_n},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^{-a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^{-a_{n+1}}-c^{-a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{c^{a_n}}{c^{-c^{a_n}}-1} = \frac{1}{\ln\frac{1}{c}}.$$

回到原题, 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_{n+1}}{\ln x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}}{S_n}\right) = 1 \Longrightarrow \ln x_{n+1} = (-1+o(1))S_n \Longrightarrow S_{n+1} = S_n + \left(e^{-1}+o(1)\right)^{S_n}.$$

对任何 $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{1}{2}-e^{-1}, e^{-1}-\frac{1}{3}\right\}$, 存在 $N\geqslant 1$ 使得

$$\frac{1}{3}<e^{-1}-\varepsilon<e^{-1}+o(1)<e^{-1}+\varepsilon<\frac{1}{2},\ S_n>1, \forall n\geqslant N.$$

定义

$$\begin{aligned} H_N^{\varepsilon}=S_N,\ H_{n+1}^{\varepsilon}=H_n^{\varepsilon}+\left(e^{-1}+\varepsilon\right)^{H_n^{\varepsilon}}, \forall n\geqslant N \\ h_N^{\varepsilon}=S_N,\ h_{n+1}^{\varepsilon}=h_n^{\varepsilon}+\left(e^{-1}-\varepsilon\right)^{h_n^{\varepsilon}}, \forall n\geqslant N \end{aligned}.$$

利用单调性, 归纳可证

$$h_n^{\varepsilon}\leqslant S_n\leqslant H_n^{\varepsilon},\ \forall n\geqslant N,$$

这给出了

$$\frac{1}{\ln\frac{1}{e^{-1}-\varepsilon}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{h_n^{\varepsilon}}{\ln n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{H_n^{\varepsilon}}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln\frac{1}{e^{-1}+\varepsilon}}.$$

至此, 我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{S_n}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n} = -1.$$

48. (48.) 由均值不等式, 我们有

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1. \tag{30.35}$$

当 $a_n\geqslant 1, n\in\mathbb{N}$, 注意到 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$, 于是在任何 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 上 $\frac{x-1}{\ln x}$ 是有界函数. 现在由极限条件可设数列 $\{a_n\}\subset[a,b]\subset[1,+\infty)$, 有 $C>0$ 使得 $a_n\leqslant 1+C\ln a_n, \forall n\in\mathbb{N}$, 因此

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left(1+C\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right) \\ &= 1+C\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)=1. \end{aligned}$$

因此由夹逼准则得(9.151).

一般情况注意到如果我们考虑 $\widehat{a_n} \triangleq \max\{a_n, 1\}$, 则 $a_n \leqslant \widehat{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. 对任何 $N \in \mathbb{N}$, 我们有

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\widehat{a_1}\widehat{a_2}\cdots\widehat{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j}{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n, a_j<1} a_j}}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j}{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant N, a_j<1} a_j}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n} a_j}{\inf\limits_{j>N} a_j^{n-N}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\inf\limits_{j>N} a_j\right)^{1-\frac{N}{n}}} = 1,$$

这里最后一个等号来自

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{j>N} a_j = \varliminf_{n\to\infty} a_n = 1.$$

现在由 $a_n \geqslant 1$ 情况可得一般情况有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\widehat{a_1}\widehat{a_2}\cdots\widehat{a_n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{a_1} + \widehat{a_2} + \cdots + \widehat{a_n}}{n} = 1.$$

利用(30.35)和

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{a_1} + \widehat{a_2} + \cdots + \widehat{a_n}}{n} = 1$$

知也有(9.151)成立, 我们完成了证明.

49. (49.) 事实上, 如果我们证明了

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin(p(y))| \,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}. \tag{30.36}$$

直接由黎曼引理9.6知(9.152)成立.

不妨设 p 首系数为正, 设 $x_0 = k\pi > 0, k \in \mathbb{N}$ 充分大使得 p 在 $[x_0, +\infty)$ 严格递增. 则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin(p(y))| \,\mathrm{d}y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x |\sin(p(y))| \,\mathrm{d}y$$

$$\overset{y=p^{-1}(z)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_{p(x_0)}^{p(x)} |\sin z| \frac{1}{p'(p^{-1}(z))} \mathrm{d}z = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{p^{-1}(t)} \int_{x_0}^t |\sin z| \frac{1}{p'(p^{-1}(z))} \mathrm{d}z$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{p^{-1}(t)} \int_{k\pi}^t \frac{|\sin z|}{p'(p^{-1}(z))} \mathrm{d}z \overset{\text{函数 Stolz13.10}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_t^{t+\pi} \frac{|\sin z|}{p'(p^{-1}(z))} \mathrm{d}z}{p^{-1}(t+\pi) - p^{-1}(t)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^{\pi} \frac{|\sin z|}{p'(p^{-1}(z+t))} \mathrm{d}z}{p^{-1}(t+\pi) - p^{-1}(t)} \overset{\text{分母}z\text{放大放小为积分上下限}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{p'(p^{-1}(t))} \int_0^{\pi} |\sin z| \,\mathrm{d}z}{p^{-1}(t+\pi) - p^{-1}(t)}$$

$$= 2 \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{p'(p^{-1}(t))}}{p^{-1}(t+\pi) - p^{-1}(t)} \overset{\text{拉中保持阶不变}}{=} 2 \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{p'(p^{-1}(t))}}{\pi \frac{1}{p'(p^{-1}(t))}} = \frac{2}{\pi},$$

这就证明了(30.36). 因此(9.152)成立.

50. (50.) 由 $\epsilon(n)$ 定义, 对 $n \geqslant 2$, 我们有

$$1 \leqslant \sum_{k=n}^{\epsilon(n)} \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{\epsilon(n)}, \epsilon(n) \geqslant n+1.$$

注意到

$$1 + \frac{1}{\epsilon(n)} > \sum_{k=n}^{\epsilon(n)} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n}^{\epsilon(n)} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \int_n^{\epsilon(n)+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln \frac{\epsilon(n)+1}{n};$$

$$1 \leqslant \sum_{k=n}^{\epsilon(n)} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n}^{\epsilon(n)} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \int_{n-1}^{\epsilon(n)} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln \frac{\epsilon(n)}{n-1},$$

我们有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \ln \frac{\epsilon(n)+1}{n} \leqslant 1, \varliminf_{n\to\infty} \ln \frac{\epsilon(n)}{n-1} \geqslant 1,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\epsilon(n)}{n}=e$.

51. (51.) 断言 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 存在. 首先利用条件不等式对 n 归纳得 $a_{mn}\leqslant c_m a_n+\frac{k_m}{n},\forall m\geqslant 1$, 这里

$$k_m=\begin{cases}0 & m=1\\ 2 & m=2\\ m+\sum\limits_{j=2}^{m-1}\frac{1}{j-1} & m>2\end{cases},c_m=m,m=1,2,\cdots.$$

故定好 $m\geqslant 1$, 我们对 $n=mk+r,r=0,1,2,...,m-1$ 有

$$\begin{aligned}\frac{a_{mk+r}}{mk+r}&\leqslant\frac{a_{mk}}{mk+r}+\frac{a_r}{mk+r}+\frac{1}{mk\left(mk+r\right)}+\frac{1}{\left(mk+r\right)r}\\&\leqslant\frac{ka_m+\frac{k_k}{m}}{mk+r}+\frac{a_r}{mk+r}+\frac{1}{mk\left(mk+r\right)}+\frac{1}{r\left(mk+r\right)},\end{aligned}$$

故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\leqslant\lim_{k\to\infty}(\frac{ka_m+\frac{k_k}{m}}{mk+r}+\frac{a_r}{mk+r}+\frac{1}{mk\left(mk+r\right)}+\frac{1}{\left(mk+r\right)r})=\frac{a_m}{m}+\frac{1}{m^2}.$$

这里用到了例题8.6, 故对 m 取下极限有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}.$$

极限的有限性已经蕴含在证明中, 我们完成了证明.

52. (52.) 注意到

$$\left(e^{-x}x^k\right)'=\left(k-x\right)x^{k-1}e^{-x},$$

于是利用单调性, 一方面

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{k}e^{-n}n^k\right)&\geqslant\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{k}\int_{n-1}^{n}e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\int_0^k e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k!}\int_k^\infty e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{k^{k+1}}{k!}\int_1^\infty e^{-kx}x^k\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{k^{k+1}}{k!e^k}\int_1^\infty e^{-k(x-\ln x-1)}\mathrm{d}x\right)\overset{\text{Laplace 方法}}{=}\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{k^{k+1}e^{-k}}{k!}\int_0^\infty e^{-\frac{kx^2}{2}}\mathrm{d}x\right)\\&=1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^{k+1}e^{-k}}{k!}\cdot\sqrt{\frac{2}{k}}\right)\overset{\text{斯特林公式9.4}}{=}1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{k}e^{-n}n^k\right)&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k-1}e^{-n}n^k\right)\leqslant\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k-1}\int_n^{n+1}e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\int_0^k e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{k}e^{-n}n^k\right)=\frac{1}{2}.$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}e^{-n}n^k\right)&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}e^{-n}n^k\right)\geqslant\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\int_k^\infty e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

以及

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}e^{-n}n^k\right)\leqslant\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\int_{k}^{\infty}e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}.$$

我们由夹逼准则得

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}e^{-n}n^k\right)=\frac{1}{2}.$$

因此我们证明了(9.153).

53. (53.) 首先我们注意到

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

这是因为考虑递推 $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n},x_1=x$, 由递增递推的结论8.4.1知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
现在注意到

$$\frac{n^n}{n!}<1.11^{2^n},n\geqslant 5.$$

我们有

$$\sqrt{\frac{1^1}{1!}+\sqrt{\frac{2^2}{2!}+\cdots+\sqrt{\frac{n^n}{n!}}}}\leqslant\sqrt{\frac{1^1}{1!}+\sqrt{\frac{2^2}{2!}+\sqrt{\frac{3^3}{3!}+\sqrt{\frac{4^4}{4!}+\sqrt{1.11^{2^5}+\sqrt{1.11^{2^6}+\cdots+\sqrt{1.11^{2^n}}}}}}}}$$
$$=\sqrt{\frac{1^1}{1!}+\sqrt{\frac{2^2}{2!}+\sqrt{\frac{3^3}{3!}+\sqrt{\frac{4^4}{4!}+1.11^{2^4}\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}}}\leqslant\sqrt{\frac{1^1}{1!}+\sqrt{\frac{2^2}{2!}+\sqrt{\frac{3^3}{3!}+\sqrt{\frac{4^4}{4!}+1.11^{2^4}\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}}}$$
$$\approx 1.79774853<\frac{9}{5}=1.8.$$

54. (54.) 若(9.154)不成立, 则存在 $q\in(0,1)$ 和 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<q,\forall n\geqslant N.$$

因为有限项不影响极限, 所以我们不妨设 $N=1$, 于是对 $n\geqslant 2$ 有

$$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<q\Rightarrow x_{n+1}<\left(1+\frac{q}{n}\right)x_n-1$$
$$\Rightarrow\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}x_{n+1}<\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}x_n-\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}.$$

求和得

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}\cdot x_{m+1}<\frac{1}{1+q}x_2-\sum_{n=2}^{m}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{q}{k}},$$

即

$$x_{m+1}<\frac{1}{1+q}\frac{x_2}{\prod\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}}-\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{q}{k}\right)\cdot\sum_{n=2}^{m}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}.$$

由例题8.6, 注意到

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{1}{1+\frac{q}{k}}}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{q}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)}\sim\frac{C}{n^q},n\to\infty.$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{q}{k}\right)\cdot\sum_{n=2}^{m}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}=+\infty.$$

结合 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{1+q}\frac{x_2}{\prod\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{q}{k}}}=0$, 当 m 充分大有 $x_m<0$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了(9.154).

55. (55.) 一方面, 对任何 $x\in(0,\frac{1}{2})$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}&=\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{1}{x}+1}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}+\sum_{n>\frac{1}{x}+1}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\leqslant x\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{1}{x}+1}\frac{1}{n}+\sum_{n>\frac{1}{x}+1}\frac{1}{n^2}\\&\leqslant x+x\sum_{2\leqslant n\leqslant\frac{1}{x}+1}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n>\frac{1}{x}+1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\leqslant x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\frac{1}{x}}\\&=2x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

从而

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}\frac{1}{x\ln\frac{1}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\leqslant\overline{\lim_{x\to0^+}}\frac{2x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\ln\frac{1}{x}}=1.$$

另外一方面对任何 $\delta\in(0,1),x\in(0,\delta)$ 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}&\geqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{\delta}{x}}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}=x\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{\delta}{x}}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{|\sin(nx)|}{nx}\right)\geqslant x\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{\delta}{x}}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin\delta}{\delta}\right)\\&\geqslant\frac{x\sin\delta}{\delta}\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{\delta}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geqslant\frac{x\sin\delta}{\delta}\ln\left(\frac{\delta}{x}\right),\end{aligned}$$

从而

$$\underline{\lim_{x\to0^+}}\frac{1}{x\ln\frac{1}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\geqslant\underline{\lim_{x\to0^+}}\frac{\sin\delta}{\delta}\frac{\ln\left(\frac{\delta}{x}\right)}{\ln\frac{1}{x}}=\frac{\sin\delta}{\delta}.$$

由 δ 任意性得

$$\underline{\lim_{x\to0^+}}\frac{1}{x\ln\frac{1}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)|}{n^2}\geqslant1.$$

因此我们得到了(9.155).

56. (56.) 由 Laplce 方法9.3我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^n\mathrm{d}x&=\int_0^1e^{n\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}\mathrm{d}x\sim\int_0^{\infty}e^{-\frac{nx}{2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{n},n\to\infty,\\\int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n x\mathrm{d}x&=\int_0^1e^{n\ln\frac{\sin x}{x}}x\mathrm{d}x\sim\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{6}n}x\mathrm{d}x=\frac{3}{n},n\to\infty.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n x\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{3}{n}}=\frac{2}{3}.$$

57. (57.) 利用不等式[12]$\ln\cos x\leqslant\frac{x^2}{2},\forall x\in[0,1]$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{n\ln\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}\chi_{\{1,2,\cdots,n\}}(k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{2}}<\infty.$$

于是由级数的控制收敛定理18.16得

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}e^{n\left(\cos\sqrt{\frac{k}{n}}-1\right)}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}-1}.$$

[12]求导可以证明, 由 Taylor 公式猜出.

(∗) 为了求更高的阶, 注意到

$$\ln\cos\sqrt{x}=-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right),x\to0^+. \tag{30.37}$$

相似习题29., 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^n\sqrt{\frac{k}{n}}\sim\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\cos\sqrt{\frac{k}{n}}}\sim\sum_{k=1}^{\infty}e^{n\left(-\frac{k}{2n}-\frac{k^2}{12n^2}\right)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{12n}\right)e^{-\frac{k}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}-1}-\frac{e+\sqrt{e}}{12\left(\sqrt{e}-1\right)^3}\frac{1}{n},n\to\infty,$$

即得

$$A=\frac{1}{\sqrt{e}-1},B=-\frac{e+\sqrt{e}}{12\left(\sqrt{e}-1\right)^3}.$$

58. (58.) 换元并分部积分得

$$\int_0^{\infty}\frac{\left|\sin\left(ny\right)\right|}{y}\cdot e^{-ny^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}\int_0^{y}\frac{\left|\sin x\right|}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\int_0^{\infty}\left(y\int_0^{y}\frac{\left|\sin x\right|}{x}\mathrm{d}x\right)e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y.$$

考虑 $F\left(y\right)\triangleq y\int_0^{y}\frac{\left|\sin x\right|}{x}\mathrm{d}x$, 由例8.56得

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{F\left(y\right)}{y\ln y}=\frac{2}{\pi}. \tag{30.38}$$

注意积分等式

$$\int_0^{\infty}y\ln ye^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y=\frac{n}{4}\left(\ln n-\gamma\right).$$

对任何 $A>1$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\int_0^{A}F\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y=0,\lim_{n\to\infty}\int_0^{A}y\ln ye^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y=0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n\ln n}\int_A^{\infty}F\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sup\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{n\ln n}\int_A^{\infty}y\ln ye^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y\\&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sup\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{n\ln n}\int_0^{\infty}y\ln ye^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\sup\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{n\ln n}\cdot\frac{n}{4}\left(\ln n-\gamma\right)\right)\\&=\frac{\sup\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{4},\end{aligned}$$

即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n\ln n}\int_0^{\infty}F\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{4}\sup_{y\geqslant A}\frac{F\left(y\right)}{y\ln y}. \tag{30.39}$$

类似的,

$$\begin{aligned}&\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n\ln n}\int_A^{\infty}F\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\inf\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{n\ln n}\int_A^{\infty}y\ln ye^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y\\&=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\inf\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{n\ln n}\int_0^{\infty}y\ln ye^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\inf\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{n\ln n}\cdot\frac{n}{4}\left(\ln n-\gamma\right)\right)\\&=\frac{\inf\limits_{y\geqslant A}\frac{F(y)}{y\ln y}}{4},\end{aligned}$$

即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n\ln n}\int_0^{\infty}F\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y\geqslant\frac{1}{4}\inf_{y\geqslant A}\frac{F\left(y\right)}{y\ln y}.$$

由 A 任意性和(30.39)以及(30.38)得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^\infty\frac{|\sin(ny)|}{y}e^{-ny^2}\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n\ln n}\int_0^\infty F(y)\,e^{-\frac{y^2}{n}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}.$$

59. (59.)

(a). 注意 f_1,f_2 都有唯一不动点 3 并成立

$$|f_k(x)-f_k(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|,k=1,2.$$

于是对每一个 $k\in\mathbb{N}$ 都有

$$\begin{aligned}|F_k(x)-3|&=|f_{n_1}\circ f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_k}(x)-f_{n_1}\circ f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_k}(3)|\\&\leqslant\frac{1}{2}|f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_k}(x)-f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_k}(3)|\\&\leqslant\frac{1}{2^2}|f_{n_3}\circ\cdots\circ f_{n_k}(x)-f_{n_3}\circ\cdots\circ f_{n_k}(3)|\\&\vdots\\&\leqslant\frac{1}{2^k}|x-3|,\end{aligned}$$

即得 $\lim\limits_{k\to+\infty}F_k(x)=3$.

(b). 注意到 f_1,f_2 有唯一不动点 0 且

$$f_1'(t)=\frac{t^2}{1+t^2},f_2'(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sup_{\mathbb{R}}|f_1'|=\sup_{\mathbb{R}}|f_2'|=1.$$

思路的突破口就是想办法离开 $t=0$ 来得到导数严格小于 1 的上界. 现在我们有

$$|f_k(t)|\leqslant|t|,k=1,2,\tag{30.40}$$

假定对某个 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$|F_{m_k}(x)|\geqslant\delta>0,m_{k+1}>m_k\geqslant1,k\in\mathbb{N}.$$

我们有

$$c\triangleq\max\left\{\sup_{[\delta,|x|]}|f_1'|,\sup_{[\delta,|x|]}|f_2'|\right\}\in(0,1).$$

因此由拉格朗日中值定理得

$$|f_k(s)-f_k(t)|\leqslant c|s-t|,\forall s,t\in[\delta,|x|].\tag{30.41}$$

现在对每一个 $k\in\mathbb{N}$ 运用(30.40)都有

$$\delta\leqslant\left|f_{n_1}\circ f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}(x)\right|\leqslant\left|f_{n_j}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}(x)\right|\leqslant|x|,\forall j=1,2,\cdots,m_k.$$

然后利用(30.41)有

$$\begin{aligned}|F_{m_k}(x)|&=\left|f_{n_1}\circ f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}(x)\right|\\&\leqslant c\left|f_{n_2}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}(x)\right|\\&\leqslant c^2\left|f_{n_3}\circ\cdots\circ f_{n_{m_k}}(x)\right|\\&\vdots\\&\leqslant c^{m_k}|x|,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{k\to+\infty}F_{m_k}(x)=0$, 这就是一个矛盾! 因此我们完成了证明.

60. (60.) 注意到 $\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}$ 在 $[0,+\infty)$ 光滑且严格递增, 故存在反函数 $\varphi\in C^\infty(0,+\infty)$. 隐函数求导公式表明

$$\varphi'(y)=\frac{1}{\varphi^3(y)+\varphi^5(y)},y>0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^{x_0} x^{2i}\left[h-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}\right)\right]^{\frac{2j+1}{2n+2}}\mathrm{d}x=\int_0^h \varphi^{2i}(y)\,\varphi'(y)\,[h-y]^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}y\\&=h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}}\int_0^1 \varphi^{2i}(hy)\,\varphi'(hy)\,[1-y]^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}y=h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}}\int_0^1 \frac{\varphi^{2i}(hy)}{\varphi^3(hy)+\varphi^5(hy)}\,[1-y]^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}y\\&=4h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}}\int_0^1 \frac{\varphi^{2i}\left(hz^4\right)}{\varphi^3\left(hz^4\right)+\varphi^5\left(hz^4\right)}z^3\left(1-z^4\right)^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

注意到

$$g(x)\triangleq\frac{x^{2i}}{x^3+x^5}=\frac{x^{2i-3}}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+2i-3},x\in(0,1).$$

由拉格朗日反演9.14得

$$\varphi(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left(\frac{\zeta}{\left(\frac{\xi^4}{4}+\frac{\xi^6}{6}\right)^{\frac14}}\right)^k\right]_{\xi=0}y^{\frac{k}{4}}=\sqrt{2}y^{\frac14}-\frac{\sqrt{2}}{3}y^{\frac34}+\cdots,y\to0^+,$$

我们简单记为

$$f(y)\triangleq\varphi\left(y^4\right)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k y^{2k-1},y\to0^+.$$

现在考虑复合函数 Taylor 展开得

$$g(f(y))=(c_1y)^{2i-3}+\cdots=\left(\sqrt{2}\right)^{2i-3}y^{2i-3}+\cdots,y\to0^+,$$

于是

$$\begin{aligned}&4h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}}\int_0^1 \frac{\varphi^{2i}\left(hz^4\right)}{\varphi^3\left(hz^4\right)+\varphi^5\left(hz^4\right)}z^3\left(1-z^4\right)^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}z\\&=4h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}}\int_0^1 g\left(f\left(h^{\frac14}z\right)\right)z^3\left(1-z^4\right)^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}z\\&=4\left(\sqrt{2}\right)^{2i-3}h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}}\int_0^1 h^{\frac{2i-3}{4}}z^{2i-3}z^3\left(1-z^4\right)^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}z+\cdots\\&=4\left(\sqrt{2}\right)^{2i-3}h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}+\frac{2i-3}{4}}\int_0^1 z^{2i}\left(1-z^4\right)^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}z+o\left(h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}+\frac{2i-3}{4}}\right)\\&=\left(\sqrt{2}\right)^{2i-3}h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}+\frac{2i-3}{4}}\int_0^1 y^{\frac{i}{2}-\frac34}(1-y)^{\frac{2j+1}{2n+2}}\,\mathrm{d}y+o\left(h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}+\frac{2i-3}{4}}\right)\\&=\left(\sqrt{2}\right)^{2i-3}h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}+\frac{2i-3}{4}}\beta\left(\frac{i}{2}+\frac14,\frac{2j+2n+3}{2n+2}\right)+o\left(h^{\frac{2j+2n+3}{2n+2}+\frac{2i-3}{4}}\right),h\to0^+.\end{aligned}$$

对于更高阶的情况, 复合展开 $g(f(y))$ 阶数越多, 就可以得到任意阶渐近展开, 显然这无初等表达式.

61. (61.)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n C_n^k\int_0^1(-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x-\ln n\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\sum_{k=1}^n C_n^k(-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}\mathrm{d}x-\ln n\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}(1-x)^j\,\mathrm{d}x-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1(1-x)^j\,\mathrm{d}x-\ln n\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}-\ln n\right]\overset{\text{例题8.6}}{=}\gamma.\end{aligned}$$

62. (62.) **Step 1**

首先

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{t}\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^x\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t\right)=0,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 $\lim\limits_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)=0$ 和黎曼引理9.2.

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1,\forall x\in(0,\pi).$$

Step 2

注意到 $S_n'(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}$, 我们有 $S_n(x)$ 在 $\left(\frac{2k\pi}{2n},\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),k=0,1,2,\cdots,n-1$ 递增, $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n},\frac{(2k+2)\pi}{2n}\right),k=0,1,2,\cdots,n-1$ 递减, 从而只需要比较

$$S_n\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),k=0,1,2,\cdots,n-1$$

的大小. 现在

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{(2j+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2j+2)\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t+\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{(2j+2)\pi}{2n}}^{\frac{(2j+3)\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{(2j+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2j+2)\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t-\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{(2j+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2j+2)\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{(2j+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2j+2)\pi}{2n}}\left[\sin(2nt)\cdot\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}\right)\right]\mathrm{d}t\geqslant0,\end{aligned}$$

从而 $S_n(x)$ 最大值点是 $\frac{\pi}{2n}$.

Step 3

首先

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin(2nt)}{\sin t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\int_0^\pi\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi\frac{x\sin t}{\sin(tx)}\mathrm{d}t.$$

然后

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{x\to0^+}\left|\int_0^\pi\frac{x\sin t}{\sin(tx)}\mathrm{d}t-\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to0^+}\int_0^\pi\left|\frac{x}{\sin(tx)}-\frac{x}{tx}\right|\cdot|\sin t|\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{x\to0^+}x\int_0^\pi\left|\frac{tx-\sin(tx)}{tx\sin(tx)}\right|\cdot|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\sup_{y\in[0,1]}\left|\frac{y-\sin y}{y\sin y}\right|\lim_{x\to0^+}x\int_0^\pi1\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

于是由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

63. (63.) 一方面

$$\left|\sum_{n=1}^m(-1)^{n-1}\right|\leqslant1,\forall m\in\mathbb{N}.$$

另外一方面, 对每一个 $x\in(0,1)$, 我们有 $\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}=\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}$ 关于 n 递减. 我们还有

$$0\leqslant\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\leqslant\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}\leqslant\frac{x^n}{n\cdot x^n}=\frac{1}{n}.$$

故关于 $x\in(0,1]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)\,x^n}{1-x^{2n}}=0.$$

因此由 A-D 判别法我们知道原级数在 $(0,1]$ 一致收敛, 于是

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\,x^n}{1-x^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}=\frac{\ln 2}{2}.$$

64. (64.) 注意到

$$0\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y<1,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)=1.$$

类似 Laplace 方法9.3并利用

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}xe^{x^2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y-1\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y-1}{\frac{1}{xe^{x^2}}}\\&\overset{\text{洛必达}}{=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}-2\right)e^{-x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^n}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{e^{n\ln\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)}}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}xe^{x^2}}}}{x^2}\mathrm{d}x\overset{xe^{x^2}=y}{=}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}y}}}{x^2}\frac{1}{(1+2x^2)\,e^{x^2}}\mathrm{d}y\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}y}}}{y}\frac{1}{x\,(1+2x^2)}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

当 $y\to+\infty$, 我们用迭代法研究 $xe^{x^2}=y$ 中 x 的阶. 注意到当 y 充分大有

$$1<x^2=\ln y-\ln x\leqslant\ln y\Rightarrow1<x\leqslant\sqrt{\ln y},$$

即

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{x^2}{\ln y}=1-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln y}=1,$$

这里用到了

$$0<\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln y}\leqslant\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{\ln y}}{\ln y}=0.$$

现在

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}y}}}{y}\frac{1}{x\,(1+2x^2)}\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_2^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}y}}}{2y\ln^{\frac{3}{2}}y}\mathrm{d}y\\&=-\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_2^{\infty}e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}y}}\mathrm{d}\ln^{-\frac{1}{2}}y=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_2^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}y^2}\frac{e^{-\frac{n}{\sqrt{\pi}y}}}{\sqrt{\ln y}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln n}\int_{\frac{2}{n}}^{\infty}\frac{1}{y^2}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\pi}y}}}{\sqrt{\ln n+\ln y}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\pi}y}}}{y^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{\sqrt{\ln n+\ln y}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{\pi}y}}}{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2}\mathrm{d}y=1,\end{aligned}$$

也即(9.156)成立.

65. (65.)**Method 1**

对固定的 $z=x+iy\in\mathbb{C}$, 当 n 充分大时 $1+\frac{z}{n}$ 在 1 附近, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\arg\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(n\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{y}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)=y.\end{aligned}$$

此外

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2}\ln\left[1+\frac{x^2+y^2}{n^2}+\frac{2x}{n}\right]}$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n}\right)}=e^x.$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z.$$

Method 2

取 $\ln(1+z)$ 的一个定义在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$ 的单值解析分支使得其在正实轴上为正数, 则对固定的 $z\in\mathbb{C}$, 当 n 充分大有 $\frac{z}{n}\notin(-\infty,-1]$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)}\overset{\text{Taylor 公式}}{=}\lim_{n\to\infty}e^{n\left(\frac{z}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^z.$$

66. (66.) 我们证明 $c=-\frac{1}{2}$. 首先设 $t=\frac{1}{1-x}$, 我们有

$$-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\leqslant\ln x\leqslant-\frac{1}{t},\forall x\in(0,1)\,. \tag{30.42}$$

当 $a>c$, 我们利用(30.42)有

$$\begin{aligned}F_a(x)\,e^{-t}&=\sum_{n=1}^{\infty}n^ae^{2n-t}e^{n^2\ln x}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^ae^{2n-t}e^{-\frac{n^2}{t}-\frac{n^2}{t^2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n^ae^{-\frac{n^2}{t^2}}e^{-t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2}\geqslant\sum_{t<n<t+\sqrt{t}}n^ae^{-\frac{n^2}{t^2}}e^{-t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2}\\&\geqslant\sum_{t<n<t+\sqrt{t}}n^ae^{-\frac{(t+\sqrt{t})^2}{t^2}}=e^{-\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}\sum_{t<n<t+\sqrt{t}}n^a\\&\sim e^{-1}\int_t^{t+\sqrt{t}}x^a\mathrm{d}x\sim e^{-1}t^{a+\frac{1}{2}},t\to+\infty,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x\to1^-}F_a(x)\,e^{-\frac{1}{1-x}}=+\infty.$$

当 $a<c$, 我们继续利用(30.42)有

$$F_a(x)\,e^{-t}=\sum_{n=1}^{\infty}n^ae^{2n-t}e^{n^2\ln x}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^ae^{2n-t}e^{-\frac{n^2}{t}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^ae^{-t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2}.$$

取 $\epsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使得 $a+\epsilon<-\frac{1}{2}$, 我们有

$$\sum_{t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}<n<t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}n^ae^{-t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2}\leqslant\sum_{t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}<n<t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}n^a\sim\int_{t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}^{t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}x^a\mathrm{d}x\sim2t^{a+\frac{1}{2}+\epsilon},t\to+\infty,$$

以及

$$\sum_{n<t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}n^ae^{-t\left(1-\frac{n}{t}\right)^2}\leqslant\sum_{t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}<n<t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\left(t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)^ae^{-t\left(1-\frac{t-t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{t}\right)^2}\sim2t^{\epsilon+\frac{1}{2}+a}e^{-t^{2\epsilon}},t\to\infty,$$

以及

$$\sum_{n>t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}n^ae^{-t\left(\frac{n}{t}-1\right)^2}\leqslant\sum_{n>t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}n^ae^{-t^{2\epsilon}}=e^{-t^{2\epsilon}}\sum_{n>t+t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}n^a.$$

注意到幂函数求和的阶也是幂函数, 所以我们知道

$$\lim_{x\to1^-}F_a(x)\,e^{-\frac{1}{1-x}}=0.$$

67. (67.) 由 EM 公式9.9得

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\ln k=\frac{\sin\ln n}{2}+\int_1^n\sin\ln x\mathrm{d}x+\frac{\frac{\cos\ln n}{n}-1}{12}-\int_1^n b_2(x)\left[\sin\ln x\right]''\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\sin\ln n}{2}+\frac{1}{2}+n\frac{\sin\ln n-\cos\ln n}{2}+\frac{\frac{\cos\ln n}{n}-1}{12}+\int_1^n b_2(x)\frac{\sin\ln x+\cos\ln x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

我们有

$$\int_1^n\left|b_2(x)\frac{\sin\ln x+\cos\ln x}{x^2}\right|\mathrm{d}x\leqslant C\int_1^n\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^\infty b_2(x)\frac{\sin\ln x+\cos\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\text{存在},$$

于是(9.158)成立.

68. (68.) 本题的想法是把奇性通过换元转移到函数上.

首先

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\int_2^\infty\frac{\sin(xt)}{\ln t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\int_0^\infty\frac{\sin(tx)\cos(2x)+\sin(2x)\cos(tx)}{\ln(2+t)}\mathrm{d}t\right).$$

我们来计算

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\int_0^\infty\frac{e^{itx}}{\ln(2+t)}\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x\int_0^\infty\frac{e^{it}}{\ln\left(2+\frac{t}{x}\right)}\mathrm{d}t\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x\int_0^\infty\frac{e^{it}}{\ln(2+xt)}\mathrm{d}t\right).$$

注意到

$$\ln x\int_0^\infty\frac{e^{it}}{\ln(2+xt)}\mathrm{d}t=\ln x\sum_{n=0}^\infty\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{e^{it}}{\ln(2+xt)}\mathrm{d}t$$
$$=\ln x\sum_{n=0}^\infty\left[\int_0^\pi\frac{e^{it}}{\ln(2+x(t+2n\pi))}\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}\frac{e^{it}}{\ln(2+x(t+2n\pi))}\mathrm{d}t\right]$$
$$=\ln x\sum_{n=0}^\infty\left[\int_0^\pi e^{it}\left(\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi))}-\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi+\pi))}\right)\mathrm{d}t\right]$$
$$=\ln x\left[\int_0^\pi e^{it}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi))}-\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi+\pi))}\right)\mathrm{d}t\right],$$

这里交换积分级数顺序来自

$$\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi))}-\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi+\pi))}\right|$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\frac{\pi x}{(2+xt+2n\pi x+\theta)\ln^2(2+xt+2n\pi x+\theta)}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{\pi x}{(2+xt+2n\pi x)\ln^2(2+xt+2n\pi x)}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^\infty\int_{n-1}^n\frac{\pi x}{(2+xt+2y\pi x)\ln^2(2+xt+2y\pi x)}\mathrm{d}y \tag{30.43}$$
$$=\int_0^\infty\frac{\pi x}{(2+xt+2y\pi x)\ln^2(2+xt+2y\pi x)}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{\ln^2(2+xt+2y\pi x)}\mathrm{d}\ln(2+xy+2\pi xy)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\ln(2+xt)}^\infty\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\ln(2+xt)}.$$

读者还能从(30.43)的证明可以看到, 对每一个 $t>0$, 我们有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left[\ln x\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi))}-\frac{1}{\ln(2+x(t+2n\pi+\pi))}\right)\right]\leqslant\frac{1}{2}. \tag{30.44}$$

类似的反向操作得

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty}\left[\ln x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi\right)\right)}-\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi+\pi\right)\right)}\right)\right]\geqslant\frac{1}{2}. \tag{30.45}$$

于是结合(30.44)和(30.45)我们得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi\right)\right)}-\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi+\pi\right)\right)}\right)\right]=\frac{1}{2},\forall t>0. \tag{30.46}$$

我们结合(30.43)得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi\right)\right)}-\frac{\ln x}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi+\pi\right)\right)}\right)\right|\\&\leqslant\frac{\ln x}{\ln\left(2+xt\right)}+\frac{\ln x}{\ln\left(2+x\left(t+\pi\right)\right)}+\frac{\ln x}{2\ln\left(2+xt\right)}\\&\leqslant\frac{5\ln x}{2\ln\left(2+xt\right)}\leqslant\begin{cases}\frac{5\ln x}{2\ln\left(2+\pi\sqrt{x}\right)}, & x>\frac{\pi^2}{t^2}\\ \frac{5\ln\frac{\pi^2}{t^2}}{2\ln 2}, & 1\leqslant x\leqslant\frac{\pi^2}{t^2}\end{cases}\\&\leqslant\max\left\{\sup_{x\geqslant1}\frac{5\ln x}{2\ln\left(2+\pi\sqrt{x}\right)},\frac{5\ln\frac{\pi^2}{t^2}}{2\ln 2}\right\}\in L^1\left[0,\pi\right],\end{aligned}$$

现在由控制收敛定理和(30.46)可得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\ln x\left[\int_0^{\pi}e^{it}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi\right)\right)}-\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi+\pi\right)\right)}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\left[\int_0^{\pi}e^{it}\lim_{x\to+\infty}\ln x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi\right)\right)}-\frac{1}{\ln\left(2+x\left(t+2n\pi+\pi\right)\right)}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{it}\mathrm{d}t=i,\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\int_2^{\infty}\frac{\sin\left(xt\right)}{\ln t}\mathrm{d}t\right)=-1.$$

69. (69.) 我们设

$$M\triangleq\max_{(x,y)\in[0,1]^2}\left|f\left(x,y\right)\right|.$$

一方面

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right]\overset{\ln(1+x)\leqslant x}{\leqslant}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\\&=\int_0^1\int_0^1f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right]\\&\overset{\ln(1+x)\geqslant x-\frac{x^2}{2}}{\geqslant}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right]^2\\&=\int_0^1\int_0^1f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right]^2.\end{aligned}$$

注意到

$$0\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right]^2\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}M\right]^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{M^2}{n^2}=\frac{M^2}{n}\to0,n\to\infty,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\sum\limits_{l=1}^{n}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right)}=e^{\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

70. (70.) 事实上, 取 $\varepsilon>0$ 使得 $\frac{2}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}>1$. 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$, 有

$$a_n<\varepsilon a_{n+1}+\varepsilon a_{n+2},$$

故

$$a_n+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{n+1}<\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}\left(a_{n+1}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{n+2}\right).$$

于是

$$\left(\frac{2}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}\right)^{n-N+1}\left(a_N+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{N+1}\right)<\left(a_{n+1}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{n+2}\right).$$

因此显然 a_n 无界.

71. (71.) 首先

$$\int_1^n\left|\frac{\sqrt[n]{x}\sin(\pi x)}{1+x^{2n}}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_1^n x^{\frac{1}{n}-2n}\mathrm{d}x=\frac{n^{\frac{1}{n}-2n+1}-1}{\frac{1}{n}-2n+1}\to 0.$$

注意到

$$\left|\frac{\sqrt[n]{x}\sin(\pi x)}{1+x^{2n}}\right|\leqslant 1,$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sqrt[n]{x}\sin(\pi x)}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{x}\sin(\pi x)}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

72. (72.) 我们有

$$0\leqslant 5x_{n+3}+4x_{n+2}+x_{n+1}\leqslant 5x_{n+2}+4x_{n+1}+x_n,n=1,2,\cdots.$$

由单调有界必收敛就有

$$c\triangleq\lim_{n\to\infty}(5x_{n+2}+4x_{n+1}+x_n)\text{ 存在.}$$

现在显然 $\{x_n\}$ 有界, 于是记

$$a\triangleq\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,b\triangleq\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

我们反复抽子列, 可设

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k+2}=a,\lim_{k\to\infty}x_{n_k+1}=\ell_1,\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\ell_2,$$

于是

$$c=5a+4\ell_1+\ell_2\leqslant 5a+5b.\tag{30.47}$$

我们反复抽子列, 可设

$$\lim_{k\to\infty}x_{n'_k+2}=b,\lim_{k\to\infty}x_{n'_k+1}=\ell_3,\lim_{k\to\infty}x_{n'_k}=\ell_4,$$

于是

$$c=5b+4\ell_3+\ell_4\geqslant 5b+5a.\tag{30.48}$$

因此 $c=5b+5a$, 所以(30.47), (30.48)的不等式放缩都是取等的, 因此

$$\ell_1=\ell_2=b,\ell_3=\ell_4=a.$$

又

$$5b+5a=c=\lim_{k\to\infty}(5x_{n_k+1}+4x_{n_k}+x_{n_k-1})\geqslant 9b+a,$$

即 $a \geqslant b$. 故 $a=b$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

73. (73.) 答案是不存在, 我们将问题改造一下. 设

$$g \in C(\mathbb{R}), \lim_{y\to\infty}[g(y)\sin y]=0,$$

是否有 $\lim\limits_{y\to\infty} g(y)=0$.

注意到

$$\left[\left(1-t^2\right)^n t\right]' = \left(1-t^2\right)^{n-1}\left[1-(1+2n)t^2\right], \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

于是

$$\max_{t\in[0,1]}\left(1-t^2\right)^n t = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

我们考虑

$$g(y)=\cos^{2n} y, n\pi \leqslant |y| \leqslant (n+1)\pi, n \in \mathbb{N}_0.$$

于是

$$|g(y)\sin y| = \left(1-\sin^2 y\right)^n |\sin y| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n\pi \leqslant |y| \leqslant (n+1)\pi, n \in \mathbb{N}_0.$$

现在我们就有

$$\lim_{y\to\infty}[g(y)\sin y]=0, \lim_{y\to\infty} g(y) \neq 0.$$

换言之, 回到原题 $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0$ 就是反例.

74. (74.) 读者可以直接求极限验证

$$\frac{t}{\arctan t} = \frac{2}{\pi}t + \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3}\cdot\frac{1}{t} + \frac{48-4\pi^2}{3\pi^4}\cdot\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right), t\to+\infty.$$

我们有

$$\begin{aligned}
A &= -\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t}\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi^2}x - \frac{8}{\pi^3}\ln x\right)\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^x\left(\frac{t}{\arctan t} - \frac{2}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}\right)\mathrm{d}t - \frac{8}{\pi^3}\ln x\right]\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^1\left(\frac{t}{\arctan t} - \frac{2}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}\right)\mathrm{d}t + \int_1^x\left(\frac{t}{\arctan t} - \frac{2}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^3}\cdot\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\right]\\
&= -\int_0^1\left(\frac{t}{\arctan t} - \frac{2}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}\right)\mathrm{d}t - \int_1^\infty\left(\frac{t}{\arctan t} - \frac{2}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^3}\cdot\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

现在由洛必达法则得

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t}\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi^2}x - \frac{8}{\pi^3}\ln x + A\right)\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\int_0^x \frac{t}{\arctan t}\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi^2}x - \frac{8}{\pi^3}\ln x + A}{\frac{1}{x}}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{\arctan x} - \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^3 x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{48-4\pi^2}{3\pi^4}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right] = \frac{4\pi^2-48}{3\pi^4}.
\end{aligned}$$

75. (75.) 对任何 $b\in\mathbb{R}, \epsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|a_N|\leqslant\epsilon$, k_N 是离 $\frac{b}{a_N}$ 最近的整数. 于是

$$|k_N a_N - b| = |a_N|\cdot\left|k_N - \frac{b}{a_N}\right| \leqslant |a_N| \leqslant \epsilon.$$

注意到 $k_N a_N \in P$, 这就证明了 P 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

76. (76.)

(a). 由 Wallis 公式9.18我们有

$$\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta \mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, n\to\infty.$$

当 $\epsilon \leqslant x \leqslant 1$, 我们有

$$\left|f_n(x)-1\right| = \frac{\left|\int_x^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t\right|}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t} \leqslant \frac{\int_0^1 \left(1-\epsilon^2\right)^n \mathrm{d}t}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t} \leqslant \frac{\left(1-\epsilon^2\right)^n}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t}.$$

当 $-1 \leqslant x \leqslant -\epsilon$, 我们有

$$\left|f_n(x)+1\right| = \frac{\left|\int_{-1}^x \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t\right|}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t} \leqslant \frac{\int_{-1}^0 \left(1-\epsilon^2\right)^n \mathrm{d}t}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t} \leqslant \frac{\left(1-\epsilon^2\right)^n}{\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t}.$$

于是关于 $\epsilon \leqslant |x| \leqslant 1$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{sgn}x.$$

(b). 显然 $\left|f_n(x)\right| \leqslant 1$. 然后我们注意到

$$\int_0^x \mathrm{sgn}t\mathrm{d}t = |x|, \forall x \in [-1,1].$$

对任何 $\epsilon \in (0,1)$, 由 1, 我们取 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \leqslant \epsilon, \forall \epsilon \leqslant |t| \leqslant 1.$$

于是对 $0 \leqslant x \leqslant 1, n \geqslant N$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|g_n(x) - |x|\right| \leqslant \int_0^x \left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_{0\leqslant t\leqslant \epsilon} \left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \mathrm{d}t + \int_{\epsilon\leqslant t\leqslant x} \left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^\epsilon 2\mathrm{d}t + \int_\epsilon^1 \epsilon \mathrm{d}t \\
&= 3\epsilon - \epsilon^2.
\end{aligned}$$

对 $-1 \leqslant x \leqslant 0, n \geqslant N$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|g_n(x) - |x|\right| \leqslant \int_x^0 \left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\epsilon\leqslant t\leqslant 0} \left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \mathrm{d}t + \int_{x\leqslant t\leqslant -\epsilon} \left|f_n(t) - \mathrm{sgn}t\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{-\epsilon}^0 2\mathrm{d}t + \int_{-1}^{-\epsilon} \epsilon \mathrm{d}t \\
&= 3\epsilon - \epsilon^2.
\end{aligned}$$

这就证明了关于 $|x| \leqslant 1$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = |x|.$$

77. (77.) 显然

$$x_n \geqslant 0, n = 1, 2, \cdots.$$

设

$$M \triangleq \max\{x_0, x_1, 4\} > 0, m \triangleq \min\{x_0, x_1, 4\} > 0,$$

则假设 $m \leqslant x_{n-1}, x_n \leqslant M$ 时我们有

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} \leqslant \sqrt{M} + \frac{M}{2} \leqslant \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M; \\
x_{n+1} &= \sqrt{x_n} + \frac{x_{n-1}}{2} \geqslant \sqrt{m} + \frac{m}{2} \geqslant \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m,
\end{aligned}$$

于是归纳可得

$$m \leqslant x_n \leqslant M, n = 1, 2, \cdots .$$

设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = L, \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \ell > 0,$$

我们有

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_{n+1} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{x_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n-1}}{2} = \sqrt{L} + \frac{L}{2} \Rightarrow L \leqslant 4;$$
$$\ell = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{n+1} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{x_n} + \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n-1}}{2} = \sqrt{\ell} + \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell \geqslant 4,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L = \ell = 4.$$

78. (78.)**Method 1** 正常方法:

由加强的洛必达法则13.11

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| \frac{\int_3^x \frac{1}{\ln t - \sin t}\mathrm{d}t - \frac{x}{\ln x}}{\frac{x}{\ln^2 x}} \right| &\leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| \frac{\frac{1}{\ln x - \sin x} - \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}}{\frac{\ln^2 x - 2\ln x}{\ln^4 x}} \right| = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| \frac{\frac{1}{\ln x - \sin x} - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln^2 x}}{\frac{1}{\ln^2 x}} \right| \\ &\leqslant 1 + \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| \frac{\ln^2 x \cdot \sin x}{\ln x \cdot (\ln x - \sin x)} \right| \leqslant 1 + \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| \frac{\ln^2 x}{\ln x \cdot (\ln x - \sin x)} \right| \\ &= 2,\end{aligned}$$

我们有

$$\int_3^x \frac{1}{\ln t - \sin t}\mathrm{d}t = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right), x \to +\infty.$$

Method 2 $*$ 渐近分析方法:

首先

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\int_3^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t - \frac{x}{\ln x}}{\frac{x}{\ln^2 x}} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}}{\frac{\ln^2 x - 2\ln x}{\ln^4 x}} \right) = 1;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_3^x \frac{1}{\ln^3 t}\mathrm{d}t}{\frac{x}{\ln^3 x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln^3 x}}{\frac{\ln^3 x - 3\ln^2 x}{\ln^6 x}} = 1;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \int_3^x \frac{\sin t}{\ln^2 t}\mathrm{d}t = \int_3^\infty \frac{\sin t}{\ln^2 t}\mathrm{d}t,$$

然后

$$\begin{aligned}\int_3^x \frac{1}{\ln t - \sin t}\mathrm{d}t &= \int_3^x \left(\frac{1}{1 - \frac{\sin t}{\ln t}} \cdot \frac{1}{\ln t} \right) \mathrm{d}t = \int_3^x \left(1 + \frac{\sin t}{\ln t} + O\left(\frac{\sin^2 t}{\ln^2 t}\right) \right) \cdot \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \\ &= \int_3^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t + \int_3^x \frac{\sin t}{\ln^2 t}\mathrm{d}t + O\left(\int_3^x \frac{1}{\ln^3 t}\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) + O(1) + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right) \\ &= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

79. (79.) 显然

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant A.$$

对任何 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r = 0, 1, 2, \cdots, N-1$, 我们有

$$\underline{\lim_{q\to+\infty}} \frac{a_{Nq+r}}{Nq+r} \geqslant \underline{\lim_{q\to+\infty}} \frac{a_{Nq}}{Nq+r} \geqslant \underline{\lim_{q\to+\infty}} \frac{qa_N}{Nq+r} = \frac{a_N}{N},$$

即

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_N}{N},\forall N\in\mathbb{N}.$$

由 N 任意性可得

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\geqslant A,$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A.$$

80. (80.) 解决本题的核心想法就是上下极限的 Stolz 定理9.1.

记

$$S_n\triangleq\sum_{i=1}^{n}x_i,n=1,2,\cdots.$$

首先 x_n 严格递增且

$$x_{n+1}\geqslant x_n+\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_{n+1}^2\geqslant x_n^2+2\Rightarrow x_n\geqslant c_1\sqrt{n}.$$

然后

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n+\frac{n}{S_n}\leqslant x_n+\frac{n}{c_1\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}\\&=x_n+\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{c_1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}\leqslant x_n+\frac{c_2}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

从而求和得

$$x_n\leqslant c_3\sqrt{n},$$

这里 $c_1,c_2,c_3>0$.

由 Stolz 定理9.1得

$$0\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{x_nS_n}\leqslant\frac{1}{c_1}\varliminf_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{S_n}=\frac{1}{c_1}\varliminf_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{x_n}=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_nS_n}=1.$$

反复上下极限 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}a&\triangleq\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2\varliminf_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{S_n}\geqslant3\varliminf_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{x_n};\\b&\triangleq\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{S_n}\leqslant3\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{x_n},\end{aligned}$$

我们有

$$ab=\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=3.$$

另一方面继续用上下极限 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}&\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(x_{n+1}^2-x_n^2\right)=2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{nx_n}{S_n}\leqslant2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{(n+1)x_{n+1}-nx_n}{x_{n+1}}\\&\leqslant2+2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n(x_{n+1}-x_n)}{x_{n+1}}=2+2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^2}{x_nS_n}\\&\leqslant2+2\varlimsup_{n\to\infty}\frac{2n-1}{x_nS_n-x_{n-1}S_{n-1}}=2+4\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_nS_{n-1}+x_n^2-x_{n-1}S_{n-1}}\\&=2+4\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2+n-1}=2+4\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n^2}{n}+1-\frac{1}{n}}=2+4\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n^2}{n}+1},\end{aligned}$$

于是我们有不等式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n^2}{n}\leqslant 2+\frac{4}{1+\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n^2}{n}}.$$

由

$$ab=3, a^2\leqslant b^2\leqslant 2+\frac{4}{1+a^2}$$

可得 $a=b=\sqrt{3}$, 现在我们知道

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{3}.$$

81. (81.) 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{x_1x_2\cdots x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 y^y\left|\ln y\right|^{n-1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty\left(e^{-y}\right)^{e^{-y}}y^{n-1}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-ye^{-y}-y}y^{n-1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-ye^{-y}-y}y^{n-1}\mathrm{d}y\overset{\text{Laplace 方法9.3}}{\sim}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}\mathrm{d}y=1, n\to\infty,\end{aligned}$$

其中红色部分的计算最为重要, 需要仔细学习. 即做换元

$$y_j=x_1x_2\cdots x_j, j=1,2,\cdots,n,$$

我们有雅可比行列式

$$\frac{\partial\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}=\begin{vmatrix}1&&&&\\x_2&x_1&&&\\x_2x_3&x_3x_1&x_1x_2&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\x_2x_3\cdots x_n&x_1x_3\cdots x_n&x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n&x_1x_2\cdots x_{n-1}\end{vmatrix}=y_1y_2\cdots y_{n-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]^n}\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{x_1x_2\cdots x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_0^1\mathrm{d}y_n\int_{y_n}^1\mathrm{d}y_{n-1}\cdots\int_{y_2}^1\frac{y_n^{y_n}}{y_1y_2\cdots y_{n-1}}\mathrm{d}y_1\\&=\int_0^1\mathrm{d}y_n\int_{y_n}^1\mathrm{d}y_{n-1}\cdots\int_{y_2}^1\frac{y_n^{y_n}\left(-\ln y_2\right)}{y_2\cdots y_{n-1}}\mathrm{d}y_2\\&=\cdots=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(-1)^{n-1}\left(\ln y_n\right)^{n-1}y_n^{y_n}\mathrm{d}y_n\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 y^y\left|\ln y\right|^{n-1}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

82. (82.) 首先对 $x\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\int_{x-1}^{x+1}f(t)Q_n(t-x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\left[1-(t-x)^2\right]^n\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^k\int_{x-1}^{x+1}f(t)(x-t)^{2k}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^{2k}(-1)^kC_n^kC_{2k}^j\left[\int_0^1 f(t)(-t)^{2k-j}\,\mathrm{d}t\right]x^j\end{aligned}$$

是多项式.

注意到 $f\in C\left[-1,2\right]$, 由 Cantor 定理得 f 在 $\left[-1,2\right]$ 一致连续. 于是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right|<\frac{\epsilon}{2},\forall x_1,x_2\in\left[-1,2\right],\left|x_2-x_1\right|\leqslant\delta.$$

记

$$M\triangleq\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f\left(x\right)\right|.$$

由 Wallis 公式9.18得

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{n}},n\to\infty,$$

于是存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{4M\left(1-\delta\right)\left(1-\delta^2\right)^n}{\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall n\geqslant N.$$

现在对 $x\in\left[0,1\right],n\geqslant N$ 有

$$\begin{aligned}
&\left|P_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leqslant\int_{-1}^{1}\left[\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|\cdot Q_n\left(t\right)\right]\mathrm{d}t\\
&=\int_{|t|\leqslant\delta}\left[\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|\cdot Q_n\left(t\right)\right]\mathrm{d}t+\int_{\delta<|t|\leqslant1}\left[\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|\cdot Q_n\left(t\right)\right]\mathrm{d}t\\
&\leqslant\sup_{|t|\leqslant\delta}\left|f\left(x+t\right)-f\left(x\right)\right|\cdot\int_{-1}^{1}Q_n\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{2M}{\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x}\int_{\delta<|t|\leqslant1}\left(1-\delta^2\right)^n\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{4M\left(1-\delta\right)}{\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x}\cdot\left(1-\delta^2\right)^n<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,
\end{aligned}$$

这就证明了

$$P_n\left(x\right)\rightrightarrows f\left(x\right),x\in\left[0,1\right].$$

83. (83.) 首先

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m-v_{2m}}{m}\right)=1-\lim_{m\to\infty}\frac{v_{2m}-m}{m}=1,v_{2m}=\sqrt{2m}\lambda+m+o\left(\sqrt{m}\right),m\to\infty,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}C_{2m}^{v_{2m}}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}C_{2m}^{m}\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\frac{C_{2m}^{v_{2m}}}{C_{2m}^{m}}\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}\frac{(2m)!}{\left(m!\right)^2}\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\frac{C_{2m}^{v_{2m}}}{C_{2m}^{m}}\right)\overset{\text{斯特林公式9.4}}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\frac{(2m)!}{(2m-v_{2m})!v_{2m}!}}{\frac{(2m)!}{(m!)^2}}\right)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\left(m!\right)^2}{v_{2m}!\left(2m-v_{2m}\right)!}\right)\overset{\text{斯特林公式9.4}}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2}{\sqrt{\left(2\pi\right)^2v_{2m}\left(2m-v_{2m}\right)}\left(\frac{v_{2m}}{e}\right)^{v_{2m}}\left(\frac{2m-v_{2m}}{e}\right)^{2m-v_{2m}}}\right)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m\cdot m^{2m}}{\sqrt{v_{2m}\left(2m-v_m\right)}\left(2m-v_{2m}\right)^{2m-v_{2m}}v_{2m}^{v_{2m}}}\right)\overset{\text{等价替换}}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^{2m}}{\left(2m-v_{2m}\right)^{2m-v_{2m}}v_{2m}^{v_{2m}}}\right)\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left[e^{2m\ln m-\left(\sqrt{2m}\lambda+m+o\left(\sqrt{m}\right)\right)\ln\left(\sqrt{2m}\lambda+m+o\left(\sqrt{m}\right)\right)-\left(m-\sqrt{2m}\lambda+o\left(\sqrt{m}\right)\right)\ln\left(m-\sqrt{2m}\lambda+o\left(\sqrt{m}\right)\right)}\right]\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{m\to\infty}\left[e^{2m\ln m-\left(\sqrt{2m}\lambda+m+o\left(\sqrt{m}\right)\right)\left(\ln m+\ln\left(\frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{m}}+1+o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right)\right)-\left(m-\sqrt{2m}\lambda+o\left(\sqrt{m}\right)\right)\left(\ln m+\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}\lambda}{m}\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right)}\right]\\
&\overset{\text{Taylor 之后为初等极限}}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2\lambda^2}.
\end{aligned}$$

类似的方法可以得到

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2m+1}}{2^{2m+1}}C_{2m+1}^{v_{2m+1}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2\lambda^2}.$$

由命题7.4就知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}C_n^{v_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2\lambda^2}.$$

84. (84.)

(1): 首先注意到

$$\int_0^1\ln^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2x\mathrm{d}x=\left(x\ln^2x-2x\ln x+2x\right)|_0^1=2.$$

注意到

$$\int_0^1\ln\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x<\infty,$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\ln\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=2.$$

(2): 首先注意到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\ln\left(1-e^{-x}\right)\mathrm{d}x&=-\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{e^{-nx}}{n}\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-nx}}{n}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

然后又注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+\int_0^1\ln^2\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x+2=2-\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln(1-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^1\ln\left(1-x^{n+1}\right)\cdot\ln(1-x)\,\mathrm{d}x\\&\overset{x=e^{-\frac{y}{n+1}}}{=}\frac{1}{n+1}\int_0^\infty\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\left(1-e^{-\frac{y}{n+1}}\right)e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{n+1}\int_0^\infty\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\\&\quad-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\int_0^\infty\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

一方面

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left|\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\right|\mathrm{d}y\\&\leqslant\sup_{x\in(0,+\infty)}\left(e^{-x}\ln\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\int_0^\infty\left|\ln\left(1-e^{-y}\right)\right|\mathrm{d}y<\infty,\end{aligned}$$

于是由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left(\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln\frac{1-e^{-\frac{y}{n+1}}}{\frac{y}{n+1}}\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\right)\mathrm{d}y=0.$$

另外一方面有

$$\int_0^\infty\left|\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\right|\mathrm{d}y\leqslant\int_0^\infty\left|\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\right|\mathrm{d}y<\infty,$$

继续用控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot\ln y\mathrm{d}y.$$

因此我们继续用控制收敛定理容易知道

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\ln n}\left(2-x_n\right)\right]&=-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\ln n}\frac{\ln\left(n+1\right)}{n+1}\int_0^{\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\cdot e^{-\frac{y}{n+1}}\mathrm{d}y\right]\\&=\int_0^{\infty}\ln\left(1-e^{-y}\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

85. (85.) 首先由黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{\sin\left(nx\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=0.$$

然后利用

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)\right]=\frac{1}{2},$$

我们知道

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right|\mathrm{d}x<\infty.$$

于是继续使用黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\left(\frac{\sin\left(nx\right)}{x}-\frac{\sin\left(nx\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(nx\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sin\left(nx\right)}{x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

利用

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)\right]=\frac{1}{2},$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{1}\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right|\mathrm{d}x<\infty.$$

继续使用黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{1}\left(\frac{\sin\left(nx\right)}{x}+\frac{\sin\left(nx\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sin\left(nx\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-1}\left(-\frac{\sin\left(nx\right)}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-n}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

现在我们就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(nx\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=0.$$

86. (86.)

(a). 首先

$$x_n-x_{n+1}=x_{n+1}^{1+\alpha}\geqslant 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=c\geqslant 0.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-x_{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}^{1+\alpha}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=0,$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n^\alpha}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^\alpha}}{n}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{x_n^\alpha}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{\left(x_{n+1}+x_{n+1}^{1+\alpha}\right)^\alpha}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}-\frac{1}{\left(x+x^{1+\alpha}\right)^\alpha}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x^\alpha}\left(1-\frac{1}{\left(1+x^\alpha\right)^\alpha}\right)\right]\\&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\alpha\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\alpha}\right]=\alpha,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^\alpha=\frac{1}{\alpha}.$$

(b). 首先

$$0\leqslant 2^{-\alpha}y_{n+1}^{1+\alpha}\leqslant y_n-y_{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=c\geqslant 0.$$

又

$$0\leqslant 2^{-\alpha}\lim_{n\to\infty}y_{n+1}^{1+\alpha}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(y_n-y_{n+1}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=0,$$

于是

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{ny_n^\alpha}&=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{y_n^\alpha}}{n}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{\geqslant}\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{y_n^\alpha}\right)\\&\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{\left(y_{n+1}+2^{-\alpha}y_{n+1}^{1+\alpha}\right)^\alpha}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}-\frac{1}{\left(x+2^{-\alpha}x^{1+\alpha}\right)^\alpha}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x^\alpha}\left(1-\frac{1}{\left(1+2^{-\alpha}x^\alpha\right)^\alpha}\right)\right]\\&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\alpha\ln\left(1+2^{-\alpha}x^\alpha\right)}{x^\alpha}\right]=\alpha2^{-\alpha},\end{aligned}$$

即

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{ny_n^\alpha}\leqslant\frac{2^\alpha}{\alpha}.$$

87. (87.) 设

$$M\triangleq\max\left\{x_1,x_2,x_3\right\},$$

于是归纳可得

$$x_n\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}.$$

又

$$0\leqslant x_{n+3}+(1-p)x_{n+2}+rx_{n+1}\leqslant x_{n+2}+(1-p)x_{n+1}+rx_n,n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+2}+(1-p)x_{n+1}+rx_n\right)=c\geqslant 0$$

存在.

设

$$p_0\triangleq 1-p,y_n\triangleq x_n-\frac{c}{2-p+r},$$

我们有

$$p_0 \in (0,1)\,, \lim_{n\to\infty}\left(y_{n+2}+p_0y_{n+1}+ry_n\right)=0.$$

现在记

$$v_n \triangleq \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}, \epsilon_n \triangleq v_{n+1}-\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_n,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n=\lim_{n\to\infty}\left(v_{n+1}-\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_n\right)=0.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n}\epsilon_n &= \sum_{n=1}^{m}\left[\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} v_{n+1}-\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-(n-1)} v_n\right] \\ &= \begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-m} v_{m+1}-v_1,\end{aligned}$$

即

$$v_{m+1}=\sum_{n=1}^{m}\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-n}\epsilon_n+\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} v_1.$$

注意到 $\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征多项式是 $\lambda^2+p_0\lambda+r$. 对于共轭复特征值, 由 $r<1$ 和韦达定理我们知道模长小于 1. 对于两个实特征值, 容易看到必为和为 $-p_0$ 的负数, 于是仍然有模长小于 1, 因此

$$\lim_{m\to\infty}\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} v_1=0.$$

由命题23.11可取矩阵范数 $||\cdot||$ 使得

$$\left|\left|\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|\right|<1,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left|\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\epsilon_{m-n+1}\chi_{\{1,2,\cdots,m\}}(n)\right|\right| \leqslant \sup_{m\geqslant 1}||\epsilon_m||\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left|\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right|\right|^{n-1}<\infty.$$

由级数的控制收敛定理[13]18.16得

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\epsilon_{m-n+1}\right)=0.$$

现在由

$$\sum_{n=1}^{m}\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-n}\epsilon_n=\sum_{n=1}^{m}\begin{pmatrix} -p_0 & -r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\epsilon_{m-n+1}$$

知道

$$\lim_{m\to\infty}v_m=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n\text{存在}.$$

88. (88.) 由条件得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}+a_{2(n+2)}}=0.$$

由数学类极限习题70., 我们知道 $\{a_{2n}\}$ 是无界数列, 这就证明了 $\{a_n\}$ 也是无界数列.

[13]向量值版本可以类似建立.

89. (89.) 记

$$x_0=\frac{1}{n},x_{k+1}=\tan x_k,k=0,1,2,\cdots.$$

由 Taylor 公式得 $M,a>0$ 使得

$$\tan x\leqslant x+\frac{1}{3}x^3+Mx^5,x\in[0,a].$$

当 n 充分大, 我们有

$$\frac{1}{n}+\frac{8}{3n^2}+\frac{32M}{n^4}\leqslant\frac{2}{n},n>\frac{2}{a}.$$

下面归纳证明对充分大的 n 成立

$$x_k\leqslant\frac{2}{n},0\leqslant k\leqslant n. \tag{30.49}$$

$k=0$ 显然(30.49)成立, 假设 k 时(30.49)成立. 于是当 $k+1,k\leqslant n-1$ 时我们有

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_0+\sum_{j=0}^{k}(x_{j+1}-x_j)\leqslant\frac{1}{n}+\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{3}x_j^3+Mx_j^5\right)\\&\leqslant\frac{1}{n}+\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{8}{3n^3}+\frac{32M}{n^5}\right)\leqslant\frac{1}{n}+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{8}{3n^3}+\frac{32M}{n^5}\right)\\&=\frac{1}{n}+\frac{8}{3n^2}+\frac{32M}{n^4}\leqslant\frac{2}{n},\end{aligned}$$

现在我们就证明了(30.49), 从而

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\tan\tan\cdots\tan}_{n次}\frac{1}{n}=0.$$

90. (90.) 首先

$$a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant2,$$

归纳可得

$$a_n\geqslant n,n=2,3,\cdots.$$

我们有

$$a_{n+1}-(n+1)=(a_n-n)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\leqslant a_n-n.$$

现在我们强求通项. 注意到

$$(n+1)\left[a_{n+1}-(n+1)\right]=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)(a_n-n),$$

于是

$$(m+1)\left[a_{m+1}-(m+1)\right]=(a_1-1)\prod_{n=1}^{m}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right).$$

现在

$$\prod_{n=1}^{m}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\right]=\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}\right).$$

又

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}\right|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_2-2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)<\infty,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}n(a_n-n)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}\right)$$

存在.

91. (91.) 取 a_{2n} 是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中有理数的排列, $a_{2n-1}=-1$, 此时 a_n 有无穷多个聚点.

92. (92.) **Method 1**

一方面我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{1}\frac{e^x}{1+(nx)^2+n^3x^4}\,\mathrm{d}x\right)\leqslant e\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{1}\frac{1}{(n^{\frac{2}{3}})^2}\,\mathrm{d}x\right)=e\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{1}1\,\mathrm{d}x\right)=0.$$

另外一方面我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{e^x}{1+(nx)^2+n^3x^4}\,\mathrm{d}x\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(ne^{\theta_n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{1}{1+(nx)^2+n^3x^4}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\theta_n}\int_0^{n^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{n^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

现在求原函数即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{n^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Method 2

首先

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1\frac{e^x}{1+(nx)^2+n^3x^4}\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\,\mathrm{d}x\right),$$

然后

$$\int_0^\infty\left|\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\chi_{[0,n]}(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\infty\frac{e}{1+x^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

93. (93.)

(a). 记 $m\triangleq\lfloor an\rfloor$, 我们知道

$$S_n(0,a)=S_m(0,1).$$

现在对 $a>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(0,a)}{n}=a\lim_{n\to\infty}\frac{S_m(0,1)}{an}=a\lim_{m\to\infty}\frac{S_m(0,1)}{m}=ap,$$

这极限对 $a=0$ 当然也成立. 类似可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(0,b)}{n}=bp.$$

于是由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(0,b)}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(0,a)}{n}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(a,b)}{n}=p(b-a).$$

(b). 因为 f 黎曼可积, 所以由黎曼可积函数可以由阶梯函数上下逼近和要证等式关于线性运算封闭且和有限个点取值无关, 我们只需要对 $f(x)=\chi_{(a,b)}(x),0\leqslant a<b\leqslant1$ 验证即可, 这恰好是第一问.

94. (94.)

$$f(x)\triangleq\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{2^j},$$

则

$$f\left(x^2\right)=-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}x^{2^{j+1}}=-\left[f(x)-x\right]=x-f(x),x\in[0,1).$$

注意到

$$f(0.995)\approx 0.50088>\frac{1}{2},$$

以及

$$f(x)=x-f\left(x^2\right)=x-x^2+f\left(x^4\right)>f\left(x^4\right)>f\left(x^{16}\right)>\cdots,\forall x\in(0,1).$$

于是我们有

$$f\left(0.995^{\frac{1}{4^{k-1}}}\right)\geqslant f(0.995)>\frac{1}{2},k=1,2,\cdots.$$

现在我们知道 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\frac{1}{2}$.
但是若 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to1^-}f(x)+\lim_{x\to1^-}f\left(x^2\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{2},$$

这就是一个矛盾!, 至此我们证明了 $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^jx^{2^j}$ 不存在.

95. (95.) 由 Taylor 公式得

$$\ln\left(\frac{4+4x^2}{5}\right)=\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)+o\left(x-\frac{1}{2}\right),x\to\frac{1}{2}.$$

由 Laplace 方法9.3得

$$\begin{aligned}a_n&=\left(\frac{4}{5}\right)^n\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{2^x}{\left(\frac{4+4x^2}{5}\right)^n}\mathrm{d}x\sim\left(\frac{4}{5}\right)^n\cdot2^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{-n\ln\left(\frac{4+4x^2}{5}\right)}\mathrm{d}x\\&\overset{\bigstar}{\sim}\left(\frac{4}{5}\right)^n\cdot2^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}e^{-n\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x=\left(\frac{4}{5}\right)^n\cdot2^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{5}{4}n},n\to\infty,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{5}.$$

96. (96.) 注意无穷积展开

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),z\in\mathbb{C}.$$

我们有

$$\sinh(\pi z)=-i\sin(i\pi z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right),z\in\mathbb{C}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{\sinh(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{\pi\sqrt{x}}-e^{-\pi\sqrt{x}}}{2}\right)-\ln(\pi\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(e^{\pi\sqrt{x}}-e^{-\pi\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}\right)\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(e^{\pi y}-e^{-\pi y}\right)}{y}\right)=\pi.\end{aligned}$$

97. (97.) 固定 $x>0$, 利用 $e^{x-1}\geqslant x$ 得

$$f_n(x)=\lambda_ne^{f_{n-1}(x)}\geqslant\frac{1}{e}e^{f_{n-1}(x)}\geqslant f_{n-1}(x).$$

现在 $\{f_n(x)\}$ 单调递增. 若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = c(x) < \infty,$$

我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\lambda_n e^{f_{n-1}(x)}\right) \Rightarrow c(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_n \cdot e^{c(x)}.$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_n = c(x) e^{-c(x)} \leqslant \frac{1}{e},$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty, \forall x > 0.$$

98. (98.) 显然 f_n 都是正值连续函数. 首先

$$f_{n+1} - f_n = \frac{f_n^2 - f_n f_{n-1}}{f_n + f_{n-1}} = \frac{1}{2}(f_n - f_{n-1}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(f_n - f_{n-1})^2}{f_n + f_{n-1}}, n = 1, 2, \cdots.$$

然后

$$\int_0^1 (f_{n+1} - f_n)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f_n - f_{n-1})\,\mathrm{d}x, n = 1, 2, \cdots.$$

于是由

$$\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x$$

得 $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 单调递增.
注意到

$$\left(\frac{2x^2}{x+a}\right)' = \frac{2x^2 + 4ax}{(x+a)^2} \geqslant 0, \forall x, a \geqslant 0.$$

于是取

$$c_1 > \max\left\{\max_{x\in[0,1]} \frac{f_1(x)}{f_0(x)}, 1\right\}, c_{n+1} = \frac{2c_n}{c_n + 1}, n = 1, 2, \cdots.$$

注意到 $f_1 \leqslant c_1 f_0$. 若 $f_n \leqslant c_n f_{n-1}$, 则

$$f_{n+1} = \frac{2f_n^2}{f_n + f_{n-1}} \leqslant \frac{2f_n^2}{f_n + \frac{f_n}{c_n}} = \frac{2c_n}{c_n + 1} f_n, n = 1, 2, \cdots.$$

注意到 c_n 满足递增递推, 所以由结论8.4.1得 $c_n \downarrow 1$. 现在

$$\int_0^1 f_{n+1}\mathrm{d}x \leqslant c_{n+1}\int_0^1 f_n\mathrm{d}x \leqslant \cdots \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdot \prod_{k=1}^{n} c_{k+1}.$$

由

$$c_n = 1 + \frac{1}{\frac{c_1}{c_1 - 1}2^{n-1} - 1} = 1 + O\left(2^{-n}\right), n \to +\infty,$$

我们知道 $\prod_{k=1}^{\infty} c_{k+1} < \infty$ 收敛, 这就证明了 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

99. (99.) 记

$$S_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}, T_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin k|}{k}, n = 1, 2, \cdots.$$

注意到 A-D 判别法18.5给出

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} \text{收敛}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|^2}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos(2k)}{k}\right) = +\infty.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\max\left\{\sin k,0\right\}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\min\left\{\sin k,0\right\}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+T_n}{S_n-T_n}=-1.$$

我们再讨论更多一点, 事实上由 Weyl 等分布9.18得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sin k\right|\right)=\int_0^1\left|\sin\left(\pi x\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

于是由 Abel 变换8.2得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin k\right|}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}\left|\sin j\right|\right]\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sin k\right|\right)$$

$$\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum\limits_{j=1}^{n}\left|\sin j\right|}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left|\sin j\right|}{n}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

100. (100.) 记

$$M=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&\cdots&0\\0&1/2&1/2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1/2&1/2\\1/2&0&\cdots&0&1/2\end{pmatrix},\mathbf{x}_0\triangleq\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\\vdots\\x_n^{(k)}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x_1^{(k-1)}\\x_2^{(k-1)}\\\vdots\\x_n^{(k-1)}\end{pmatrix},k=2,3\cdots,$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\\vdots\\x_n^{(k)}\end{pmatrix}=M^k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},k=1,2,3\cdots.$$

注意到 M 是循环矩阵, 由定义23.15可取

$$w_j=e^{\frac{2\pi ij}{n}},j=0,1,,\cdots,n-1,V=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\w_0&w_1&\cdots&w_{n-1}\\w_0^2&w_1^2&\cdots&w_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\w_0^{n-1}&w_1^{n-1}&\cdots&w_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}$$

得

$$M=V\begin{pmatrix}\frac{1+e^{\frac{2\pi i\cdot0}{n}}}{2}&&&\\&\frac{1+e^{\frac{2\pi i\cdot1}{n}}}{2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1+e^{\frac{2\pi i\cdot(n-1)}{n}}}{2}\end{pmatrix}V^{-1}.$$

因为

$$\left|\frac{1+e^{\frac{2\pi i\cdot j}{n}}}{2}\right|<1, j=1,2,\cdots,n-1, V^{-1}=\frac{1}{n}\overline{V},$$

我们知道

$$\lim_{k\to\infty}M^k=V\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}V^{-1}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

我们有

$$\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\\vdots\\x_n^{(k)}\end{pmatrix}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\\\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\\\vdots\\\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\end{pmatrix},$$

这就完成了证明.

101. (101.) 首先

$$\lim_{t\to0^+}\left(\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\right)=\lim_{t\to0^+}\left(\arctan\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

然后

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(0)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^\delta\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{t}{x^2+t^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\cdot\int_0^\delta\frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x+2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\int_\delta^1\frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|\cdot\int_0^\infty\frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x+2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\int_\delta^1\frac{t}{\delta^2+t^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|+2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\frac{t(1-\delta)}{\delta^2+t^2},\end{aligned}$$

即

$$\overline{\lim_{t\to0^+}}\left|\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(0)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\sup_{x\in[0,\delta]}|f(x)-f(0)|.$$

因此由 δ 任意性得

$$\lim_{t\to0^+}\left|\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(0)\,\mathrm{d}x\right|=0,$$

即

$$\lim_{t\to0^+}\left(\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{t\to0^+}\left(\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(0)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}f(0).$$

102. (102.) 记

$$b_n\triangleq\lambda(a_{n+1}-a_n)+(1-\lambda)\frac{a_n}{n}=\lambda a_{n+1}+\left(\frac{1-\lambda}{n}-\lambda\right)a_n,$$

以及

$$c_{n+1}=\left(1-\frac{1-\lambda}{\lambda n}\right)c_n, n=\left\lfloor\frac{1}{\lambda}-1\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{1}{\lambda}-1\right\rfloor+2,\cdots.$$

于是我们有

$$b_n=\lambda\left(a_{n+1}-\frac{c_{n+1}}{c_n}a_n\right)\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}-\frac{a_n}{c_n}=\frac{b_n}{\lambda c_{n+1}},$$

以及

$$\frac{n+1}{c_{n+1}}-\frac{n}{c_n}=\frac{1}{\lambda c_{n+1}},$$

同时上式还给出了 $\frac{n}{c_n}$ 严格单调递增. 又由斯特灵公式9.4

$$\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi(x-1)}\left(\frac{x-1}{e}\right)^{x-1},x\to+\infty$$

和

$$\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)}=(n+\alpha)(n-1+\alpha)\cdots(n+1),\forall n\in\mathbb{N},\alpha>0$$

得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{n}&=c_{\lfloor\frac{1}{\lambda}-1\rfloor+1}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\prod_{k=\lfloor\frac{1}{\lambda}-1\rfloor+1}^{n}\left(\frac{k+1-\frac{1}{\lambda}}{k}\right)\right]\\&=C\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(n+2-\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma(n+1)}\right]=C\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\frac{1}{\lambda}}}{n}=0,\end{aligned}$$

即 $\frac{n}{c_n}\uparrow+\infty$.

现在我们由 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{c_n}}{\frac{n}{c_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{\lambda c_{n+1}}}{\frac{1}{\lambda c_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}b_n=\ell.$$

此时

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{\lambda}\lim_{n\to\infty}\left(b_n-(1-\lambda)\frac{a_n}{n}\right)=\ell.$$

103. (103.) 由

$$1\leqslant x_n^2+(y_n+1)^2=2+\sin\frac{1}{n}\leqslant 3$$

可得 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 有界序列.

设

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k},y_{n_k})=(a,b),$$

我们有

$$\begin{aligned}a^2+b^2+2b&=\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}^2+y_{n_k}^2+2y_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n_k}\right)=1;\\a+b&=\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}+\left(1+\frac{1}{3n_k}\right)y_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n_k]{n_k}}=1.\end{aligned}$$

于是解得 $a=1,b=0$. 因此 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点只能有 $(1,0)$. 至此我们知道

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1,\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

104. (104.) 显然 a_n 是正数列. 设 $x_0>0$ 使得

$$\sqrt[3]{x_0+\sqrt[3]{x_0}}=x_0.$$

高中数学告诉我们

$$x-\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}>0\Leftrightarrow x>x_0.$$

记

$$\begin{aligned}L&\triangleq\max\{a_0,a_1,x_0\}\in[x_0,+\infty);\\\ell&\triangleq\min\{a_0,a_1,x_0\}\in(0,x_0],\end{aligned}$$

我们归纳易得

$$\ell \leqslant a_n \leqslant L, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

现在我们有

$$M \triangleq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{n+1} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[3]{a_n + \sqrt[3]{a_{n-1}}} \leqslant \sqrt[3]{M + \sqrt[3]{M}};$$
$$m \triangleq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{n+1} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[3]{a_n + \sqrt[3]{a_{n-1}}} \geqslant \sqrt[3]{m + \sqrt[3]{m}},$$

即

$$M \leqslant x_0 \leqslant m \leqslant M,$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M = m = x_0.$$

105. (105.) 我们有

$$x_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \frac{1}{2(n+1)} (2nx_n + x_n + y_n) = \frac{2n+1}{2n+2} x_n + \frac{1}{2n+2} y_n;$$
$$y_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^{n} x_k y_k \right)^{\frac{1}{2n+2}} = \left(y_n^{2n} \cdot x_n y_n \right)^{\frac{1}{2n+2}} = x_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}},$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots.$$

对 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 由均值不等式得

$$x_{n+1} = \frac{1}{2n+2} \left(\underbrace{x_n + x_n + \cdots + x_n}_{2n+1\text{个}} + y_n \right) \geqslant \sqrt[2n+2]{x_n^{2n+1} y_n} = y_{n+1}.$$

上述不等式等号成立当且仅当 $x_n = y_n$. 于是归纳可得

$$x_n > y_n > 0, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

于是对 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 我们有

$$x_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} x_n + \frac{1}{2n+2} y_n < \frac{2n+1}{2n+2} x_n + \frac{1}{2n+2} x_n = x_n;$$
$$y_{n+1} = x_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} > y_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} = y_n.$$

单调有界定理可得 $y_0 \leqslant y \leqslant x \leqslant x_0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

注意到

$$\ln y - \ln y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln y_{n+1} - \ln y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln x_n - \ln y_n}{2n+2} \right).$$

于是若 $x > y$ 则我们有

$$\frac{\ln x_n - \ln y_n}{2n+2} \sim \frac{\ln \frac{x}{y}}{2} \cdot \frac{1}{n}, n \to \infty.$$

这就和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln x_n - \ln y_n}{2n+2} \right) < \infty$ 矛盾!, 即 $x = y$.

设

$$\delta_n \triangleq x_n - y_n, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

则

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \frac{(2n+1)\,x_n + y_n}{2n+2} - y_n\left(1+\frac{\delta_n}{y_n}\right)^{\frac{1}{2n+2}}\\ &= \frac{(2n+1)\,x_n + y_n}{2n+2} - y_n\left(1+\frac{1}{2n+2}\frac{\delta_n}{y_n}+t_n\right)\\ &= \frac{n}{n+1}\delta_n - t_n y_n,\end{aligned}$$

这里

$$t_n \triangleq \left(1+\frac{\delta_n}{y_n}\right)^{\frac{1}{2n+2}} - 1 - \frac{\delta_n}{(2n+2)\,y_n}, n=0,1,2,\cdots.$$

Taylor 中值定理得 $\theta_n \in \left(0, \frac{\delta_n}{y_n}\right)$ 使得

$$t_n = \frac{\frac{1}{(2n+2)}\left(\frac{1}{2n+2}-1\right)(1+\theta_n)^{\frac{1}{2n+2}-2}}{2}\frac{\delta_n^2}{y_n^2} = O\left(\frac{\delta_n^2}{n}\right), n\to\infty.$$

现在我们有

$$\frac{(n+1)\,\delta_{n+1}}{n\delta_n} = 1 - \frac{(n+1)\,t_n y_n}{n\delta_n} = 1 + O\left(\frac{\delta_n}{n}\right), n\to\infty.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$, 所以存在 $N\in\mathbb{N}$ 使

$$\frac{(n+1)\,\delta_{n+1}}{n\delta_n} \leqslant 1+\frac{1}{4n} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \forall n \geqslant N.$$

累乘得

$$(n+1)\,\delta_{n+1} \leqslant N\delta_N\sqrt{\frac{n+1}{N}}, \forall n\geqslant N,$$

即

$$\delta_n \leqslant \frac{\sqrt{N}\delta_N}{\sqrt{n}}, \forall n > N.$$

现在有

$$\frac{(n+1)\,\delta_{n+1}}{n\delta_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), n\to\infty,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} n\,(x_n - y_n) = \delta_1 \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\,\delta_{n+1}}{n\delta_n}$$

是某个正常数.

106. (106.) 首先我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}\int_0^{\infty}x^k e^{-x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\mathrm{d}x = n\int_0^{\infty}\left[(1+x)\,e^{-x}\right]^n\mathrm{d}x\\ &= n\int_0^{\infty}e^{n\ln\left[(1+x)e^{-x}\right]}\mathrm{d}x \overset{\ln\left[(1+x)e^{-x}\right]=-y}{=} n\int_0^{\infty}e^{-ny}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意到 $\ln\left[(1+x)\,e^{-x}\right] = -y$ 确定了 $x = x\,(y)$, 我们由拉格朗日反演9.14可得

$$1+\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{3} + o\,(1), y\to 0^+,$$

从而 Laplace 方法可得

$$\int_0^{\infty}e^{-ny}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y = n\int_0^{\infty}e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}y + o\,(1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sqrt{n} + \frac{2}{3} + o\,(1), n\to\infty.$$

现在我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)=-\frac{2}{3}.$$

107. (107.) 对任何 $y_n\uparrow y_0$, 则函数列 $\{f(\cdot,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 符合 Dini 定理条件13.39, 因此关于 $x\in[a,b]$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f(x,y_n)=\varphi(x),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,y_n)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f(x,y_n)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 $\{y_n\}$ 选取任意性得

$$\lim_{y\to y_0^-}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们完成了证明.

108. (108.)

(a). 由

$$|f(x)+a-f(y)-a|\leqslant\alpha|x-y|$$

得 $f+a$ 是压缩映射, 从而存在不动点 $x_0\in\mathbb{R}$. 我们由

$$\begin{aligned}0\leqslant|x_{n+1}-x_0|&=|f(x_n)-f(x_0)+a_n-a|\\&\leqslant(\alpha|x_n-x_0|+|a_n-a|)=\alpha|x_n-x_0|+|a_n-a|,\end{aligned}$$

得

$$|x_{n+1}-x_0|\leqslant\alpha^n|x_1-x_0|+\alpha^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha^{k+1}}|a_k-a|,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha^{k+1}}|a_k-a|}{\frac{1}{\alpha^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha^{n+2}}|a_{n+1}-a|}{\frac{1}{\alpha^{n+2}}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}}=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

(b). 首先在勒贝格积分下[14]有

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\int_0^x|f'(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{|x|}\frac{|y|+M}{|y|+M+1}\mathrm{d}y=|x|-\ln\left(\frac{|x|+M+1}{M+1}\right).$$

现在就有

$$|x_{n+1}|=|f(x_n)+a_n|\leqslant|f(0)|+|x_n|-\ln\left(\frac{|x_n|+M+1}{M+1}\right)+\sup_{n\geqslant1}|a_n|.$$

注意到存在 $A>0$ 使得

$$|f(0)|+\sup_{n\geqslant1}|a_n|+t-\ln\left(\frac{t+M+1}{M+1}\right)\leqslant t,\forall t\geqslant A,$$

我们有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}|&=|f(0)|+|x_n|-\ln\left(\frac{|x_n|+M+1}{M+1}\right)+\sup_{n\geqslant1}|a_n|\\&\leqslant\max\left\{A+|f(0)|+\sup_{n\geqslant1}|a_n|,|x_n|\right\},\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列.

[14]如果想避免实变, 可以求直接用微分学方法, 即做差求导来代替积分学方法.

取 $S>\sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|$ 使得

$$|f(0)|+|a|-\ln\left(\frac{|x|+M+1}{M+1}\right)\leqslant -1,\forall |x|\geqslant S.$$

注意到

$$|f(x)+a-f(y)-a|\leqslant \frac{S+M}{S+M+1}|x-y|,\forall |x|,|y|\leqslant S,S>0,$$

以及

$$|f(x)+a|\leqslant |f(0)|\,|a|+|x|-\ln\left(\frac{|x|+M+1}{M+1}\right)\leqslant |x|-1\leqslant S-1,\forall |x|\leqslant S.$$

我们知道 $f+a:[-S,S]\to[-S,S]$ 是压缩映射, 因此存在唯一不动点 $x_0\in\mathbb{R}$.

现在

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_0|&\leqslant |f(x_n)-f(x_0)|+|a_n-a|\\&\leqslant \frac{\sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|+M}{\sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|+M+1}|x_n-x_0|+|a_n-a|,\end{aligned}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

相似第 1 问即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

109. (109.)

110. (110.) **Method 1**

首先容易看到

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1\frac{\sin(yx)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\left|\int_y^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant M,\forall x,y\geqslant 0.$$

用 $f(x)-f(0^+)$ 代替 f 可不妨设 $f(0^+)=0$.

现在对任何 $\delta\in(0,1)$ 成立

$$\begin{aligned}0\leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\int_0^1\frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|&\leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\int_0^\delta\frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|+\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\int_\delta^1\frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|\\&\overset{\text{积分第二中值定理11.3和黎曼引理9.2}}{\leqslant}\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|f(\delta)\int_\xi^\delta\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|+0\\&\leqslant Mf(\delta),\end{aligned}$$

即由 δ 任意性可得

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1\frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x=0,$$

这就完成了证明.

Method 2 对于使用第二积分中值定理的部分

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\int_0^\delta\frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|,$$

可补充定义 $f(0)=0$, 然后

$$\begin{aligned}0\leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\int_0^\delta\frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|&\leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|\int_0^\delta f(x)\,\mathrm{d}\int_0^{xy}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\\&=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left|f(\delta)\int_0^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-(R-S)\int_0^\delta\int_0^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}f(x)\right|\\&\leqslant Mf(\delta)+M\bigvee_0^\delta f=2Mf(\delta).\end{aligned}$$

于是由 δ 任意性同样得证

$$\lim_{y\to+\infty}\left|\int_0^\delta \frac{f(x)\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\right|=0.$$

111. (111.) 首先连续映射在紧集上有界, 然后由 Taylor 公式拉格朗日余项, 存在有界的矩阵 $\mathbf{t}_n$ 使得

$$\begin{aligned}V(\mathbf{z}_{n+1})&=V(\mathbf{z}_n)+\nabla V(\mathbf{z}_n)\cdot(\mathbf{z}_{n+1}-\mathbf{z}_n)+\mathbf{t}_n\cdot(\mathbf{z}_{n+1}-\mathbf{z}_n)^2\\&=V(\mathbf{z}_n)+\nabla V(\mathbf{z}_n)\cdot\left(\frac{1}{n}F(\mathbf{z}_n)+\mathbf{a}_n\right)+\mathbf{t}_n\cdot\left(\frac{1}{n}F(\mathbf{z}_n)+\mathbf{a}_n\right)^2\\&=V(\mathbf{z}_n)+\nabla V(\mathbf{z}_n)\cdot\frac{1}{n}F(\mathbf{z}_n)+\nabla V(\mathbf{z}_n)\cdot\mathbf{a}_n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=V(\mathbf{z}_n)+\nabla V(\mathbf{z}_n)\cdot\frac{1}{n}F(\mathbf{z}_n)+o\left(\frac{1}{n}\right)\\&\leqslant V(\mathbf{z}_n)-\frac{c}{n}V(\mathbf{z}_n)+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

于是存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$V(\mathbf{z}_{n+1})\leqslant\left(1-\frac{c}{2n}\right)V(\mathbf{z}_n),\forall n\geqslant N,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}V(\mathbf{z}_n)=0.$$

设 $\mathbf{z}_{n_k}\to\mathbf{z}$, 则

$$V(\mathbf{z})=0\Rightarrow\mathbf{z}=\mathbf{z}_*.$$

由命题7.4多元版本即得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{z}_n=\mathbf{z}_*.$$

112. (112.) 取

$$\Omega\triangleq\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x,y>0\right\};x_0\triangleq(\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)^\alpha,y_0\triangleq\frac{\alpha+2}{\alpha+1};$$

$$V(x,y)\triangleq y-y_0-y_0\ln\frac{y}{y_0}+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{y^\alpha}{x}-\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\ln\left((\alpha+1)\frac{y^\alpha}{x}\right)\right).$$

如果记 $\Phi(s)\triangleq s-1-\ln s$, 我们有

$$V(x,y)=y_0\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\Phi\left((\alpha+1)\frac{y^\alpha}{x}\right)\geqslant0$$

且等号成立条件为 $(x,y)=(x_0,y_0)$.

初等计算得

$$\nabla V\cdot F=-(y-y_0)^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{y^\alpha}{x}-\frac{1}{\alpha+1}\right).$$

由 $\lim\limits_{s\to1}\frac{\Phi(s)}{(s-1)^2}=\frac{1}{2}$ 得 $\frac{\Phi(s)}{(s-1)^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内闭有界, 于是对任何紧集 $K\subset\Omega$ 都有 $C_K,C_K'>0$ 使得

$$\begin{aligned}V(x,y)&\leqslant C_K\left[y_0\left(\frac{y}{y_0}-1\right)^2+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left((\alpha+1)\frac{y^\alpha}{x}-1\right)^2\right]\\&=C_K\left[\frac{1}{y_0}(y-y_0)^2+\frac{\alpha+1}{\alpha}\left(\frac{y^\alpha}{x}-\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\right]\\&\leqslant C_K'\left[(y-y_0)^2+\left(\frac{y^\alpha}{x}-\frac{1}{\alpha+1}\right)^2\right]\\&=-C_K'\nabla V\cdot F,\end{aligned}$$

即

$$\nabla V \cdot F \leqslant -\frac{1}{C_K'} V.$$

因此由数学类极限习题111.得

$$\lim_{n\to\infty} p_n = (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)^{\alpha}, \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$$

113. (113.)

引理 30.2

设正数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln t_n}{n} = c > 0,$$

则

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=1}^{N} t_n\right)} = \frac{1}{c}.$$

♡

证明 对任意 $\epsilon > 0$, 取 $M \in \mathbb{N}$ 使得

$$e^{(c+\epsilon)n} \geqslant t_n, \forall n \geqslant M.$$

记 $c_M \triangleq \sum\limits_{n=1}^{M} t_n$.
一方面, 我们有

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=1}^{N} t_n\right)} \leqslant \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln t_N} = \frac{1}{c}.$$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=1}^{N} t_n\right)} \geqslant \underline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln\left(c_M + \sum\limits_{n=M+1}^{N} e^{(c+\epsilon)n}\right)} \\
&= \underline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=M+1}^{N} e^{(c+\epsilon)n}\right)} \geqslant \underline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln\left((N-M)\, e^{(c+\epsilon)N}\right)} \\
&= \underline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{N(c+\epsilon)} = \frac{1}{c+\epsilon},
\end{aligned}$$

由 ϵ 任意性可得

$$\underline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=1}^{N} t_n\right)} \geqslant \frac{1}{c},$$

即

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=1}^{N} t_n\right)} = \frac{1}{c}.$$

回到原题:
由

$$\sum_{k=1}^{n} 8 \cdot 9^k < 9^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

得 n 越大, 则对应的 D 中有限和越大, 我们称 n 为有限和的长度. 记 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 中有 s_n 个 1, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\gamma.$$

注意 $\prod\limits_{i=1}^{n}|D_{a_i}|$ 为长度 n 的 D 中数个数, 则当 m 充分大, 对 D 中第 m 大的数 d_m, 存在唯一的整数 $N\geqslant 2$ 使得

$$\sum_{n=1}^{N-1}\prod_{i=1}^{n}|D_{a_i}|<m\leqslant\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}|D_{a_i}|,$$

即 d_m 长度为 N. 现在我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n}|D_{a_i}|\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln|D_{a_i}|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-s_n)\ln 3+s_n\ln 2}{n}=\gamma\ln 2+(1-\gamma)\ln 3.$$

注意到

$$\ln 9^N\leqslant\ln d_m\leqslant\ln\left(\sum_{k=1}^{N}8\cdot 9^k\right)<\ln 9^{N+1},$$

我们有

$$\ln d_m\sim N\ln 9, m\to+\infty.$$

在引理30.2中考虑 $t_n\triangleq\prod\limits_{i=1}^{n}|D_{a_i}|$ 并由夹逼准则就有

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\ln d_m}{\ln m}=\ln 9\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{\ln\left(\sum\limits_{n=1}^{N}t_n\right)}=\frac{\ln 9}{\gamma\ln 2+(1-\gamma)\ln 3}.$$

114. (114.)

115. (115.) 用 $\mathbb{R}_m[x]$ 表示不超过 $m-1$ 次多项式的空间, 则 D_n 是双线性函数

$$T(p,q)=\int_0^1 x^n f(x)p(x)q(x)\mathrm{d}x, p,q\in\mathbb{R}_m[x]$$

在基

$$\left\{1,x,\cdots,x^{m-1}\right\}$$

下的度量矩阵对应的行列式.

基 $\left\{1,x,\cdots,x^{m-1}\right\}$ 到基 $\left\{(1-x)^0,(1-x)^1,\cdots,(1-x)^{m-1}\right\}$ 的矩阵是上三角矩阵且对角元是 ±1, 因此行列式为 ±1. 所以在新的基下二次型对应的度量矩阵 (相当于用这个上三角矩阵做了合同的过渡矩阵) 行列式不变, 即

$$D_n=\det\left(\int_0^1 x^n(1-x)^{i+j}f(x)\mathrm{d}x\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}.$$

考虑

$$\Lambda_n\triangleq\operatorname{diag}\left(n^{\frac{1}{2}},n^{\frac{3}{2}},\cdots,n^{m-\frac{1}{2}}\right),n\in\mathbb{N},$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(n^{m^2}D_n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{m^2}\det\left(n^{i+j+1}\int_0^1 x^n(1-x)^{i+j}f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}}{|\det\Lambda_n|^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{m^2}\det\left(n^{i+j+1}\int_0^1 x^n(1-x)^{i+j}f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}}{\left(\prod_{i=0}^{m-1}n^{\frac{2i-1}{2}}\right)^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\det\left(n^{i+j+1}\int_0^1 x^n(1-x)^{i+j}f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}\\&=\det\left(f(1)(i+j)!\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}=f(1)^m\det\left((i+j)!\right)_{0\leqslant i,j\leqslant m-1}\\&=f^m(1)\prod_{i=0}^{m-1}(i!)^2,\end{aligned}$$

这里第四个等号来自例题9.10, 最后一个等号来自例题23.219.

116. (116.) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n-a|\leqslant\epsilon,\forall n\geqslant N.$$

注意到 $\bigcup\limits_{k=1}^{N}f^{-1}(k)$ 是有限集, 取

$$M\triangleq\max\left(\bigcup_{k=1}^{N}f^{-1}(k)\right)\in\mathbb{N},$$

当 $n>M$, 我们有 $f(n)>N$, 于是也有

$$\left|a_{f(n)}-a\right|\leqslant\epsilon,$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}a_{f(n)}=a.$$

117. (117.) 对任何 $\epsilon\in(0,1)$, 存在自然数 $N\geqslant 2$ 使得

$$x_j<\epsilon,\forall j\geqslant N.$$

记

$$M\triangleq\max\left\{1,x_1,\cdots,x_{N-1}\right\}.$$

当 $n\geqslant N$, 对任何 $k\in\mathbb{N}$, 设 $x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{k+n}$ 中有 j 个下标小于 N, 则

$$x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{k+n}\leqslant M^j\epsilon^{n-j}\leqslant M^{N-1}\epsilon^{n-N+1}.$$

现在就有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{k\geqslant 1}\left(x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{k+n}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(M^{\frac{N-1}{n}}\epsilon^{\frac{n-N+1}{n}}\right)=\epsilon,$$

即由 ϵ 任意性得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{k\geqslant 1}\left(x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{k+n}\right)^{\frac{1}{n}}=0.$$

30.4 非数学类微分学计算

1. (1.)(答案)

2. (2.) 运用 $\sin x^3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-3}$, 我们有

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt[3]{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-3}}=x\sqrt[3]{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-6}}\\&=x\left[1+\frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-6}}{3}-\frac{\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-6}\right)^2}{9}+o\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{6n-6}\right)^2\right]\\&=x\left[1-\frac{x^6}{18}+\frac{\frac{1}{(2\cdot3-1)!}x^{12}}{3}-\frac{\left(\frac{1}{(2\cdot2-1)!}\right)^2x^{12}}{9}+o\left(x^{12}\right)\right]\\&=x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o\left(x^{13}\right).\end{aligned}$$

因此

$$f^{(13)}(0)=13!\cdot\left(-\frac{1}{3240}\right)=-1921920.$$

3. (3.) 直接计算得

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt}{x^2},x\neq0.$$

于是

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,dy}{x^2}=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}=A-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

由导数极限定理12.2, 我们知道 $g'(0)=\frac{A}{2}$ 且 $g'\in C(\mathbb{R})$.

4. (4.) 由黎曼引理9.2, 显然有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos^n\left(\frac{1}{t}\right)dt}{x}&=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\int_1^{\infty}\frac{\cos^n\frac{t}{x}}{t^2}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^n t dt\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt=\begin{cases}0, & n为奇数\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n为偶数\end{cases}.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0^-}$ 是类似的, 于是我们求得

$$f'(0)=\begin{cases}0, & n为奇数\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n为偶数\end{cases}.$$

5. (5.) 求导得

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{x}e^{\int_0^x\frac{e^t-1}{t}dt}\Rightarrow xf'(x)=(e^x-1)f(x).$$

两边求 n 阶导得

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^jx^{(n-j)}f^{(j+1)}(x)=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\left(e^x-1\right)^{(n-j)}f^{(j)}(x),$$

即

$$xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)=(e^x-1)f^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}C_n^je^xf^{(j)}(x).$$

代入 $x=0$ 得

$$nf^{(n)}(0)=\sum_{j=1}^{n-1}C_n^jf^{(j)}(0),$$

即

$$f^{(n)}(0)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}C_n^j f^{(j)}(0).$$

6. (6.) 由经典的有理分式展开18.2, 我们有

$$\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right),x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}&=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n\pi}}-\frac{1}{1+\frac{x}{n\pi}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^m-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{n\pi}\right)^m\right)\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{\pi^{2m+2}n^{2m+2}}=2\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{2m+2}n^{2m+2}}\right)x^{2m+1},\end{aligned}$$

这就证明了

$$f^{(2m+1)}(0)=(2m+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{2m+2}n^{2m+2}}>0.$$

7. (7.) 注意到

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-2x+4}&=\frac{x(x+2)}{(x^2-2x+4)(x+2)}=\frac{x^2+2x}{x^3+8}\\&=\frac{1}{8}\frac{x^2}{1+\frac{x^3}{8}}+\frac{1}{4}\frac{x}{1+\frac{x^3}{8}}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n x^{3n+2}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n x^{3n+1},\end{aligned}$$

我们有

$$\left(\frac{x}{x^2-2x+4}\right)^{(2024)}|_{x=0}=(2024)!\left(-\frac{1}{8}\right)^{674}\frac{1}{8}=\frac{2024!}{8^{675}}.$$

8. (8.) 注意到 $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$, 我们有

$$\prod_{k=1}^{2022}\tan(kx)=\prod_{k=1}^{2022}\left(kx+\frac{1}{3}k^3x^3+o\left(x^3\right)\right).$$

为了凑出 x^{2024} 的系数, 我们可得

$$x^{2024}=x^{s+3(2022-s)}\Rightarrow s=2021.$$

从而

$$f^{(2024)}(0)=2024!\cdot\sum_{j=1}^{2022}\frac{2022!}{j}\cdot\frac{j^3}{3}=2024!\cdot\sum_{j=1}^{2022}\frac{2022!}{3}j^2.$$

9. (9.) 一方面我们有

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sinh x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}\right)=\sum_{n\text{为正奇数}}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}>x,\forall x>0.$$

另外一方面由 $\sin\sinh$ 无穷积展开18.2得

$$\sin x\sinh x=x^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^4}{n^4\pi^4}\right)<x^2,\forall x>0,$$

这就证明了(10.34).

10. (10.) 当 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 计算会更简洁一些. 事实上,

$$F(x)=\int_0^1 d\xi\int_0^1 f(x+h\xi+h\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

于是

$$F''(x)=\int_0^1 d\xi\int_0^1 f''(x+h\xi+h\eta)\,\mathrm{d}\eta=\int_0^1\frac{f'(x+h\xi+h)-f'(x+h\xi)}{h}d\xi$$
$$=\frac{f(x+h+h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)}{h^2}=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2},$$

这就证明了(10.35). 当 $f\in C(\mathbb{R})$, 读者需要通过换元法把 x 转化到积分上下限去再求导, 下面基于高观点给两种快速实现光滑到连续的方法.

Method 1 ♠ 测试函数法[15]:

对任何 $v\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\cdot v''(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\xi+\eta)\,v''(x)\,\mathrm{d}x d\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,v''(x-\xi-\eta)\,\mathrm{d}x d\xi\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\int_0^h\int_0^h v''(x-\xi-\eta)\,d\xi\mathrm{d}\eta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{v(x-2h)-2v(x-h)+v(x)}{h^2}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}v(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由测试函数问题13.64, 我们有

$$\left[\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]''=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}.$$

Method 2 ♠ 磨光逼近法:

因为(10.35)右边只涉及 f, 所以自然猜测 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 可以改成 $f\in C(\mathbb{R})$. 由卷积磨光方法13.14, 我们知道存在 $f_\delta\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致的有

$$\lim_{\delta\to0^+}f_\delta(x)=f(x),\ \lim_{\delta\to0^+}f_\delta''(x)=f(x).$$

由光滑的结果有

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f_\delta(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta=\frac{f_\delta(x+2h)-2f_\delta(x+h)+f_\delta(x)}{h^2}.\tag{30.50}$$

读者容易证明[16]

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f_\delta(x+\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta=F''(x).$$

于是在(30.50)两把让 $\delta\to0^+$ 可得(10.35).

11. (11.) 由 Tayloe 级数我们有

$$e^x+e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},2e^{ax^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nx^{2n}}{n!},x\in\mathbb{R}.$$

于是当 $a\geqslant\frac{1}{2}$, 利用 $(2n)!!=n!\cdot2^n,\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nx^{2n}}{n!}\geqslant2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^nn!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}\geqslant2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

[15]现代 Pde 最重要的技巧, 利用分部积分把导数转移到测试函数上去, 是分部积分转移导数思想最深刻的环节.

[16]并不平凡, 但愿意使用这个方法的人应该很容易证明.

即(10.36)成立. 此外注意到如果(10.36)成则有

$$a \geqslant \frac{1}{x^2}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \forall x>0.$$

故

$$\begin{aligned} a &\geqslant \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)\\ &=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

即所求 a 的范围是 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

12. (12.) 注意到

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x+y,y)=f_x'(x+y,y)+f_y'(x+y,y)=0,$$

我们有

$$f(x+y,y)=C(x)\Rightarrow C(-y)=f(0,y)=\frac{1}{e^y(1+e^y)},$$

即

$$f(x+y,y)=C(x)\Rightarrow C(-y)=f(0,y)\Rightarrow -C'(-y)=f_y'(0,y)=\frac{1}{e^y(1+e^y)}.$$

注意到

$$C'(y)=-\frac{1}{e^{-y}(1+e^{-y})}\Rightarrow C(y)=\ln(1+e^y)-e^y+C,$$

我们有 $f(x+y,y)=\ln(1+e^x)-e^x+C$. 代入初值条件得

$$\ln 2-1=f(0,0)=\ln 2-1+C\Rightarrow C=0,$$

即

$$f(x+y,y)=\ln(1+e^x)-e^x\Rightarrow f(x,y)=\ln\left(1+e^{x-y}\right)-e^{x-y}.$$

13. (13.) 不失一般性, 假设 $f(x_0)=x_0=0$, 否则用 $f(x+x_0)-f(x_0)$ 代替 $f(x)$, β_n-x_0 代替 β_n, α_n-x_0 代替 α_n 即可.

现在

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n}\frac{f(\beta_n)}{\beta_n}-\frac{\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}\frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\frac{f(\beta_n)}{\beta_n}-\frac{\frac{\alpha_n}{\beta_n}}{1-\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n}\right). \end{aligned}$$

我们设 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}=c\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}}\frac{f(\beta_{n_k})}{\beta_{n_k}}-\frac{\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}}{1-\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}}\frac{f(\alpha_{n_k})}{\alpha_{n_k}}\right)=\frac{1}{1-c}f'(x_0)-\frac{c}{1-c}f'(x_0)=f'(x_0).$$

设 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}=\infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}}\frac{f(\beta_{n_k})}{\beta_{n_k}}-\frac{\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}}{1-\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}}\frac{f(\alpha_{n_k})}{\alpha_{n_k}}\right)=0\cdot f'(x_0)-(-1)\cdot f'(x_0)=f'(x_0).$$

类似命题7.4, 我们有得到(10.37).

14. (14.) 由链式法则得

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x+y,x-y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x+y,x-y)=2(x+y)\cos(2x).$$

于是

$$g(x,y)=(x+y)^2\cos(2x)+C(x).$$

现在

$$g(x,0)=0\Rightarrow g(x,y)=(x+y)^2\cos(2x)-x^2\cos(2x),$$

即

$$u(1,0)=g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cos 1.$$

15. (15.) 充分性, 若 $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f=\nabla\varphi$, 即

$$f=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right).$$

因此

$$Df=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}\end{pmatrix},$$

即由混合偏导数与求导顺序无关知 $Df(x)$ 是对称的.

必要性: 若 $Df(x)$ 是对称的. 设 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, 则

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i},i,j=1,2,\cdots,n.$$

考虑

$$\varphi(x)\triangleq\sum_{i=1}^n\int_0^1 x_if_i(tx)\,\mathrm{d}t\in C^2(\mathbb{R}^n).$$

对 $j=1,2,\cdots,n$ 成立

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}&=\sum_{i=1}^n\int_0^1\frac{\partial(x_if_i(tx))}{\partial x_j}\mathrm{d}t=\int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n\int_0^1 tx_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n\int_0^1 tx_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 t\frac{\partial(f_j(tx))}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t+f_j(x)-\int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t\\&=f_j(x),\end{aligned}$$

即 $f=\nabla\varphi$.

16. (16.) 取 $\delta\in(0,1)$ 使得 $\left|\frac{\tan x}{\sin\frac{x}{2}}\right|=\delta$ 在 $[0,2\pi]$ 的解 $\pi-\epsilon,\pi+\epsilon$ 满足 $0<\epsilon<\frac{\pi}{2}$. 容易发现对 $x\in[0,2\pi]$, 有

$$\left|\frac{\tan x}{\sin\frac{x}{2}}\right|<\delta\Leftrightarrow x\in(\pi-\epsilon,\pi+\epsilon).\tag{30.51}$$

对 $(x,y,z)\in f(S_\delta)$, 我们分类讨论.

(a). 若 $x\neq 0,y\neq 0,z\neq 0$, 则

$$\tan\varphi=\frac{y}{x},\varphi\neq 0,\pi,t=\frac{z}{\sin\frac{\varphi}{2}}.\tag{30.52}$$

注意到从(30.52)得一旦 φ 确定, 则 t 被唯一确定. 若此时是 f 不是单射的反例, 即 φ 不能由(30.52)唯一

确定, 即由(30.52)第一个式子的 tan 的性质得 φ 有两种可能 $\varphi_0, \varphi_0+\pi$. 注意到

$$\begin{aligned} y &= \left(1+\frac{z}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin\varphi_0 = \sin\varphi_0 + 2z\cos^2\frac{\varphi_0}{2} \\ &= \sin(\varphi_0+\pi) + 2z\cos^2\left(\frac{\varphi_0+\pi}{2}\right) = -\sin\varphi_0 + 2z\sin^2\frac{\varphi_0}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_0 + 2z\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)\right) = z. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y &= -\sin\varphi_0 + 2z\sin^2\frac{\varphi_0}{2} = -\sin\varphi_0 + 2y\sin^2\frac{\varphi_0}{2} \\ &\Rightarrow y = -\frac{\sin\varphi_0}{1-2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} = -\tan\varphi_0 = -\frac{y}{x} \Rightarrow x = -1. \end{aligned}$$

故由(30.51)和

$$|t| = \left|\frac{\tan\varphi_0}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right| < \delta, |t| = \left|\frac{\tan(\varphi_0+\pi)}{\sin\left(\frac{\varphi_0+\pi}{2}\right)}\right| < \delta,$$

我们有 $\varphi_0, \varphi_0+\pi \in [\pi-\epsilon, \pi+\epsilon]$, 从而和 $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ 矛盾! 故我们证明了此时和 (x,y,z) 对应的 $(t,\varphi) \in S_\delta$ 是唯一的.

(b). 若 $x \neq 0, y = 0$, 则 $\varphi = 0$ 或者 π. 对于前者 $x = 1+t, y = 0, z = 0$, 即 $t = x-1$. 对于后者 $x = -1, y = 0, z = t$, 故 $t = z$. 如果此时就能说明 f 不是单射, 那么 $z = 0 = -2$ 而矛盾! 故我们证明了此时和 (x,y,z) 对应的 $(t,\varphi) \in S_\delta$ 是唯一的.

(c). 若 $x \neq 0, y \neq 0, z = 0$, 则 $\varphi \neq 0, t = 0$, 此时 x, y 分布在平面的单位圆周上, 因此此时和 (x,y,z) 对应的 $(t,\varphi) \in S_\delta$ 是唯一的.

(d). 若 $x = 0, y \neq 0$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, 此时 $t = \sqrt{2}z$. 于是如果此时就能说明 f 不是单射, 则有

$$y = \left(1+\sqrt{2}z\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi = 1+z, z-1.$$

这就是一个矛盾! 故我们证明了此时和 (x,y,z) 对应的 $(t,\varphi) \in S_\delta$ 是唯一的.

(e). 若 $x = 0, y = 0$, 则

$$1+t\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow z^2 + \left(t\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 = t^2 \Rightarrow z^2 = t^2 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow |t| \geqslant 1,$$

这是不可能的!

综上所述, 我们证明了 f 是单射.

17. (17.) 当 $n = 0$ 时(10.38)显然成立. 假设(10.38)对小于等于 n 都成立, 当 $n+1$ 时有

$$\begin{aligned} \left|f^{(n+1)}(0)\right| &= \left|\left[f(x)g(x)\right]^{(n)}|_{x=0}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|f^{(k)}(0)\right|\left|g^{(n-k)}(0)\right| \leqslant 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k+1)!(n-k)! \\ &= 2\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(k+1)!(n-k)!}{k!(n-k)!} = 2n!\sum_{k=0}^{n}(k+1) = 2n!\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= (n+2)!, \end{aligned}$$

这就由数学归纳法证明了对一切 $n \in \mathbb{N}$ 都有(10.38)成立.

18. (18.) 注意到二阶椭圆方程

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f^2(x)\cdot f(x) = 0$$

满足一致椭圆条件, 即 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 正定. 由极值原理10.5得 $f(x) = 0, x \in \overline{\Omega}$.

19. (19.) 设某个 $\alpha > 0$ 使得

$$\triangle u(\mathbf{x}) \leqslant \alpha u(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in B.$$

记 B_r 表示半径为 r 的开球, 考虑

$$\phi(r) \triangleq \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r} u\mathrm{d}S.$$

首先

$$\phi(r)=\frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1} u(r\mathbf{x})\,\mathrm{d}S, \phi'(0)=\frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1}[\nabla u(\mathbf{0})\cdot\mathbf{x}]\,\mathrm{d}S=0.$$

然后

$$\begin{aligned}\phi'(r)&=\frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1}[\nabla u(r\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}]\,\mathrm{d}S=\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r}\left[\nabla u(\mathbf{x})\cdot\frac{\mathbf{x}}{r}\right]\mathrm{d}S\\ &\overset{\text{Gauss-Green 公式}}{=}\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{B_r}\Delta u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_0^r\mathrm{d}t\int_{\partial B_t}\Delta u\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

于是

$$\phi''(r)=\frac{1}{na(n)r^{n-1}}\int_{\partial B_r}\Delta u\mathrm{d}S-\frac{n-1}{na(n)r^n}\int_0^r\mathrm{d}t\int_{\partial B_t}\Delta u\mathrm{d}S=\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r}\Delta u\mathrm{d}S-\frac{n-1}{r}\phi'(r).$$

现在

$$\phi''(r)+\frac{n-1}{r}\phi'(r)=\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r}\Delta u\mathrm{d}S\leqslant\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r}\alpha u\mathrm{d}S=\alpha\phi(r),\phi(0)=0.$$

我们有

$$s^{n-1}\phi'(s)=\int_0^s\left(r^{n-1}\phi'(r)\right)'\mathrm{d}r\leqslant\int_0^s\alpha r^{n-1}\phi(r)\,\mathrm{d}r,\forall s\in[0,1).$$

对 $t\in[0,1)$, 我们有

$$\phi(t)=\int_0^t\phi'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\left[s^{1-n}\int_0^s\alpha r^{n-1}\phi(r)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s\leqslant\alpha\int_0^t\left[\int_0^s\phi(r)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s.$$

考虑

$$F(t)\triangleq\int_0^t\left[\int_0^s\phi(r)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s,$$

我们有

$$0\leqslant F''(t)\leqslant\alpha F(t),F(0)=F'(0)=0.$$

注意到

$$\left(\frac{F'(x)+\sqrt{\alpha}F(x)}{e^{\sqrt{\alpha}x}}\right)'=\frac{F''(x)-\alpha F(x)}{e^{\sqrt{\alpha}x}}\leqslant0\Rightarrow\frac{F'(x)+\sqrt{\alpha}F(x)}{e^{\sqrt{\alpha}x}}\leqslant0,$$

以及

$$\left[e^{\sqrt{\alpha}x}F(x)\right]'=\left[F'(x)+\sqrt{\alpha}F(x)\right]e^{\sqrt{\alpha}x}\leqslant0\Rightarrow e^{\sqrt{\alpha}x}F(x)\leqslant0\Rightarrow F(x)\leqslant0.$$

现在

$$F(t)\leqslant0,\forall t\in[0,1),$$

因此

$$F(t)=0\Rightarrow\phi=0\Rightarrow u=0,$$

矛盾!, 我们完成了证明.

20. (20.) 首先

$$\frac{d^t}{dx^t}(x-\alpha_j)^{-k_j}=\left[(-1)^t\prod_{i=0}^{t-1}(k_j+i)\right]\cdot(x-\alpha_j)^{-k_j-t},t=0,1,2,\cdots,$$

$t=0$ 时约定上述乘积为 1.

现在运用定理10.2得

$$\begin{aligned}&\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-\alpha_1)^{-k_1}(x-\alpha_2)^{-k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{-k_n}\right]\\&=m!\sum_{|\beta|=m}\prod_{j=1}^{n}\frac{\left[(x-\alpha_j)^{-k_j}\right]^{(\beta_j)}}{\beta_j!}\\&=m!\sum_{|\beta|=m}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{\beta_j}\prod\limits_{i=0}^{\beta_j-1}(k_j+i)}{\beta_j!}\cdot(x-\alpha_j)^{-k_j-\beta_j}\right],\end{aligned}$$

这里 $\sum\limits_{|\beta|=m}$ 表示对

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j=m,\beta_j\in\mathbb{N}_0,j=1,2,\cdots,n$$

求和.

21. (21.)**Step 1**

由 Taylor 公式得

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right),x\to0,$$

于是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x|\leqslant\delta$ 有

$$\left|f(x)-\frac{f''(0)}{2}x^2\right|<\epsilon x^2.$$

取 $\epsilon=\frac{f''(0)}{4}>0$, 当 $|x|\leqslant\delta$ 我们有

$$f(x)>\frac{f''(0)}{2}x^2-\frac{f''(0)}{4}x^2=\frac{f''(0)}{4}x^2>0.$$

现在我们知道 $\sqrt{f}$ 在 $x=0$ 邻域可微. 由

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=f''(0)>0$$

知 f' 在 $x=0$ 去心邻域有定义, 因此 g 在 $x=0$ 去心邻域有定义.

注意到

$$g(x)=\frac{\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)}{2\sqrt{f(x)}\left[f'(x)\right]^2},f(x)\sim\frac{f''(0)}{2}x^2=cx^2,\sqrt{f(x)}\sim\sqrt{c}x,f'(x)\sim2cx,$$

我们有

$$\begin{aligned}&\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)=\left[2cx+O\left(x^2\right)\right]^2-2\left[2c+O(x)\right]\left[cx^2+O\left(x^3\right)\right]\\&=4c^2x^2-2\cdot2cx^2+O\left(x^3\right)=O\left(x^3\right),\end{aligned}$$

以及

$$g(x)\sim\frac{\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)}{8c^2\sqrt{c}x^3},$$

即 $g(x)=O(1)$, 这就得证.

Step 2

当 $f\in C^2(\mathbb{R})$, 断言结论不一定成立. 考虑

$$f(x)=\left(x+|x|^{\frac{3}{2}}\right)^2\in C^2(\mathbb{R}),$$

我们有

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3|x|^2+5x^{\frac{3}{2}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ 2x-3x^2+5(-x)^{\frac{3}{2}}, & x<0\end{cases},f''(x)=\begin{cases}2+6x+\frac{15}{2}\sqrt{x}, & x>0\\ 2, & x=0\\ 2-6x-\frac{15}{2}\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}.$$

直接计算 $[f']^2-2f''f$ 发现有一个 x 幂次严格小于 3 的项, 因此 g 在 $x=0$ 邻域无界, 这就是一个反例.

22. (22.)**Method 1**

不失一般性, 我们证明 $i=n$ 的情况.

由行列式求导公式得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\end{vmatrix}\\ =&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_1\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_n\partial x_j}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\end{vmatrix}\\ =&\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_1\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_n\partial x_j}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

对每一个 $k=1,2,\cdots,n-1$, 我们来证明

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_1\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_n\partial x_j}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\end{vmatrix}=0.\tag{30.53}$$

事实上, 按第 k 行 Laplace 展开(30.53)[17], 对于 $\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}),i\neq j$ 的项, 其在展开中出现两次且对应项相互抵

[17] 你不妨考虑特殊情况

$$\begin{vmatrix}f_{xy} & f_{xz}\\ g_y & g_z\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}f_{xy} & f_{yz}\\ g_x & g_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f_{xz} & f_{yz}\\ g_x & g_y\end{vmatrix}$$

来辅助理解.

消, 例如考虑 $\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x})$, (30.53)中左边实际上是

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial T_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_3 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial T_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_3 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix},$$

容易看到按上式按第 k 行展开, 对应的 $\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x})$ 项相互抵消. 因此我们得到了(30.53).

Method 2[18]

考虑

$$M(\mathbf{x}) \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}.$$

线性代数告诉我们对 $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有

$$P^T (P^*)^T = \det P \cdot I_n.$$

用 P_{ij} 表示 P 的代数余子式, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ki} P_{kj} = \det P \cdot \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{30.54}$$

即

$$\frac{\partial \det P}{\partial p_{km}} = P_{km}, k, m = 1, 2, \cdots, n.$$

在式(30.54)中取 $P = M(\mathbf{x})$ 并两边对 $x_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 求导得

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+j} \left(M_{kj}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 T_k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial T_k}{\partial x_i} \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_j} \right) \right] = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+m} M_{km}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \frac{\partial^2 T_k(\mathbf{x})}{\partial x_m \partial x_j}.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+j} \left(M_{kj}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 T_k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial T_k}{\partial x_i} \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_j} \right) \right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+m} M_{km}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \frac{\partial^2 T_k(\mathbf{x})}{\partial x_m \partial x_j}.$$

注意

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+m} M_{km}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \frac{\partial^2 T_k(\mathbf{x})}{\partial x_m \partial x_j} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+m} M_{km}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 T_k(\mathbf{x})}{\partial x_m \partial x_i},$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+j} \frac{\partial T_k}{\partial x_i} \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_j} \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T_k}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_j} \right) = 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

[18]来自 Evans pde 第二版 462-463 页的 Divergence-free rows 引理.

于是

$$M^T(\mathbf{x})\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\frac{\partial M_{1j}}{\partial x_j}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{2+j}\frac{\partial M_{2j}}{\partial x_j}\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\frac{\partial M_{nj}}{\partial x_j}\end{pmatrix}=0.$$

若 $\det M(\mathbf{x})\neq 0$, 则得证. 若 $\det M(\mathbf{x})=0$, 我们考虑

$$\widetilde{T_i^\epsilon}\triangleq T_i+\epsilon x_i, i=1,2,\cdots,n,\epsilon>0,$$

对应得定义

$$\widetilde{M^\epsilon}(\mathbf{x}),\widetilde{M_{i,j}^\epsilon}(\mathbf{x}),i,j=1,2,\cdots,n.$$

当 $\epsilon>0$ 充分小, 我们有

$$\det\widetilde{M^\epsilon}(\mathbf{x})=\det\left[M(\mathbf{x})+\epsilon I_n\right]\neq 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial\widetilde{M_{i,j}^\epsilon}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]=0,i=1,2,\cdots,n.$$

我们同样完成了证明.

23. (23.) 定义

$$M_{ij}(\mathbf{x})\triangleq\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix},i,j=1,2,\cdots,n,$$

以及

$$M(\mathbf{x})\triangleq\begin{vmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix}.$$

对 $j=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})M_{ij}(\mathbf{x})\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(T\mathbf{x})\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right].$$

现在

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{j-1}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]\\ &=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})M_{ij}(\mathbf{x})\right]\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(T\mathbf{x})\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right].\end{aligned}$$

一方面, 利用非数学微分计算习题22., 我们有

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(T\mathbf{x})\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(T\mathbf{x})\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]=0.$$

另外一方面, 利用行列式的 Laplace 展开得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(-1)^{k+j}\frac{\partial T_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})M_{ij}(\mathbf{x})\right]=\begin{cases}M(\mathbf{x}), & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases},$$

然后我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(T\mathbf{x})\frac{\partial T_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})M_{ij}(\mathbf{x})\right]\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(T\mathbf{x})\sum_{j=1}^{n}\left[(-1)^{j-1}\frac{\partial T_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})M_{ij}(\mathbf{x})\right]\\ &=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(T\mathbf{x})M(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

这就完成了证明.

注 用逼近方法13.49可以把条件削弱为 $T\in C^1(\mathbb{R}^n)$.

若 T 是保持定向不变的微分同胚, 我们再给一种基于 PDE 的方法.

笔记 [♠, ∗] 对任何 $\phi \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 我们直接计算得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(T\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \phi(T\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial\left(f_j(T\mathbf{x})\right)}{\partial x_j} \phi(T\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (-1)^j f_j(T\mathbf{x}) \frac{\partial(\phi(T\mathbf{x}))}{\partial x_j} \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (-1)^j \sum_{i=1}^n g_i(T\mathbf{x}) \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \frac{\partial(\phi(T\mathbf{x}))}{\partial x_j} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (-1)^j \sum_{i=1}^n g_i(T\mathbf{x}) \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(T\mathbf{x}) \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n g_i(T\mathbf{x}) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(T\mathbf{x}) \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (-1)^i g_i(T\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(T\mathbf{x}) \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (-1)^i g_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \phi(T\mathbf{x}) \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(T\mathbf{x}) \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}\mathbf{x},$$

这就证明了(10.39).

24. (24.) 对不相同的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, 由牛顿莱布尼兹公式我们有

$$(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) = \int_0^1 (\mathbf{y}-\mathbf{x})^T f'(\mathbf{x} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \mathrm{d}t > 0,$$

即 $f(\mathbf{y}) \neq f(\mathbf{x})$. 于是我们证明了 f 是单射.

25. (25.) 首先用 Cauchy 不等式和牛顿莱布尼兹公式, 我们有

$$\begin{aligned}&|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})|\geqslant(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T\cdot(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y}))\\&=\int_0^1(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T\cdot J\mathbf{f}(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\mathrm{d}t\\&\geqslant\alpha\int_0^1|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2\,\mathrm{d}t=\alpha|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2,\end{aligned}$$

于是我们有

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})|\geqslant\alpha|\mathbf{y}-\mathbf{x}|,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$

从上面不等式我们可以看出 $\mathbf{f}$ 是单射. 又设从条件不等式可以看出 $\mathbf{f}$ 雅可比行列式处处非 0, 从而 $\mathbf{f}$ 是开映射且存在可微逆映射, 即 $\mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$ 是开集. 设

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\in\mathbf{f}(\mathbb{R}^n),\lim_{n\to\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)=\mathbf{y}.$$

我们有

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_m)|\geqslant\alpha|\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_n|,m,n=1,2,\cdots,$$

即 $\mathbf{x}_n$ 是 Cauchy 列, 从而

$$\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\to\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y},$$

即 $\mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$ 是闭集. 由 $\mathbb{R}^n$ 连通我们知道 $\mathbf{f}$ 是满射. 因此我们证明了 f 是微分同胚.

26. (26.)

(a). 设 $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$, 我们有

$$(\alpha\cdot\nabla)^2f(\mathbf{x}_0)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\alpha_j\frac{\partial^2f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}_0)=\alpha^TH(\mathbf{x})\alpha,$$

这里 $H(\mathbf{x})$ 是 f 的 Hess 矩阵. 显然条件可以扩充为对任何非 $\mathbf{0}$ 向量 α 都有 $\alpha^TH(\mathbf{x}_0)\alpha>0$.

注意到 $H(\mathbf{x}_0)$ 是正定矩阵, 其顺序主子式是连续函数, 因此存在 $\mathbf{x}_0$ 的 δ 邻域使得所有顺序主子式也为正, 即 $H(\mathbf{x})$ 在这个 δ 邻域都是正定的.

对 $\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}_0,\delta)\setminus\{\mathbf{x}_0\}$, 我们由牛顿莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\nabla f(\mathbf{x})&=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot(\nabla f(\mathbf{x})-\nabla f(\mathbf{x}_0))\\&=\int_0^1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^TH(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}t\\&>0.\end{aligned}$$

(b). 设

$$g_{\mathbf{x}}(t)\triangleq f(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)),t\in[0,1],\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}_0,\delta)\setminus\{\mathbf{x}_0\},$$

我们有

$$tg'_{\mathbf{x}}(t)=(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))>0,\forall t\in(0,1].$$

现在我们知道

$$f(\mathbf{x})=g(1)>g(0)=f(\mathbf{x}_0).$$

因此我们知道 $\mathbf{x}_0$ 是 f 极小值点.

27. (27.) 极小值点给出

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0.$$

于是对映射

$$h \mapsto f\left(x_0+h, y_0+h\right)$$

在 $h=0$ 作二阶 Taylor 展开得

$$f\left(x_0+h, y_0+h\right)-f\left(x_0, y_0\right)=\frac{1}{2}\left[h^2 f_{xx}\left(x_0, y_0\right)+2h^2 f_{xy}\left(x_0, y_0\right)+h^2 f_{yy}\left(x_0, y_0\right)\right]+o\left(h^2\right), h \to 0^+.$$

现在

$$f_{xx}\left(x_0, y_0\right)+2 f_{xy}\left(x_0, y_0\right)+f_{yy}\left(x_0, y_0\right)=2 \frac{f\left(x_0+h, y_0+h\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{h^2}-o(1) \geqslant-o(1),$$

让 $h \to 0^+$ 即得

$$f_{xx}\left(x_0, y_0\right)+2 f_{xy}\left(x_0, y_0\right)+f_{yy}\left(x_0, y_0\right) \geqslant 0.$$

28. (28.) 记

$$L \triangleq\left(\frac{\partial F^i(0)}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

题目不等式和瑞丽商21.15给出

$$|L|=\sup_{|\mathbf{x}|=1}|L \mathbf{x}|=\sup_{|\mathbf{x}|=1} \sqrt{\left(\mathbf{x}^T L^T L \mathbf{x}\right)}=\sqrt{\lambda_{\max }\left(L^T L\right)} \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}\left(L^T L\right)}<1.$$

则由可微的定义得

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})-L \mathbf{x}|=|\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{0})-L \mathbf{x}|=o(|\mathbf{x}|), |\mathbf{x}| \to 0.$$

现在取 $\delta>0$ 使得 $|\mathbf{x}| \leqslant \delta$ 时有

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})-L \mathbf{x}| \leqslant(1-|L|)|\mathbf{x}|.$$

于是当 $|\mathbf{x}| \leqslant \delta$ 时有

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \leqslant|\mathbf{F}(\mathbf{x})-L \mathbf{x}|+|L \mathbf{x}| \leqslant(1-|L|)|\mathbf{x}|+|L||\mathbf{x}|=|\mathbf{x}| \leqslant \delta,$$

这就完成了证明.

29. (29.) 直接计算得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n\left[(-1)^{j-1} \frac{\partial h}{\partial y_k}(T \mathbf{x}) \frac{\partial T_k}{\partial x_j} f_j(T \mathbf{x})\right] \\
&=\sum_{i=1}^n g_i(T \mathbf{x}) \sum_{k=1}^n \frac{\partial h}{\partial y_k}(T \mathbf{x}) \sum_{j=1}^n(-1)^{j-1} \frac{\partial T_k}{\partial x_j}\begin{vmatrix}
\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x})} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \widehat{\frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x})} & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})
\end{vmatrix} \\
&=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1} g_i(T \mathbf{x}) \frac{\partial h}{\partial x_i}(T \mathbf{x}) \cdot\begin{vmatrix}
\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial T_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})
\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

30. (30.) 因为 $\det\left(J f\left(\mathbf{x}_0\right)\right) \neq 0$, 所以由反函数定理得 $\mathbf{x}_0$ 邻域 U 使得 f 是 U 到 $\mathbb{R}$ 凸开集的微分同胚且

$$M \triangleq \sup_{\mathbf{y} \in f(U)}\left|\left|J f^{-1}(\mathbf{y})\right|\right|<\infty.$$

现在对 $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in U$ 由拟微分中值定理13.23得

$$\begin{aligned}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'||&=\left|\left|f^{-1}\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)-f^{-1}\left(f\left(\mathbf{x}'\right)\right)\right|\right|\\&\leqslant M\left||f\left(\mathbf{x}\right)-f\left(\mathbf{x}'\right)\right|\right|.\end{aligned}$$

于是取 $w\triangleq\frac{1}{M}$ 为所求.

31. (31.)

(a). 取 $z\in[0,1]$ 使得

$$|x-z|=\frac{1}{2}\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}},$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_x^z\left[f\left(y,t_1\right)-f\left(y,t_2\right)\right]\mathrm{d}y=\int_x^z\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial t}\left(y,t\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\\&=\int_x^z\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(y,t\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_x^z\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(y,t\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\left(z,t\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,t\right)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 1$ 和积分中值定理得介于 x,z 之间的 ξ 使得

$$\left|f\left(\xi,t_1\right)-f\left(\xi,t_2\right)\right|\cdot|z-x|=\left|\int_x^z\left[f\left(y,t_1\right)-f\left(y,t_2\right)\right]\mathrm{d}y\right|\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}2\mathrm{d}t\right|=2\left|t_2-t_1\right|.$$

于是我们有

$$\left|f\left(\xi,t_1\right)-f\left(\xi,t_2\right)\right|\leqslant 4\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}}$$

以及

$$|x-\xi|\leqslant|x-z|=\frac{1}{2}\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}}.$$

(b). 由 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 1$ 和拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}&\left|f\left(x,t_1\right)-f\left(x,t_2\right)\right|\leqslant\left|f\left(x,t_1\right)-f\left(\xi,t_1\right)\right|+\left|f\left(\xi,t_1\right)-f\left(\xi,t_2\right)\right|+\left|f\left(\xi,t_2\right)-f\left(x,t_2\right)\right|\\&\leqslant|x-\xi|+4\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}}+|x-\xi|\leqslant 2\times\frac{1}{2}\times\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}}+4\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}}=5\left|t_1-t_2\right|^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

这就完成了证明.

32. (32.)**Step 1** 验证 f 下凸.

对

$$\mathbf{x}\neq\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\mathbf{z}\triangleq\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y},\lambda\in(0,1,)$$

我们由二元 Taylor 公式和 Hess 矩阵正定得

$$\begin{aligned}f\left(\mathbf{x}\right)&>f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right)+\nabla f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right)\cdot\left(\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}-\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right);\\f\left(\mathbf{y}\right)&>f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right)+\nabla f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right)\cdot\left(\mathbf{y}-\lambda\mathbf{x}-\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right).\end{aligned}$$

两式线性组合得

$$\lambda f\left(\mathbf{x}\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(\mathbf{y}\right)>f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right)+\nabla f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right)\cdot\mathbf{0}=f\left(\lambda\mathbf{x}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{y}\right).\tag{30.55}$$

Step 2 验证 f 极小值点是最小值点.

设 $\mathbf{x}_0$ 是 f 局部极小值点但存在 $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_0$ 使得 $f\left(\mathbf{x}_1\right)<f\left(\mathbf{x}_0\right)$, 则对 $\lambda\in(0,1)$, 由(30.55)得

$$f\left(\lambda\mathbf{x}_0+\left(1-\lambda\right)\mathbf{x}_1\right)<\left(1-\lambda\right)f\left(\mathbf{x}_1\right)+\lambda f\left(\mathbf{x}_0\right)<f\left(\mathbf{x}_0\right).$$

当 $\lambda\to 1^-$ 和 $\mathbf{x}_0$ 是 f 局部极小值矛盾!, 因此 f 极小值点是最小值点.

Step 3 验证 f 极小值如果存在则唯一.

设 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ 是 f 两个最小值点, 由 **Step 2** 知它们都是 f 的最小值点, 因此

$$f\left(\frac{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}{2}\right)<\frac{1}{2}f\left(\mathbf{x}_1\right)+\frac{1}{2}f\left(\mathbf{x}_2\right)=f\left(\mathbf{x}_1\right),$$

这就和 $\mathbf{x}_1$ 是 f 最小值点矛盾!, 因此 f 极小值如果存在则唯一.

33. (33.) 考虑连续函数

$$m(t) \triangleq \min_{x\in\mathbb{R}} u(x,t).$$

注意到 $m(0)>0$. 若要证不对, 则考虑

$$t_0 \triangleq \inf\{t>0 : m(t)=0\} \in (0,+\infty).$$

我们有

$$m(t_0)=0, m(t)>0, \forall t\in[0,t_0),$$

于是 $\mathbb{R}\times[0,t_0)$ 上 $\frac{1}{u(x,t)}$ 有意义但无上界, 所以取 $t_1\in(0,t_0)$ 使得

$$v(x,t) \triangleq \frac{1}{u(x,t)}$$

在 $\mathbb{R}\times[0,t_1]$ 上的最大值不在 $t=0$ 取到.

把 $u_t=-\frac{v_t}{v^2}, u_x=-\frac{v_x}{v^2}, u_{xx}=\frac{2v_x^2}{v^3}-\frac{v_{xx}}{v^2}$ 代入原方程得

$$v_t=\frac{v_{xx}}{v^2}-\frac{2v_x^2}{v^3}-\frac{1}{v}.$$

现在设 $x_0\in\mathbb{R}, t_2\in(0,t_1]$ 使得

$$\max_{x\in\mathbb{R},t\in[0,t_1]} v(x,t)=v(x_0,t_2).$$

我们有

$$v_x(x_0,t_2)=0, v_{xx}(x_0,t_2)\leqslant 0, v_t(x_0,t_2)\geqslant 0, v(x_0,t_2)>0,$$

于是在 (x_0,t_2) 处

$$0\leqslant v_t=\frac{v_{xx}}{v^2}-\frac{2v_x^2}{v^3}-\frac{1}{v}<0,$$

矛盾!, 因此我们证明了

$$u(x,t)>0, \forall x\in\mathbb{R}, t>0.$$

34. (34.) 本题的难点在与 Hess 矩阵只在原点半正定, 所以无法直接使用课本常见的极值二阶充分条件. 显然需要摄动.

首先由 $\nabla f(x,\varphi(x))=0$ 可得

$$f_x(x,\varphi(x))=0, f_y(x,\varphi(x))=0.$$

于是

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$$

以及

$$f_{xx}(0,\varphi(0))+f_{xy}(0,\varphi(0))\varphi'(0)=0$$
$$f_{xy}(0,\varphi(0))+f_{yy}(0,\varphi(0))\varphi'(0)=0.$$

因为 $A=Hf(0,0)\neq 0$ 且半正定, 所以

$$\operatorname{tr}(A)=f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0)>0.$$

如果 $f_{yy}(0,0)=0$ 可从上述方程组得出 $f_{xx}(0,0)=0$ 而矛盾!, 因此 $f_{yy}(0,0)>0$. 设在 $(0,0)$ 的小邻域有 $f_{yy}(x,y)>0$, 于是在小邻域内有 $f_y(x,y)$ 关于 y 递增.

对方程 $f_y(x,y)=0$ 用隐函数定理可得一个 0 的小邻域使得 φ 是连续可微的. 注意 $f_y(x,\varphi(x))=0$, 所以

$$f(x,y)\geqslant f(x,\varphi(x)).$$

又

$$\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+\varphi'(x)f_y(x,\varphi(x))=0,$$

即 $f(x,\varphi(x))=f(0,0)$, 因此我们有在 $(0,0)$ 的小邻域有 $f(x,y)\geqslant f(0,0)$, 即 $f(0,0)$ 是极小值.

35. (35.) 我们来证 $f\leqslant 0$, 然后考虑 $-f$ 即知 $f\geqslant 0$, 从而只能有 $f\equiv 0$.

设 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $f(x_0,y_0)>0$, 于是由极限条件得 f 在 $\mathbb{R}^2$ 取得最大值, 不妨设为最大值点为 (x_0,y_0). 此时我们有

$$0\geqslant x_0^2f''_{xx}+y_0^2f''_{yy}=\left(x_0^4+y_0^2\right)f\geqslant 0,$$

即 $x_0=y_0=0$, 这和 $f(0,0)=0$ 矛盾!, 因此我们得证此题.

36. (36.) 若

$$(\Delta f)(x,y)<0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

考虑

$$M(r)\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta,r>0.$$

我们有

$$\begin{aligned}0\leqslant\lim_{r\to+\infty}|M(r)-1|&\leqslant\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-1|\,\mathrm{d}\theta\right)\\&\leqslant\lim_{r\to+\infty}\left(\max_{(x,y)\in\partial\Omega_r}|f(x,y)-1|\right)=0,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{r\to+\infty}M(r)=1$. 由 Green 公式得

$$\begin{aligned}M'(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\theta f'_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f'_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega_r}\left(f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y-f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2\pi r}\int_{x^2+y^2\leqslant r^2}\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.\end{aligned}$$

因此

$$0=M(1)\geqslant\lim_{r\to+\infty}M(r)=1,$$

这就是一个矛盾!, 所以存在 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $(\Delta f)(x_0,y_0)\geqslant 0$.

37. (37.)

(a). 当 $d=2$, 对任何 $\epsilon>0,\mathbf{x}_0\in\Omega$, 由题目极限条件可取 $R>||\mathbf{x}_0||$ 使得

$$|u(\mathbf{x})|\leqslant\epsilon\ln R,\forall\mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},R).$$

注意到 $u(\mathbf{x})\pm\epsilon\ln||\mathbf{x}||$ 在定义域是调和函数且连续到边界且

$$\begin{aligned}u(\mathbf{x})\pm\epsilon\ln||\mathbf{x}||=0,\forall\mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},1);\\u(\mathbf{x})-\epsilon\ln||\mathbf{x}||\leqslant 0,\forall\mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},R);\\u(\mathbf{x})+\epsilon\ln||\mathbf{x}||\geqslant 0,\forall\mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{0},R).\end{aligned}$$

我们由调和函数极值原理10.5有

$$-\epsilon\ln||\mathbf{x}_0||\leqslant u(\mathbf{x}_0)\leqslant\epsilon\ln||\mathbf{x}_0||.$$

让 $\epsilon\to 0^+$ 得 $u(\mathbf{x}_0)=0$. 由 $\mathbf{x}_0$ 任意性得

$$u(\mathbf{x})=0,\forall\mathbf{x}\in\Omega.$$

当 $d\geqslant 3$, 考虑

$$u(\mathbf{x})\triangleq 1-||\mathbf{x}||^{2-d},||\mathbf{x}||>1$$

即知结论不再成立.

(b). 同第 (a) 问, 只不过只需要考虑 $u(\mathbf{x})\pm\epsilon$.

38. (38.) 对 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 由调和函数平均值定理20.7和格林公式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{(\eta-x)^2+(\zeta-y)^2<r^2}\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{\pi r^2}\oint_{(\eta-x)^2+(\zeta-y)^2=r^2}f(\eta,\zeta)\cdot\frac{\eta-x}{r}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

于是对 $(x,y)\in\mathbb{R}^2, R>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|&=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^R\pi r^2\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\mathrm{d}r\\&\leqslant\frac{3}{\pi R^3}\int_0^R\left(\oint_{(\eta-x)^2+(\zeta-y)^2=r^2}|f(\eta,\zeta)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{\pi R^3}\iint_{(\eta-x)^2+(\zeta-y)^2<R^2}|f(\eta,\zeta)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&\leqslant\frac{3}{R}\sup_{(\eta-x)^2+(\zeta-y)^2\leqslant R^2}|f(\eta,\zeta)|\\&\leqslant\frac{3}{R}\sup_{\eta^2+\zeta^2\leqslant\left(\sqrt{x^2+y^2}+R\right)^2}|f(\eta,\zeta)|\\&\overset{\text{调和函数极值原理10.5}}{=}\frac{3}{R}\sup_{\eta^2+\zeta^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}+R\right)^2}|f(\eta,\zeta)|.\end{aligned}$$

让 $R\to+\infty$ 就有

$$0\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant\frac{3\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+R\right)}{R}\frac{\sup\limits_{\eta^2+\zeta^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}+R\right)^2}|f(\eta,\zeta)|}{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+R\right)}\to0,$$

即 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$. 类似可得 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$, 因此 f 为常数.

39. (39.) 若 F 为常数, 取

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(t,0)$$

即可.

若 F 不为常数, 取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\nabla F(x_0,y_0)\neq0$. 不妨设 $F'_y(x_0,y_0)\neq0$. 由隐函数定理得 $h>0$ 使得存在唯一的 $g\in C^1(x_0-h,x_0+h)$ 成立

$$g(x_0)=y_0, F(x,g(x))=F(x_0,y_0),\forall x\in(x_0-h,x_0+h).$$

考虑

$$s:\mathbb{R}\to(x_0-h,x_0+h), x\mapsto x_0+\frac{2h}{\pi}\arctan x,$$

以及

$$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, x\mapsto(s(x),g(s(x))).$$

显然由 h 单射得 G 单射. g,h 连续得 G 连续. 我们还有

$$(F\circ G)(x)=F(s(x),g(s(x)))=F(x_0,y_0),\forall x\in\mathbb{R},$$

这就完成了证明.

30.5 非数学类微分中值定理

1. (1.)(答案)

2. (2.) 注意到
$$\int_0^1 (2x-1) f(x)\,dx = -\int_0^1 \left(x^2-x\right) f'(x)\,dx = \frac{1}{2},$$
于是由积分中值定理11.3, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得
$$f'(\xi)\int_0^1 \left(x-x^2\right)dx = -\int_0^1 \left(x^2-x\right) f'(x)\,dx = \frac{1}{2},$$
这恰好是 $f'(\xi)=3$.
3. (3.) 由拉格朗日中值定理, 存在 $c_i \in (x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 使得
$$f(y_i) - f(x_i) = f'(c_i)(y_i - x_i).$$
记
$$M = \max_{1\leqslant i\leqslant n} f'(c_i), m = \min_{1\leqslant i\leqslant n} f'(c_i),$$
则
$$m\sum_{i=1}^n (y_i-x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n [f(y_i)-f(x_i)] = \sum_{i=1}^n f'(c_i)(y_i-x_i) \leqslant M\sum_{i=1}^n (y_i-x_i).$$
由导数介值性11.5, 我们知道存在 $c \in (a,b)$, 使得
$$\frac{\sum_{i=1}^n [f(y_i)-f(x_i)]}{\sum_{i=1}^n (y_i-x_i)} = f'(c),$$
这就完成了证明.
4. (4.) 事实上我们考虑
$$g(x) \triangleq \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b] \\ f'(a), & x=a \end{cases},$$
容易发现 $g \in C[a,b]\bigcap D(a,b]$ 且
$$g'(x) = \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}.$$
假如 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, 由导函数的介值性, 可以不妨设 $g'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, 于是 $g'(b) \geqslant 0$. 现在我们知道 g 在 $[a,b]$ 是严格递增的, 因此
$$f'(b) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a} > \frac{f(x)-a}{x-a}, \forall x \in (a, \frac{a+b}{2}),$$
故
$$f'(a) = f'(b) > \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a} > \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-a}{x-a} = f'(a).$$
这就是一个矛盾!, 我们完成了证明.
5. (5.) 我们把 $xf(x)$ 整体在 $x=0$ Taylor 即可得
$$xf(x) = 0f(0) + [f(0) + 0f'(0)]x + \frac{2f'(\theta(x)) + \theta(x) f''(\theta(x))}{2}x^2.$$
注意到
$$\frac{2f'(\theta(x)) + \theta(x) f''(\theta(x))}{2} = \frac{xf(x) - f(0)x}{x^2} \in C[-1,1],$$
因此后面的积分合理.

于是使用积分中值定理得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} xf(0)\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{2f'(\theta(x)) + \theta(x) f''(\theta(x))}{2} x^2 dx \\ &= \frac{2f'(\xi) + \xi f''(\xi)}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx \\ &= \frac{2f'(\xi) + \xi f''(\xi)}{3}.\end{aligned}$$

我们完成了证明.

6. (6.) 解微分方程得构造函数 $C(x) = xf(x)$, 注意到由积分中值定理, 我们知道存在 $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 使得

$$\theta f(\theta) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx = 1 \cdot f(1).$$

由罗尔中值定理可知存在 $u \in (0,1)$, 使得 $C'(u) = 0$, 即 $f'(u) = -\frac{f(u)}{u}$.

7. (7.) 插 $f(1), f(-1), f(0), f'(0)$, 四个条件确定 3 次插值多项式, 余项到 4 阶导, 微分条件不够. 所以是 $p''' = f'''$ 模型.

由命题11.2, 写出插值多项式为

$$p(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} f(-1) + \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} f(0) + \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} f(1) + cx(x+1)(x-1).$$

于是类似例题11.3, 反复罗尔中值定理得存在 $u \in (-1,1)$, 使得 $p'''(u) = f'''(u) = 6c$, 读者带入 $f'(0)$ 可由 $p'(0) = f'(0)$ 得 $c = \frac{3[f(1)-f(-1)]-6f'(0)}{6}$, 从而得到

$$f'''(u) = 3[f(1) - f(-1)] - 6f'(0).$$

8. (8.) 由拉格朗日中值定理, 存在 $\theta_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), \theta_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, 使得

$$f'(\theta_1) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right), f'(\theta_2) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{a+b}{2} - b} = -\frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

注意到

$$\left[\frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[-\frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] = -\frac{3f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2} \leqslant 0,$$

因此 $\frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 介于 $\pm\frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 之间, 从而由导函数介值性我们知道存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $(b-a) f'(\xi) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

9. (9.) 构造 $F(x) = \frac{\int_0^x f(y)dy}{e^x}, x \in [0,1]$ 则 $F'(x) = \frac{f(x) - \int_0^x f(y)dy}{e^x}$. 若 $F'(x) \neq 0, \forall x \in (0,1)$, 则 $F(x)$ 单调. 结合 $F(0) = 0$ 知 F 严格递增, 从而

$$F'(1) = \frac{-\int_0^1 f(x)\,dx}{e} \geqslant 0,$$

则由 f 非负知 $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$, 这和 $F'(x) \neq 0$ 矛盾! 因此存在 $c \in (0,1)$ 使得 $\int_0^c f(x)\,dx = f(c)$.

10. (10.) 对 $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ 插 $F(0), F'(0), F(1)$. 由命题11.1, 我们有

$$F(x) = x^2 + \frac{F'''(\theta)}{6} x^2(x-1), \theta \in (0,1).$$

现在

$$\left|\int_0^x f(y)\,dy - x^2\right| = \left|\frac{F'''(\theta)}{6} x^2(x-1)\right| = \left|\frac{f''(\theta)}{6} x^2(x-1)\right| \geqslant \frac{1}{4} x^2(1-x),$$

两边取 sup 即得(11.88).

11. (11.) 我们注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right| &= \left|\int_0^1 f(x)\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \\ &= \left|\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_0^1 f'(x)\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_0^1 f''(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

遗憾的是, 这种方法缺失 f'' 做积分的理由[19]. 我们做一些修正使得其可以在高等数学框架下得到此加强.

运用条件 $f'(0)=f'(1)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right| &= \left|\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx+\frac{f'(0)}{8}\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx-\frac{f'(1)}{8}\right| \\ &= \left|\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-\frac{1}{2}\right)[f'(x)-f'(0)]\,dx\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)[f'(x)-f'(1)]\,dx\right| \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x\left|x-\frac{1}{2}\right|dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=\frac{1}{24},\end{aligned}$$

这里最后一个不等号用到了拉格朗日中值定理

$$\begin{aligned}|f'(x)-f'(0)| &= x\,|f''(\theta)|\leqslant x, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right], \\ |f'(x)-f'(1)| &= (1-x)\,|f''(\xi)|\leqslant 1-x, x\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{aligned}$$

这样我们就完成了证明.

为了寻求习题11.的最佳系数, 我们不再限制允许使用的方法范围. 注意到

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 f''(x)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right]\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right|dx=\frac{1}{32}.$$

断言 $\frac{1}{32}$ 是最佳系数. 事实上, 考虑取等条件

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{16}, & x\in\left[\frac{3}{4},1\right] \\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x, & x\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right] \\ \frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{7}{16}, & x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\end{cases}.$$

注意到虽然这个 f 只是一阶可导且满足 $f'(1)=f'(0)$, 但当且仅当在 $\frac{1}{4},\frac{3}{4}$ 处非二阶可导. 并不符合题目条件, 实际上就需要用到我们13.6的思想结果.

我们知道题目不等式等价于

$$f'(0)=f'(1), |f''(x)|\leqslant M, \forall x\in[0,1]\Rightarrow\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{M}{32}.$$

即

$$f'(0)=f'(1)\Rightarrow\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{\sup\limits_{[0,1]}|f''|}{32}.$$

[19] 如果是勒贝格积分则没有问题.

事实上考虑 $G_\delta(x)=\int_0^x\left(\int_0^z g_\delta(y)\,dy\right)dz,\delta>0$ 满足题目条件, 这里

$$g_\delta(x)=\begin{cases}1-2\delta, & x\in\left[\frac{3}{4},1\right]\\ \frac{2}{\delta}\left(x-\frac{3}{4}\right)+1-2\delta, & x\in\left[\frac{3}{4}-\delta,\frac{3}{4}\right]\\ -1-2\delta, & x\in\left[\frac{1}{4}+\delta,\frac{3}{4}-\delta\right]\\ -\frac{2}{\delta}\left(x-\frac{1}{4}\right)+1-2\delta, & x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{4}+\delta\right]\\ 1-2\delta, & x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\end{cases}.$$

其中注意到

$$\int_0^1 g_\delta(y)\,dy=0,\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right]g_\delta(y)\,dy=\frac{16\delta^3-16\delta^2-2\delta+3}{96},\sup_{[0,1]}|g_\delta|=1+2\delta.$$

注意到

$$\left|\int_0^1 G_\delta(x)\,dx-\frac{G_\delta(0)+G_\delta(1)}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right]g_\delta(x)\,dx\right|,$$

我们知道

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\sup\limits_{[0,1]}|G_\delta''|}\left|\int_0^1 G_\delta(x)\,dx-\frac{G_\delta(0)+G_\delta(1)}{2}\right|=\lim_{\delta\to0^+}\left|\frac{16\delta^3-16\delta^2-2\delta+3}{96(1+2\delta)}\right|=\frac{1}{32}$$

这就证明了考研真题最佳系数是 $\frac{1}{32}$.

12. (12.) 对于数学专业的同学, 我们知道 Lipschitz 连续函数其导数必然存在且可积, 因此题目12.没有本质困难. 为了呈现一个给非数学专业同学的方法, 并体现微分学和积分学方法的关系, 我们给出如下证明.

和上题一致, 注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|&=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx\right|\\&=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[f'(x)-f'\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^2dx=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

我们就完成了证明.

13. (13.) 考虑

$$g(x)\triangleq f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right),h(x)\triangleq g(x)-r^2g\left(\frac{x}{r}\right),$$

我们有

$$h(0)=\left(1-r^2\right)g(0)=2\left(1-r^2\right)f\left(\frac{1}{2}\right).$$

现在由(11.89)知

$$\begin{aligned}0&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}h(0)-r^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f\left(\frac{t}{r}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(t)-r^2g\left(\frac{t}{r}\right)\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}h(0)\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}h(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}h(0).\end{aligned}$$

由积分中值定理11.3, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $h(\theta)=h(0)$. 故由罗尔中值定理存在 $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使得 $h'(x_1)=0$.

注意到

$$h'(x)=g'(x)-rg'\left(\frac{x}{r}\right),g'(x)=f'\left(x+\frac{1}{2}\right)-f'\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

于是

$$h'(0)=g'(0)-rg'\left(\frac{0}{r}\right)=0.$$

继续用罗尔中值定理知存在 $x_2\in(0,x_1)$ 使得

$$h''(x_2)=g''(x_2)-g''\left(\frac{x_2}{r}\right)=0.$$

继续由罗尔中值定理得 $x_3\in\left(\frac{x_2}{r},x_2\right)$ 满足

$$g'''(x_3)=f'''\left(\frac{1}{2}+x_3\right)-f'''\left(\frac{1}{2}-x_3\right)=0.$$

最后再用一次罗尔得 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(\xi)=0$.

14. (14.) 考虑

$$g(x)\triangleq f(x)+x^2-x.$$

我们有

$$g(0)=g(1)=g\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

于是由罗尔定理得 $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$$

继续由罗尔定理得 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 成立 $g''(\xi)=0$. 因此就有

$$g''(\xi)=f''(\xi)+2=0\Rightarrow f''(\xi)=-2.$$

15. (15.) 设

$$g(x)\triangleq f^2(x)+\left[f'(x)\right]^2.$$

假设 $M\triangleq 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}$ 使得

$$f''(x)+f(x)\neq 0,\forall x\in(-M,M).\tag{30.56}$$

由导数介值性, $f''(x)+f(x)$ 作为 $f'(x)+\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 的导函数有介值性, 从而 $f''+f$ 在 $(-M,M)$ 不变号. 因为

$$|f'(0)|^2=a-|f(0)|^2\geqslant a-1>0,\tag{30.57}$$

不失一般性, 可设

$$f'(0)>0,f''(x)+f(x)>0,\forall x\in(-M,M).\tag{30.58}$$

记[20]

$$M_0\triangleq\sup\{S\in(0,M]:f'(x)>0,\forall x\in(0,S)\}.$$

若 $M_0\in(0,M)$, 则 $f'(M_0)=0$ 且

$$g'(x)=2f'(x)\left[f(x)+f''(x)\right]>0,\forall x\in(0,M_0).$$

于是 $g(M_0)>g(0)=a$. 类似(30.57)得 $f'(M_0)\neq 0$, 这就是一个矛盾! 因此必有 $M_0=M$.

现在

$$g(x)>a,\forall x\in(0,M]\Rightarrow f'(x)>\sqrt{a-f^2(x)},\forall x\in(0,M]\Rightarrow\left[\arcsin\frac{f(x)}{\sqrt{a}}-x\right]'>0,\forall x\in(0,M].$$

我们有

$$\arcsin\frac{f(M)}{\sqrt{a}}-M>\arcsin\frac{f(0)}{\sqrt{a}}\Rightarrow 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}\geqslant\arcsin\frac{f(M)}{\sqrt{a}}-\arcsin\frac{f(0)}{\sqrt{a}}>M,$$

这就是一个矛盾! 因此存在 $\xi\in\left(-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}},2\arcsin\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

[20](30.58)的不等号反了的话, 考虑的是 $x<0$ 部分. 因为目标是 g 单调且 $g>a$ 能保持住.

16. (16.) 对于 $c\in\mathbb{R}$, 若 f 在区间 $I\subset[0,1]$ 上有 k 个根, 则

$$\left[e^{-cx}f(x)\right]'=\left(f'(x)-cf(x)\right)e^{-cx}$$

在区间 I 上也有 $k-1$ 个根.

对 $a,b\in\mathbb{R},b>0$, 注意到

$$\left[\left(\frac{f(x)}{e^{ax}\cos(bx)}\right)'\cos^2(bx)\right]'=\frac{\cos(bx)\left[f''(x)-2af'(x)+\left(a^2+b^2\right)f(x)\right]}{e^{ax}}.$$

于是在不包含 $\frac{\frac{\pi}{2}+m\pi}{b},m\in\mathbb{Z}$ 的区间 I 内, 若 f 有 k 个根, 则 $f''(x)-2af'(x)+\left(a^2+b^2\right)f(x)$ 在区间 I 内至少有 $k-2$ 个根.

对 x^n+1, 其根都在单位圆上且总能因式分解为实系数一次和二次多项式的积且根的虚部 $|b|\leqslant 1$, 因此 $f^{(n)}+f$ 也能分为上面那样一次和二次微分算子的积且 $[0,1]$ 内不包含 $\frac{\frac{\pi}{2}+m\pi}{b},m\in\mathbb{Z}$, 这样就说明存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得

$$f^{(n)}(\zeta)=-f(\zeta).$$

17. (17.) 首先, 在网络流传中, 题目要证的是

$$[f(b)-f(a)]f(\xi)=f'(\eta)\left[(b-a)f(\xi)-\int_a^c f(x)\,dx\right].$$

遗憾的是, 这是不对的. 我们考虑 $a=0,b=1,f(x)=x$, 则

$$\xi=\left[\xi-\int_a^c x\,dx\right]\Rightarrow\int_a^c x\,dx=0\Rightarrow c=a\Rightarrow f(a)=f(b),$$

这显然不可能.

对于纠正之后的题目, 由连续函数中间值定理12.3和 $f(a)\neq f(b)$, 显然我们可以找到 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$. 然后我们直接用积分中值定理和拉格朗日中值定理, 存在 $\eta\in(c,b),\xi\in(a,c)$, 使得

$$\int_a^c f(x)\,dx=(c-a)f(\xi),f(b)-f(c)=(b-c)f'(\eta).$$

于是

$$\begin{aligned}&[f(b)-f(a)]f(\xi)=2[f(b)-f(c)]f(\xi)=2f'(\eta)[(b-c)f(\xi)]\\&=2f'(\eta)[(b-a)f(\xi)-(c-a)f(\xi)]=2f'(\eta)\left[(b-a)f(\xi)-\int_a^c f(x)\,dx\right],\end{aligned}$$

这就证明了式(11.91).

18. (18.) 固定 $h>0$, 由 Taylor 中值定理, 我们得

$$\begin{cases}f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\theta_1)}{2}h^2, & x\leqslant\theta_1\leqslant x+h\\ f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\theta_2)}{2}h^2, & x-h\leqslant\theta_2\leqslant x\end{cases}.$$

两式相减得

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h}{4}[f''(\theta_1)-f''(\theta_2)].$$

故运用(11.92)得

$$\begin{aligned}x^2|f'(x)|&\leqslant\frac{x^2|f(x+h)|}{2h}+\frac{x^2|f(x-h)|}{2h}+\frac{hx^2}{4}|f''(\theta_1)|+\frac{hx^2}{4}|f''(\theta_2)|\\&\leqslant\frac{x^2C}{2h(x+h)^3}+\frac{Cx^2}{2h(x-h)^3}+\frac{hx^2D}{4\theta_1}+\frac{hx^2D}{4\theta_2}\\&\leqslant\frac{Cx^2}{2h}\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}\right]+\frac{hxD}{4}+\frac{hx^2D}{4(x-h)}\\&=\frac{C}{hx}+\frac{hxD}{2}+\frac{Cx^2}{2h}\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}-\frac{2}{x^3}\right]+\frac{hxD}{4}\left(\frac{x}{x-h}-1\right),\end{aligned}$$

对上式中的 $\frac{C}{hx}+\frac{hxD}{2}$ 取最小, 即取 $h=\sqrt{\frac{2C}{x^2D}}>0$, 我们就有

$$x^2\left|f'(x)\right|\leqslant\sqrt{2CD}+\frac{Cx^3}{2\sqrt{\frac{2C}{D}}}\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}-\frac{2}{x^3}\right]+\frac{D\sqrt{\frac{2C}{D}}}{4}\left(\frac{x}{x-h}-1\right).$$

利用

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\left[\frac{1}{(x+h)^3}+\frac{1}{(x-h)^3}-\frac{2}{x^3}\right]=0,\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-h}-1\right)=0,$$

我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在 $x_0\geqslant0$, 使得对任何 $x\geqslant x_0$, 都有不等式(11.93)成立, 我们完成了证明.

19. (19.) 首先由拉格朗日中值定理, 必然存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f'(x_0)=1$.

如果存在唯一的 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f'(x_0)=1$, 如果 $f'(x)-1$ 在 $(0,1)$ 不变号, 那么 $f'(x)\geqslant1, f'(x)\leqslant1$ 必有一个恒成立, 即 $f(x)-x$ 要么递增要么递减, 结合初值条件, 这只能有 $f(x)-x=0,\forall x\in[0,1]$, 显然, 此时矛盾!

现在不妨设

$$f'(x)>1,\forall x\in(x_0,1),f'(x)<1,\forall x\in(0,x_0),$$

现在由 Darboux 中值定理11.5, 对任意充分小的 $\epsilon>0$, 可取

$$x_\epsilon^1\in(0,x_0),x_\epsilon^2\in(x_0,1),$$

使得

$$f'\left(x_\epsilon^1\right)=1-\epsilon,f'\left(x_\epsilon^2\right)=\sqrt{2-(1-\epsilon)^2},$$

此时恰好就是

$$\left|f'\left(x_\epsilon^1\right)\right|^2+\left|f'\left(x_\epsilon^2\right)\right|^2=2.$$

如果存在至少两个 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f'(x_0)=1$, 那显然, 可就取 ζ,η 为这两个点即可.

我们完成了证明.

20. (20.) 由介值定理, 取 $\xi_3\in(0,1)$, 使得

$$f(\xi_3)(2-f(\xi_3))=1>\frac{4}{3\sqrt{3}}\geqslant2\xi_3\sqrt{1-\xi_3}.$$

由拉格朗日中值定理, 取 $\xi_1\in(0,\xi_3),\xi_2\in(\xi_3,1)$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi_3)}{\xi_3},f'(\xi_2)=\frac{2-f(\xi_3)}{1-\xi_3},$$

因此

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}=\frac{f(\xi_3)(2-f(\xi_3))}{\xi_3\sqrt{1-\xi_3}}\geqslant2.$$

我们完成了证明.

21. (21.) 如果 f' 有零点则问题显然成立, 不妨设 $f'(x)>0,\forall x\in(0,4)$, 我们反证.

若

$$\left|f'(x)\right|^2+\left|f(x)\right|^2\geqslant1,\forall x\in(0,4),$$

则

$$f'(x)\geqslant\sqrt{1-\left|f(x)\right|^2},\forall x\in(0,4).$$

考虑

$$g(x)=\arcsin f(x)-x,x\in[0,4],$$

则

$$g'(x)=\frac{f'(x)-\sqrt{1-|f(x)|^2}}{\sqrt{1-|f(x)|^2}}\geqslant 0,\forall x\in(0,4),$$

因此

$$g(4)\geqslant g(0)\Rightarrow \pi=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\geqslant \arcsin f(4)-\arcsin f(0)\geqslant 4,$$

矛盾!, 故存在 $\xi\in(0,4)$, 使得

$$|f'(\xi)|^2+|f(\xi)|^2<1.$$

22. (22.) 由介值定理, 设 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=1$, 然后由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(c,b)$, 使得

$$2b-c=\frac{bf(b)-cf(c)}{f(b)-f(c)}=\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}.$$

由拉格朗日中值定理, 存在 $\eta\in(a,c)$, 使得

$$\frac{1}{f'(\eta)}=\frac{1}{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}}=c-a.$$

因此我们有

$$\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f'(\xi)}=2b-a-\frac{1}{f'(\eta)}.$$

23. (23.) 分部积分得

$$\int_0^1\left(360x^2-360x+60\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(30x^4-60x^3+30x^2\right)f''(x)\,dx.$$

积分中值定理11.3得

$$\int_0^1\left(30x^4-60x^3+30x^2\right)f''(x)\,dx=f''(\xi)\int_0^1\left(30x^4-60x^3+30x^2\right)dx=f''(\xi),$$

这里 $\xi\in(0,1)$, 我们完成了证明.

24. (24.) 想法即迭代思想11.8. 不妨设 $\alpha>0$, $\alpha=0$ 可以类似考虑. 构造 $F(x)=\frac{\int_0^x\left(y^2+\alpha y\right)f(y)dx}{x^\alpha e^x}$, 注意到

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\left(y^2+\alpha y\right)f(y)\,dx}{x^\alpha e^x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x^2+\alpha x\right)f(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=0,$$

于是可规定 $F(0)=0$. 此外由迭代思想11.8, 我们知道 $\int_0^x\left(y^2+\alpha y\right)f(y)\,dx$ 在 $(0,1]$ 还有其他零点, 因此由罗尔中值定理知道 $F'(x)=(\alpha+x)\frac{x^2f(x)-\int_0^x\left(y^2+\alpha y\right)f(y)dx}{x^{\alpha+1}e^x}$ 在 $(0,1)$ 有零点 c, 这就完成了证明.

25. (25.) 构造 $c(x)=\frac{\pi\sin x-2x}{x}f(x),x\in[0,2]$, 于是 $c(1)=c\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 由罗尔中值定理即证.

26. (26.) 考虑 $g(x)=f(x)-\lambda x-\mu$, 则由(11.94)知 $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b xg(x)\,dx=0$. 再由例11.40知存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\lambda.$$

27. (27.) 我们同时书写27.和28.的答案. 记 $c=\frac{a+b}{2}$, 由 Hermite 插值定理11.1, 我们知

$$f(x)=\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{f'''(\theta)(x-a)(x-b)(x-c)}{6},$$

以及

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)\\&-\frac{4[f(a)-f(b)]}{(b-a)^3}(x-a)(x-b)(x-c)+\frac{f^{(4)}(\theta)(x-a)(x-b)(x-c)^2}{24}.\end{aligned}$$

直接计算有

$$\int_a^c [\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)]dx=\frac{b-a}{24}(5f(a)+8f(c)-f(b)),$$

$$\int_c^b [\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)]dx=\frac{b-a}{24}(5f(b)+8f(c)-f(a)),$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)|(x-c)|\,dx=\frac{(b-a)^4}{32},\int_a^c (x-a)(x-b)(x-c)\,dx=\frac{(b-a)^4}{64},$$

$$\int_c^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx=-\frac{(b-a)^4}{64},\int_a^b (x-a)(b-x)|(x-c)|^2\,dx=\frac{(b-a)^5}{120}.$$

故有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right| &\leqslant \left|\frac{b-a}{4}[f(a)-f(b)]\right|+\int_a^b \frac{|f'''(\theta)|}{6}(x-a)(b-x)|(x-c)|\,dx\\ &\leqslant \frac{1}{4}(b-a)|f(b)-f(a)|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{192}(b-a)^4,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right| &\leqslant \left|\frac{1}{8}(b-a)[f(a)-f(b)]\right|+\int_a^b \frac{\left|f^{(4)}(\theta)\right|}{24}(x-a)(b-x)|(x-c)|^2\,dx\\ &=\frac{1}{8}(b-a)|f(b)-f(a)|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|}{2880}(b-a)^5\end{aligned}$$

我们完成了证明.

28. (28.) 见非数学中值定理习题27..

29. (29.) 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{f'''(\theta)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

直接计算有

$$\begin{aligned}&\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx\\ &-\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx\\ &=-\frac{(b-a)^2}{4}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right| &=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{f'''(\theta)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{f'''(\theta)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3dx\right|\\ &\leqslant\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'''(x)|}{6}\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^3dx=\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'''(x)|}{192}(b-a)^4.\end{aligned}$$

我们完成了证明.

30. (30.) 插 $f(a),f'(a),f(b),f'(b),f\left(\frac{a+b}{2}\right),f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 合计六个条件, 余项只到 5 阶导, 考虑模型例题11.1, 于是我们知道

$$f^{(5)}(\xi)=p^{(5)}=5!\cdot p\text{首系数}.$$

剩下只需要套命题11.6计算即可得证明.

31. (31.) 注意到分部积分需要零边界条件, 即我们需要分部积分两次, 即需要 $0,1$ 都是 f 的二重零点且 cx^4 求两次导首系数应该为 1. 注意到因为条件(11.98), 我们无需担心二次函数的一次项和常数项. 因此可以唯一

确定

$$\frac{1}{12}\int_0^1 f''(x)\,x^2(x-1)^2\,dx=\int_0^1 f(x)\,\frac{d^2\left(x^2(x-1)^2\right)}{dx^2}dx=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx.$$

从而我们有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1 x^2(x-1)^2\,dx=\frac{1}{360}.$$

32. (32.) 插 $2a,4a$, 用拉格朗日插值定理11.1并代入 $x=3a$ 可直接得答案.

33. (33.) 本题即哈大马不等式11.4的不等号不能严格. 若 ξ 不存在, 由导数介值定理11.5, 我们知道可不妨设

$$f''(x)>0,\forall x\in(a,b).$$

于是

$$\int_0^2 f(x)\,dx=2\int_0^1 f(2x+(1-x)\cdot 0)\,dx\leqslant 2\int_0^1\left[xf(2)+(1-x)f(0)\right]dx=f(2)+f(0).$$

故由条件知

$$f(2x)=xf(2)+(1-x)f(0),\forall x\in[0,1],$$

从而 f 是线性函数而矛盾! 这就证明了必然存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

34. (34.) 可以看到直接对 x 求导是复杂的, 因此我们应该采用高中数学的变换主元的方法. 即

$$f(\beta)\triangleq\frac{x^\beta}{\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}-1}-\frac{1+\sqrt{3}\beta}{3}\ln x,\beta\geqslant 1.$$

于是

$$f'(\beta)=\frac{\ln x\cdot x^\beta}{\sqrt{3}}-\frac{\ln x}{\sqrt{3}}=\frac{\ln x}{\sqrt{3}}\cdot\left(e^{\beta\ln x}-1\right),$$

容易看到对 β 的函数一定是单调递增的. 因此

$$f(\beta)\geqslant f(1)=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}-1}-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\ln x\triangleq g(x).$$

又

$$g'(x)=\frac{(1-x)\left(x+2\sqrt{3}-4\right)}{3x\left(x+\sqrt{3}-1\right)^2},$$

因此

$$g'(x)=\frac{3\sqrt{3}(x-1)\left(x^2+\frac{5\sqrt{3}-6}{3}x+\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)}{9x\left(x+\sqrt{3}-1\right)^2}.$$

故 $g(x)\geqslant g(1)=0$, 这就得到了

$$\frac{x^\beta}{\sqrt{3}}\geqslant\frac{1}{x+\sqrt{3}-1}+\frac{1+\sqrt{3}\beta}{3}\ln x,\forall x>0.$$

35. (35.) 考虑 $g(x)=f(x)-f'(\lambda)x-f(\lambda)+\lambda f'(\lambda)$, 则用连续映射严格单调等价单射12.2, 我们只需证 g 不是严格单调的.

注意

$$g'(\lambda)=0,g''(\lambda)=f''(\lambda),g^{(3)}(\lambda)=f^{(3)}(\lambda)=0,g^{(4)}(\lambda)=f^{(4)}(\lambda)\neq 0,$$

于是我们由 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{f''(\lambda)}{2}(x-\lambda)^2+\frac{f^{(4)}(\lambda)}{24}(x-\lambda)^4+o\left((x-\lambda)^4\right)\\&=(x-\lambda)^2\left[a+b(x-\lambda)^2+o\left((x-\lambda)^2\right)\right].\end{aligned}$$

不妨设 $b>0$, 否则用 $-f$ 代替 f 即可. 于是当 $a\geqslant 0$, 在 λ 充分小的邻域内有

$$g(x)>(x-\lambda)^2\left[a+\frac{b}{2}(x-\lambda)^2\right]>0.\tag{30.59}$$

当 $a<0$, 在 λ 充分小的邻域内有

$$g(x)<(x-\lambda)^2\left[a+2b(x-\lambda)^2\right]<0.$$

故无论如何 $x=\lambda$ 是 g 的极值点. 由极值点和严格单调的关系12.4知 g 不严格单调, 这就完成了证明.

36. (36.) 构造

$$F(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2, G(x)=\frac{1}{2}x^2-f(x), x\in[0,1].$$

由拉格朗日中值定理, 我们有

$$F'(\xi)=2\left[F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)\right]=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\right], \xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$
$$G'(\eta)=2\left[G(1)-G\left(\frac{1}{2}\right)\right]=2\left[\frac{1}{8}+f\left(\frac{1}{2}\right)\right], \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

这就证明了 $F'(\xi)-G'(\eta)=0$, 即式(11.100)成立.

37. (37.) 考虑

$$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3, x\in[0,1].$$

由拉格朗日中值定理, 我们有

$$\begin{cases}F'(\xi)=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=2F\left(\frac{1}{2}\right), & \xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\\ F'(\eta)=\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=-2F\left(\frac{1}{2}\right), & \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

此时上面两式之和恰好就给出(11.101).

38. (38.) 靠近谁插谁, 此时初值条件暗示直接 Taylor 中值定理即可.

待定 $x\in(a,b)$, 我们有

$$\begin{cases}f(x)=f(a)+\frac{f'''(\xi_1)}{6}(x-a)^3, & \xi_1\in(a,x)\\ f(x)=f(b)+\frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-b)^3, & \xi_2\in(x,b)\end{cases}.$$

于是两式做差得

$$f(b)-f(a)=\frac{f'''(\xi_1)}{6}(x-a)^3+\frac{f'''(\xi_2)}{6}(b-x)^3.$$

于是由介值定理, 我们知道

$$f(b)-f(a)=\frac{f'''(\xi)}{6}\left[(x-a)^3+(b-x)^3\right], \xi\in(a,b).$$

由 $(x-a)^3+(b-x)^3\in\left[\frac{(b-a)^3}{4},(b-a)^3\right)$, 我们知道对 $\eta\in\left[\frac{1}{24},\frac{1}{6}\right)$, 必有 $\xi\in(a,b)$ 使得(11.102)成立.

39. (39.) 靠近谁插谁, 若 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 则由拉格朗日中值定理知

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi)>2f(a)>0\Rightarrow|f'(\xi)|>2f(a). \tag{30.60}$$

若 $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 则由拉格朗日中值定理知

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=f'(\xi)=\frac{f(a)}{a-1}<-f(a)<0\Rightarrow|f'(\xi)|>2f(a). \tag{30.61}$$

显然上述 $\xi\in(0,1)$.

最困难的是 $a=\frac{1}{2}$, 此时上述不等式(30.60)和(30.61)也适用, 只不过不等号将改为等号, 即

$$\begin{cases}f'(\xi_1)=2f\left(\frac{1}{2}\right), & \xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\\ f'(\xi_2)=-2f\left(\frac{1}{2}\right), & \xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)\end{cases}. \tag{30.62}$$

实现的手段是通过积分方法, 但导函数不连续, 因此我们只能通过原函数的手法来代替, 即考虑

$$\begin{cases}F(x)=f(x)-2f\left(\frac{1}{2}\right)x, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ G(x)=f(x)+2f\left(\frac{1}{2}\right)(x-1), & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

显然 F,G 必然有一个不恒为 0, 否则 f 在 $\frac{1}{2}$ 不可导. 不妨设为 F.

现在若对某个 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 有 $F(x_0) > 0$, 则

$$F'(\xi) = \frac{F(x_0) - F(0)}{x_0 - 0} \Rightarrow f'(\xi) > 2f\left(\frac{1}{2}\right), \xi \in (0, x_0).$$

若对某个 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 有 $F(x_0) < 0$, 则

$$F'(\xi) = \frac{F\left(\frac{1}{2}\right) - F(x_0)}{\frac{1}{2} - x_0} > 0 \Rightarrow f'(\xi) > 2f\left(\frac{1}{2}\right), \xi \in \left(x_0, \frac{1}{2}\right),$$

这就完成了证明.

40. (40.) 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x) = f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(\theta)}{6}(x-2)^3.$$

两边积分得

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx + \int_1^2 \frac{f'''(\theta)}{6}(x-2)^3\,dx \\ &\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=} \int_1^2 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx + \frac{f'''(\theta_1)}{6}\int_1^2 (x-2)^3\,dx \\ &= \int_1^2 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx - \frac{f'''(\theta_1)}{24}.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x)\,dx &= \int_2^3 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx + \int_2^3 \frac{f'''(\theta)}{6}(x-2)^3\,dx \\ &\overset{\text{积分中值定理11.3}}{=} \int_2^3 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx + \frac{f'''(\theta_2)}{6}\int_2^3 (x-2)^3\,dx \\ &= \int_2^3 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx + \frac{f'''(\theta_2)}{24}.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_2^3 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx = \int_1^2 \left[f(2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2\right]dx,$$

我们就有 $f'''(\theta_1) + f'''(\theta_2) = 0$, 平均值定理告诉我们存在 $\xi \in (1,3)$ 使得 $f'''(\xi) = 0$.

41. (41.) 构造方法, 设微分方程有通解 $y = c_1 w_1 + c_2 w_2$, 那么我们有

$$\left(\frac{y}{w_1}\right)' = c_2\left(\frac{w_2}{w_1}\right)' \text{或} \left(\frac{y}{w_2}\right)' = c_1\left(\frac{w_1}{w_2}\right)'$$

于是

$$\left(\frac{\left(\frac{y}{w_1}\right)'}{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)'}\right)' = 0 \text{或} \left(\frac{\left(\frac{y}{w_2}\right)'}{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)'}\right)' = 0$$

注意到

$$\left(\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}x(x-2)}\left(2f'(x) + (x-1)f(x)\right)}{-e^{-x}}\right)' = -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x(x+2)}\left[\left(x^2+1\right)f(x) + 4xf'(x) + 4f''(x)\right]$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}x(x+2)}\left(2f'(x) + (x+1)f(x)\right)}{e^{x}}\right)' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x(x-2)}\left[\left(x^2+1\right)f(x) + 4xf'(x) + 4f''(x)\right]$$

因为我们可以解一阶微分方程 $2f'(x) + xf(x) = 0$, 所以令 $g(x) = f(x)e^{\frac{1}{4}x^2}$, 因为 $g'(x) \neq 0$, 所以代入题目给的初值条件, 就有

$$0 < g'(1)g'(0) = -\frac{1}{4}g(0)g(1).$$

反证, 假设结果不成立, 不妨设

$$\left(x^2+1\right)f(x) + 4xf'(x) + 4f''(x) > 0, \forall x \in (0,1),$$

因此

$$2f'(x)+(x-1)f(x)\geqslant 0,2f'(x)+(x+1)f(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,1].$$

两式做差就有 $f(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,1]$, 这导致了 $g(x)\leqslant 0,\forall x\in[0,1]$, 这和 $g(0)g(1)<0$ 矛盾, 我们完成了证明.

42. (42.) 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx&=-\frac{f(b)e^b-f(a)e^a}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{e^b-e^a}\\&=-\frac{e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]}{-\frac{1}{\eta^2}}\frac{f(\xi)}{e^\xi}\\&=e^{\eta-\xi}\eta^2 f(\xi)[f'(\eta)+f(\eta)],\end{aligned}$$

这就证明了(11.103).

43. (43.)

若 $f'(x)+f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1)$, 则不妨设 $f'(x)+f(x)>0,\forall x\in(0,1)$. 于是 $e^xf(x)$ 递增, 从而由 $f(0)f(1)>0$ 知 f 不变号, 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in[0,1]$, 但是

$$0=2024f(0)+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

注意到

$$\left[e^{\frac{x^2-x-1}{1-x}}[f(x)e^x]'\right]'=\frac{\sqrt[x-1]{e}\left[\left(x^2-2x+1\right)f''(x)+\left(x^2-2x\right)f'(x)-f(x)\right]}{(1-x)^2},x\in[0,1).$$

又

$$\left(e^{\frac{x^2-x-1}{1-x}}[f(x)e^x]'\right)|_{x=\xi}=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{x^2-x-1}{1-x}}[f(x)e^x]'=0,$$

于是由罗尔中值定理我们知道存在 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$\left(\eta^2-2\eta+1\right)f''(\eta)+\left(\eta^2-2\eta\right)f'(\eta)-f(\eta)=0.$$

44. (44.) 若 $f'(x)+f(x)\neq 0,\forall x\in(0,1)$, 则不妨设 $f'(x)+f(x)>0,\forall x\in(0,1)$. 于是 $e^xf(x)$ 递增, 从而由 $f(0)f(1)>0$ 知 f 不变号, 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in[0,1]$, 但是

$$0=2f(0)+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

注意到

$$\left(\frac{x^2}{e^x}[f(x)e^x]'\right)'=x[xf''(x)+(x+2)f'(x)+2f(x)],x\in[0,1].$$

又

$$\left(\frac{x^2}{e^x}[f(x)e^x]'\right)|_{x=\xi}=\left(\frac{x^2}{e^x}[f(x)e^x]'\right)|_{x=0}=0,$$

于是由罗尔中值定理我们知道存在 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$\eta f''(\eta)+(2+\eta)f'(\eta)+2f(\eta)=0.$$

45. (45.) 如若不然, f 只有 m 个不同的零点且 $m\leqslant 2n-1$, 记全部邻域内 f 变号的零点按递增排列为 $x_i,1\leqslant i\leqslant m$. 再记 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_{2n-1}=0$, 然后对 $\alpha\in[0,\pi]$ 考虑

$$g_\alpha(x)\triangleq\cos\frac{x-\alpha}{2}\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

容易知道 g_α 是不超过 n 次的三角多项式[21], 但是 $g_\alpha(x)$ 可能会有一个常数项. 注意到

$$\int_0^{2\pi} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{x-x_k}{2}\mathrm{d}x$$

是关于 α 的连续函数.

一方面

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g_0(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\cos\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x+x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left[\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin x\cos\frac{x_k}{2}-\sin\frac{x_k}{2}\cos x\right)-\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin x\cos\frac{x_k}{2}+\sin\frac{x_k}{2}\cos x\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= 2\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{x_k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left[\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\cot\frac{x_k}{2}\sin x-\cos x\right)-\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\cot\frac{x_k}{2}\sin x+\cos x\right)\right]\mathrm{d}x\\
&< 0,
\end{aligned}$$

最后一个不等号是因为无脑打开括号会发现系数为非负的项是不存在的.

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g_\pi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x-\pi}{2}\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\cos\frac{2x+x_k}{2}\right)\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\cdot\prod_{k=1}^{2n-1}\cos\frac{2x-x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\left(\prod_{k=1}^{2n-1}\cos\frac{2x-x_k}{2}+\prod_{k=1}^{2n-1}\cos\frac{2x+x_k}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left[\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\cos x\cos\frac{x_k}{2}+\sin x\sin\frac{x_k}{2}\right)+\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\cos x\cos\frac{x_k}{2}-\sin x\sin\frac{x_k}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= 2\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x_k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left[\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\cos x\cot\frac{x_k}{2}+\sin x\right)+\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\cos x\cot\frac{x_k}{2}-\sin x\right)\right]\mathrm{d}x\\
&> 0,
\end{aligned}$$

这里最后一个不等号是因为无脑打开括号会发现系数为非正的项是不存在的.

取 $\alpha\in[0,\pi]$ 使得 $\int_0^{2\pi} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 此时 g_α 无常数项.

于是由题目条件有

$$\int_0^{\pi} f(x)\,g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

注意到 $f(x)\,g_\alpha(x)$ 在 $[0,\pi]$ 非负或者非正, 于是有

$$f(x)\,g_\alpha(x) = 0, \forall x\in[0,\pi],$$

[21] 可以用欧拉公式写成指数函数乘积的形式打开括号来直接观察.

这就给出了 f 有无穷个零点, 从而矛盾!

46. (46.) 对任何长度大于 2π 的区间 $[a,b]$, 由 $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 和 f 不恒为 0 知 f 在 $(a,a+2\pi)$ 至少有一个变号 0 点 c. 故考虑 $c=x_0<x_1<\cdots<x_s=c+2\pi$ 是 f 在 $(c,c+2\pi)$ 所有变号零点. 注意到所有 x_i 要么落在 (a,b), 要么减去 2π 后落在 (a,b) 且如此操作后不会重合. 我们知道 f 在 (a,b) 就会至少有 s 个变号零点. 因此接下来只需证明 $s\geqslant 2n+2$.

注意到 $(x_{i-1},x_i),i=1,2,\cdots,s$ 上 f 不恒为 0 且相邻两个邻域不同号, 则由周期性知 (x_{s-1},x_s) 和 (x_0,x_1) 上 f 应该异号, 于是 s 为偶数. 当 $n=0$, 注意到 $\int_c^{c+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 故我们证明了 $(c,c+2\pi)$ 必有 f 的变号零点, 因此 $s\geqslant 2$. 假设命题对 $n-1$ 时成立但是 $(c,c+2\pi)$ 上 $s=2n$. 注意到

$$\int_0^{2\pi} f(x+c)\prod_{i=0}^{s-1}\sin\left(\frac{x+c-x_i}{2}\right)\mathrm{d}x=0,$$

且用欧拉公式容易得到 $\prod_{i=0}^{s-1}\sin\left(\frac{x+c-x_i}{2}\right)$ 是不超过 n 次的三角多项式. 又 $f(x+c)\prod_{i=0}^{s-1}\sin\left(\frac{x+c-x_i}{2}\right)\mathrm{d}x$ 在 $[0,2\pi]$ 不变号, 故 $f(x+c)=0,\forall x\in[0,2\pi]$, 即 $f(x)\equiv 0$ 而矛盾! 这就证明了 $s\geqslant 2n+2$. 于是我们完成了证明.

47. (47.) 如果对任何 $x\in(a,b)$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{a-x}$, $f'(x)\geqslant\frac{1}{b-x}$ 至少有一个成立. 我们来证明其中必有一个恒成立. 如果并非恒成立, 那么导数介值定理表明 f' 必有零点 $\tilde{x}\in(a,b)$. 但是

$$\frac{1}{a-\tilde{x}}<0=f'(\tilde{x})<\frac{1}{b-\tilde{x}},$$

这就是一个矛盾!

因此不妨设

$$f'(x)\geqslant\frac{1}{b-x},\forall x\in(a,b).$$

则运用拉格朗日中值定理得

$$f(b)-f(x)=(b-x)f'(\theta)\geqslant\frac{b-x}{b-\theta}>\frac{b-x}{b-x}=1,a<x<\theta<b.$$

令 $x\to b^-$ 即得矛盾!

这就证明了存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{a-\xi}<f'(\xi)<\frac{1}{b-\xi}.$$

48. (48.) 由一阶构造类11.10的方法, 我们构造

$$C(x)=\frac{f(x)-f(0)}{e^{2024x}},$$

则

$$C'(x)=\frac{f'(x)-2024(f(x)-f(0))}{e^{2024x}}.$$

若 $f(1)=f(0)$, 则 $C(1)=C(0)=0$ 和罗尔定理表明题目要求的 ξ 存在.

若 $f(1)>f(0)$ 但题目要求的 ξ 不存在, 则由 $C'(1)=\frac{f(0)-f(1)}{e^{2024}}<0$ 和达布中值定理11.5知 $C'(x)<0,\forall x\in(0,2)$. 于是

$$\frac{f(1)-f(0)}{e^{2024}}=C(1)<C(0)=0\Rightarrow f(1)<f(0),$$

这就是一个矛盾! 故题目要求的 ξ 存在.

若 $f(1)<f(0)$ 但题目要求的 ξ 不存在, 则由 $C'(1)=\frac{f(0)-f(1)}{e^{2024}}>0$ 和达布中值定理11.5知 $C'(x)>0,\forall x\in(0,2)$. 于是

$$\frac{f(1)-f(0)}{e^{2024}}=C(1)>C(0)=0\Rightarrow f(1)>f(0),$$

这就是一个矛盾! 故题目要求的 ξ 存在.

49. (49.)

(a). 由 Hermite 插值11.1我们有

$$f(x)=f(1)x^2+\frac{x^2(x-1)}{6}f'''(\theta)\geqslant f(1)x^2+\frac{x^2(x-1)}{6}.$$

(b). 若

$$f''(y)>\frac{2f'(x)}{x}-\frac{x}{3},\forall y\in(0,x),$$

则

$$\begin{aligned}f'(x)=\int_0^x f''(y)\,\mathrm{d}y>2f'(x)-\frac{x^2}{3}\Rightarrow f'(x)<\frac{x^2}{3}\\ \Rightarrow f(x)=\int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y<\int_0^x\frac{y^2}{3}\mathrm{d}y=\frac{x^3}{9}\Rightarrow\frac{1}{6}=f(1)<\frac{1}{9},\end{aligned}$$

这就是一个矛盾! 因此我们完成了证明.

50. (50.) 由拉格朗日插值公式11.1我们有

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\left(x-\frac{b+2c}{3}\right)\left(x-\frac{c+2a}{3}\right)}{\left(\frac{a+2b}{3}-\frac{b+2c}{3}\right)\left(\frac{a+2b}{3}-\frac{c+2a}{3}\right)}f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+\frac{\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)\left(x-\frac{c+2a}{3}\right)}{\left(\frac{b+2c}{3}-\frac{a+2b}{3}\right)\left(\frac{b+2c}{3}-\frac{c+2a}{3}\right)}f\left(\frac{b+2c}{3}\right)\\&+\frac{\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)\left(x-\frac{b+2c}{3}\right)}{\left(\frac{c+2a}{3}-\frac{a+2b}{3}\right)\left(\frac{c+2a}{3}-\frac{b+2c}{3}\right)}f\left(\frac{c+2a}{3}\right)+\frac{\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)\left(x-\frac{b+2c}{3}\right)\left(x-\frac{c+2a}{3}\right)}{6}f'''(\theta),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=&\frac{(c-a)(b-a)}{(a-2b+c)(a+b-2c)}f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+\frac{(b-c)(a-b)}{(a+b-2c)(2a-b-c)}f\left(\frac{b+2c}{3}\right)\\&+\frac{(c-b)(a-c)}{(a-2b+c)(2a-b-c)}f\left(\frac{c+2a}{3}\right)+\frac{(c-b)(a-c)(b-a)}{6\cdot3^3}f'''(\theta).\end{aligned}$$

继续由拉格朗日插值11.1有

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\left(x-\frac{2b+c}{3}\right)\left(x-\frac{2c+a}{3}\right)}{\left(\frac{2a+b}{3}-\frac{2b+c}{3}\right)\left(\frac{2a+b}{3}-\frac{2c+a}{3}\right)}f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+\frac{\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\left(x-\frac{2c+a}{3}\right)}{\left(\frac{2b+c}{3}-\frac{2a+b}{3}\right)\left(\frac{2b+c}{3}-\frac{2c+a}{3}\right)}f\left(\frac{2b+c}{3}\right)\\&+\frac{\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\left(x-\frac{2b+c}{3}\right)}{\left(\frac{2c+a}{3}-\frac{2a+b}{3}\right)\left(\frac{2c+a}{3}-\frac{2b+c}{3}\right)}f\left(\frac{2c+a}{3}\right)+\frac{\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\left(x-\frac{2b+c}{3}\right)\left(x-\frac{2c+a}{3}\right)}{6}f'''(\eta),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=&\frac{(b-c)(a-b)}{(a+b-2c)(2a-b-c)}f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+\frac{(c-b)(a-c)}{(a-2b+c)(2a-b-c)}f\left(\frac{2b+c}{3}\right)\\&+\frac{(c-a)(b-a)}{(a+b-2c)(a-2b+c)}f\left(\frac{2c+a}{3}\right)+\frac{(c-a)(a-b)(b-c)}{6\cdot3^3}f'''(\eta).\end{aligned}$$

注意上述系数可以一一对应是必然的结果, 因此无需真正的计算. 将上述两个式子做差有

$$\begin{aligned}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{6\cdot3^3}\left[f'''(\theta)+f'''(\eta)\right]=&\frac{(c-a)(b-a)}{(a-2b+c)(a+b-2c)}\left[f\left(\frac{a+2b}{3}\right)-f\left(\frac{a+2c}{3}\right)\right]\\&+\frac{(b-c)(a-b)}{(a+b-2c)(2a-b-c)}\left[f\left(\frac{b+2c}{3}\right)-f\left(\frac{b+2a}{3}\right)\right]\\&+\frac{(c-b)(a-c)}{(a-2b+c)(2a-b-c)}\left[f\left(\frac{c+2a}{3}\right)-f\left(\frac{c+2b}{3}\right)\right].\end{aligned}$$

用平均值定理12.3知存在 $\xi\in I$ 使得(11.106)成立.

51. (51.) 当 a,b,c 有一个相同, 问题是显然的, 接下来考虑 a,b,c 互不相同. 考虑

$$F(x)=f\left(\frac{a+b+c}{3}+x\right)-f\left(\frac{a+b+c}{3}-x\right),$$

则

$$F'''(x)=f'''\left(\frac{a+b+c}{3}+x\right)+f'''\left(\frac{a+b+c}{3}-x\right).\tag{30.63}$$

于是要证等式左边为

$$F\left(\frac{a-b}{3}\right)+F\left(\frac{b-c}{3}\right)+F\left(\frac{c-a}{3}\right).$$

考虑

$$G(x)=F\left(\frac{a}{3}-x\right)+F\left(x-\frac{c}{3}\right)+F\left(\frac{c-a}{3}\right),$$

则

$$G\left(\frac{a}{3}\right)=G\left(\frac{c}{3}\right)=0, G\left(\frac{b}{3}\right)=F\left(\frac{a-b}{3}\right)+F\left(\frac{b-c}{3}\right)+F\left(\frac{c-a}{3}\right).$$

注意到

$$\begin{aligned}
G(x) &\overset{\text{拉格朗日插值11.1}}{=} \frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{c}{3}\right)G''(\alpha)\\
&=\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{c}{3}\right)\left[F''\left(\frac{a}{3}-\alpha\right)+F''\left(\alpha-\frac{c}{3}\right)\right]\\
&\overset{F''\text{奇函数}}{=}\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{c}{3}\right)\left[F''\left(\alpha-\frac{c}{3}\right)-F''\left(\alpha-\frac{a}{3}\right)\right]\\
&\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=}\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{c}{3}\right)\frac{a-c}{3}F'''(\beta)\\
&\overset{(30.63)}{=}\left(x-\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{c}{3}\right)\frac{a-c}{3}\frac{f'''\left(\frac{a+b+c}{3}+\beta\right)+f'''\left(\frac{a+b+c}{3}-\beta\right)}{2}\\
&\overset{\text{平均值定理12.3}}{=}\left(x-\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{c}{3}\right)\frac{a-c}{3}f'''(\xi).
\end{aligned}$$

考虑 $x=\frac{b}{3}$ 即得证.

52. (52.) 由拉格朗日中值的知存在 $\theta\in(a,b)$ 使得

$$f(f(b))-f(f(a))=f'(\theta)f'(f(\theta))(b-a).$$

因为 f 严格递增, 我们有 $a<f(\theta)<b$. 于是记

$$\tilde{a}\triangleq\min\{\theta,f(\theta)\},\tilde{b}\triangleq\max\{\theta,f(\theta)\},$$

我们有

$$\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]\subset(a,b),\min_{x\in\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]}\left[f'(x)\right]^2\leqslant f'(\theta)f'(f(\theta))\leqslant\max_{x\in\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]}\left[f'(x)\right]^2.$$

现在由 $(f')^2$ 连续和介值定理知存在 $\xi\in\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]\subset(a,b)$ 使得 $\left[f'(\xi)\right]^2=f'(\theta)f'(f(\theta))$, 从而

$$f(f(b))-f(f(a))=\left[f'(\xi)\right]^2(b-a).$$

53. (53.) 考虑 $g(x)\triangleq f(x)-\frac{x}{a}$, 则 $g(0)=1,g(a)=-1$. 于是取 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $g(\alpha)=0$. 由拉格朗日中值定理有

$$f'(x_1)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha},f'(x_2)=\frac{f(\alpha)}{\alpha-a},0<x_1<\alpha<x_2<a.$$

则

$$f'(x_1)f'(x_2)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha}\frac{f(\alpha)}{\alpha-a}=\frac{\frac{\alpha}{a}-1}{\alpha}\frac{\frac{\alpha}{a}}{\alpha-a}=\frac{1}{a^2}.$$

54. (54.) 由题目条件有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-x^2\right]\mathrm{d}x=0.$$

于是由第一积分中值定理11.3有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-x^2\right]\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left[f(\xi_k)-\xi_k^2\right],\xi_k\in\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right).$$

现在就有(11.107)成立.

55. (55.) 考虑 $F(x) \triangleq \begin{cases} \frac{\int_a^x f(y)\mathrm{d}y}{x-a}, & x \in (a,b] \\ f(a), & x = a \end{cases}$, 则

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y}{x-a}, x \in (a,b).$$

设 $x_1 \in (a,b)$ 是 f 的最大值点, $x_2 \in (a,b)$ 是 f 的最小值点, 则有

$$F'(x_1) = \frac{f(x_1)(x_1-a) - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}y}{x_1-a} \geqslant \frac{f(x_1)(x_1-a) - \int_a^{x_1} f(x_1)\,\mathrm{d}y}{x_1-a} = 0;$$

$$F'(x_2) = \frac{f(x_2)(x_2-a) - \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}y}{x_2-a} \leqslant \frac{f(x_2)(x_2-a) - \int_a^{x_2} f(x_2)\,\mathrm{d}y}{x_2-a} = 0.$$

由导数介值定理我们有 $\eta \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x = (\eta - a) f(\eta).$$

56. (56.)

笔记 注意为了规避不一定可积的二阶导在积分下出现, 于是我们分部积分消去含有二阶导的项即可得到构造.

构造

$$g(x) = \frac{e^{1-x}+e^{x-1}}{2} f'(x) + \int_0^x \frac{e^{1-t}-e^{t-1}}{2} f'(t)\,dt - \int_0^x \frac{e^{1-t}+e^{t-1}}{2} f(t)\,dt, \tag{30.64}$$

读者可以自己演算有

$$g(0) = g(1) = 0, g'(x) = \frac{e^{1-x}+e^{x-1}}{2}\left(f''(x) - f(x)\right),$$

由拉格朗日中值定理和 $\frac{e^{1-x}+e^{x-1}}{2} > 0$, 我们知道存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $f''(\theta) = f(\theta)$.

57. (57.) 由 Taylor 中值定理, 存在 $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{f^{(j)}\left(\frac{x}{2}\right)}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j + \frac{f^{(2n+1)}(\alpha x)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{f^{(j)}\left(\frac{x}{2}\right)}{2^j j!} x^j + \frac{f^{(2n+1)}(\alpha x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

存在 $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 使得

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{f^{(j)}\left(\frac{x}{2}\right)}{j!}\left(-\frac{x}{2}\right)^j + \frac{f^{(2n+1)}(\beta x)}{(2n+1)!}\left(-\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j f^{(j)}\left(\frac{x}{2}\right)}{2^j j!} x^j - \frac{f^{(2n+1)}(\beta x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

由平均值定理12.3, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(\alpha x) + f(\beta x) = 2f(\theta x).$$

于是结合上面三式得

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{f^{(j)}\left(\frac{x}{2}\right)}{2^j j!} x^j + \frac{f^{(2n+1)}(\alpha x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1} - \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j f^{(j)}\left(\frac{x}{2}\right)}{2^j j!} x^j + \frac{f^{(2n+1)}(\beta x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{2f^{(2j-1)}\left(\frac{x}{2}\right)}{2^{2j-1}(2j-1)!} x^{2j-1} + \frac{f^{(2n+1)}(\alpha x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{f^{(2n+1)}(\beta x)}{2^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(2j-1)}\left(\frac{x}{2}\right)}{4^{j-1}(2j-1)!} x^{2j-1} + \frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{4^n(2n+1)!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

这就证明了(11.108).

58. (58.) 假设 f 在 (a,b) 只有 $s\leqslant n$ 个不同的零点

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_s<b.$$

然后在 $(x_{i-1},x_i),i=2,3,\cdots,n$ 内 f 不变号. 不妨设相邻两个区间 f 变号, 否则把这两个区间合并. 现在 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s)f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号. 又由(11.109)得

$$\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s)f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

即 $f(x)=0,\forall x\in[a,b]$, 这就和 f 零点数有限矛盾!, 即我们证明了 f 在 (a,b) 上至少有 $n+1$ 个不同的零点.

59. (59.) 考虑

$$F(x)\triangleq\frac{\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y}{e^x},x\in[0,1].$$

注意到

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\frac{y}{1-y}(1-y)f(y)\,\mathrm{d}y}{\frac{x}{1-x}}=\lim_{x\to0^+}\left[(1-x)\frac{\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y}{x}\right]=0,$$

由迭代法11.8知存在 $\alpha\in(0,1]$ 使得 $\int_0^\alpha yf(y)\,\mathrm{d}y=0$. 故 $F(0)=F(\alpha)=0$. 由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,\alpha)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{\int_0^\xi xf(x)\,\mathrm{d}x-\xi f(\xi)}{e^\xi}=0,$$

即 $\int_0^\xi xf(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

60. (60.) 一方面

$$\int_0^1(x^2-3x)f'(x)\,\mathrm{d}x=1-3\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1+3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

另外一方面由积分中值定理11.3有 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$\int_0^1(x^2-3x)f'(x)\,\mathrm{d}x=f'(\eta)\int_0^1(x^2-3x)\,\mathrm{d}x=-\frac{7}{6}f'(\eta),$$

即 $f'(\eta)=-\frac{6}{7}$.

61. (61.) 由条件(11.110), 注意到

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

于是由积分中值定理11.3我们有 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\frac{|f(\xi)|}{2^n(n+1)}=|f(\xi)|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant1,$$

故(11.111)成立.

62. (62.)

(a). 注意到

$$\lim_{x\to0^+}(2-x)\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=2\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)+f'(-x)}{2}=2(1+a)>2,$$

故由极限保号性得 $\xi\in(0,2)$ 使得 $(2-\xi)\frac{f(\xi)-f(-\xi)}{2\xi}>2$, 这恰好就是(11.112).

(b). 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(\eta_1),\frac{f(-2)-f(0)}{-2-0}=f'(\eta_2),\eta_1\in(0,2),\eta_2\in(-2,0),$$

从而由条件不等式得

$$|f'(\eta_1)|\leqslant1,|f'(\eta_2)|\leqslant1.$$

由导数在 $[\eta_2,\eta_1]$ 连续性且在 0 处的值大于 1, 我们知道导数在 $[\eta_2,\eta_1]$ 内部取得最大值点 η, 从而

$$f''(\eta)=0,\eta\in(\eta_2,\eta_1)\subset(-2,2).$$

63. (63.)

(a). 对 $x\in[-1,1]$, 由 Taylor 中值定理得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\theta_1)}{2}(1-x)^2;$$
$$f(-1)=f(x)+f'(x)(-1-x)+\frac{f''(\theta_2)}{2}(-1-x)^2.$$

于是一式减去二式得

$$|2f'(x)|=\left|\frac{f''(\theta_1)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\theta_2)}{2}(1+x)^2\right|.$$

我们有

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leqslant\frac{1}{2}\left[\left|\frac{f''(\theta_1)}{2}(1-x)^2\right|+\left|\frac{f''(\theta_2)}{2}(1+x)^2\right|\right]\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|\cdot\left[(1-x)^2+(1+x)^2\right]\\&\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|\cdot\left[(1-x)^2+(1+x)^2\right]\leqslant\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|.\end{aligned}$$

于是这就证明了(11.113).

(b). 由拉格朗日插值定理11.1得

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{2}f''(\theta).$$

于是

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|\cdot\int_0^1\frac{(x+1)(1-x)}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\max_{x\in[-1,1]}|f''(x)|,$$

这就证明了(11.114).

64. (64.) 设 $x_0\in(0,a)$ 是 f 最大值点, 则 $f'(x_0)=0$. 现在由拉格朗日中值定理得

$$|f'(a)|=|f'(a)-f'(x_0)|\leqslant M(a-x_0);$$
$$|f'(0)|=|f'(0)-f'(x_0)|\leqslant Mx_0.$$

于是我们相加上式就有(11.115)成立.

65. (65.) 考虑 $g(x)\triangleq e^{-x}[f(x)-1]$, 我们有

$$1=g(1)-g(0)=g'(\alpha)=e^{-\alpha}[1-f(\alpha)+f'(\alpha)].$$

注意到

$$g'(0)=e^{-0}[1-f(0)+f'(0)]=1,$$

由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g''(\xi)=0$, 即(11.116)成立.

66. (66.) 记

$$M\triangleq\sup_D f,m\triangleq\inf_D f,s\triangleq\frac{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

容易看到 $m\leqslant s\leqslant M$.

若 $s=M$ 或者 $s=m$, 我们有

$$\frac{\iint_D(M-f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=0\text{或者}\frac{\iint_D(f(x,y)-m)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=0,$$

此时 f 为常值自然就完成了证明.

若 $m<s<M$, 注意到连接最小值点和最大值点的含于 D 的除端点外互不相交的连续曲线 $(x(t),y(t)),t\in[0,1]$ 有无数条且

$$f(x(1),y(1))=M,f(x(0),y(0))=m.$$

由连续函数的介值定理我们知道存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $f(x(t_0),y(t_0))=s$ 的 $x(t_0),y(t_0)$ 有无穷多对, 我们完成了证明.

67. (67.) 不失一般性, 假设

$$\frac{a+b}{2}=0,|f(x)|\leqslant1,\forall x\in[a,b],$$

否则用 $\frac{f\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{M}$ 代替 $f(x)$ 即可. 记

$$c \triangleq [f(0)]^2 + [f'(0)]^2 \geqslant 2|f(0)f'(0)| \geqslant 2 > 1.$$

则

$$b-a > 4 \Rightarrow 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{c}} \leqslant 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} < 2 < b.$$

于是由非数学中值定理习题15.知存在 $\xi \in \left(-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{c}}, 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{c}}\right) \subset (a,b)$ 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

68. (68.) 对 n 作归纳. 当 $n=1$, 此时相当于

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, x_1 < x_2, p(x) = x + a_0.$$

于是由罗尔中值定理知存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\left[e^{a_0 x} f(x)\right]'|_{x=\xi} = \left[f'(\xi) + a_0 f(\zeta)\right] e^{a_0\xi} = 0 \Rightarrow f'(\xi) + a_0 f(\zeta) = 0.$$

对一般的 $n > 1$, 假设对小于等于 $n-1$ 时结论都成立. 设

$$p(x) = (x-a_1)q(x), a_1 \in \mathbb{R}.$$

我们考虑 $g(x) \triangleq e^{-a_1 x} f(x)$. 显然由罗尔中值定理得

$$g'(x) = \left[f'(x) - a_1 f(x)\right] e^{-a_1 x}$$

有零点

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \cdots < x_{k-1} < y_{k-1} < x_k,$$

这里对于 $n_i = 1$ 的 x_i 应该删去.

注意到对 g' 来说, 所有 x_i 对应的 n_i 变成了 $n_i - 1$, 但是插入新的 $k-1$ 个点, 所以对 g' 来说 n 至少变成了 $n-1$, 所以可以使用归纳假设得 $\xi \in (x_1, x_k)$ 使得

$$\left(q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) g'\right)(\xi) = 0,$$

即(11.118)成立. 因此由数学归纳法我们知道命题对一切 $n \in \mathbb{N}$ 都成立.

69. (69.) 由 Taylor 公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta_1)}{2}x^2 = f(0) + \frac{f''(\theta_1)}{2}x^2;$$
$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\theta_2)}{2}(x-1)^2 = f(1) + \frac{f''(\theta_2)}{2}(x-1)^2.$$

我们由积分中值定理11.3得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f(0) + \frac{f''(\theta_1)}{2}x^2\right]\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[f(1) + \frac{f''(\theta_2)}{2}(x-1)^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x + \frac{f''(\xi_2)}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f''(\xi_1)}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x + \frac{f''(\xi_2)}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{48} \\
&= \frac{f''(\xi)}{24},
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自导数的介值性且显然 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, 因此 $\xi \in (0,1)$. 于是我们得到了(11.119).

注如果读者使用拉格朗日插值定理11.1, 那么我们可得

$$f(x) = (1-x)f(0) + xf(1) + \frac{f''(\theta)}{2}x(x-1).$$

现在就有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 [(1-x)f(0)+xf(1)]\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f''(\theta)}{2}x(x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f''(\xi)}{2}\int_0^1 x(x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{f''(\xi)}{12}.\end{aligned}$$

70. (70.) 由拉格朗日插值定理11.1, 我们知道存在 $\xi_n \in (x_0, x_0+n\Delta x)$ 使得

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\frac{x_0-x_0-k\Delta x}{x_0+i\Delta x-x_0-k\Delta x}f(x_0+i\Delta x) + \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x_0-x_0-k\Delta x).$$

计算得

$$\begin{aligned}f(x_0) &= \sum_{i=1}^{n}\prod_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\frac{-k\Delta x}{(i-k)\Delta x}f(x_0+i\Delta x) + (-1)^n f^{(n)}(\xi_n)(\Delta x)^n\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}f(x_0+i\Delta x) + (-1)^n f^{(n)}(\xi_n)(\Delta x)^n\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^{n-i}f(x_0+i\Delta x) + (-1)^n f^{(n)}(\xi_n)(\Delta x)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}C_n^k f(x_0+(n-k)\Delta x) + (-1)^n f^{(n)}(\xi_n)(\Delta x)^n,\end{aligned}$$

即(11.120)成立.

71. (71.) 考虑

$$g(x) \triangleq f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),$$

我们有 $g(a)=g(b)=0$.

注意到 g 在 (a,b) 必然取得极值点 ξ, 不妨设为极大值点, 于是

$$g'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi^+}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \leqslant 0, g'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi^-}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \geqslant 0,$$

这就是

$$f'_-(\xi) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f'_+(\xi).$$

现在存在 $p,q\geqslant 0, p+q=1$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = pf'_+(\xi) + qf'_-(\xi),$$

这就证明了(19.72).

72. (72.) 设

$$F(x) \triangleq [f(b)-f(a)]\cdot[g(x)-g(a)] - [g(b)-g(a)]\cdot[f(x)-f(a)].$$

注意到 $F(a)=F(b)=0$, 于是 F 在 (a,b) 内必取到极值点 ξ, 不妨设为极大值点, 则

$$F'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi^+}\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} \leqslant 0, F'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi^-}\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} \geqslant 0.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}&[f(b)-f(a)]\cdot g'_+(\xi) \leqslant [g(b)-g(a)]\cdot f'_+(\xi);\\ &[f(b)-f(a)]\cdot g'_-(\xi) \geqslant [g(b)-g(a)]\cdot f'_-(\xi),\end{aligned}$$

现在存在[22]$p,q\geqslant 0,p+q=1$ 使得

$$[f(b)-f(a)]\cdot\left[pg'_{+}(\xi)+qg'_{-}(\xi)\right]=[g(b)-g(a)]\cdot\left[pf'_{+}(\xi)+qf'_{-}(\xi)\right],$$

即(11.122)成立.

73. (73.) 考虑

$$h(x)\triangleq e^{x}f(x),g(x)\triangleq e^{-x}\left[f(x)+f'(x)\right],$$

我们有

$$h'(x)=e^{x}\left[f(x)+f'(x)\right],g'(x)=e^{-x}\left[f''(x)-f(x)\right].$$

注意到

$$h(a)=h(b)=0,g(a)g(b)=e^{-a-b}f'(a)f'(b)>0,$$

于是由罗尔中值定理得 $c\in(a,b)$ 使得 $h'(c)=0$, 从而 $g(c)=0$.
不妨设 $g(a)>0,g(b)>0$, 则 g 在 (a,b) 取得在 $[a,b]$ 的最小值, 设最小值点为 ξ. 则我们有

$$g'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)=f(\xi).$$

74. (74.) 设

$$g(x)\triangleq f'(x)e^{\frac{1}{3}f^{3}(x)},$$

我们有

$$g'(x)=\left[f''(x)+\left(f(x)f'(x)\right)^{2}\right]e^{\frac{1}{3}f^{3}(x)}.$$

由积分中值定理11.3得 $\theta_1\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 使得

$$0=\int_{0}^{\frac{1}{3}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(\theta_1)\Rightarrow f(\theta_1)=0.$$

由连续函数平均值定理12.3得 $\theta_2\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ 使得

$$f(\theta_2)=\frac{f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)}{2}=0.$$

于是罗尔中值定理得 $\xi_1\in(0,\theta_1),\xi_2\in(\theta_1,\theta_2)$ 使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0.$$

继续由罗尔中值定理得 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得

$$g'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)+\left[f(\xi)f'(\xi)\right]^{2}=0.$$

75. (75.) 记

$$M\triangleq\max_{1\leqslant j\leqslant n}f'(\xi_j),m\triangleq\max_{1\leqslant j\leqslant n}f'(\xi_j),$$

我们有

$$m=\sqrt[n]{m^{n}}\leqslant\sqrt[n]{f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n)}\leqslant\sqrt[n]{M^{n}}=M.$$

于是由导数介值性得 $\xi\in(a,b)$ 使得(11.124)成立.

76. (76.) 考虑

$$g(x)\triangleq xe^{x}\left[f'(x)-1\right].$$

由拉格朗日中值定理得 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$1=f(1)-f(0)=f'(\theta).$$

注意到 $g(0)=g(\theta)=0$, 由罗尔中值定理我们得 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$g'(\xi)=(\xi+1)e^{\xi}\left[f'(\xi)-1\right]+\xi e^{\xi}f''(\xi)=0,$$

[22] $y=x$ 下方和上方两个点连线必然和 $y=x$ 有一个交点.

即(11.125)成立, 这就完成了证明.

77. (77.) 见定理13.42.

78. (78.) 考虑

$$g(x) \triangleq \frac{f'(x)-f(1)}{e^x}, g'(x)=\frac{f''(x)-f'(x)+f(1)}{e^x}.$$

注意到

$$h(x)=f(x)-f(1)x, h(0)=h(1)=0.$$

由罗尔中值定理得 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$h'(\theta)=f'(\theta)-f(1)=0.$$

由 f' 是偶函数得

$$g(\theta)=g(-\theta)=0.$$

继续由罗尔中值定理得 $\xi\in(-1,1)$ 使得

$$f''(\xi)-f'(\xi)+f(1)=0.$$

79. (79.) 注意到

$$(xf(x))'=xf'(x)+f(x).$$

于是若找不到满足条件的 ξ, 可以不妨设

$$xf'(x)+f(x)>0, \forall x\in(0,2),$$

即 xf 严格递增.

我们把等式改写为

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

又 $xf(x)$ 递增得 $f\geqslant 0$, 所以

$$\frac{1-\ln 2}{2}f(1)=f(1)\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

又

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(1)\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\cdot f(1).$$

因此我们有

$$\frac{1-\ln 2}{2}f(1)\geqslant\frac{\ln 2}{2}f(1)\Rightarrow f(1)=0,$$

这就是一个矛盾! 故存在 $\xi\in(0,2)$ 使得

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

80. (80.) 设

$$g(x)=(b-x)f(x)+f(a)x, g'(x)=f(a)-f(x)+(b-x)f'(x).$$

我们有 $g(a)=g(b)=f(a)b$. 于是由罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}.$$

81. (81.) 注意到

$$\left(\frac{1}{x^2}(xf)'\right)'=\left(\frac{f+xf'}{x^2}\right)'=\frac{x^2f''-2f}{x^3}.$$

由 $xf(x)|_{x=0}=xf(x)|_{x=1}=0$ 和罗尔中值定理得 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$[xf(x)]'|_{x=\theta}=\theta f'(\theta)+f(\theta)=0.$$

又

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+xf'(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)+f'(x)+xf''(x)}{2x}=\frac{3}{2}f''(0)=0$$

以及

$$\frac{f(x)+xf'(x)}{x^2}|_{x=\theta}=0,$$

继续罗尔得 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\xi^2f''(\xi)-2f(\xi)=0.$$

82. (82.) 对 $n\in\mathbb{N}$, 首先我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left|\frac{\sin(n\arccos x)}{\sin\arccos x}\right|\mathrm{d}x\overset{x=\cos y}{=}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(ny)}{\sin y}\right|\sin y\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi}|\sin(ny)|\,\mathrm{d}y=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}|\sin y|\,\mathrm{d}y=2.\end{aligned}$$

利用引理23.20得 $p_n(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sin\arccos x}$ 是首系数为 $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}C_n^{2k+1}=2^{n-1}$ 的 $n-1$ 次多项式, 于是我们有

$$\int_0^1 p_{n+1}(2x-1)f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n2^n\int_0^1 p_{n+1}^{(n)}(2x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n4^nn!.$$

现在

$$\begin{aligned}4^nn!&=\left|\int_0^1 p_{n+1}(2x-1)f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\cdot\int_0^1|p_{n+1}(2x-1)|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{2}\int_{-1}^1|p_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x=\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.\end{aligned}$$

83. (83.) 两次 Cauchy 中值定理得

$$\begin{aligned}&\frac{\int_0^1f^3(x)\,\mathrm{d}x-0}{\left(\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-0}=\frac{f^3(\theta)}{2f(\theta)\int_0^{\theta}f(x)\,\mathrm{d}x}\\&=\frac{f^2(\theta)-0}{2\int_0^{\theta}f(x)\,\mathrm{d}x-0}=\frac{2f(\xi)f'(\xi)}{2f(\xi)}=f'(\xi),\end{aligned}$$

这里 $0<\xi<\theta<1$.

84. (84.) 若 $g(x)\triangleq f^2(x)-x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上导数没有零点. 则必然严格递增或者严格递减.
对于严格递增我们有

$$f^2(x)-x^2\geqslant f^2(0)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\geqslant 1,\forall x>0,$$

即和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 矛盾!
对于严格递减我们有

$$f^2(x)-x^2\geqslant f^2(0)\geqslant 0,\forall x\leqslant 0\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|^2\geqslant 1,\forall x<0,$$

即和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 矛盾!
综上所述, g 的导数必有零点, 因此存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f'(\xi)=\xi.$$

85. (85.) 设

$$h(x)\triangleq f(x)-g(b+a-x),$$

我们有

$$h(a)=h(b)=\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

由积分中值定理11.3得 $\alpha \in (a,b)$ 满足

$$h(\alpha) = 0.$$

现在 h 有三个零点, 然后反复罗尔中值定理得 $\xi \in (a,b)$ 成立

$$h''(\xi) = f''(\xi) - g''(b+a-\xi) = 0.$$

取 $\eta = b+a-\xi$ 即得

$$f''(\xi) = g''(\eta).$$

86. (86.) 考虑

$$F(x) \triangleq \frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{e^x}.$$

我们有

$$F'(x) = \frac{f(x) - \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{e^x}.$$

若要证的 ξ 不存在, 那么不妨设

$$F'(x) = \frac{f(x) - \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{e^x} > 0, \forall x \in [0,1),$$

否则用 $-f$ 代替 f 即可.

现在由连续性得

$$F'(1) = \frac{-\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y}{e} \geqslant 0.$$

由递增性得

$$\frac{\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y}{e} \geqslant \frac{\int_0^0 f(y)\,\mathrm{d}y}{e^0} = 0,$$

即 $\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = 0$.

由罗尔中值定理和 $F(0) = F(1) = 0$ 得 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$F'(\xi) = \frac{f(\xi) - \int_0^\xi f(y)\,\mathrm{d}y}{e^\xi} = 0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们得证.

87. (87.) 注意到

$$\left[e^{2x}\left[e^{-x}f(x) - x + xe^{-x} - e^{-x}\right]'\right]' = e^x\left[f''(x) - f(x) - 2e^x - x + 1\right].$$

考虑

$$g(x) \triangleq e^{-x}f(x) - x + xe^{-x} - e^{-x},$$

我们有

$$g(-1) = g(0) = g(2) = 0,$$

于是反复罗尔得

$$\left[e^{2x}g'(x)\right]' = e^x\left[f''(x) - f(x) - 2e^x - x + 1\right]$$

在 $(-2,1)$ 有一个零点 ξ, 从而

$$f''(\xi) - f(\xi) = 2e^\xi + \xi - 1.$$

88. (88.) 由条件极限得

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

由拉格朗日中值定理和 Taylor 中值定理得

$$f(1) = f'(y_2) = \frac{1}{2}f''(y_3), 0 < y_2, y_3 < 1.$$

不妨设 $f(1)\geqslant 0$, 否则考虑 $-f$ 即可.

Case 1 若 $f(1)=0$, 则继续拉格朗日中值定理得

$$f'(y_2)-f'(0)=f''(x_3)\cdot y_2, 0<x_3<y_2.$$

取 $x_1=1, x_2=y_2$ 知 $x_3<x_2<x_1$ 且

$$f(x_1)=f'(x_2)=\frac{2}{3}f''(x_3)=0.$$

Case 2 若 $f(1)>0, y_3\leqslant y_2$, 则

$$f''(y_3)=2f'(y_2)>0.$$

由 Darboux 中值定理11.5得 $x_3\in(0,y_3)$ 使得

$$f''(x_3)=\frac{3}{2}f'(y_2).$$

取 $x_1=1, x_2=y_2$ 知 $x_3<x_2<x_1$ 且

$$f(x_1)=f'(x_2)=\frac{2}{3}f''(x_3).$$

Case 3 $f(1)>0, y_3>y_2$, 同 **Case 2**, 但是得到的 x_3 和 $x_2=y_2$ 可能相同.

89. (89.) 设

$$f(x)\triangleq\begin{vmatrix}a & e^{-a} & \ln a\\ b & e^{-b} & \ln b\\ x & e^{-x} & \ln x\end{vmatrix}, x\in[a,b],$$

于是

$$f(a)=f(b)=0, f'(x)=\begin{vmatrix}a & e^{-a} & \ln a\\ b & e^{-b} & \ln b\\ 1 & -e^{-x} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}.$$

由罗尔中值定理得 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\begin{vmatrix}a & e^{-a} & \ln a\\ b & e^{-b} & \ln b\\ 1 & -e^{-\xi} & \frac{1}{\xi}\end{vmatrix}=0.$$

又

$$f''(x)=\begin{vmatrix}a & e^{-a} & \ln a\\ b & e^{-b} & \ln b\\ 0 & e^{-x} & -\frac{1}{x^2}\end{vmatrix}=ab\left(\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}\right)e^{-x}+ab\left(\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-b}}{b}\right)\frac{1}{x^2},$$

以及

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0, \forall x>e, \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)'<0, \forall x>0,$$

我们有 f' 递增, 从而 ξ 是唯一存在的.

90. (90.) 对 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$, 若 $x_2-x_1\leqslant\frac{b-a}{2}$, 我们有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\alpha)|\cdot|x_2-x_1|<\frac{k(b-a)}{2}.$$

若 $x_2-x_1>\frac{b-a}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&\leqslant|f(x_1)-f(a)|+|f(b)-f(x_2)|\\ &\leqslant k(x_1-a)+k(b-x_2)\\ &=k(b-a-(x_2-x_1))\\ &<k\left(b-a-\frac{b-a}{2}\right)=\frac{k(b-a)}{2}.\end{aligned}$$

我们完成了证明.

91. (91.) 对

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} < r < \frac{f'(d)}{g'(d)}, c, d \in (a,b),$$

我们考虑

$$h(x) \triangleq f(x) - rg(x),$$

于是

$$h'(x) = f'(x) - rg'(x), h'(c)\, h'(d) < 0.$$

由达布中值定理11.5, 存在介于 c, d 之间的 t 使得

$$h'(t) = f'(t) - rg'(t) = 0 \Rightarrow \frac{f'(t)}{g'(t)} = r,$$

这就证明了 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 在 $x \in (a,b)$ 具有介值性.

不妨设 $g'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, 现在运用 Cauchy 中值定理我们有

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} [f(y_k) - f(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n} [g(y_k) - g(x_k)]} = \frac{\sum_{k=1}^{n} [g(y_k) - g(x_k)] \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}}{\sum_{k=1}^{n} [g(y_k) - g(x_k)]},$$

于是

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} [f(y_k) - f(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n} [g(y_k) - g(x_k)]} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}.$$

从而由 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 在 $x \in (a,b)$ 具有介值性得 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} [f(y_k) - f(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n} [g(y_k) - g(x_k)]} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

92. (92.) 由 Taylor 中值定理, 对 $x \in [-1,1]$, 存在 $\eta_x \in (-1,1)$ 使得

$$\begin{aligned} xf(x) &= 0f(0) + [f(0) + 0f'(0)]\, x + \frac{2f'(\eta_x) + \eta_x f''(\eta_x)}{2} x^2 \\ &= f(0)\, x + \frac{2f'(\eta_x) + \eta_x f''(\eta_x)}{2} x^2. \end{aligned}$$

因为

$$(xf(x))'' = 2f'(x) + xf''(x),$$

于是我们知道 $2f'(x) + xf''(x)$ 有介值性, 所以存在 $\eta \in (-1,1)$ 使得

$$\frac{2f'(\eta_1) + \eta_1 f''(\eta_1)}{2} + \frac{2f'(\eta_{-1}) + \eta_{-1} f''(\eta_{-1})}{2} = 2f'(\eta) + \eta f''(\eta).$$

于是

$$\begin{aligned} |2f'(\eta) + \eta f''(\eta)| &= \left| \frac{2f'(\eta_1) + \eta_1 f''(\eta_1)}{2} + \frac{2f'(\eta_{-1}) + \eta_{-1} f''(\eta_{-1})}{2} \right| \\ &= |1 \cdot f(1) + (-1) \cdot f(-1) - f(0) \cdot 1 - f(0) \cdot (-1)| = |f(1) - f(-1)|. \end{aligned}$$

93. (93.) 设

$$c(x) \triangleq e^{\arctan x} f(x) - e^{\arctan x},$$

我们有

$$c'(x) = e^{\arctan x} \left[f'(x) + \frac{f(x) - 1}{1 + x^2} \right].$$

注意到

$$c(0)=c(1)=-1,$$

由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,1)$ 使得 $c'(\xi)=0$, 即

$$\left(1+\xi^2\right)f'(\xi)+f(\xi)=1.$$

94. (94.) 对 $k=1,2,\cdots,n+1$, 我们记

$$g(y)\triangleq\frac{f(\ln y)}{y}\in C\left[e^a,e^b\right],$$

于是

$$0=\int_a^b f(x)e^{(k-1)x}\mathrm{d}x=\int_{e^a}^{e^b}\frac{f(\ln y)}{y}y^{k-1}\mathrm{d}y=\int_{e^a}^{e^b}g(y)y^{k-1}\mathrm{d}y.$$

然后由非数学类微分中值定理习题58., 我们知道 g 在 (a,b) 至少有 $n+1$ 个零点, 从而 f 在 (a,b) 至少有 $n+1$ 个零点.

95. (95.) 容易看到 $f(0)=f(\pi)=0$, 然后

$$0\leqslant\lim_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x}=0\Rightarrow f'(0)=0.$$

于是由罗尔中值定理得

$$\left(e^xf(x)\right)'=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$$

有零点 $\zeta\in(0,\pi)$.

注意到 $\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}$ 有零点 $0,\zeta$, 于是继续用罗尔中值定理得

$$\left[\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}\right]'=\left(f''(x)-f(x)\right)e^{-x}$$

有零点 $\xi\in(0,\pi)$, 即 $f''(\xi)=f(\xi)$.

96. (96.) 注意到

$$\left(f^3(x)\right)''=3f(x)\left[f''(x)f(x)+2\left[f'(x)\right]^2\right].$$

若 ξ 不存在, 则 $\left(f^3(x)\right)''$ 不变号, 从而 $f^3(x)$ 是上凸或者下凸函数. 但是有界上凸或者下凸函数必为常数, 因此 f 为常值函数, 这就和 ξ 不存在矛盾!.

现在我们知道存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(\xi)f''(\xi)+2\left[f'(\xi)\right]^2=0.$$

97. (97.) 设

$$g(x)\triangleq f(x)-\frac{n!}{k!(n-1-k)!}\int_0^x y^k(1-y)^{n-1-k}\,\mathrm{d}y.$$

注意到

$$g(1)-g(0)=f(1)-\frac{n!}{k!(n-1-k)!}\int_0^1 y^k(1-y)^{n-1-k}\,\mathrm{d}y-f(0)=0,$$

从而由罗尔中值定理得存在 $\xi_k\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi_k)=\frac{n!}{k!(n-1-k)!}\xi_k^k(1-\xi_k)^{n-1-k}.$$

98. (98.) 设

$$g(x)\triangleq f(x)e^{x^2}.$$

然后

$$g'(x)=e^{x^2}\left[f'(x)+2xf(x)\right].$$

由 $g'(0)=g'(1)=0$ 和罗尔中值定理得 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$g''(\xi)=e^{\xi^2}\left[f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+\left(4\xi^2+2\right)f(\xi)\right]=0,$$

即

$$f''(\xi)+4\xi f'(\xi)+\left(2+4\xi^2\right)f(\xi)=0.$$

99. (99.) 对 $n\in\mathbb{N}$, 由介值定理知存在 $x_n\in(0,1)$ 使得 $f(x_n)=\frac{M}{n}$. 现在由拉格朗日中值定理得 $\xi_1\in(0,x_n),\xi_2\in(x_n,1)$ 使得

$$\frac{f(x_n)}{x_n}=f'(\xi_1),\frac{f(x_n)}{x_n-1}=f'(\xi_2).$$

计算得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1}{f(x_n)}=\frac{n}{M}.$$

100. (100.) 由拉格朗日中值定理可得 $\xi\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{c-a}{b-a}\frac{f(c)-f(a)}{c-a}+\frac{b-c}{b-a}\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\\&=t\cdot f'(\xi)+(1-t)f'(\xi_2),\end{aligned}$$

这里 $t\triangleq\frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$.

现在由 Darboux 中值定理我们知道存在 $\eta\in(\xi,\xi_2)\subset(\xi,b)$ 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

101. (101.) 考虑

$$g(x)\triangleq f(x)-e^x-e^{-x},$$

我们有

$$g(0)=g'(0)=g(1)=0.$$

注意到

$$\left[g(x)e^x\right]'=\left(g(x)+g'(x)\right)e^x,\left(\left(g(x)+g'(x)\right)e^{-x}\right)'=\left(g''(x)-g(x)\right)e^{-x},$$

我们由罗尔中值定理得 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$g(\theta)+g'(\theta)=0.$$

注意到

$$\left(\left(g(x)+g'(x)\right)e^{-x}\right)|_{x=0}=\left(\left(g(x)+g'(x)\right)e^{-x}\right)|_{x=\theta}=0,$$

再次由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$g''(\xi)=g(\xi)\Rightarrow f''(\xi)=f(\xi).$$

102. (102.) 设

$$g(x)\triangleq f(x)e^x(b-x)^b,x\in[a,b].$$

然后

$$g'(x)=e^x(b-x)^b\left[f'(x)-\frac{xf(x)}{b-x}\right],x\in(a,b).$$

注意到 $g(a)=g(b)=0$, 由罗尔中值定理得存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 从而

$$f'(\xi)=\frac{\xi f(\xi)}{b-\xi}.$$

103. (103.) 设

$$g(x)\triangleq f(x)-\frac{1}{4}x^4.$$

我们有

$$g(0)=g(1)=0.$$

于是由拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得

$$g'(\xi)=\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)-g(0)}{\frac{1}{2}-0}=2g\left(\frac{1}{2}\right),g'(\eta)=\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)-g(1)}{\frac{1}{2}-1}=-2g\left(\frac{1}{2}\right).$$

因此我们有

$$g'(\xi)+g'(\eta)=0\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3.$$

104. (104.)

(1): 首先达布中值定理告诉我们 $f''(x)<0$ 和 $f''(x)>0$ 必有一个恒成立. 如果是前者, 那么 f 在 $(0,1)$ 是上凸函数. 由上凸函数单调性知 f 在 $(0,1)$ 最小值在端点取到, 所以

$$f(x)>0,\forall x\in[0,1],$$

这就和 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾!, 因此我们证明了 $f''(x)>0$ 恒成立.

(2): 因为 f 在端点为正和 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 我们知道 f 在 $[0,1]$ 最小值为负数, 设最小值点为 x_0, 由 f 严格下凸我们有 f 在 $(0,x_0)$ 严格递减, 在 $(x_0,1)$ 严格递增, 从而结合零点定理得 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0),(x_0,1)$ 分别有且只有一根. 这就完成了证明.

(3): 因为 f' 单调, 我们有

$$g(x)\triangleq f'(x)-\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\in C(0,1)$$

满足

$$g\left(1^-\right)\in(0,+\infty],g\left(0^+\right)\in[-\infty,0).$$

由介值定理得 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$. 这恰好就是

$$f'(\xi)=\int_\xi^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

105. (105.) 首先

$$0=\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1[f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x<\int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x=2a,$$

即 $a>0$.

注意到

$$F(0)=F(1)=F(-1)=0,$$

反复罗尔中值定理即得 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $F''(\xi)=0$.

106. (106.) 若

$$|f''(x)|\leqslant 2,\forall x\in(-1,1),$$

设

$$f_\pm(x)\triangleq f(x)\pm x^2,x\in[-1,1],$$

我们有

$$f_+''(x)=f''(x)+2\geqslant 0,f_-''(x)=f''(x)-2\leqslant 0.$$

现在我们知道 f_+ 下凸, 由

$$f_+(0)=f_+'(0)=f_+(-1)=0$$

我们知道 f_+ 最小值是 $f_+(0)=0$, 从而

$$f(x)=-x^2,\forall x\in[-1,0].$$

我们知道 f_- 上凸, 由

$$f_-(0)=f_-'(0)=f_-(1)=0$$

知道 f_- 最大值是 $f_-(0)=0$, 从而

$$f(x)=x^2,\forall x\in[0,1].$$

现在我们知道 $f''(0)$ 不存在而矛盾!. 于是我们知道存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得

$$|f''(\eta)|>2.$$

完全类似的反证可得存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得

$$|f''(\xi)|<2.$$

107. (107.) 由拉格朗日中值定理知存在

$$c_1\in(a,a'),c_2\in(a',b),c_3\in(b,b')$$

使得

$$f'(c_1)=\frac{f(a')-f(a)}{a'-a},f'(c_2)=\frac{f(b)-f(a')}{b-a'},f'(c_3)=\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{b-a'}{b-a}f'(c_2)+\frac{a'-a}{b-a}f'(c_1);\\ \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}&=\frac{b'-b}{b'-a'}f'(c_3)+\frac{b-a'}{b'-a'}f'(c_2).\end{aligned}$$

于是由 Darboux 中值定理可得 $\xi_1\in[c_1,c_2],\xi_2\in[c_2,c_3]$ 使得

$$\begin{aligned}f'(\xi_1)&=\frac{b-a'}{b-a}f'(c_2)+\frac{a'-a}{b-a}f'(c_1);\\ f'(\xi_2)&=\frac{b'-b}{b'-a'}f'(c_3)+\frac{b-a'}{b'-a'}f'(c_2).\end{aligned}$$

此时就有

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},f'(\xi_2)=\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}.$$

若 $\xi_1=\xi_2$, 则

$$f'(c_1)=f'(c_2)=f'(c_3)=f'(\xi_1)=f'(\xi_2),$$

于是 c_1,c_3 为满足要求的 ξ_1,ξ_2.

108. (108.) 考虑

$$g(x)\triangleq f'(x)e^{f^2(x)}.$$

我们有 $g(0)=g(1)=0$. 于是由罗尔中值定理得 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$. 于是我们证明了

$$f''(\xi)+2f(\xi)[f'(\xi)]^2=0.$$

109. (109.) 考虑

$$F(x)\triangleq\int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y,$$

我们分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{F(y)}{y}|_1^x+\int_1^x\frac{F(y)}{y^2}\mathrm{d}y\right]\\ &=\int_1^\infty\frac{F(y)}{y^2}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

若

$$F(x) \neq \int_1^{\infty} \frac{F(y)}{y^2} \mathrm{d}y, \forall x > 1,$$

我们由 F 连续性可不妨设

$$F(x) > \int_1^{\infty} \frac{F(y)}{y^2} \mathrm{d}y, \forall x > 1,$$

于是

$$\int_1^{\infty} \frac{F(y)}{y^2} \mathrm{d}y > \int_1^{\infty} \frac{\int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^2} \mathrm{d}x}{y^2} \mathrm{d}y = \int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^2} \mathrm{d}x,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了存在 $\xi \in (1, +\infty)$ 使得

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_1^{\xi} f(x) \mathrm{d}x.$$

110. (110.) 不妨设 f 递增, 用 $f(x) - f(a^+)$ 代替 f 可不妨设 $f(a^+) = 0$.

对任意额 $a < c < d < b$, 我们由积分第二中值定理11.3得 $\xi_{c,d} \in [c, d]$ 成立

$$\int_c^d f(x) g(x) \mathrm{d}x = f(d) \int_{\xi_{c,d}}^d g(x) \mathrm{d}x.$$

因为 $\{\xi_{c,d}\}$ 有界, 于是有聚点 $\xi \in [a, b]$. 因此沿着某个子列 $d \to b^-, c \to a^+$ 得

$$\int_c^d f(x) g(x) \mathrm{d}x = f\left(b^-\right) \int_{\xi}^b g(x) \mathrm{d}x,$$

这就完成了证明.

111. (111.) 考虑

$$F(x) \triangleq \int_0^x f(y) \mathrm{d}y - \arcsin x,$$

我们有

$$F(0) = F(1) = F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

由罗尔中值定理得 $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right), v \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使得

$$F'(u) = F'(v) = 0 \Rightarrow f(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, f(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

现在对 $g(x) \triangleq f(x) \sqrt{1-x^2}$ 用罗尔中值定理得 $\xi \in (u, v) \subset (0, 1)$ 成立

$$g'(\xi) = \frac{\left(1-\xi^2\right) f'(\xi) - \xi f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0,$$

即

$$\left(1-\xi^2\right) f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0.$$

112. (112.) 考虑

$$g(x) \triangleq \frac{e^{1-x} - e^{x-1}}{2} f'(x) + \frac{e^{1-x} + e^{x-1}}{2} f(x).$$

我们有

$$g'(x) = \frac{e^{1-x} - e^{x-1}}{2} \left(f''(x) - f(x)\right), g(0) = g(1) = 0.$$

于是由罗尔中值定理得 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$. 因为 $\frac{e^{1-\xi} - e^{\xi-1}}{2} > 0$ 就有

$$f''(\xi) = f(\xi).$$

113. (113.) 注意到

$$f(x) = -9x^2 + 10x \in S, f''(x) = -18,$$

我们有

$$U \subset (-18, +\infty).$$

对 $a > -18, f \in S$, 若

$$f''(x) \geqslant a, \forall x \in (0,1),$$

则 $f(x) - \frac{1}{2}ax^2$ 在 $[0,1]$ 下凸. 由 Hadamard 不等式11.4, 我们有

$$\frac{1-\frac{1}{2}a}{2} = \frac{f(0) - \frac{1}{2}a0^2 + f(1) - \frac{1}{2}a1^2}{2} \geqslant \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}ax^2\right) \mathrm{d}x = 2 - \frac{a}{6},$$

即 $a \leqslant -18$. 这就是一个矛盾!, 因此 $U = (-18, +\infty)$.

114. (114.) 我们指出最佳的 $b = \sqrt{2} - 1$.

首先由齐次性可不妨设

$$\max_{x\in[0,2]} |f''(x)| = 1.$$

然后对 $x \in \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 我们有

$$f'(x) = \int_0^1 f''(t) \left(\chi_{[0,x]}(t) - \frac{1-t}{\sqrt{(1-x)^2 + \frac{1}{2}}}\right) \mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leqslant \int_0^1 \left|\chi_{[0,x]}(t) - \frac{1-t}{\sqrt{(1-x)^2 + \frac{1}{2}}}\right| \mathrm{d}t \\ &= x - 2 + 2\sqrt{(1-x)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\leqslant x - 2 + 1 - x + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1, \end{aligned}$$

这里用到了

$$2\sqrt{(1-x)^2 + \frac{1}{2}} \leqslant 1 - x + \sqrt{2} \Leftrightarrow 3(1-x)\left(x - \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\right) \geqslant 0.$$

对 $x \in \left[0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 拉格朗日中值定理给出

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(0)| \leqslant x \leqslant \sqrt{2} - 1.$$

现在对称的给出

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2} - 1, \forall x \in [1,2].$$

于是我们证明了

$$\max_{x\in[0,2]} |f'(x)| \leqslant (\sqrt{2} - 1) \max_{x\in[0,2]} |f''(x)|.$$

Step 2 最佳验证[23]∗, ♠

[23]纯兴趣内容

对 $\epsilon \in \left(0, \frac{20-\sqrt{190}}{21}\right)$, 考虑

$$b_\epsilon \triangleq 1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{20}}, \theta(t) \triangleq 3t^2-2t^3;$$

$$h_\epsilon(x) \triangleq \begin{cases} -1, & x \in [0, b_\epsilon-\epsilon] \\ -1+2\theta\left(\frac{x-b_\epsilon+\epsilon}{2\epsilon}\right), & x \in [b_\epsilon-\epsilon, b_\epsilon+\epsilon] \\ 1, & x \in [b_\epsilon+\epsilon, 1-\epsilon] \\ 1-\theta\left(\frac{x-1+\epsilon}{\epsilon}\right), & x \in [1-\epsilon, 1] \end{cases};$$

$$g_\epsilon(x) \triangleq \begin{cases} \int_0^x h_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y, & x \in [0,1] \\ \int_0^{2-x} h_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y, & x \in [1,2] \end{cases},$$

$$f_\epsilon(x) \triangleq \int_0^x g_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y, x \in [0,2].$$

直接计算得

$$f_\epsilon \in C^2[0,2], \sup_{[0,2]}|f_\epsilon''|=1, \sup_{[0,2]}|f_\epsilon'| = 2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{20}}-1-\frac{\epsilon}{2};$$

$$f_\epsilon(0)=f_\epsilon(1)=f_\epsilon(2)=f_\epsilon'(0)=f_\epsilon'(2)=0,$$

于是由

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{20}}-1-\frac{\epsilon}{2}\right)=\sqrt{2}-1$$

得最佳 $C=\sqrt{2}-1$.

115. (115.) 不妨设 f 不恒为 0. 设 $x_0 \in (0,1)$ 使得

$$|f(x_0)| = \max_{x\in[0,1]}|f(x)| > 0.$$

因为 $f(0)=f(1)=0$, 可取 $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 使得

$$|f(x)| < \frac{|f(x_0)|}{e}, \forall x \in [0,\epsilon]\bigcup[1-\epsilon,1].$$

当 $\lambda > 0$, 我们取 $g(x) \triangleq e^{\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}} f(x)$, 则

$$g'(x) = e^{\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}}\left(x^\lambda f(x)+f'(x)\right).$$

我们有

$$|g(x)| \leqslant e|f(x)| < |f(x_0)|, \forall x \in [0,\epsilon]\bigcup[1-\epsilon,1]$$

以及

$$|g(x_0)| = e^{\frac{x_0^{\lambda+1}}{\lambda+1}}|f(x_0)| \geqslant |f(x_0)|.$$

因此存在 $\xi \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 即

$$\xi^\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

116. (116.) 设 $g(x) \triangleq f(x)-x$, 则

$$g(0)=g(2)=1, g(1)=g(3)=0.$$

于是设 $a \in (0,2)$ 是 g 在 $[0,2]$ 最小值点, $b \in (1,3)$ 是 g 在 $[1,3]$ 最大值点. 此时 $g'(a)=g'(b)=0$.
考虑

$$h(x) \triangleq (f'(x)-1)\sqrt{2f(x)-1}$$

计算得

$$h'(x)=-\frac{f'(x)+f''(x)-[f'(x)]^2-2f(x)f''(x)}{\sqrt{2f(x)-1}}$$

我们有

$$g(b)\geqslant 1, g(a)\leqslant 0, f(b)=g(b)+b\geqslant 1+b>\frac{1}{2}.$$

若在 a,b 形成开区间上有 $f(x)>\frac{1}{2}$ 恒成立则 $h(a)=h(b)=0$. 罗尔中值定理可得介于 a,b 之间的 ξ 使得 $h'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+f''(\xi)-[f'(\xi)]^2-2f(\xi)f''(\xi)=0.$$

若在 a,b 形成开区间上有 c 使得 $f(c)=\frac{1}{2}$, 则 $a<b$ 时考虑最大的这样的 c, $a>b$ 时考虑最小的这样的 c. 我们有 $h(b)=h(c)=0$, 罗尔中值定理可得介于 c,b 之间的 ξ 使得 $h'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)+f''(\xi)-[f'(\xi)]^2-2f(\xi)f''(\xi)=0.$$

因此我们完成了证明.

117. (117.) 我们可把 p 在 $\mathbb{R}$ 上分解为一次和二次不可约多项式的积. 我们证明将分解出来的每个 1 阶或者 2 阶微分算子作用在函数上得到的函数在 (a,b) 至少存在的零点个数少 1 或者 2, 从而得证 $p(D)f$ 在 (a,b) 至少有 s 个不同零点.

对于 $x-t,t\in\mathbb{R}$ 和 $g\in C[a,b]\bigcap D^1(a,b)$. 若 g 在 $[a,b]$ 有 $k\in\mathbb{N}$ 个零点, 则由

$$g'(x)-tg(x)=e^{tx}\left[e^{-tx}g(x)\right]'$$

和罗尔中值定理得 $g'-tg$ 在 (a,b) 至少有 $k-1$ 个零点.

对于 (对应复根 $c\pm di$)$x^2-2cx+c^2+d^2, c,d\in\mathbb{R}, 0<|d|<\frac{\pi}{b-a}$ 和 $g\in C[a,b]\bigcap D^2(a,b)$. 若 g 在 $[a,b]$ 有 $k\geqslant 2$ 个零点. 注意到

$$\left(\sin^2(d(x-a))\left(\frac{g(x)}{e^{cx}\sin(d(x-a))}\right)'\right)'$$
$$=e^{-cx}\sin(d(x-a))\left[g''(x)-2cg'(x)+\left(c^2+d^2\right)g(x)\right].$$

罗尔可得

$$\left(\frac{g(x)}{e^{cx}\sin(d(x-a))}\right)'$$

在 (a,b) 至少有 $k-2$ 个零点从而继续罗尔得

$$e^{-cx}\sin(d(x-a))\left[g''(x)-2cg'(x)+\left(c^2+d^2\right)g(x)\right]$$

在 (a,b) 至少有 $k-2$ 个零点. 现在我们知道 $g''(x)-2cg'(x)+\left(c^2+d^2\right)g(x)$ 在 (a,b) 至少有 $k-2$ 个零点. 从而原题得证.

118. (118.) 对 $u\in\mathbb{R}$, 考虑

$$g(x)\triangleq f(x)-ux, x\in[a,b].$$

注意到

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)-u(x-b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=-\infty;$$
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)-u(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=+\infty.$$

由极限性质, 存在 $\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ 使得

$$g(b)<g(b-\delta), g(a+\delta)>g(a).$$

因此 g 在 $[a,b]$ 不严格单调, 从而由命题12.2知 g 不是单射, 因此存在 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ 使得

$$g(\alpha)=g(\beta)\Rightarrow u=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

119. (119.) 回忆非数学微分中值习题82.的 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, 我们有

$$p_{n+1}(2x-1)=4^n\prod_{j=1}^{n}\left(x-\frac{1+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)}{2}\right),n=1,2,\cdots.$$

对不超过 $n-1$ 次实多项式 q, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left[q(x)\cdot\operatorname{sgn}p_{n+1}(2x-1)\right]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[q\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)\sin\theta\cdot\operatorname{sgn}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\right]\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[q\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)\sin\theta\cdot\operatorname{sgn}\sin((n+1)\theta)\right]\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

注意到 $q\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)\sin\theta$ 可以写成 $\sin(k\theta),1\leqslant k\leqslant n$ 线性组合, 而对 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\left[\sin(k\theta)\cdot\operatorname{sgn}\sin((n+1)\theta)\right]\mathrm{d}\theta\\&=\Im\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\int_{\frac{j\pi}{n+1}}^{\frac{(j+1)\pi}{n+1}}e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta\right)\\&=\Im\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{e^{ik\frac{(j+1)\pi}{n+1}}-e^{ik\frac{j\pi}{n+1}}}{ik}\right)\\&=\Im\left(\frac{1+(-1)^{n+k}}{k}\tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)\right)\\&=0,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1\left[q(x)\cdot\operatorname{sgn}p_{n+1}(2x-1)\right]\mathrm{d}x=0.$$

由拉格朗日插值公式11.1可取次数不超过 $n-1$ 次的多项式 q 使得

$$q\left(\frac{1+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)}{2}\right)=g\left(\frac{1+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)}{2}\right),j=1,2,\cdots,n.$$

对 $x\in[0,1]$, 由拉格朗日插值定理11.1可得 $\xi(x)\in(0,1)$ 使得

$$g(x)=q(x)+\frac{g^{(n)}(\xi(x))}{n!4^n}p_{n+1}(2x-1).$$

不妨设 g 不恒为 0, 若

$$\left|g^{(n)}(x)\right|>4^nn!\int_0^1|g(y)|\,\mathrm{d}y,\forall x\in(0,1).$$

由介值定理可不妨设

$$g^{(n)}(x)>4^nn!\int_0^1|g(y)|\,\mathrm{d}y,\forall x\in(0,1).$$

现在

$$\begin{aligned}&\int_0^1|g(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1g(x)\operatorname{sgn}(p_{n+1}(2x-1))\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(g(x)-q(x))\operatorname{sgn}(p_{n+1}(2x-1))\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{g^{(n)}(\xi(x))}{4^nn!}|p_{n+1}(2x-1)|\,\mathrm{d}x\\&>\int_0^1|g(y)|\,\mathrm{d}y\cdot\int_0^1|p_{n+1}(2x-1)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1|g(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 因此存在 $\xi \in (0,1)$ 成立

$$\left|g^{(n)}(\xi)\right| \leqslant 4^n n! \int_0^1 |g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

30.6 非数学类函数性态分析

1. (1.) 不妨设

$$c = \frac{f(a)}{g(a)} = \min \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \min \frac{g(x)}{f(x)}, a \in [0,1].$$

于是

$$0 = f(a) - cg(a) = \int_0^1 [g(y) - cf(y)] K(a,y) \, dy \geqslant 0,$$

这给出了 $g = cf$, 因此

$$f(x) = \int_0^1 g(y) K(x,y) \, dy = c \int_0^1 f(y) K(x,y) = cg(x) = c^2 f(x),$$

于是 $c = 1$, 即我们证明了

$$f(x) = g(x), \forall x \in [0,1].$$

2. (2.) 取 $f(x) = e^{-x}$, 我们知道 $f'(0) = -1$, 下面断言 -1 为所求, 即对一般满足条件的 f, 去证 $f'(0) \geqslant -1$. 事实上, 令 $g(x) = f''(x) - f(x)$, 我们用卷积特解法22.1解微分方程有

$$f(x) = ce^x + (1-c)e^{-x} + \int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{-(x-t)}}{2} g(t) \, dt, x \in \mathbb{R}.$$

现在

$$f'(x) = ce^x + (c-1)e^{-x} + \int_0^x \frac{e^{x-t} + e^{-(x-t)}}{2} g(t) \, dt, x \in \mathbb{R}.$$

我们有 $f'(0) = 2c - 1$, 下面证明 $c \geqslant 0$. 如果 $c < 0$, 注意到 $g(t) \leqslant 0$ 知

$$f(x) \leqslant ce^x + (1-c)e^{-x},$$

于是

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \leqslant c \lim_{x \to +\infty} e^x = -\infty,$$

这和 $f \geqslant 0$ 矛盾! 因此我们证明了 $c \geqslant 0$. 现在自然有 $f'(0) \geqslant -1$. 从而我们解决了原问题.

3. (3.) 从条件不等式可以看到 f 的值域应该包含 $(0, +\infty)$, 于是我们取 $y = f(y)$, 就有

$$xf(y) \leqslant \frac{1}{2}[xf(x) + yf(y)].$$

因此

$$(x-y) f(y) \leqslant x[f(x) - f(y)].$$

于是当 $x > y$, 我们有

$$f(y) = \lim_{x \to y^+} f(y) \leqslant \lim_{x \to y^+} \left(x \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) = yf'(y).$$

当 $x < y$, 我们有

$$f(y) = \lim_{x \to y^-} f(y) \geqslant \lim_{x \to y^-} \left(x \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right) = yf'(y).$$

现在就有

$$f(y) = yf'(y), \forall y > 0,$$

即 $f(y)=cy, c>0$. 将表达式代回条件不等式我们就有

$$xy \leqslant \frac{1}{2}\left[cx^2+\frac{y^2}{c}\right], \forall x, y>0.$$

因此所求全部 f 就是 $f(y)=cy, c>0$.

4. (4.) 注本答案参考竞赛班学员青F.

设 $f'(x_1)=f'(x_2)$, 则

$$f'(f'(x_1))-af'(x_1)=f'(f'(x_2))-af'(x_2) \Rightarrow bx_1=bx_2.$$

由于 a, b 的约束关系我们知道 $b\neq 0$, 因此 $x_1=x_2$, 从而 f' 是单射. 如果 f' 不严格单调, 那么不妨设有

$$f'(x_3)<f'(x_2)<f'(x_1), x_1<x_2<x_3,$$

于是由 f' 的介值性我们知道在 (x_1, x_2) 存在一点 x_4, 使得 $f'(x_4)=f'(x_3)$. 这就是一个矛盾! 因此 f' 严格单调. 进一步, 我们有 $f'(f'(x))$ 严格递增以及 f' 是连续函数 (否则 f' 有跳跃间断点, 和 f' 有介值性矛盾.) 若 f' 单调递减, 我们知道 $f'(x)-ax$ 递减, 而递减函数和递减函数复合一定递增且 $f'(f'(x))-af'(x)=bx$. 因此 $b\geqslant 0$, 结合题目 a, b 的范围这显然不可能. 故 f' 严格单调递增.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f'(f'(x))=f'(A)=\lim_{x\to+\infty}(af'(x)+bx)=\infty,$$

这是一个矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 同理 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$.

设 $g(x)$ 是 $f'(x)$ 反函数, 这暗示等式 $f'(x)-ax=bg(x)$. 则有

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f'(x)}{x}-a\right]=bg(x)=-\infty, \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f'(x)}{x}+\frac{b}{a}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(f'(x))}{a}=+\infty.$$

这意味着当 x 充分大, 我们有

$$-\frac{b}{a}<\frac{f'(x)}{x}<a.$$

于是

$$H\triangleq\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f'(x)}{x}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f'(f'(x))}{f'(x)}=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(a+b\frac{1}{\frac{f'(x)}{x}}ffei\right)=a+\frac{b}{H},$$

这里最后等号成立的原因要注意 $b<0$. 现在我们就得到了 $H^2=aH+b, H\neq 0$, 但是因为 $a^2+4b<0$, 我们知道 $H\notin\mathbb{R}$, 矛盾! 因此我们证明了这样的函数 f 不存在.

5. (5.) 我们把不等式(12.53)改写为

$$F'(x)\geqslant x+\frac{xF(x)}{2}, \forall x\in[0,1], \tag{30.65}$$

这里 $F(x)=\int_0^x t|f(t)|dt, F(0)=0$.

于是, 这是一个标准的微分不等式方法题, 我们可令 $G(x)=\frac{F(x)+2}{e^{\frac{x^2}{4}}}$, 然后

$$G'(x)=\frac{F'(x)-\frac{x}{2}(F(x)+2)}{e^{\frac{x^2}{4}}}\geqslant 0.$$

故

$$G(x)\geqslant G(0)=2\Rightarrow F(x)\geqslant 2e^{\frac{x^2}{4}}-2\Rightarrow F'(x)\geqslant x+\frac{x}{2}\left(2e^{\frac{x^2}{4}}-2\right)=xe^{\frac{x^2}{4}}.$$

从而

$$x|f(x)|\geqslant xe^{\frac{x^2}{4}}\Rightarrow \ln|f(x)|\geqslant\frac{x^2}{4}, \forall x\in[0,1],$$

这就完成了证明.

6. (6.) 注意到 $x^5+\frac{5}{x}$ 满足微分方程 $x^2y''-2xy'-5y=0$. 因此不妨用 $f-x^5-\frac{5}{x}$ 来代替 f 使得可以不妨设 $f(1)=f'(1)=0$.

这是标准的二阶微分不等式方法题, 回顾欧拉方程的计算方法, 式(12.54)可变为

$$e^{2t}f''\left(e^t\right)-3e^tf'\left(e^t\right)-5f\left(e^t\right)\geqslant 0,\forall t\geqslant 0.$$

令 $g\left(t\right)=f\left(e^t\right)$, 我们得到

$$g''\left(t\right)-4g'\left(t\right)-5g\left(t\right)\geqslant 0,\forall t\geqslant 0.$$

于是

$$g''\left(t\right)+g'\left(t\right)\geqslant 5\left[g'\left(t\right)+g\left(t\right)\right]\Rightarrow\left[\frac{g'\left(t\right)+g\left(t\right)}{e^{5t}}\right]'\geqslant 0\Rightarrow g'\left(t\right)+g\left(t\right)\geqslant 0.$$

从而

$$\left[e^tg\left(t\right)\right]'\geqslant 0\Rightarrow g\left(t\right)\geqslant 0\Rightarrow f\left(x\right)\geqslant 0,\forall x\geqslant 1,$$

这就完成了证明.

7. (7.) 对 $x,y\in\left[a,b\right],\lambda\in\left[0,1\right]$, 我们有

$$f\circ g\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\leqslant f\left(\lambda g\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)g\left(y\right)\right)\leqslant\lambda f\circ g\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)f\circ g\left(y\right).$$

这就证明了 $f\circ g$ 在 $\left[a,b\right]$ 上下凸.

8. (8.) 由题目条件知 f 递增且设 $g=\frac{f'}{f}$, 则条件不等式变为

$$g\geqslant\left|1+g^2+g'\right|\geqslant 1+g^2+g',$$

于是

$$-g\geqslant g-1-g^2\geqslant g'.$$

因此

$$\left(\frac{f'}{f}\right)'=\frac{f''f-\left(f'\right)^2}{f^2}\leqslant-\frac{f'}{f},$$

于是由 $\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)}e^x\leqslant 0$ 知 $\frac{f'(x)}{f(x)}e^x$ 单调递减. 于是当 $x\geqslant 0$ 时有

$$\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}e^x\leqslant\frac{f'\left(0\right)}{f\left(0\right)}\Rightarrow\int_0^x\frac{f'\left(y\right)}{f\left(y\right)}dy\leqslant\int_0^\infty\frac{f'\left(0\right)}{f\left(0\right)}e^{-y}dy\Rightarrow\ln f\left(x\right)\leqslant\frac{f'\left(0\right)}{f\left(0\right)}+\ln f\left(0\right)\Rightarrow f\text{有界},$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}e^x$ 存在, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}f'\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{e^x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}e^x=0.$$

现在进一步使用条件有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''\left(x\right)=-c$, 从而由导数有负增长率, 即结论12.1知

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty,$$

这和 $f>0$ 矛盾.

9. (9.) 显然 f 在 $\mathbb{R}$ 上有根等价于 $\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有根. 而

$$\frac{d}{dx}\frac{f\left(x\right)}{e^x}=\frac{f'\left(x\right)-f\left(x\right)}{e^x}>0,$$

故 $\frac{f(x)}{e^x}$ 严格单调递增. 所以 $\frac{f(x)}{e^x}$ 至多只有一根, 从而 f 至多只有一个根.

10. (10.) 注意到

$$\frac{d}{dx}\frac{f'\left(x\right)+f\left(x\right)}{e^x}=\frac{f''\left(x\right)-f\left(x\right)}{e^x}>0,$$

即 $\frac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ 严格递增, 从而至多只有一根. 现在若 f 有三个不同的根, 则由罗尔中值定理知 $\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)e^x\right]=\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]e^x$ 至少有两个不同的根. 这就意味着 $f'\left(x\right)+f\left(x\right)$ 至少有两个不同的根, 矛盾! 我们完成了证明.

11. (11.) 不妨设 $\lambda>0$, 采用双绝对值技巧, 构造 $c(x)=\frac{g^2(x)}{e^{2\frac{\int_0^x(1-f(y))dy}{x}}}$, 我们有

$$c'(x)=\frac{\lambda g'(x)g(x)-g^2(x)+f(x)g^2(x)}{\lambda e^{\frac{2}{\lambda}\int_0^x(1-f(y))dy}}.$$

利用(12.55)得

$$g^2f+\lambda g'g\leqslant\left|g^2f+\lambda g'g\right|\leqslant g^2\Rightarrow c\text{递减}\Rightarrow c(x)\leqslant c(a)=0,\forall x\in[a,b].$$

我们知道 $g(x)=0,\forall x\in[a,b]$.

12. (12.) 当 $\lambda_{n-1}\geqslant 1$, 记

$$g(x)\triangleq M\left|f^{(n-1)}(x)\right|^{\lambda_{n-1}-1}\prod_{k=0}^{n-2}\left|f^{(k)}(x)\right|^{\lambda_k}\in C(\mathbb{R}).$$

利用双绝对值技巧, 构造

$$F_1(x)=\frac{\left|f^{(n-1)}\right|^2}{e^{2\int_0^x g(y)dy}},F_2(x)=\left|f^{(n-1)}(x)\right|^2e^{2\int_0^x g(y)dy},x\in\mathbb{R}.$$

于是

$$F_1'(x)=\frac{2f^{(n-1)}f^{(n)}-2\left|f^{(n-1)}\right|^2g}{e^{2\int_0^x g(y)dy}},F_2'(x)=\left[2f^{(n-1)}f^{(n)}+2g\left|f^{(n-1)}\right|^2\right]e^{2\int_0^x g(y)dy}.$$

利用条件不等式(12.56), 则

$$\begin{aligned}&\left|f^{(n)}\right|\leqslant\left|f^{(n-1)}\right|\cdot g\Rightarrow\left|f^{(n)}f^{(n-1)}\right|\leqslant\left|f^{(n-1)}\right|^2\cdot g\\&\Rightarrow\pm f^{(n)}f^{(n-1)}\leqslant\left|f^{(n-1)}\right|^2\cdot g\Rightarrow F_1'(x)\leqslant 0,F_2'(x)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases}F_1(x)\leqslant F_1(0)=0,&\forall x\geqslant 0\\F_2(x)\leqslant F_2(0)=0,&\forall x\leqslant 0\end{cases},$$

这就给出了 $f^{(n-1)}\equiv 0$. 从而由初值条件知 $f\equiv 0$.

13. (13.) 我们借助上下极限洛必达的工具13.11就有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to\infty}}|f(x)|&=\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{xf(x)e^{\frac{x^2}{2}}+f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}\right|\\&=\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{xf(x)+f'(x)}{x}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{f(x)+xf'(x)+f''(x)}{1}\right|=0,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 继续借助上下极限洛必达工具得

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}|f'(x)|=\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{[f''(x)+xf'(x)]e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}\right|=\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}|f'(x)|,$$

这就给了 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

14. (14.) 注意到若 $|f(x)|$ 最大值在 $x=x_0$ 取到, 则

$$|f'(x_0)|=0\Rightarrow|f(x_0)|\leqslant 1\Rightarrow|f(x)|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

若 f 达不到最大值且 $|f(x_0)|>1,x_0\in\mathbb{R}$, 则 $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}|f(x)|>1$, 不妨设 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f(x)|>1$.
我们借助带绝对值的上下极限洛必达的工具13.11得

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}|f(x)|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|f(x)e^x|}{e^x}\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}|f'(x)+f(x)|\leqslant 1,$$

这就是一个矛盾!

15. (15.) 若

$$g(x)-f(x)\neq 0,\forall x\in[a,b],$$

则不妨设 $m>0$ 使得

$$g(x)-f(x)\geqslant m,\forall x\in[a,b].$$

于是

$$g(x_n)-g(x_{n+1})=g(x_n)-f(x_n)\geqslant m,\forall n\in\mathbb{N}.$$

求和得

$$g(x_1)-g(x_{n+1})\geqslant mn,\forall n\in\mathbb{N},$$

这和 g 有界矛盾! 故存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

16. (16.) 直接求导有

$$f'(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ -(\alpha+1)(-x)^{\alpha}\sin\frac{1}{x}+(-x)^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}.$$

由导数定义有

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\lim_{x\to0}\left[|x|^{\alpha}\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\right]=0,$$

于是我们证明了 f' 处处存在. 当 $\alpha>1$, 显然 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$, 当 $\alpha<1$. 很明显 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在.

17. (17.) 注意到下凸函数 $f(x)\leqslant1,\forall x\in\mathbb{R}$, 我们只需要这些条件就能断言 f 为常数. 事实上, 由几何意义, 我们随便取 $x_2>x_1$, 就有

$$f(x)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1),\forall x\geqslant x_2;$$
$$f(x)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1),\forall x\leqslant x_1.$$

于是若 $f(x_2)>f(x_1)$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 若 $f(x_1)>f(x_2)$, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, 这都是矛盾!
现在我们就知道 $f(x_1)=f(x_2)$, 由 x_1,x_2 任意性我们知道 f 是一个常值函数. 又由条件不等式知 $f(0)=0$, 故 $f\equiv0$.

18. (18.)$f(r)=1-\frac{M}{r^2}+\frac{Q}{r^4}-r^2=0$ 去分母可以知道是一个 6 次方程且 $r=0$ 不是根. 于是 f 是偶函数知 f 有三个正根等价于 f 在 $(0,+\infty)$ 有三个正根. 容易知道 r_+^2,r_-^2,r_c^2 是 $x^3-x^2+Mx-Q=0$ 的三个根, 于是由韦达定理, 我们有

$$r_+^2+r_-^2+r_c^2=1,r_+^2r_-^2+r_+^2r_c^2+r_-^2r_c^2=M,r_+^2r_-^2r_c^2=Q.$$

注意到 $f'(r)=\frac{2\left(Mr^2-r^6-2Q\right)}{r^5},r>0$, 于是

$$\begin{aligned}f'(r_+)+f'(r_-)&=2M\left(\frac{1}{r_+^3}+\frac{1}{r_-^3}\right)-2(r_++r_-)-4Q\left(\frac{1}{r_+^5}+\frac{1}{r_-^5}\right)\\&=2\left(r_+^2r_-^2+r_+^2r_c^2+r_-^2r_c^2\right)\left(\frac{1}{r_+^3}+\frac{1}{r_-^3}\right)-2(r_++r_-)-4r_+^2r_-^2r_c^2\left(\frac{1}{r_+^5}+\frac{1}{r_-^5}\right)\\&=-\frac{2(r_+-r_-)^2(r_++r_-)\left(r_c^2r_+^2+r_c^2r_-^2+r_c^2r_+r_--r_+^2r_-^2\right)}{r_+^3r_-^3}\\&\leqslant-\frac{2(r_+-r_-)^2(r_++r_-)\left(r_-^2r_+^2+r_c^2r_-^2+r_c^2r_+r_--r_+^2r_-^2\right)}{r_+^3r_-^3}\\&=-\frac{2(r_+-r_-)^2(r_++r_-)\left(r_c^2r_-^2+r_c^2r_+r_-\right)}{r_+^3r_-^3}<0.\end{aligned}$$

19. (19.) 求导得

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{2}{\tan x\sin^2x},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

下证

$$x^3\leqslant\tan x\sin^2x,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).\tag{30.66}$$

事实上设 $g(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x$, 则

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{2}{3}}x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\cos^{\frac{4}{3}}x+\cos^{-\frac{2}{3}}x}{3\cos^{\frac{2}{3}}x}-1\\&\geqslant\frac{\sqrt[3]{\cos^{\frac{4}{3}}x\cdot\cos^{\frac{4}{3}}x\cdot\cos^{-\frac{2}{3}}x}}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1=0,\end{aligned}$$

于是我们有

$$g(x)>g(0)=0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

即得(30.66), 这就证明了 f 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 递增, 从而

$$f(x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{4}{\pi^2},\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

20. (20.) 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x}&=\frac{x^{n-1}f(x)-0^{n-1}f(0)}{x^n-0^n}=\frac{(n-1)\xi^{n-2}f(\xi)+\xi^{n-1}f'(\xi)}{n\xi^{n-1}}\\&=\frac{1}{n}\left[f'(\xi)+\frac{n-1}{\xi}f(\xi)\right],\xi\in(0,x),\end{aligned}$$

即对任何 $x\in(0,R)$ 有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{1}{n}\left|f'(\xi)+\frac{n-1}{\xi}f(\xi)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sup_{x\in(0,R)}\left|f'(x)+\frac{n-1}{x}f(x)\right|.$$

因此我们有

$$\sup_{x\in(0,R)}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{1}{n}\sup_{x\in(0,R)}\left|f'(x)+\frac{n-1}{x}f(x)\right|.$$

21. (21.) 本题本质上是洛必达的 $\frac{0}{0}$ 需要分子也趋于 0, 但是 $\frac{\infty}{\infty}$ 的分子不需要 ∞ 而是准确写为 $\frac{*}{\infty}$.

(a). 一定, 由洛必达法则我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x)}{x^{-\frac{1}{\lambda}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}-1}f(x)+x^{-\frac{1}{\lambda}}f'(x)}{-\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}-1}}\\&=\lim_{x\to0^+}(f(x)-\lambda xf'(x))=0.\end{aligned}$$

(b). 不一定, 考虑 $f(x)=x^{-\frac{1}{\lambda}}$, 则

$$f(x)+\lambda xf'(x)=x^{-\frac{1}{\lambda}}+\lambda x\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)x^{-\frac{1}{\lambda}-1}=0,$$

但是 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

22. (22.) 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f'(1)=f'(0)+f''(0)(1-0)+\frac{f'''(\xi)}{2}(1-0)^2<f''(0)+\frac{1}{2},$$

以及

$$f''(x)=f''\left(\frac{1}{2}\right)+f'''(\eta)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\left|f''(x)-f''\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\left|x-\frac{1}{2}\right|,\forall x\in[0,1]\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

现在我们就有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f''(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[f''(x)-f''\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\\&<\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

23. (23.) 由

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Leftrightarrow en^{n+1}<(n+1)^{n+1}$$

知所证不等式最右侧成立. 由

$$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Leftrightarrow en^n>(n+1)^n$$

知所证不等式最左侧成立.

现在一方面有

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!\Leftrightarrow 1+n\ln n-n<\sum_{k=1}^{n}\ln k\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln k+n-n\ln n-1>0,$$

于是考虑

$$f(n)\triangleq\sum_{k=1}^{n}\ln k+n-n\ln n-1.$$

现在

$$\begin{aligned}f(n)-f(n-1)&=\ln n+n-n\ln n-(n-1)+(n-1)\ln(n-1)\\&=1+(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)>0,\end{aligned}$$

故 $f(n)>f(1)=0$.

另外一方面有

$$n!<e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln k<2+(n+1)\ln n-n-1=(n+1)\ln n-n+1,$$

于是考虑

$$g(n)\triangleq\sum_{k=1}^{n}\ln k-(n+1)\ln n+n-1.$$

现在

$$\begin{aligned}g(n)-g(n-1)&=\ln n-(n+1)\ln n+n\ln(n-1)+1\\&=1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<0,\end{aligned}$$

故 $g(n)<g(1)=0$. 这就完成了证明!

24. (24.) 考虑 $F(t)\triangleq\int_0^t g(s)f(s)\,\mathrm{d}s\geqslant 0$, 然后由(12.58)得

$$F'(t)=f(t)g(t)\leqslant g(t)(2+F(t))\ln(2+F(t)).$$

结合(12.57)得

$$\int_0^{F(x)}\frac{1}{(2+y)\ln(2+y)}\mathrm{d}y\overset{y=F(x)}{=}\int_0^x\frac{F'(t)}{(2+F(t))\ln(2+F(t))}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant C_1.$$

现在注意到 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(2+y)\ln(2+y)}\mathrm{d}y=+\infty$, 故 $F(x)$ 是有界, 从而继续用(12.58)即得(12.59).

25. (25.) 利用双绝对值技巧构造函数

$$g(x)=\frac{[f'(x)]^2}{e^{2x}},h(x)=[f'(x)]^2e^{2x},$$

则有

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{2f'f''-2(f')^2}{e^{2x}}\leqslant\frac{2|f'f''|-2|f'|^2}{e^{2x}}=\frac{2|f'|(|f''|-|f'|)}{e^{2x}}\leqslant 0;\\h'(x)&=\left[2f'f''+2(f')^2\right]e^{2x}\geqslant\left[-2|f'f''|+2|f'|^2\right]e^{2x}=2|f'|(|f'|-|f''|)e^{2x}\geqslant 0,\end{aligned}$$

于是 g 递减且 h 递增.

设 $f'(x_0)=0,x_0\in\mathbb{R}$. 从 g,h 单调性知

$$\begin{aligned}0\leqslant g(x)\leqslant g(x_0)=0,\forall x\geqslant x_0;\\0\leqslant h(x)\leqslant h(x_0)=0,\forall x\leqslant x_0.\end{aligned}$$

于是 $f'(x)\equiv 0$ 而矛盾! 因此 f' 没有零点, 这就证明了 f 严格单调.

26. (26.) 考虑 $F(x) \triangleq \int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 和 $G(x) \triangleq F^{\frac{2}{3}}(x) - \frac{2}{3}x$. 我们有

$$G'(x) \triangleq \frac{2}{3}F^{-\frac{1}{3}}(x)\cdot f(x) - \frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3}\cdot f^{-1}(x) f(x) - \frac{2}{3} = 0.$$

因此

$$G(x) = F^{\frac{2}{3}}(x) - \frac{2}{3}x \geqslant G(1) = -\frac{2}{3} \Rightarrow F^{\frac{2}{3}}(x) \geqslant \frac{2}{3}(x-1),$$

从而

$$f(x) \geqslant F^{\frac{1}{3}}(x) \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}(x-1)}, \forall x \geqslant 1.$$

27. (27.) 注意到 $\int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 是 f 在 $(0,+\infty)$ 的一个原函数. 由于原函数必须连续, 因此我们有

$$\lim_{x\to 0^+}\int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{x\to 0^+}\int_1^x y^\alpha \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\lim_{x\to 0^+}\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{z^{\alpha+2}}\sin z\mathrm{d}z = -\int_1^\infty \frac{\sin z}{z^{\alpha+2}}\mathrm{d}z$$

存在, 从而 $\alpha > -2$. 现在我们知道 $\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 也是 f 的原函数, 于是我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x y^\alpha \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\sin z}{z^{\alpha+2}}\mathrm{d}z}{x} \\ &= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{1}{z^{\alpha+2}}\mathrm{d}\cos z}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x} - (\alpha+2)\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\cos z}{z^{\alpha+3}}\mathrm{d}z}{x}. \end{aligned}$$

当 $\alpha > -1$, 我们有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

以及

$$\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\cos z}{z^{\alpha+3}}\mathrm{d}z}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^\infty z^{-\alpha-3}\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{\alpha+2}\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha+1} = 0.$$

故 f 原函数存在. 当 $-2 < \alpha \leqslant -1$, 我们有

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x} - (\alpha+2)\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\cos z}{z^{\alpha+3}}\mathrm{d}z}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x} - (\alpha+2)\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{1}{z^{\alpha+3}}\mathrm{d}\sin z}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x} - (\alpha+2)\left[-x^{\alpha+3}\sin\frac{1}{x} + (\alpha+3)\int_{\frac{1}{x}}^\infty z^{-\alpha-4}\sin z\mathrm{d}z\right]}{x}. \end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+3}\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[x^{\alpha+2}\sin\frac{1}{x}\right] = 0,$$

以及

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|\int_{\frac{1}{x}}^\infty z^{-\alpha-4}\sin z\mathrm{d}z\right|}{x} \leqslant \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^\infty z^{-\alpha-4}\mathrm{d}z}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+3}}{(\alpha+3)\,x} = 0.$$

于是我们有

$$0 = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+2}\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}\right],$$

这就是一个矛盾! 最后原函数存在的充要条件是 $\alpha > -1$.

28. (28.) 考虑 $g(x) = f(x+a) - f(x), x \in [0, 1-a]$, 我们有

$$g(0) = f(a) \geqslant 0, g(1-a) = -f(1-a) \leqslant 0.$$

有零点定理就有 $\zeta \in [0,1]$ 使得 $f(\zeta+a) = f(\zeta)$.

29. (29.) 注意到

$$\begin{aligned}F(x+2)-F(x)&=2\int_0^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\&=2\int_x^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

30. (30.) **Step 1** 由(30.34)和结论14.3.1, 我们有 $x_n\to+\infty$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. 于是对 $x>x_n$, 由牛顿莱布尼兹公式得

$$f^2(x)=f^2(x_n)+\int_{x_n}^x 2f(y)f'(y)\,\mathrm{d}y\leqslant f^2(x_n)+\int_{x_n}^{\infty}\left[|f(y)|^2+|f'(y)|^2\right]\mathrm{d}y.$$

现在对任何 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}f^2(x)\leqslant f^2(x_n)+\int_{x_n}^{\infty}\left[|f(y)|^2+|f'(y)|^2\right]\mathrm{d}y,$$

即 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}f^2(x)\leqslant 0$. 类似可以证明 $x\to-\infty$ 的情况, 因此我们证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Step 2 对固定的 $x\in\mathbb{R}$, 由牛顿莱布尼兹公式和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 有

$$\begin{aligned}f^2(x)&=-\int_x^{+\infty}f(y)f'(y)\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^x f(y)f'(y)\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_x^{+\infty}|f(y)f'(y)|\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^x|f(y)f'(y)|\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)f'(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[|f(y)|^2+|f'(y)|^2\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

设上述不等号全部成立, 则

$$f(y)f'(y)\leqslant 0,\forall y\geqslant x,f(y)f'(y)\geqslant 0,\forall y\leqslant x,|f(y)|=|f'(y)|,\forall y\in\mathbb{R}.$$

显然 $f(x)=f'(x)=0$, 这和 $|f(x)|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 矛盾! 故我们证明了

$$|f(x)|<\frac{\sqrt{2}}{2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

31. (31.) 设 f_i 有周期 $T_i>0,i=1,2,\cdots,n$, 我们对 n 归纳来证明(12.61).

事实上, 当 $n=1$ 时, 周期函数极限存在, 则这个周期函数显然必然为常数, 且这个常数就是极限值, 故(12.61)显然成立. 假设 n 时(12.61)成立, 考虑 $n+1$ 时. 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=2}^{n+1}\left[f_i(x+T_1)-f_i(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n+1}f_i(x+T_1)-\sum_{i=1}^{n+1}f_i(x)\right]=0,$$

即可以对 $\sum\limits_{i=2}^{n+1}\left[f_i(x+T_1)-f_i(x)\right]$ 用 n 时的归纳假设得

$$\sum_{i=2}^{n+1}\left[f_i(x+T_1)-f_i(x)\right]=0,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}f_i(x)$ 是周期 T_1 函数, 用 $n=1$ 时的归纳假设即得(12.61)在 $n+1$ 时也成立, 我们完成了证明.

32. (32.) 由(12.62)的不等式, 注意到

$$\left[\frac{f(x)+\int_0^x g(t)e^{\int_t^x a(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t}{e^{\int_0^x a(u)\mathrm{d}u}}\right]'=\frac{f'(x)+g(x)-a(x)f(x)}{e^{\int_0^x a(u)\mathrm{d}u}}\leqslant 0,\forall x\geqslant 0,$$

故

$$\frac{f(x)+\int_0^x g(t)e^{\int_t^x a(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t}{e^{\int_0^x a(u)\mathrm{d}u}}\leqslant\frac{f(0)+\int_0^0 g(t)e^{\int_t^x a(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t}{e^{\int_0^0 a(u)\mathrm{d}u}}=f(0).$$

因此我们得到了(12.63).

若还有 $f(0)=1, a(x)=\frac{2}{\sqrt{f(x)}}$, 不等式(12.62)变成

$$f'(x)+g(x)\leqslant 2\sqrt{f(x)}, \forall x\geqslant 0. \tag{30.67}$$

有均值不等式, (30.67)变成

$$f'(x)+g(x)\leqslant 2\sqrt{f(x)}\leqslant f(x)+1,$$

即

$$f'(x)+g(x)-1\leqslant f(x), \forall x\geqslant 0.$$

利用(12.63)得

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant e^{\int_0^x 1\mathrm{d}t}-\int_0^x e^{\int_t^x 1\mathrm{d}u}[g(t)-1]\,\mathrm{d}t \\ &= e^x+\int_0^x e^{x-t}\mathrm{d}t-\int_0^x e^{x-t}g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2e^x-1-\int_0^x e^{x-t}g(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

即得(12.64).

33. (33.) 一方面[24]

$$f(f(x))=\cos^2 x\Rightarrow \cos^2 f(x)=f(f(f(x)))=f\left(\cos^2 x\right)\Rightarrow f([0,1])\subset[0,1].$$

另外一方面设 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1, f(x_1)=f(x_2)$, 我们有

$$\cos^2 x_1=f(f(x_1))=f(f(x_2))=\cos^2 x_2\Rightarrow x_1=x_2,$$

即 f 在 $[0,1]$ 是单射, 从而由命题连续单射等价严格单调12.2知 f 在 $[0,1]$ 严格单调. 现在在 $[0,1]$ 上递增复合递增也递增, 递减复合递减也递增, 所以我们有 $f\circ f$ 递增, 但 $\cos^2 x$ 递减, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了满足条件的 f 不存在.

34. (34.)

(a). 由拉格朗日插值11.1, 我们知道对每一个 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$f(x)=\frac{x-1}{0-1}f(0)+\frac{x-0}{1-0}f(1)+\frac{f''(\theta)}{2}x(x-1).$$

从而

$$|f(x)-x|=\left|\frac{f''(\theta)}{2}x(x-1)\right|\leqslant x(1-x)|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}, \forall x\in[0,1].$$

(b). 由 Taylor 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta_1)}{2}x^2; \\ f(x) &= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\theta_2)}{2}(x-1)^2. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} (x-1)f(x) &= f'(0)x(x-1)+\frac{f''(\theta_1)}{2}x^2(x-1); \\ xf(x) &= x+f'(1)x(x-1)+\frac{f''(\theta_2)}{2}x(x-1)^2. \end{aligned}$$

上式第二式减去第一式得

$$f(x)=x+\frac{f''(\theta_2)}{2}x(x-1)^2-\frac{f''(\theta_1)}{2}x^2(x-1).$$

[24]保证后面讨论的 f 值域含在定义域.

于是

$$f(x) \leqslant x + \frac{2}{2}x(x-1)^2 - \frac{2}{2}x^2(x-1) = 2x - x^2;$$
$$f(x) \geqslant x - \frac{2}{2}x(x-1)^2 + \frac{2}{2}x^2(x-1) = x^2 \geqslant 0.$$

因此我们证明了(12.65).

35. (35.) 设 $h(x) \triangleq e^{-2x}\left[f^2(x) + g^2(x)\right]$, 我们有

$$h'(x) = e^{-2x}\left[-2f^2 - 2g^2 + 2ff' + 2gg'\right] \leqslant e^{-2x}\left[-2f^2 - 2g^2 + f^2 + g^2 + |f'|^2 + |g'|^2\right] \leqslant 0.$$

因此

$$0 \leqslant h(x) \leqslant h(0) \Rightarrow h = 0 \Rightarrow f, g = 0.$$

36. (36.) 因为 $\ln\Gamma \in C(0, +\infty)$, 所以我们由定理13.2知只需证明 $\ln\Gamma$ Jensen 下凸. 由 Cauchy 不等式16.1知

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \cdot \int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1}\mathrm{d}t\right)^2 = \Gamma^2\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即

$$\ln\Gamma(x) \cdot \ln\Gamma(y) \geqslant 2\ln\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

显然不等号不能成立, 因此我们证明了 $\ln\Gamma$ 严格下凸.

37. (37.)

(a). 注意到 $|f(0)| = f(0) \geqslant 0$, 于是当 $f(0) > 0$, 此时在 x 邻域 $f(x) > 0$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|f(x)| - f(0)}{x}\text{存在.}$$

若 $f(0) = 0$, 则变成第三问, 因此 f 在 $x = 0$ 可微.

(b). 注意到

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = |f(0)| \geqslant 0,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - |f(0)|}{x}\text{存在,}$$

故 f 在 $x = 0$ 可微.

(c). 注意到

$$|f(0)| = \lim_{x\to 0}|f(x)| = 0,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{x} \geqslant 0,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{x} \leqslant 0,$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x} = 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$, 因此 f 在 $x = 0$ 可微.

(d). 若 $f(0) = 0$ 就是第三问的情况.

若 $f(0) > 0$, 则在 0 邻域内 $f > 0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}\text{存在.}$$

若 $f(0) < 0$, 则在 0 邻域内 $f < 0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}\text{存在,}$$

因此 f 在 $x = 0$ 可微.

38. (38.) 考虑

$$g(x) \triangleq \frac{f(x)}{\ln x}, x \in (0,1)\bigcup(1, +\infty).$$

于是

$$g'(x) = \frac{x\ln x \cdot f'(x) - f(x)}{x\ln^2 x} \neq 0, x \in (0,1)\bigcup(1, +\infty).$$

在条件中代入 $x = 1$ 得 $f(1) \neq 0$, 于是 $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \infty$.

在 $[0,1)$ 上 g 严格单调, 我们知道又在 $[0,1)$ 上 g 至多只有一个零点.

在 $(1,+\infty)$ 上 g 严格单调, 故至多只有一个零点, 因此 g 至多只有两个零点, 从而 f 至多只有两个零点.

39. (39.) 记 $F(x)=\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则

$$F''(x)+F'(x)\tan x=F(x),F(0)=F(1)=0.$$

若 F 在 $(0,1)$ 取得正的最大值, 最大值点为 a, 则 $F'(a)=0,F''(a)\leqslant 0$. 但是

$$0\geqslant F''(a)=F''(a)+F'(a)\tan a=F(a)>0,$$

这就是矛盾! 类似的可以讨论最小值, 因此我们证明了 F 在 $[0,1]$ 恒为 0, 从而 $f=0$.

40. (40.) 由洛必达法则和(12.66)得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{1}=2A.$$

结合(12.66)得

$$\sqrt{2A}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)=A,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{A}.$$

41. (41.) 对(12.67)两边求导得

$$f'(x)=f(a-x),f''(x)=-f'(a-x)=-f(x),$$

于是解常微分方程得

$$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

现在继续由(12.67)得

$$f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x=f(a-x)=c_1\cos(a-x)+c_2\sin(a-x).$$

于是

$$(c_1\cos a+c_2\sin a-c_2)\cos x+(c_1\sin a-c_2\cos a+c_1)\sin x=0,$$

即

$$\begin{cases}c_1\cos a+c_2(\sin a-1)=0\\ c_1(1+\sin a)-c_2\cos a=0\end{cases}.$$

由 $\begin{vmatrix}\cos a & \sin a-1\\ 1+\sin a & -\cos a\end{vmatrix}=-\cos^2 a-\left(\sin^2 a-1\right)=0$ 知

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1-\sin a\\ \cos a\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}.$$

故所求全部解为

$$f(x)=k[(1-\sin a)\cos x+\cos a\sin x]=k[\cos x+\sin(x-a)],k\in\mathbb{R}.$$

42. (42.)g 递减即 $h(x)=\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$ 的导数递减, 因此 h 是非负上凸函数, 从而由凸性的几何意义知 $h\equiv 0$.

43. (43.) 设

$$g(x)\triangleq p(x+1)-p(x)-\sin x=\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}}-\sin x.$$

首先由

$$0\leqslant\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}}\leqslant\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3+2021}}=\frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}$$

得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}}=0.$$

于是存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geqslant N$ 有

$$0<\int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}}<1.$$

因此

$$g\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}}-1<0, g\left(2n\pi\right)=\int_{2n\pi}^{2n\pi+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+2021}}>0,\forall n\geqslant N,$$

即由零点定理得对每一个 $n\geqslant N$, 都有 $x_n\in\left(2n\pi,2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $g\left(x_n\right)=0$, 从而

$$p\left(x+1\right)=p\left(x\right)+\sin x$$

有无穷多个不相等的正实数解.

44. (44.)

(a). 注意到

$$0\leqslant\int_0^a f\left(t\right)\mathrm{d}t\leqslant f^2\left(a\right)=0, 0\leqslant\int_0^b f\left(t\right)\mathrm{d}t\leqslant f^2\left(b\right)=0,$$

我们有

$$\int_0^a f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^b f\left(t\right)\mathrm{d}t=0.$$

若存在 $\theta\in(a,b)$ 使得 $\int_0^\theta f\left(t\right)\mathrm{d}t>0$, 则不妨设

$$\int_0^\theta f\left(t\right)\mathrm{d}t=\max_{x\in[a,b]}\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t,$$

此时

$$0<\int_0^\theta f\left(t\right)\mathrm{d}t\leqslant f^2\left(\theta\right)=0,$$

这就是一个矛盾! 于是我们证明了

$$\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=0,\forall x\in[a,b]\Rightarrow f\left(x\right)=0,\forall x\in[a,b].$$

(b). 记

$$x_0\triangleq\inf\left\{x>0:\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t>0\right\}.$$

下确界的定义给出 $\int_0^{x_0} f\left(t\right)\mathrm{d}t=0$. 由 1 问的结果知 $x_0\in[0,c)$ 且

$$f\left(x\right)=0,\forall x\in[0,x_0],\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t>0,\forall x>x_0.$$

现在我们知道 f 在 $x>x_0$ 没有零点, 又 f 在 $x>x_0$ 必然有正值点, 所以 $f\left(x\right)>0,\forall x>x_0$.

我们对任何 $x\geqslant x_0$ 有

$$2f\left(x\right)\geqslant2\sqrt{\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t}=\int_{x_0}^x\frac{f\left(y\right)}{\sqrt{\int_0^y f\left(t\right)\mathrm{d}t}}\mathrm{d}y\geqslant\int_{x_0}^x 1\mathrm{d}y=x-x_0>x-c.$$

因为 $f\left(x\right)=0,\forall x\in[0,x_0]$, 我们知道

$$f\left(x\right)>\frac{x-c}{2},\forall x\in[0,+\infty).$$

45. (45.)

对 $x,y\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)| &= \left|\int_x^y [f'(t)-f'(x)]\right| \mathrm{d}t\\ \leqslant \left|\int_x^y |f'(t)-f'(x)|\,\mathrm{d}t\right| &\overset{(12.68)}{\leqslant} \left|\int_x^y |t-x|\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{y-x}|t|\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2}|y-x|^2,\end{aligned}$$

这就证明了(12.69).

46. (46.) 若 $a=0,b=0$ 有一个成立, 条件恰好就是导数定义. 不失一般性, 假设 $|a|>|b|>0, x_0=0$. 用 $f(x)-f(0)+\frac{C}{b-a}x$ 代替 $f(x)$ 我们可以不妨设 $f(0)=0, C=0$.

现在由极限定义, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x|\leqslant\delta$ 时有

$$|f(ax)-f(bx)|\leqslant\epsilon|x|.$$

现在当 $|x|\leqslant\delta$, 我们有

$$\left|f\left(a\frac{b^n}{a^n}x\right)-f\left(b\frac{b^n}{a^n}x\right)\right|\leqslant\epsilon\left|\frac{b^n}{a^n}x\right|,\forall n\in\mathbb{N},$$

从而

$$\sum_{n=1}^m\left|f\left(\frac{b^n}{a^{n-1}}x\right)-f\left(\frac{b^{n+1}}{a^n}x\right)\right|\leqslant\epsilon\sum_{n=1}^m\left|\frac{b^n}{a^n}x\right|\leqslant\epsilon|x|\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{b^n}{a^n}\right|=\frac{\epsilon|b|}{|a|-|b|}|x|.$$

由绝对值不等式得

$$\left|f(bx)-f\left(\frac{b^{m+1}}{a^m}x\right)\right|=\left|\sum_{n=1}^m\left[f\left(\frac{b^n}{a^{n-1}}x\right)-f\left(\frac{b^{n+1}}{a^n}x\right)\right]\right|\leqslant\frac{\epsilon|b|}{|a|-|b|}|x|,$$

于是让 $m\to\infty$ 得

$$|f(bx)|\leqslant\frac{\epsilon|b|}{|a|-|b|}|x|\Rightarrow|f(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{|a|-|b|}|x|,\forall|x|\leqslant|b|\delta.$$

因此由极限定义得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

这就完成了证明.

47. (47.) 由(12.70)可得

$$f'(x)=f(x+1)-f(x),2f'(x)=f(x+2)-f(x).$$

做差得

$$f'(x)=f(x+2)-f(x+1)=f'(x+1).$$

利用 f' 周期 1 得

$$f'(x)=f(x+1)-f(x)=\int_x^{x+1}f'(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 f'(y)\,\mathrm{d}y,$$

于是这就证明了

$$f(x)=ax+b,a,b\in\mathbb{R}.$$

48. (48.) 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{a+h}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

49. (49.) 事实上因为 $f''\neq0$, f 要么上凸函数要么下凸函数, 而 $f(a)=f(b)=0$ 且 f 不恒为 0, 显然[25] f 一定上

[25] 作出图像.

凸且 y_0 是 f 唯一极大值点, 由连续函数介值定理和存在 $x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, b)$, 使得

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{y_0}{2}.$$

记

$$x_1' = x_1 - \frac{y_0}{2f'(x_1)}, x_1'' = x_1 + \frac{y_0}{2f'(x_1)},$$

我们有

$$f'(x_1)(x - x_1) + \frac{y_0}{2} \geqslant 0, \forall x \geqslant x_1'.$$

由严格凸性, 显然有

$$f(x) \leqslant f'(x_1)(x - x_1) + \frac{y_0}{2}, x \in [a, b], x_1 < x_1'' < x_0.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} y_0(x_0 - x_1) - \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx &= \int_{x_1}^{x_0} (y_0 - f(x))\,dx \\ &> \int_{x_1}^{x_1''} (y_0 - f(x))\,dx \\ &> \int_{x_1}^{x_1''} \left(y_0 - f'(x_1)(x - x_1) - \frac{y_0}{2}\right) dx \\ &= \int_{x_1'}^{x_1} \left(f'(x_1)(x - x_1) + \frac{y_0}{2}\right) dx \\ &> \int_{a}^{x_1} \left(f'(x_1)(x - x_1) + \frac{y_0}{2}\right) dx \\ &> \int_{a}^{x_1} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

因此就有

$$y_0(x_0 - x_1) > \int_a^{x_0} f(x)\,dx.$$

类似的可得

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx < y_0(x_2 - x_0),$$

因此

$$\int_a^b f(x)\,dx < y_0(x_2 - x_0) + y_0(x_0 - x_1) = y_0(x_2 - x_1).$$

50. (50.) 显然(12.72)左边成立. 对于(12.72)右边, $s = 0$ 自然成立. 当 $s \in \mathbb{N}$, 我们有

$$s^s \leqslant e^s s! \Leftrightarrow s \ln s \leqslant \sum_{j=1}^{s} (1 + \ln j).$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{s} (1 + \ln j) \geqslant \sum_{j=1}^{s} \int_{j-1}^{j} (1 + \ln x)\,\mathrm{d}x = \int_0^s (1 + \ln x)\,\mathrm{d}x = s \ln s,$$

这就证明了(12.72).

注意由结论8.2得

$$\lim_{s \to +\infty} \sqrt[s]{\frac{s^s}{s! e^s}} = \lim_{s \to +\infty} \frac{s}{e \sqrt[s]{s!}} = 1,$$

于是由极限性质得对每一个 $\eta \in (0, 1)$ 有 $s_\eta \in \mathbb{N}$ 使得(12.73)成立. 这就完成了证明.

51. (51.) 对 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, h > 0$ 用 Taylor 中值定理得

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\theta)}{2} h^2.$$

于是

$$xf'(x)=x\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}hx.$$

现在由条件(12.74)得

$$\begin{aligned}|xf'(x)|&=\left|x\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}hx\right|\\&\leqslant\frac{|x|}{h}\left[\frac{C}{(x+h)^2}+\frac{C}{x^2}\right]+\frac{C|hx|}{2}.\end{aligned}$$

取 $h=\frac{1}{|x|}$, 我们有

$$|xf'(x)|\leqslant x^2\left[\frac{C}{\left(x+\frac{1}{|x|}\right)^2}+\frac{C}{x^2}\right],\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{C}{\left(x+\frac{1}{|x|}\right)^2}+\frac{C}{x^2}\right]=2C>0,$$

由极限保号性和闭区间上连续函数必有界得 $M>0$ 成立

$$|xf'(x)|\leqslant M,\forall x\in\mathbb{R}.$$

52. (52.) 我们归纳证明存在 $x_k\in(a,+\infty)$ 使得 $f^{(k)}(x_k)=0$. $k=1$ 来自广义罗尔定理11.6. 假设命题对 k 成立. 下证命题对 $k+1$ 成立.
若命题对 $k+1$ 不成立, 不妨设

$$f^{(k+1)}(x)>0,\forall x\in(a,+\infty).$$

由于 $f^{(k)}$ 严格递增, 因此

$$f^{(k)}(x)\geqslant f^{(k)}(x_k+1)>f^{(k)}(x_k)=0,\forall x\geqslant x_k+1,$$

且成立洛必达法则

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^k}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0,$$

这是不可能的! 因此我们证明了命题对 $k+1$ 成立, 从而由数学归纳法得存在 $x_k\in(a,+\infty)$ 使得 $f^{(k)}(x_k)=0$.

53. (53.) 我们运用

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k,x\in(-1,1],$$

就有

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1+a_ia_j}{1-a_ia_j}\geqslant1&\Leftrightarrow\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(1+a_ia_j)-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(1-a_ia_j)\geqslant0\\&\Leftrightarrow\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_i^ka_j^k+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}a_i^ka_j^k\geqslant0\\&\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_i^ka_j^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_i^ka_j^k\geqslant0\\&\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^2\geqslant0\\&\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{2k-1}\right)^2\geqslant0,\end{aligned}$$

且等号成立条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2k-1} = 0, k = 1, 2, \cdots .$$

设

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j, \sigma_j = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_j}, j = 1, 2, \cdots, n, \sigma_0 = 1.$$

我们由牛顿公式23.3得

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} s_i, k = 1, 2, \cdots, n.$$

当 k 为奇数, 注意 $k-i, i$ 必有一个为奇数, 于是由上式递推归纳得 $\sigma_k = 0$. 由韦达定理得 $p(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$ 没有奇数次项或者没有全部偶数次项. 现在 $p(x) = p(-x)$ 或者 $p(x) = -p(-x)$. 于是我们知道 p 的根 a_i 满足除 0 外, 其余 a_i 两两互为相反数.

54. (54.)

(a). 注意到

$$f'(x) = -5\sin x + 5\sin(5x) = 10\sin(2x)\cos(3x),$$

即

$$f'(x) > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), f'(x) < 0, x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right).$$

现在

$$\max_{x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}.$$

(b). 注意到不交并分解

$$\{y : \cos y > \cos\theta\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k.$$

而 $I = [a - \theta, a + \theta]$ 和 I_k 长度都为 2θ, 因此不可能对某个 k 有 $I \subset I_k$, 所以 I 中必然有一个点 y 使得 $\cos y \leqslant \cos\theta$.

(c). 注意到 1 中的结果在 $[0, 2\pi]$ 讨论就容易加强为

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3},$$

于是 b 可能的最小值会小于等于 $3\sqrt{3}$.

对任何 $\varphi \in (0, \pi)$, 在 2 中取 $a = \varphi, \theta = \frac{5}{6}\pi$, 于是得到 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leqslant \cos\theta$. 现在注意到 $\left|\frac{y-\varphi}{5}\right| \leqslant \frac{1}{6}\pi$, 于是我们有

$$5\cos\left(\frac{y-\varphi}{5}\right) - \cos\left(5 \cdot \frac{y-\varphi}{5} + \varphi\right) \geqslant 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3\sqrt{3}.$$

因此我们证明了 b 可能的最小值等于 $3\sqrt{3}$.

55. (55.) 如果

$$f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (-1, 1),$$

则 f 在 $[-1, 1]$ 下凸. 因此由 Hadamard 不等式11.4得

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(1) + f(-1)}{2},$$

这就是一个矛盾! 故存在 $x_0 \in (-1, 1)$ 使得 $f''(x_0) < 0$.

56. (56.) 若

$$f(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) > 0,$$

则 $f'(x_0)=0$. 从而

$$f''(x_0)=f^{\frac{1}{3}}(x_0)>0,$$

即 f 在 x_0 取得严格极小值, 这就是一个矛盾!. 因此 f 不能取得正的最大值. 类似的 f 不能取得负的最小值, 从而 $f\equiv 0$.

57. (57.) 直接洛必达有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}f(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)+xe^{\frac{x^2}{2}}f(x)}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{f'(x)}{x}\right]=0.$$

58. (58.) 首先

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{f'(x)}{xf''(x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-\frac{f'(x)}{f''(x)}}{x}\right]\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{f''^2(x)-f'(x)f'''(x)}{f''^2(x)}\right]=\ell\leqslant 1.$$

因为 $\ell\neq 1$, 所以 $\ell<1$.

因为 f 是递增下凸函数, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)}=1+\frac{1}{1-\ell}=\frac{2-\ell}{1-\ell}.$$

现在

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1-\ell}{2-\ell}=\frac{1}{2-\ell}.$$

59. (59.) 首先

$$f(x)+g(x)=2f(x)g(0)\Rightarrow g(x)=kf(x),k=2g(0)-1.$$

若 $|k|>1$, 则若 $f(0)=0$ 就有

$$g(0)=kf(0)=0\Rightarrow k=2g(0)-1=-1,$$

矛盾!. 现在假设 $f(0)\neq 0$, 则由

$$(1+k)f(0)=2kf^2(0)$$

知 $f(0)=\frac{1+k}{2k}$. 现在

$$\begin{cases}f(x+y)+kf(x-y)=2kf(x)f(y)\\ f(x-y)+kf(x+y)=2kf(x)f(-y)\end{cases},$$

即解得

$$\left(1-k^2\right)f(x+y)=2kf(x)\left[f(y)-kf(-y)\right].$$

代入 $x=0$ 得

$$(1-k)f(y)=f(y)-kf(-y),\forall y\in\mathbb{R},$$

即 f 为偶函数, 现在

$$\left(1-k^2\right)f(x+y)=2k(1-k)f(x)f(y)\Rightarrow f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(0)}.$$

又

$$f(2x)=\frac{f^2(x)}{f(0)}.$$

如果某个 $f(y_0)=0$, 则 $f\equiv 0$, 这就是一个矛盾!, 现在 f 有恒定的符号, 不妨设正. 于是 $\ln\frac{f(x)}{f(0)}$ 满足 Cauchy 方程且有上界, 因此由命题12.8知 $\ln\frac{f(x)}{f(0)}=cx$. 但是 f 有界, 因此

$$\ln\frac{f(x)}{f(0)}=cx=0\Rightarrow f(x)=f(0),$$

从而矛盾!, 现在我们证明了

$$|k| \leqslant 1 \Rightarrow |g(x)| \leqslant 1.$$

60. (60.) 若存在 $x_0 \in (a, +\infty)$ 使得 $|f'(x_0)| = 0$, 递减性给出

$$|f'(x)| = 0, \forall x \geqslant x_0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [xf'(x)] = 0.$$

下面假设 $f'(x) \neq 0, \forall x > a$, 注意到 f' 单调, 从而黎曼可积, 因此牛顿莱布尼兹公式表明

$$\int_{a+1}^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(a+1).$$

现在由例题14.52得

$$\lim_{x\to+\infty} [xf'(x)] = 0.$$

61. (61.) 若存在某个 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) < 2, \forall x \leqslant x_0,$$

则我们有

$$f'(x) \geqslant (2 - f(x))(2 + f(x)) > 0, \forall x \leqslant x_0.$$

现在 f 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递增且有下界, 即 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在. 注意到

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) \geqslant \lim_{x\to-\infty} (2 - f(x))(2 + f(x)) \geqslant 2 \lim_{x\to-\infty} (2 - f(x_0)) > 0.$$

由拉格朗日中值定理得

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x\to-\infty} f'(\theta_x) = 0,$$

这就是一个矛盾!

设 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \leqslant x$ 使得 $f(x_0) \geqslant 2$. 考虑

$$c(y) \triangleq [2 - f(y)]\, e^{\int_{x_0}^{y} (2+f(t))\mathrm{d}t}.$$

我们有

$$c'(y) = \left[-f'(y) + 4 - f^2(y)\right] e^{\int_{x_0}^{y} (2+f(t))\mathrm{d}t} \leqslant 0.$$

现在我们有

$$c(y) \leqslant c(x_0) = 2 - f(x_0) \leqslant 0, \forall y \geqslant x_0.$$

现在我们知道 $f(x) \geqslant 2$, 这就完成了证明.

62. (62.) 设存在 $a < x_1 < x_2 < b$ 使得

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

因为 f 在 $[x_1, x_2]$ 不恒为 0, 所以不妨设 f 在 $[x_1, x_2]$ 存在正的最大值点 $\xi \in (x_1, x_2)$. 此时在 ξ 的某个邻域 U 内 $f, f'' > 0$, 因此在 U 上 f 是下凸函数, 最大值在内点取到, 从而 f 在 U 为常值函数, 这就和条件假设矛盾!, 因此 f 只有唯一一个根.

63. (63.)

(a). 容易看到命题对 $m = 0, 1$ 都是成立的. 假定命题对 $2k-2, 2k-1$ 成立, 注意到

$$f'_{2m}(x) = f_{2m-1}(x), f'_{2m+1}(x) = f_{2m}(x).$$

因为 f_{2m-1} 在 $\mathbb{R}$ 有唯一零点 x_0 且首系数为正, 我们知道 f_{2m} 在 $(-\infty, x_0)$ 递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 递增. 于是

$$f_{2m}(x) \geqslant f_{2m}(x_0) = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{x_0^k}{k!} + \frac{x_0^{2m}}{(2m)!} = f_{2m-1}(x_0) + \frac{x_0^{2m}}{(2m)!} = \frac{x_0^{2m}}{(2m)!} \geqslant 0.$$

如果 $x_0 = 0$, 那么 $f_{2m-1}(x_0) = 1$, 这就是一个矛盾!. 现在我们知道 f_{2m} 在 $\mathbb{R}$ 没有零点.

因为 f_{2m} 没有零点且首系数为正, 所以 f_{2m+1} 严格单调递增. 又奇数次多项式必有实根, 我们知道 f_{2m+1} 在 $\mathbb{R}$ 只有唯一零点.

现在由数学归纳法, 我们完成了证明.

(b). 对任意 $A\in\mathbb{R}$, 我们知道

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=e^A>0,$$

即存在 $M\in\mathbb{N}$ 使得对任何 $m\geqslant M$ 都有 $\sum\limits_{k=0}^{2m+1}\frac{A^k}{k!}>0$. 从第一问的证明可以看到 f_{2m+1} 是严格递增函数, 所以

$$x_m<A,\forall m\geqslant M,$$

这就证明了 $\lim\limits_{m\to+\infty}x_m=-\infty$.

首先

$$\begin{aligned}f_{2m-1}\left(-(2m+1)\right)&=\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2m+1)^k}{k!}\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{(2m+1)^{2j}}{(2j)!}-\frac{(2m+1)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(2m+1)^{2j}}{(2j)!}\left(1-\frac{2m+1}{2j+1}\right)<0,\end{aligned}$$

即由 f_{2m-1} 严格递增得 $x_{m-1}+2m+1>0$. 现在

$$f_{2m+1}\left(x_{m-1}\right)=\frac{x_{m-1}^{2m+1}}{(2m+1)!}+\frac{x_{m-1}^{2m}}{(2m)!}+f_{2m-1}\left(x_{m-1}\right)=\frac{x_{m-1}^{2m}}{(2m+1)!}\left(x_{m-1}+2m+1\right)>0.$$

由 f_{2m+1} 严格递增得 $x_m<x_{m-1}$, 即 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 严格递减.

64. (64.) 首先

$$1+f'(x)=\frac{2x^2+\left(x^2-1\right)f^2(x)}{x^2\left(f^2(x)+1\right)}>0,$$

即 $x+f(x)$ 在 $x>1$ 递增. 现在若

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=C\in\mathbb{R},$$

我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,$$

以及由洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-f^2(x)}{x^2\left(f^2(x)+1\right)}\\&=C\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{f(x)}{x}}{x^3\left(\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}=0,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=+\infty.$$

65. (65.) 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\frac{f(|\cos x|)}{\sin x}\mathrm{d}x\overset{u=\cos x}{=}\int_1^{-1}\frac{f(|u|)}{\sin\arccos u}\mathrm{d}\arccos u\\&=\int_{-1}^{1}\frac{f(|u|)}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=2\int_0^1\frac{f(u)}{1-u^2}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

如果 $f(1)\neq 0$, 那么

$$\frac{f(u)}{1-u^2}\sim\frac{f(1)}{2}\cdot\frac{1}{1-u},u\to 1^-.$$

因此我们知道原积分发散.

又因为下凸函数切线不等式, 我们有

$$0=\int_0^1\frac{f(u)}{1-u^2}\mathrm{d}u>\int_0^1\frac{f(1)+f'(1)(u-1)}{1-u^2}\mathrm{d}u=-f'(1)\int_0^1\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u=-\ln 2\cdot f'(1),$$

即 $f'(1)>0$.

66. (66.) 对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 设

$$\begin{aligned}u&\triangleq\tan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t};\\ v&\triangleq\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}=\int_0^x\cos^3 t\mathrm{d}t;\\ w&\triangleq\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)=\int_0^x\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

我们有

$$f(x)=16uv^2w^4-16x^7.$$

由 Holder 不等式16.1得

$$\begin{aligned}x^{42}&=\left(\int_0^x\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{6}{42}}\left(\frac{1}{\cos t}\right)^{\frac{24}{42}}\left(\cos^3 t\right)^{\frac{12}{42}}\mathrm{d}t\right)^{42}\\&\leqslant\left(\int_0^x\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t\right)^6\left(\int_0^x\cos^3 t\mathrm{d}t\right)^{12}\left(\int_0^x\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t\right)^{24}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}f'(x)&=16\left(\frac{v^2w^4}{\cos^2 x}+2uvw^4\cos^3 x+\frac{4uv^2w^3}{\cos x}-7x^6\right)\\&\geqslant 16\left(7\cdot\sqrt[7]{\frac{v^2w^4}{\cos^2 x}\left(uvw^4\cos^3 x\right)^2\left(\frac{uv^2w^3}{\cos x}\right)^4}-7x^6\right)\\&=16\cdot 7\cdot\left(\sqrt[7]{u^6v^{12}w^{24}}-x^6\right)\geqslant 16\cdot 7\cdot\left(\sqrt[7]{x^{42}}-x^6\right)=0,\end{aligned}$$

即 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 递增.

67. (67.) 设

$$g(x)\triangleq e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

我们分部积分有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}g(x)\left[f''(x)+f'(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}f(x)\left[g''(x)-g'(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

即

$$g(x)\left[f''(x)+f'(x)+f(x)\right]=0\Rightarrow f''(x)+f'(x)+f(x)=0.$$

现在解微分方程得

$$f(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),x\in\left[0,\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right).$$

对 $x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\pi, \frac{4}{\sqrt{3}}\pi\right)$, 平移区间利用上面的计算可得

$$f\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right)=c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), x\in\left[0,\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right],$$

即

$$f(x)=-c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

考虑 $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ 处两段函数的一阶导数值相等得 $c_2=-c_1$, 即

$$f(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), x\in\left[0,\frac{4}{\sqrt{3}}\pi\right).$$

这个过程可以反复下去, 我们证明了

$$f(x)=ce^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), c\in\mathbb{R}.$$

68. (68.) 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y+n\int_0^T f(y)\,\mathrm{d}y\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^{x+nT} f(y)\,\mathrm{d}y\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{x+nT} f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{\infty} f(y)\,\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

于是 $\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=0$, 即 $f\equiv 0$.

69. (69.) 注意到

$$f(x)-f''(x)=\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

于是若 x_0 是 f 的三重根则必有

$$f(x_0)=f''(x_0)=0\Rightarrow\frac{x_0^{2k}}{(2k)!}=0\Rightarrow x_0=0,$$

但是 $f(0)=1\neq 0$. 因此我们证明了 f 不存在三重根.

70. (70.) **Step 1**

运用乘积求导公式我们有

$$\begin{aligned}
(n+1)P_{n+1}(t) &= \frac{n+1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[(t^2-1)^{n+1}] \\
&= \frac{n+1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[t(t^2-1)^n] \\
&= \frac{n+1}{2^n n!}\left[t\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]+n\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n]\right] \\
&= t(n+1)P_n(t)+\frac{n+1}{2^n(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n] \\
&= t(2n+1)P_n(t)+\frac{n+1}{2^n(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n] \\
&\quad -\frac{1}{2^n(n-1)!}t\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n] \\
&= t(2n+1)P_n(t)+\frac{n+1}{2^n(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n] \\
&\quad -\frac{1}{2^n(n-1)!}\left(\frac{d^n}{dt^n}[t(t^2-1)^n]-n\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n]\right) \\
&= t(2n+1)P_n(t)+\frac{2n}{2^n(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n] \\
&\quad +\frac{1}{2^n(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n]-\frac{d^n}{dt^{n-1}}[t(t^2-1)^n]\right) \\
&= t(2n+1)P_n(t)+\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^n] \\
&\quad -\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^2(t^2-1)^{n-1}] \\
&= t(2n+1)P_n(t)-\frac{n}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[(t^2-1)^{n-1}] \\
&= t(2n+1)P_n(t)-nP_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

Step 2

设

$$G(t,x)\triangleq\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(t)x^n,$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}G(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}=\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

即得微分方程

$$G(t,0)=1,G'(t,0)=t,\left(1-2tx+x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}G(t,x)=(t-x)G(t,x). \tag{30.68}$$

一方面微分方程(30.68)左边 x^n 的系数为

$$\underbrace{(n+1)Q_{n+1}(t)}_{\text{来自}\sum_{n=1}^{\infty}nQ_n(t)x^{n-1}}-2t\underbrace{nQ_n(t)}_{\text{来自}-2t\sum_{n=1}^{\infty}nQ_n(t)x^n}+\underbrace{(n-1)Q_{n-1}(t)}_{\text{来自}\sum_{n=1}^{\infty}nQ_n(t)x^{n+1}}.$$

另外一方面, 微分方程(30.68)右边 x^n 的系数为

$$tQ_n(t)-Q_{n-1}(t).$$

现在我们知道

$$Q_0(t)=1,Q_1(t)=t,(n+1)Q_{n+1}(t)=(2n+1)tQ_n(t)-nQ_{n-1}(t),n=1,2,\cdots.$$

显然上式也是满足微分方程(30.68)的充要条件, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n$ 确定的和函数也满足微分方程(30.68). 由

微分方程解的存在唯一性定理得

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, x^n = G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}.$$

71. (71.) 注意到

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}\right)^{\sqrt{\alpha+1}} > \left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)^{\sqrt{\alpha}} \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{\alpha+1}\ln\left(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}\right) > \sqrt{\alpha}\ln\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right) \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}\ln\left(\frac{2+\frac{2}{\alpha}}{2+\frac{1}{\alpha}}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right) \\
\overset{\alpha=\frac{1}{u^2-1},u>1}{\Leftrightarrow}\ &u\ln\left(\frac{2u^2}{u^2+1}\right) > \ln\left(\frac{u^2+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

于是设

$$F(u) \triangleq u\ln\left(\frac{2u^2}{u^2+1}\right) - \ln\left(\frac{u^2+1}{2}\right),$$

我们有

$$F''(u) = \frac{2(u-1)^2(u+1)}{u(u^2+1)^2} > 0, \forall u \geqslant 1.$$

因此我们有

$$F'(u) = \ln\left(\frac{2u^2}{u^2+1}\right) - \frac{2u-2}{u^2+1} \geqslant F'(1) = 0,$$

从而

$$F(u) > F(1) = 0, \forall u > 1.$$

因此我们完成了证明.

72. (72.)

(a). 分部积分显然.

(b). 首先

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g(x)f'(x)}{g^2(x)} > 0, \forall x \in [a,b]\setminus\{\xi\},$$

即 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[a,\xi)$ 和 $(\xi,b]$ 递增. 记

$$F(x) \triangleq \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s, G(x) \triangleq \int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s,$$

以及

$$H(t) \triangleq f(x)G(t) - F(t)g(x).$$

对 $a \leqslant t < x < \xi$, 我们有

$$H'(t) = f(x)g(t) - f(t)g(x) = g(t)g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(t)}{g(t)}\right) > 0,$$

即

$$0 = H(a) < H(x) = f(x)G(x) - F(x)g(x).$$

对 $\xi < x < t \leqslant b$, 我们有

$$H'(t) = f(x)g(t) - f(t)g(x) = g(t)g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(t)}{g(t)}\right) < 0,$$

即

$$0 = H(b) < H(x) = f(x)G(x) - F(x)g(x).$$

现在我们有

$$\int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b\left[f(x)G(x)-F(x)g(x)\right]\mathrm{d}x>0.$$

73. (73.)

(a). 若 $x_k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 是根, 则有

$$3k+1=\frac{\ln\left(6x_k-1-x_k^2\right)}{\ln x_k}.$$

现在右边要有意义, 我们有 $x_k>3-2\sqrt{2}$.

设

$$f(x)\triangleq\frac{\ln\left(6x-1-x^2\right)}{\ln x},$$

注意到 f 在 $\left(3-2\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ 严格递减[26]且

$$\lim_{x\to\left(3-2\sqrt{2}\right)^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=-\frac{\ln\frac{7}{4}}{\ln 2},$$

于是我们知道 f 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 根存在且唯一.

(b). 注意到

$$3k+1=\frac{\ln\left(6x_k-1-x_k^2\right)}{\ln x_k},$$

即左边严格递增给出右边严格递减.

(c). 现在设 f^{-1} 是 f 在 $\left(3-2\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ 的连续反函数, 我们知道

$$\lim_{k\to+\infty}x_k=\lim_{k\to+\infty}f^{-1}(3k+1)=3-2\sqrt{2}.$$

实际上本题属于 k 可以解出来的类型, 因此我们可以算得更强的结果

$$x_k=3-2\sqrt{2}+\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{3k+1}}{4\sqrt{2}}+\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{6k+2}}{128\sqrt{2}}+o\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)^{6k+2}\right),k\to+\infty.$$

74. (74.) 设

$$u_n\triangleq n^n,v_n\triangleq\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,n\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}=\frac{v_n}{n-1},n=2,3,\cdots.$$

现在对 $n\geqslant 2$ 我们有

$$\begin{aligned}v_n-v_{n-1}&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1}-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\\&=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)^{n-1}\right\}.\end{aligned}$$

因为取对数求导[27]得

$$\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)^{n-1}<1-\frac{1}{n},\forall n\geqslant 2,$$

显然

$$\frac{1}{4}=v_2<v_3<\cdots<v_n<\frac{1}{e},\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{1}{e},$$

[26]可用计算机软件作图来看, 严格证明需要求导做数值估计.

[27]可设 $x=\frac{1}{n}$.

于是我们有

$$v_n > v_{n-1}, S_{n-1} < 2u_{n-1} < \frac{2u_n}{e(n-1)},$$

以及

$$S_n = S_{n-1} + u_n < u_n\left[1 + \frac{2}{e(n-1)}\right].$$

然后

$$u_{n-1} \geqslant \frac{u_n}{4(n-1)},$$

以及

$$S_n = S_{n-1} + u_n > u_{n-1} + u_n \geqslant u_n\left[1 + \frac{1}{4(n-1)}\right].$$

现在我们证明了

$$n^n\left[1 + \frac{1}{4(n-1)}\right] \leqslant S_n < n^n\left[1 + \frac{2}{e(n-1)}\right], \forall n \geqslant 2.$$

75. (75.)

(a). 首先

$$f(x+T)\cos(x+T) = f(x)\cos x;$$
$$f(x+T)\sin(x+T) = f(x)\sin x.$$

于是考虑第一式乘以 $\cos x$ 加上第二式乘以 $\sin x$ 和第一式乘以 $\sin x$ 减去第二式乘以 $\cos x$ 得

$$f(x+T)\cos(T) = f(x), f(x+T)\sin(-T) = 0.$$

若 $\sin T \neq 0$ 则 $f \equiv 0$. 若 $\sin T = 0$ 则 $\cos T = \pm 1$. 当 $\cos T = -1$, 我们有

$$f(x+2T) = -f(x+T) = f(x).$$

现在无论如何 f 都是周期函数.

(b). 从第一问可以看到 f 具备周期 $2T$. 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 由 Taylor 中值定理得

$$f(x+2T) = f(x) + f'(x)2T + \frac{f''(\xi)}{2}(2T)^2,$$

即

$$|f'(x)| = |-f''(\xi)T| \leqslant MT.$$

现在我们完成了证明.

76. (76.) 若 f 在 x_0 可微, 则由条件第一个不等式和导数介值性得 $f'(x_0) \leqslant 0$. 由条件第二个不等式和导数介值性得 $f'(x_0) \geqslant 0$, 因此我们有 $f'(x_0) = 0$.

因为 f' 在 $(x_0, +\infty)$ 严格递减, 所以 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ 有意义. 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \xi \in (x_0, x),$$

于是

$$0 = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0^+} f'(\xi) \geqslant f'(x_0 + 1) > 0,$$

这就是一个矛盾!, 因此 f 在 x_0 不可微.

77. (77.) 由 $f'(x) \neq 1$ 得 $f(x) - x$ 严格单调. 由 $f(0) - 0 > f(1) - 1$ 得 $f(x) - x$ 严格递减.

一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k}{n}\right]&=f(0)-f(1)+1+\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k}{n}\right]\\&<1+n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=1+n\int_0^1[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=1-\frac{n}{2},\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k}{n}\right]&>n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}[f(x)-x]\,\mathrm{d}x\\&=n\int_0^1[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$-\frac{1}{2}=-\frac{n}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}<\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)<1-\frac{n}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\frac{1}{2},$$

即

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

78. (78.) 设

$$f(c)=\max_{x\in[0,1]}f(x),c\in[0,1].$$

由下凸函数单调只能是减, 增, 先减后增三种之一发生, 结合 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 我们知道

$$0\leqslant f(c)\leqslant\max\{f(0),f(1)\}.$$

设

$$g(x)\triangleq f(x)-f(c),$$

对 $x\in[0,1]$, 由割线不等式得

$$\begin{aligned}-f(c)&=\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^1 g(y)\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_0^x\left[\frac{x-y}{x}g(0)+\frac{y}{x}g(x)\right]\mathrm{d}y+\int_x^1\left[\frac{1-y}{1-x}g(x)+\frac{y-x}{1-x}g(1)\right]\mathrm{d}y\\&=x\frac{g(x)+g(0)}{2}+(1-x)\frac{g(x)+g(1)}{2}\\&=\frac{1}{2}g(x)+\frac{xg(0)+(1-x)g(0)}{2}\leqslant\frac{1}{2}g(x)\\&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(c),\end{aligned}$$

即 $-f(c)\leqslant f(x)$. 现在我们有

$$|f(x)|\leqslant f(c)\leqslant\max\{f(0),f(1)\}.$$

79. (79.) 设

$$|f(x_0)=|\max_{x\in[a,b]}|f(x)|,x_0\in[a,b].$$

注意到

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

我们有

$$1\leqslant|f(x_0)|\int_0^1\left|\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{|f(x_0)|}{16},$$

即 $|f(x_0)| \geqslant 16$.

80. (80.) 考虑 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$, 然后设

$$g(x) \triangleq f(x)-x,$$

然后在原不等式考虑 $x=y$ 得

$$(x+g(x))^2 \leqslant 2x\left(\frac{x}{2}+g\left(\frac{x}{2}\right)\right) \Rightarrow 2xg\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 2xg(x)+g^2(x).$$

于是若某个 $a>0$ 使得 $g(a)>0$, 则

$$2ag\left(\frac{a}{2}\right) > 2ag(a) \Rightarrow g\left(\frac{a}{2}\right) > g(a) > 0.$$

反复这个过程得

$$0=g(0)=\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{a}{2^n}\right) \geqslant g(a),$$

这就是一个矛盾!, 即

$$g(x) \leqslant 0, \forall x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant x, \forall x \geqslant 0.$$

81. (81.)

(a). 注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{f(x)} \ln f(x) \sin x \mathrm{d}x = 0.$$

由积分中值定理得 $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 成立

$$e^{f(x_1)} \ln f(x_1) \sin(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = 1.$$

(b). 求导可证 $e^x \ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增. 若存在唯一的 $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f(x_1)=1$, 则 $e^{f(x)} \ln f(x)$ 在 $(0,x_1), \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$ 不变号. 由 $I_1=0$ 知 $e^{f(x)} \ln f(x)$ 在 x_1 两侧不同号, 否则被积函数将恒为 0, 从而 f 恒为 1 矛盾!

考虑

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{f(x)} \ln f(x) \sin(x-x_1) \mathrm{d}x = \cos x_1 \cdot I_1 - \sin x_1 \cdot I_2 = 0.$$

但是上式被积函数不变号, 因此 $e^{f(x)} \ln f(x) = 0$ 恒成立, 从而 $f=1$ 恒成立, 这就是一个矛盾!.

82. (82.) 洛必达法则得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} (f'(x)+2f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(f'(x)+2f(x)-x)}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(f''(x)+3f'(x)+2f(x)-1-x)}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left((x^2+x+1)\sin\frac{1}{x}-1-x\right) = 0,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \left(f'(x)+f(x)-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(f'(x)+f(x)-\frac{1}{2}x\right)}{e^{2x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(f''(x)+3f'(x)+2f(x)-\frac{1}{2}-x\right)}{2e^{2x}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \left((x^2+x+1)\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-x\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f'(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left[2\left(f'(x)+f(x)-\frac{1}{2}x\right)-(f'(x)+2f(x)-x)\right] \\
&= 2\cdot\frac{1}{4}-0=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f''(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+x+1\right)\sin\frac{1}{x}-x-2f'(x)-f'(x)-2f(x)+x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+x+1\right)\sin\frac{1}{x}-x\right]-2\cdot\frac{1}{2}-0=1-1-0=0.\end{aligned}$$

83. (83.) 首先 $f(1)-1\leqslant 0, f(0)-0\geqslant 0$, 因此零点定理告诉我们存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=\xi$. 若还有 $\eta\neq\xi$ 使得 $f(\eta)=\eta$, 则

$$|\eta-\xi|=|f(\eta)-f(\xi)|<|\eta-\xi|,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了 ξ 的唯一性.

84. (84.)

(a). 容易得到解为 $g(x)\triangleq e^{2x}\left(3-2e^{x}\right)$.

(b). 考虑

$$F(x)\triangleq\varphi(x)\,e^{\int_0^x h(t)\mathrm{d}t},$$

我们有

$$F'(x)=\left[\varphi'(x)+h(x)\varphi(x)\right]e^{\int_0^x h(t)\mathrm{d}t}\geqslant 0,\forall x\geqslant 0.$$

于是

$$F(x)=\varphi(x)\,e^{\int_0^x h(t)\mathrm{d}t}\geqslant\varphi(0)\cdot e^{\int_0^0 h(t)\mathrm{d}t},$$

即

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)\,e^{-\int_0^x h(t)\mathrm{d}t}.$$

(c). 由条件得

$$f''(x)-2f'(x)\geqslant 3\left(f'(x)-2f(x)\right).$$

在第 2 问中取

$$h(x)=-3,\varphi(x)=f'(x)-2f(x),$$

我们有

$$f'(x)-2f(x)\geqslant -2e^{3x}.$$

又

$$\left(f(x)+2e^{3x}\right)'-2\left(f(x)+2e^{3x}\right)\geqslant 0.$$

在第 2 问中取

$$h(x)=-2,\varphi(x)=f(x)+2e^{3x},$$

我们有

$$f(x)+2e^{3x}\geqslant 3e^{2x},$$

即

$$f(x)\geqslant g(x),\forall x\geqslant 0.$$

我们完成了证明.

85. (85.) 对任何 $x>0$, 考虑

$$a_0=x,a_{n+1}=f(x_n),n=0,1,2,\cdots.$$

于是代入原函数方程得

$$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0,n=0,1,2,\cdots.$$

解得

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

由 f 正可得 $B = 0, A > 0$, 即

$$a_n = A \cdot 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

代入 $n = 0$ 得

$$a_n = x2^n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

代入 $n = 1$ 即得 $f(x) = 2x$.

86. (86.)

(a). 首先由黎曼引理9.2得

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x,$$

即 $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b). 积分中值定理即得 $\xi \in (0, T)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

(c). 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 取 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $|x - (\xi + kT)| \leqslant \frac{T}{2}$, 于是

$$|f(x)| = |f(x) - f(\xi + kT)| \leqslant L|x - (\xi + kT)| \leqslant \frac{LT}{2},$$

这就证明了

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \leqslant \frac{LT}{2}.$$

87. (87.)

(a). 我们证明 f 零点 s 和导数零点 t 存在的情况下, 一定有 $t < s$. 此时显然有 $v_1 \neq 0$ 且

$$\alpha s^{v_1} + \beta s^{v_2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{-\beta} = s^{v_2 - v_1} > 0;$$

$$\alpha v_1 t^{v_1 - 1} + \beta v_2 t^{v_2 - 1} = 0 \Rightarrow t^{v_2 - v_1} = \frac{\alpha v_1}{-\beta v_2} < s^{v_2 - v_1},$$

即 $t < s$. 于是我们证明了 f 的任意零点指标不超过 1.

(b). 若 f 有零点指标为 $n \geqslant 3$, 则不妨设 (否则考虑 $-f$ 即可.)

$$f(x) > 0, \forall x \in (0, x_1).$$

突破口 (为了减少项数到 2 项, 类比例题12.48.) 是考虑满足第 1 问条件的函数

$$L(x) \triangleq v_3 f(x) - x f'(x) = (v_3 - v_2)\beta x^{v_2} + (v_3 - v_1)\alpha x^{v_1}.$$

显然 L 至多只有一个零点并由例题12.48得 f 至多只有 2 个零点. 我们分两种情况讨论:

Case 1 若 $f'(x_1) = 0$, 则 f 在 $(0, +\infty)$ 无其他零点 (从而在 x_1 外为正.). 则

$$\begin{aligned} L'(x_1) &= (v_3 - 1) f'(x_1) - x_1 f''(x_1) = -x_1 f''(x_1) \\ &= -x_1 \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}(x - x_1)^2} \leqslant 0, \end{aligned}$$

因此 $f''(x_1) > 0$, 所以 x_1 是 f 唯一最小值点, 但是

$$L(x_1) = 0, L'(x_1) < 0, L(x_2) = v_3 f(x_2) - x_2 f'(x_2) = v_3 f(x_2) > 0,$$

所以 L 在 (x_1, x_2) 还有其他零点而矛盾!.

Case 2 若 $f'(x_1) \neq 0$, 则

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x)}{x - x_1} < 0, L(x_1) = -x_1 f'(x_1) > 0.$$

结合

$$f'(x) \neq 0, x \in (x_1, x_2)$$

我们有

$$f'(x) < 0, x \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x_2) < 0 \Rightarrow L(x_2) = v_3 f(x_2) < 0.$$

零点定理得 L 唯一零点 $x^* \in (x_1, x_2)$ 使得 $L(x^*) = 0$. 由第 1 问的证明可知

$$L'(x) \neq 0, \forall x \in [x^*, +\infty),$$

结合 L 两侧符号有

$$L'(x^*) < 0 \Rightarrow L'(x) < 0, \forall x \in [x^*, +\infty).$$

由

$$L'(x_2) = (v_3 - 1) f'(x_2) - x_2 f''(x_2) = -x_2 f''(x_2) < 0$$

和

$$f''(x) \neq 0, \forall x \in (x_2, x_3)$$

得

$$f'(x_2) = 0, f''(x) > 0, \forall x \in [x_2, x_3) \Rightarrow f'(x_3) > 0.$$

但是

$$L'(x_3) = (v_3 - 1) f'(x_3) - x_3 f''(x_3) = (v_3 - 1) f'(x_3) > 0,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了若 f 所有零点指标不超过 2, 这就完成了证明.

88. (88.) 我们直接洛必达得

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{y(t)} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{1}{y(t)} e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}}{e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(\frac{-y'(t)}{y^2(t)} + \frac{a(t)}{y(t)}\right) e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}}{a(t) e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{b(t) y^2(t)}{y^2(t)}}{a(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{1}{\beta}, \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \beta$.

89. (89.) 因为 f 没不动点, 所以只需讨论如下两种情况即可.

Case 1 若 $f(x)>x,\forall x\in\mathbb{R}$, 则

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))>f_n(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

若对某个 x 有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ 存在, 即

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=f(g(x)),$$

这就和 f 没有不动点矛盾!. 因此对任何 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 无界.

Case 2 若 $f(x)<x,\forall x\in\mathbb{R}$, 则

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))<f_n(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

若对某个 x 有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ 存在, 即

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=f(g(x)),$$

这就和 f 没有不动点矛盾!. 因此对任何 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 无界.

综上所述, 我们完成了证明.

90. (90.) 记

$$M\triangleq\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

由题目条件得

$$\left(x^2f'(x)\right)'=2xf'(x)+x^2f''(x)=xf(x),$$

即

$$\left|x^2f'(x)\right|=\left|\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_0^x y\mathrm{d}y=\frac{Mx^2}{2},\forall x\in[0,1].$$

于是由拉格朗日中值定理得

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(\theta)|\cdot x\leqslant\frac{M}{2},\forall x\in[0,1],$$

即

$$0\leqslant M\leqslant\frac{M}{2}\Rightarrow M=0\Rightarrow f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

91. (91.)

引理 30.3 (Dunkl–Williams 不等式)

设 X 是赋范空间, $||\cdot||$ 是 X 上范数, 则

$$\left|\left|\frac{x}{||x||}-\frac{y}{||y||}\right|\right|\leqslant\frac{4||x-y||}{||x||+||y||},\forall x,y\in X\setminus\{0\}.$$

♡

证明 对 $x,y\in X\setminus\{0\}$, 不妨设 $||x||\geqslant||y||$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{x}{||x||}-\frac{y}{||y||}\right|\right|&\leqslant\left|\left|\frac{x}{||x||}-\frac{y}{||x||}\right|\right|+\left|\left|\frac{y}{||x||}-\frac{y}{||y||}\right|\right|\\&=\frac{||x-y||+|||y||-||x|||}{||x||}\leqslant\frac{2||x-y||}{||x||}\\&\leqslant\frac{4||x-y||}{||x||+||y||},\end{aligned}$$

这就证明了引理30.3.

回到原题: 对 $n\in\mathbb{N},\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\theta\in(0,1),p\geqslant1$ 且

$$||\mathbf{x}||_p=||\mathbf{y}||_p>0,$$

我们由引理30.3得

$$\left|\left|\frac{\theta\mathbf{x}}{||\theta\mathbf{x}||_p}-\frac{(1-\theta)\mathbf{y}}{||(1-\theta)\mathbf{y}||_p}\right|\right|_p\leqslant\frac{4||\theta\mathbf{x}-(1-\theta)\mathbf{y}||_p}{||\theta\mathbf{x}||_p+||(1-\theta)\mathbf{y}||_p},$$

这恰好是

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_p\leqslant 4||\theta\mathbf{x}-(1-\theta)\mathbf{y}||_p.$$

对 $||\mathbf{x}||_p=||\mathbf{y}||_p=0$, 要证不等式是平凡的.

现在取

$$p=1,n=2,\theta=\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon},\epsilon\in(0,1),\mathbf{x}=e_1,\mathbf{y}=(1-\epsilon)e_1+\epsilon e_2,$$

我们就有

$$\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_p}{||\theta\mathbf{x}-(1-\theta)\mathbf{y}||_p}=\frac{2\epsilon}{\frac{\epsilon}{2-\epsilon}}\to 4,\epsilon\to 0^+.$$

因此所求最好的 $C=4$.

92. (92.)

(a). 代入解不等式得

$$D(-1)=\left(0,\frac{3}{2}\right).$$

(b). 直接写出表达式

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ 0, & x=0\\ -2^{-x}, & x>0\end{cases}.$$

注意到不可能有 $x_1<0,x_2>0$ 以及

$$D(x_2)=\begin{cases}(0,-x_2), & x_1<0,x_2<0,\text{此时}x_1\leqslant x_2\\ (-\infty,-x_2]\bigcup(0,+\infty), & x_1>0,x_2>0,\text{此时}x_1\leqslant x_2\\ (0,-x_2), & x_1>0,x_2<0\end{cases}$$

$$\subseteq$$

$$D(x_1)=\begin{cases}(0,-x_1), & x_1<0,x_2<0,\text{此时}x_1\leqslant x_2\\ (-\infty,-x_1]\bigcup(0,+\infty), & x_1>0,x_2>0,\text{此时}x_1\leqslant x_2\\ (-\infty,-x_1]\bigcup(0,+\infty), & x_1>0,x_2<0\end{cases}.$$

(c). 若 $f(0)<1$, 取 $a\in(-1,0)$ 使得 $2^a>f(0)$. 由

$$f\left(a-\frac{a}{2}\right)=2^{\frac{a}{2}}>2^a=f(a)$$

得

$$-\frac{a}{2}\in D(a)\subseteq D(0)\Rightarrow f\left(0-\frac{a}{2}\right)>f(0).$$

但是 $-\frac{a}{2}\in(0,1)$, 这就和第二个条件矛盾!, 即 $f(0)\geqslant 1$.

若 $x\in(0,1)$ 且 $f(x)>0$, 当 $-a>0$ 充分大, 我们有

$$f(a)=2^a<f(x)<f(0)\Rightarrow -x\in D(x)\subset D(a)\Rightarrow f(a-x)>f(a),$$

这和 f 在 $(-\infty,0)$ 递增矛盾!, 因此

$$f(x)\leqslant 0,\forall x\in(0,1).$$

若 $x \geqslant 1$ 且 $f(x)>0$, 对 $-a>0$ 充分大, 我们有

$$0<f\left(a-x+\frac{1}{2}\right)<f(a)<f(x) \Rightarrow x-a \in D(a) \subset D\left(a-x+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(a-x+\frac{1}{2}\right)>0,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们有

$$f(x) \leqslant 0, \forall x>0.$$

对 $0<x_1<x_2, -a>0$ 充分大我们有

$$f(x_1)<f(a)<f(a+x_2-x_1) \Rightarrow x_2-x_1 \in D(a) \subseteq D(x_1) \Rightarrow f(x_2)>f(x_1),$$

因此 f 在 $(0,+\infty)$ 递增.

93. (93.)

(a). 由连续性, 我们有

$$\lim_{x \to +\infty}[f(x+m)-f(x)] \geqslant m, f(m)-f(0) \geqslant m,$$

即

$$m>0, me^m \geqslant 4m \Rightarrow m \geqslant 2\ln 2.$$

当 $m \geqslant 2\ln 2$, 注意到

$$f(x+m)-f(x)>m \Leftrightarrow (x+m)e^{x+m}-xe^x>4m.$$

求导得

$$\left((x+m)e^{x+m}-xe^x\right)'=(x+m+1)e^{x+m}-(x+1)e^x>0, \forall x \geqslant 0,$$

即

$$(x+m)e^{x+m}-xe^x>(0+m)e^{0+m}-0e^0 \geqslant 4m.$$

因此所求 m 取值范围为 $[2\ln 2,+\infty)$.

(b). 注意到

$$f''(x)=(x+2)e^x.$$

所以在 $x \neq -2$ 的 f 具备严格凸性. 当 $k<-2$, f 严格上凸, 自然要证不等式对充分小的 $x>0$ 是不成立的. 当 $k \geqslant -2, x>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&f(k+x)+f(k-x)-2f(k)\\
&=2e^k[k(\cosh x-1)+x\sinh x]\\
&\geqslant 2e^k[x\sinh x-2(\cosh x-1)]\\
&=2e^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-2}{(2n)!}x^{2n}>0,
\end{aligned}$$

这就证明了 k 取值范围为 $[-2,+\infty)$.

94. (94.) 注意到 $\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称, 所以我们只需要证明 $\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 递增并利用

$$\lim_{x \to 0^+}\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}=\pi, \lim_{x \to \frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}=4$$

即可.

注意到

$$\left(\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}\right)'=\frac{\pi x(1-x)\cos(\pi x)+(2x-1)\sin(\pi x)}{x^2(1-x)^2},$$

以及对 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 有

$$\begin{aligned}&\pi x(1-x)\cos(\pi x)+(2x-1)\sin(\pi x)\\&=2\pi\int_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)y\left(\frac{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)}{\frac{1}{2}-x}-\frac{\sin(\pi y)}{y}\right)\right]\mathrm{d}y\\&>0,\end{aligned}$$

这里用到了 sin 的割线斜率不等式. 我们就有 $\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 递增, 因此完成了证明.

95. (95.) 对于周期 T 函数 g, 显然对任何 $a \in \mathbb{R}$, g 在 $[a, a+T)$ 有 N 个零点和存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 g 在 $[a, a+T)$ 有 N 个零点是等价的. 显然周期函数的任意阶导数也是同周期的.

考虑

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = x_1 + T$$

使得 $x_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 是 f 的零点. 则由罗尔中值定理得

$$\xi_i \in (x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \cdots, N$$

使得 $f'(\xi_i) = 0$, 即 f' 在 $[x_1, x_1 + T)$ 有 N 个零点. 现在我们对 f' 继续上面过程可以知道 $f^{(2)}$ 在 $[0, T)$ 上有 N 个零点, 依次下去得 $f^{(q)}$ 在 $[0, T)$ 上有 N 个零点. 注意到上面过程加入的导数零点和本来的零点不同, 所以由 $f^{(q+1)}(c) = 0$ 得 $f^{(q+1)}$ 在 $[0, T)$ 上有 $N+1$ 个零点. 继续上面过程下去就有对任何 $a \in \mathbb{R}$, $f^{(m)}$ 在 $[a, a+T)$ 内至少有 $N+1$ 个零点.

96. (96.)

(a). 注意到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}[f'(x)]^2 + e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right) = f'(x)\left(f''(x) + e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right) = 0,$$

我们有

$$C = \frac{1}{2}[f'(x)]^2 + e^{f(x)} + e^{-f(x)} \geqslant e^{f(x)} + e^{-f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

注意到 $\lim\limits_{t\to\infty}(e^t + e^{-t}) = \infty$, 所以我们显然有 f 有界.

(b). 设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 f 最大值点, 则

$$e^{f(x_0)} - e^{-f(x_0)} = f''(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow f(x_0) \leqslant 0,$$

即

$$f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

设 $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 f 最小值点, 则

$$e^{f(x_0)} - e^{-f(x_0)} = f''(x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_0) \geqslant 0,$$

即

$$f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此我们知道 $f \equiv 0$ 为所求.

30.7 非数学积分计算

1. (1.)(答案).
2. (2.)(答案).
3. (3.)(答案).
4. (4.)(答案).

5. (5.) 注意到

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\infty} \left(1 - x^2 \sin^2 \frac{1}{x}\right)^n dx \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 y}{y^2}\right)^n}{y^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{\sin^{2k}(y)}{y^{2k+2}} dy \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{y^{2k} - \sin^{2k}(y)}{y^{2k+2}} dy, \end{aligned}$$

这里为了抵消在 0 的被积函数的奇性, 用到了

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{y^{2k}}{y^{2k+2}} = \frac{1}{y^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = \frac{1}{y^2} (1-1)^n = 0.$$

因此我们只需要证明

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y^{2k} - \sin^{2k}(y)}{y^{2k+2}} dy \in \mathbb{Q}, \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{30.69}$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{y^{2k} - \sin^{2k}(y)}{y^{2k+2}} dy &= \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[y^{2k} - \sin^{2k}(y)\right] x^{2k+1} e^{-yx} dx dy \\ &= \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^{\infty} x^{2k+1} \int_0^{\infty} \left[y^{2k} - \sin^{2k}(y)\right] e^{-yx} dy dx \\ &= \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^{\infty} x^{2k+1} \left(\frac{(2k)!}{x^{2k+1}} - \int_0^{\infty} \sin^{2k}(y) e^{-xy} dy\right) dx. \end{aligned} \tag{30.70}$$

考虑 $J_k = \int_0^{\infty} \sin^{2k}(y) e^{-xy} dy$, 则 $J_0 = \frac{1}{x}$ 且对 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin^{2k}(y) e^{-xy} dy &= \frac{2k}{x} \int_0^{\infty} \sin^{2k-1}(y) \cos(y) e^{-xy} dy \\ &= \frac{2k}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-xy} d\left[\sin^{2k-1}(y) \cos(y)\right] \\ &= \frac{2k}{x^2} \int_0^{\infty} \left[(2k-1) \sin^{2k-2}(y) \cos^2(y) - \sin^{2k}(y)\right] e^{-xy} dy \\ &= \frac{2k}{x^2} \int_0^{\infty} \left[(2k-1) \sin^{2k-2}(y) - 2k \sin^{2k}(y)\right] e^{-xy} dy \\ &= \frac{2k(2k-1)}{x^2} J_{k-1} - \frac{4k^2}{x^2} J_k, \end{aligned}$$

即

$$J_k = \frac{2k(2k-1)}{x^2 + 4k^2} J_{k-1} = \cdots = \frac{(2k)!}{x\left(x^2+2^2\right)\left(x^2+4^2\right)\cdots\left(x^2+(2k)^2\right)}. \tag{30.71}$$

把式(30.71)带入式(30.70), 我们有 (只考虑 $k \geqslant 1$, $k = 0$ 平凡)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{y^{2k} - \sin^{2k}(y)}{y^{2k+2}} dy &= \frac{1}{2k+1} \int_0^{\infty} x^{2k+1} \left(\frac{1}{x^{2k+1}} - \frac{1}{x\left(x^2+2^2\right)\left(x^2+4^2\right)\cdots\left(x^2+(2k)^2\right)}\right) dx \\ &= \frac{1}{2k+1} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^{2k}}{\left(x^2+2^2\right)\left(x^2+4^2\right)\cdots\left(x^2+(2k)^2\right)}\right) dx \\ &= \frac{1}{2k+1} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{x^2 + (2j)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4(2k+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{j}, \end{aligned}$$

这里 A_j 的存在性是显然的 (通分之后发现不含有一次项) 且可以如下确定

$$\begin{aligned}A_j &= \lim_{x\to 2j\sqrt{-1}}\left[x^2+(2j)^2\right]\left[1-\frac{x^{2k}}{\left(x^2+2^2\right)\left(x^2+4^2\right)\cdots\left(x^2+(2k)^2\right)}\right]\\ &= \lim_{x\to 2j\sqrt{-1}}\frac{x^{2k}}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant k,i\neq j}\left(x^2+(2i)^2\right)}\\ &= \frac{\left(-4j^2\right)^k}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant k,i\neq j}\left((2i)^2-(2j)^2\right)}\in\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

于是我们就证明了(30.69), 从而证明了习题5..

6. (6.) 做换元 $x=\arcsin\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 为了说明换元有意义, 我们注意到

$$\frac{d}{du}\frac{2bu}{(a+b)+(b-a)u^2}=\frac{2b\left(au^2-bu^2+b+a\right)}{\left(bu^2+b-au^2+a\right)^2},u\in[0,1],$$

容易注意到若 $\frac{d}{du}\frac{2bu}{(a+b)+(b-a)u^2}=0$, 则 $u=\pm\frac{\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}}\notin[0,1]$, 因此我们知道 $\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 严格单调且值域恰好是 $[0,1]$, 于是换元是合理的.

直接计算就有

$$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x=d\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}=\frac{2b\cos t\left[(a-b)\sin^2 t+a+b\right]}{\left[(b-a)\sin^2 t+a+b\right]^2}dt.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2b\cos t\left[(a-b)\sin^2 t+a+b\right]}{\left[(b-a)\sin^2 t+a+b\right]^2}dt}{\cos x\sqrt{a^2\left(\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}\right)^2+b^2\left(1-\left(\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}\right)^2\right)}}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2b\cos t\left[(a-b)\sin^2 t+a+b\right]}{\left[(b-a)\sin^2 t+a+b\right]^2}dt}{\sqrt{1-\left(\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}\right)^2}\sqrt{a^2\left(\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}\right)^2+b^2\left(1-\left(\frac{2b\sin t}{(a+b)+(b-a)\sin^2 t}\right)^2\right)}}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{ab\sin^2 t+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2 t}}.\end{aligned}$$

我们完成了计算.

笔记 基本模型可以积累, 实际上你也可以转化为幂函数的积分去换元, 但测试起来相对比较麻烦, 不如提前积累一下.

7. (7.) 做换元 $p=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$, 则

$$x=\frac{1}{4}\left(p^2-2+\frac{1}{p^2}\right),dx=\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p^3}\right)dp.$$

于是

$$\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^\pi dx=\int\frac{1}{2p^\pi}\left(p-\frac{1}{p^3}\right)dp=\frac{1}{2}\int\left(p^{1-\pi}-p^{-3-\pi}\right)dp=\frac{1}{2}\left[\frac{p^{2-\pi}}{2-\pi}+\frac{p^{-\pi-2}}{\pi+2}\right]+C.$$

这就证明了

$$\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^\pi dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{\pi+2}}{\pi+2}-\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{\pi-2}}{\pi-2}\right]+C.$$

8. (8.) 分部积分可得

$$I_n=\frac{b\sin x}{(n-1)\left(b^2-a^2\right)(a+b\cos x)^{n-1}}-\frac{(2n-3)a}{(n-1)\left(b^2-a^2\right)}I_{n-1}+\frac{n-2}{(n-1)\left(b^2-a^2\right)}I_{n-2}.$$

9. (9.) 考虑[28]$\alpha=\frac{1}{p},1-\alpha=\frac{1}{q},p,q>1$ 并记

$$L_p=\frac{1}{p}\int_0^1\left[x^{1-p}+(1-x)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}dx,$$

我们要证的是 $L_p=L_q$.

考虑[29]

$$f_1(t)=\left(t^q+1\right)^{-\frac{1}{p}},f_2(t)=\left(t^{-q}+1\right)^{-\frac{1}{p}}$$
$$g_1(t)=\left(t^p+1\right)^{-\frac{1}{q}},g_2(t)=\left(t^{-p}+1\right)^{-\frac{1}{q}}.$$

首先

$$\begin{aligned}L_p&=\int_0^1\sqrt[p]{\left|\left(x^{\frac{1}{p}}\right)'\right|^p+\left|\left[(1-x)^{\frac{1}{p}}\right]'\right|^p}dx=\int_\infty^0\sqrt[p]{\left|\left(x^{\frac{1}{p}}\right)'\right|^p+\left|\left[(1-x)^{\frac{1}{p}}\right]'\right|^p}|_{x=\frac{1}{1+t^q}}d\frac{1}{1+t^q}\\&=\int_0^\infty\sqrt[p]{|f_1'(t)|^p+|f_2'(t)|^p}dt,\end{aligned}$$

类似的

$$L_q=\int_0^\infty\sqrt[q]{|g_1'(t)|^q+|g_2'(t)|^q}dt.$$

直接分部积分得

$$\int_0^\infty\left(-f_1'(t)g_2(t)+f_2'(t)g_1(t)\right)dt=\int_0^\infty\left(-g_1'(t)f_2(t)+g_2'(t)f_1(t)\right)dt.\tag{30.72}$$

我们断言

$$-f_1'(t)g_2(t)+f_2'(t)g_1(t)=\sqrt[p]{|f_1'(t)|^p+|f_2'(t)|^p}$$
$$-g_1'(t)f_2(t)+g_2'(t)f_1(t)=\sqrt[q]{|g_1'(t)|^q+|g_2'(t)|^q}.$$

事实上一方面

$$\begin{aligned}-f_1'g_2+f_2'g_1&=-\left(-\frac{1}{p}\right)(t^q+1)^{-\frac{p+1}{p}}qt^{q-1}\left(t^{-p}+1\right)^{-\frac{1}{q}}\\&\quad+\left(-\frac{1}{p}\right)\left(t^{-q}+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}(-q)t^{-(q+1)}\left(t^p+1\right)^{-\frac{1}{q}}\\&=\frac{q}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left(t^p+1\right)^{-\frac{1}{q}}\left(t^{q-1+\frac{p}{q}}+t^{\frac{q(p+1)}{p}-(q+1)}\right)\\&=\frac{q}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left(t^p+1\right)^{\frac{1}{p}-1}t^{\frac{1}{p-1}-1}\left(t^p+1\right)\\&=\frac{q}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left(t^p+1\right)^{\frac{1}{p}}t^{\frac{1}{p-1}-1}.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\sqrt[p]{|f_1'(t)|^p+|f_2'(t)|^p}&=\left[\left(\frac{1}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}qt^{q-1}\right)^p+\left(\frac{1}{p}\left(t^{-q}+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}qt^{-(q+1)}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{q}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left(t^{p(q-1)}+t^{q(p+1)-p(q+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{q}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left(t^q+t^{q-p}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{q}{p}\left(t^q+1\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left(t^p+1\right)^{\frac{1}{p}}t^{\frac{1}{p-1}-1}.\end{aligned}$$

类似的可证另外一个等式. 于是通过(30.72)就得到了证明.

[28]动机来自Adler, C. L. (1-SMCMD-P); Tanton, James (1-MRMCK-M) *π is the minimum value for* Π. College Math. J. 31 (2000), no. 2, 102–106.

[29]动机来自Keller, Joseph B. (1-STF); Vakil, Ravi (1-STF) *π_p, the value of π in ℓ_p*. Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 10, 931–935.

10. (10.) 显然

$$\lim_{a\to+\infty} a^{1-b}\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\cos x}{x^b}dx \overset{\text{Laplace 方法}}{=} \lim_{a\to+\infty} a^{1-b}\int_0^{\infty} e^{-ax}x^{-b}dx$$
$$\overset{x=\frac{y}{a}}{=} \lim_{a\to+\infty}\int_0^{\infty} e^{-y}y^{-b}dy = \Gamma(1-b).$$

11. (11.) 注意到

$$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^q\left|\sin x\right|^r}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^p}{1+x^q\left|\sin x\right|^r}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(x+k\pi)^p}{1+(x+k\pi)^q\sin^r x}dx.$$

因此只需研究 $\int_0^{\pi}\frac{(x+k\pi)^p}{1+(x+k\pi)^q\sin^r x}dx, k\to\infty$, 我们运用 $k\pi\leqslant x+k\pi\leqslant(k+1)\pi, x\in[0,\pi]$, 把积分里面的 $(x+k\pi)^p, (x+k\pi)^q$ 放缩, 随着 p,q 的正负不同, 放缩的方向也不一样, 我们仅举一种例子, 读者可以自行验证其余情况都是等价的.

因此只需要判断 $\int_0^{\pi}\frac{(k+1)^p\pi^p}{1+k^q\pi^q\sin^r x}dx\sim 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^p\pi^p}{1+k^q\pi^q\sin^r x}dx, k\to\infty$ 等价量.

我们只需要研究 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y^q\sin^r x}dx, y\to+\infty$ 等价量.

当 $q\leqslant 0$, 我们有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y^{-q}}{y^{-q}+\sin^r x}dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx$, 由控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y^{-q}}{y^{-q}+\sin^r x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{-q}}{y^{-q}+\sin^r x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}, & q<0\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^r x}dx, & q=0\end{cases}.$$

因此 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^p\pi^p}{1+k^q\pi^q\sin^r x}dx$ 同阶于 k^p, 这给出了当且仅当 $p<-1$ 时, 原积分收敛.

当 $q>0, r<1$, 我们有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y^q}{1+y^q\sin^r x}dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-r}x dx$, 由控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y^q}{1+y^q\sin^r x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^q}{1+y^q\sin^r x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^r x}dx,$$

此时 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^p\pi^p}{1+k^q\pi^q\sin^r x}dx$ 同阶于 k^{p-q}, 因此当且仅当 $p-q<-1$ 时原积分收敛.

当 $q>0, r=1$, 我们有

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^q}{\ln y}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y^q\sin x}dx = \lim_{y\to+\infty}\frac{qy^q}{\ln y^q}\frac{\ln\left(\sqrt{y^{2q}-1}+y^q\right)}{\sqrt{y^{2q}-1}} = q,$$

即 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^p\pi^p}{1+k^q\pi^q\sin^r x}dx$ 同阶于 $\frac{\ln k}{k^{q-p}}$, 因此原积分在 $p-q<-1$ 时收敛.

当 $q>0, r>1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y^q\sin^r x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+y^q\sin^r x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+y^q\sin^r x}dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+y^q\sin^r x}dx+O\left(\frac{1}{y^q}\right)\\ &= \frac{1}{y^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{q}{r}}}\frac{1}{(1+u^r)\sqrt{1-\frac{u^2}{y^{\frac{2q}{r}}}}}du+O\left(\frac{1}{y^q}\right)\\ &\sim \frac{1}{y^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^r}du,\end{aligned}$$

最后一个等价是运用控制收敛定理:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{q}{r}}}\frac{1}{(1+u^r)\sqrt{1-\frac{u^2}{y^{\frac{2q}{r}}}}}du\leqslant\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{1+u^r}du<\infty,$$

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{q}{r}}}\frac{1}{(1+u^r)\sqrt{1-\frac{u^2}{y^{\frac{2q}{r}}}}}du = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^r}du.$$

此时 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^p\pi^p}{1+k^q\pi^q\sin^r x}dx$ 同阶于 $k^{p-\frac{q}{r}}$, 因此原积分收敛等价于 $p-\frac{q}{r}<-1$.

12. (12.) 事实上, 对 $y \geqslant \arcsin \frac{\pi}{4}$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, 使得

$$\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi \leqslant y<\arcsin \frac{\pi}{4}+(n+1) \pi .$$

我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x &=\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi}^{\arcsin \frac{\pi}{4}+(k+1) \pi} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x+\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x \\
&=\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\arcsin \frac{\pi}{4}}^{\pi+\arcsin \frac{\pi}{4}} \frac{\cos (2 \sin x)}{x+k \pi} d x+\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x \\
&=\sum_{k=0}^{n-71}\left(\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin \frac{\pi}{4}} \frac{\cos (2 \sin x)}{x+k \pi} d x+\int_{\pi-\arcsin \frac{\pi}{4}}^{\pi+\arcsin \frac{\pi}{4}} \frac{\cos (2 \sin x)}{x+k \pi} d x\right)+\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin \frac{\pi}{4}} \frac{\cos (2 \sin x)}{\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi} d x+\int_{\pi-\arcsin \frac{\pi}{4}}^{\pi+\arcsin \frac{\pi}{4}} \frac{\cos (2 \sin x)}{\pi+\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi} d x\right)+\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x \\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{0.37 \cdots}{\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi}+\frac{1.07 \cdots}{\pi+\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi}\right)+\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x .
\end{aligned}$$

一方面,

$$\lim_{n \to \infty}\left|\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{y} \frac{\cos (2 \sin x)}{x} d x\right| \leqslant \lim_{n \to \infty}\left|\int_{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}^{\arcsin \frac{\pi}{4}+(n+1) \pi} \frac{1}{x} d x\right|=\lim_{n \to \infty} \ln \frac{\arcsin \frac{\pi}{4}+(n+1) \pi}{\arcsin \frac{\pi}{4}+n \pi}=0 .$$

另外一方面 $-\frac{0.37 \cdots}{\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi}+\frac{1.07 \cdots}{\pi+\arcsin \frac{\pi}{4}+k \pi}$ 同阶于 $\frac{1}{k}$, 因此原积分发散.

13. (13.) 注意到等式

$$(1+y+y^2)(1-y+y^2)=(1+y^2)^2-y^2=1+y^2+y^4,$$

我们有

$$(1+x+x^2) \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-x^{2^k}+x^{2^{k+1}}\right)=1+x^{2^n}+x^{2^{n+1}},$$

从而

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-x^{2^k}+x^{2^{k+1}}\right)=\lim_{n \to \infty} \frac{1+x^{2^n}+x^{2^{n+1}}}{1+x+x^2}=\frac{1}{1+x+x^2} .$$

这就给出了

$$\int_{-1}^{1} \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-x^{2^k}+x^{2^{k+1}}\right) d x=\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x+x^2} d x=\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}} .$$

14. (14.) 注意到

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+a)-f(x)] d x &=\lim_{X \to+\infty, Y \to-\infty} \int_{Y}^{X}[f(x+a)-f(x)] d x \\
&=\lim_{X \to+\infty, Y \to-\infty}\left[\int_{Y}^{X} f(x+a) d x-\int_{Y}^{X} f(x) d x\right] \\
&=\lim_{X \to+\infty, Y \to-\infty}\left[\int_{Y+a}^{X+a} f(x) d x-\int_{Y}^{X} f(x) d x\right] \\
&=\lim_{X \to+\infty, Y \to-\infty}\left[\int_{X}^{X+a} f(x) d x-\int_{Y}^{Y+a} f(x) d x\right] \\
&=(A-B) a,
\end{aligned}$$

这里最后一个等号用到了

$$\lim_{X \to+\infty} f(x)=A, \lim_{Y \to-\infty} f(x)=B .$$

细节是平凡的且反复出现, 读者可自行完成.

15. (15.) 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\, e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T f(t+kT)\, e^{-s(t+kT)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \int_0^T f(t)\, e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-kT}} \int_0^T f(t)\, e^{-st} dt.\end{aligned}$$

16. (16.) 一方面

$$\begin{aligned}&\int_y^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln\left(e^x - 1\right) - x\right] |_y^{\infty} = -\ln\left(1 - e^{-y}\right) \\ &= -\ln\left(y + O\left(y^2\right)\right) = -\ln y - \ln\left(1 + O(y)\right) = -\ln y + O(y), y \to 0^+.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x &= \int_y^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x - \int_y^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \ln \frac{1}{y} - \int_y^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \ln \frac{1}{y} - \left(\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x - \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x\right) + o(1), y \to 0^+.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x - \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x.$$

现在

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x - \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x - \lim_{L \to +\infty} \int_1^L \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to 0^+} \left(-\left(1-e^{-t}\right) \ln t - \int_t^1 e^{-x} \ln x \mathrm{d}x\right) - \lim_{L \to +\infty} \left(e^{-L} \ln L + \int_1^L e^{-x} \ln x \mathrm{d}x\right) \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \mathrm{d}x = -\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathrm{d}x = -\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 (1-x)^n \ln(nx) \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{结论18.1.5}}{=} -\lim_{n \to \infty} n \ln n \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{d}x + \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = -\lim_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \gamma,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自例8.6.

17. (17.) 直接计算有

$$\begin{aligned}B_n - nB_{n-1} &= \int_0^1 \left[x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)) - nx(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-2))\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-2)) \cdot (x-1)\right] \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{区间再现14.1}}{=} \int_0^1 (1-x)(2-x)(3-x)\cdots(n-1-x)(-x) \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \int_0^1 x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-(n-1)) \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n A_n.\end{aligned}$$

因此我们得到了

$$A_n = (-1)^n \left(B_n - nB_{n-1}\right), n \geqslant 2.$$

注意到

$$\frac{(-1)^n A_n}{n!} = \frac{1}{n!} B_n - \frac{1}{(n-1)!} B_{n-1}, n = 2, 3, \cdots,$$

我们对 $m \geqslant 2$ 就有

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{(-1)^n A_n}{n!} = \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{n!} B_n - \frac{1}{(n-1)!} B_{n-1} \right) = \frac{B_m}{m!} - B_1 \Rightarrow B_m = m! \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{m} \frac{(-1)^n A_n}{n!} \right).$$

写成更好看的形式就有

$$B_n = n! \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j A_j}{j!} \right), n = 1, 2, \cdots.$$

18. (18.) 定义

$$f(x) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n}, s_{2n+2})(x)}}{(2n+3)!}, g(x) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n+1}, s_{2n+3})(x)}}{(2n+4)!}, x \in [0, +\infty),$$

这里

$$s_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} k!, n \in \mathbb{N}_0.$$

显然 f, g 定义的级数一致收敛且 f, g 单调递减. 又

$$\int_0^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n}, s_{2n+2})(x)}}{(2n+3)!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{s_{2n}}^{s_{2n+2}} \frac{1}{(2n+3)!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!} = +\infty,$$

以及

$$\int_0^{\infty} g(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n+1}, s_{2n+3})(x)}}{(2n+4)!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{s_{2n+1}}^{s_{2n+3}} \frac{1}{(2n+4)!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)! + (2n+3)!}{(2n+4)!} = +\infty.$$

但是现在

$$\begin{aligned}
\int_{s_3}^{\infty} \min\{f(x), g(x)\} \, \mathrm{d}x &= \int_{s_3}^{\infty} \min\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n}, s_{2n+2})(x)}}{(2n+3)!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n+1}, s_{2n+3})(x)}}{(2n+4)!} \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{s_{2m+1}}^{s_{2m+2}} \min\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n}, s_{2n+2})(x)}}{(2n+3)!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_{[s_{2n+1}, s_{2n+3})(x)}}{(2n+4)!} \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{s_{2m+1}}^{s_{2m+2}} \min\left\{ \frac{1}{(2m+3)!}, \frac{1}{(2m+4)!} \right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{s_{2m+1}}^{s_{2m+2}} \frac{1}{(2m+4)!} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+2)!}{(2m+4)!} < \infty.
\end{aligned}$$

19. (19.) 一方面

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2-x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant 1, y \geqslant 0} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{16} + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leqslant 2, x, y \geqslant 0} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{(1+r^2\cos^2\theta)(1+r^2\sin^2\theta)} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\pi r}{(r^2+2)\sqrt{r^2+1}} \mathrm{d}r = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

换言之, 如果我们记

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J=\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

那么

$$I-J=\frac{\pi^2}{16}, I+J=\frac{\pi^2}{12}.$$

于是我们得到

$$I=\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2-x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi^2}{12}\right)=\frac{7\pi^2}{96}.$$

20. (20.) 直接计算有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x+|\cos x|}\mathrm{d}x\overset{\text{区间再现14.1}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-x+x)\sin x}{\sin x+|\cos x|}\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

21. (21.) 取 $A\in(0,1)$ 使得 $f(x)>0,\forall x\in(0,A]$. 注意到 $\min\{f(x),n\}$ 是关于 n 在 $x\in(0,A]$ 的非负递增函数, 因此由 Levi 定理[30]我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^A\min\{f(x),n\}\mathrm{d}x=\int_0^A\lim_{n\to\infty}\min\{f(x),n\}\mathrm{d}x=\int_0^A f(x)\mathrm{d}x,$$

这就完成了证明.

22. (22.) 由含参积分求导公式含参积分求导公式, 注意到

$$f(0)=1, f'(t)=\int_{-t}^0\mathrm{d}y\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{-y}^t f(x+y)\mathrm{d}x+e^t=\int_{-t}^0 f(t+y)\mathrm{d}y+e^t,$$

于是

$$f'(t)=\int_0^t f(y)\mathrm{d}y+e^t\Rightarrow f''(t)=f(t)+e^t, f'(0)=1.$$

解微分方程得

$$f(t)=\frac{1}{4}e^{-t}\left[1+e^{2t}(2t+3)\right], t\in\mathbb{R}.$$

23. (23.) 考虑

$$F(s)\triangleq\int_0^{\pi}\ln(1+s\cos\theta)\mathrm{d}\theta, |s|<1,$$

则利用区间再现14.1有

$$\begin{aligned}F'(s)&=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{1+s\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\frac{1}{1+s\cos\theta}-\frac{1}{1-s\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\&=-2s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{1-s^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=-2s\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta-s^2)}\mathrm{d}\tan\theta\\&=-2s\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+t^2-s^2)}\mathrm{d}t=-\frac{\pi\left(1-\sqrt{1-s^2}\right)}{s\sqrt{1-s^2}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}F(s)&=F(0)+\int_0^s F'(t)\mathrm{d}t=-\pi\int_0^s\frac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)}{t\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=-\frac{\pi}{2}\int_0^{s^2}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-s^2}}{2}\right).\end{aligned}$$

[30]在发散的情况也对.

24. (24.) 定义

$$\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz},|z|<1.$$

习题23.的等式左右都是复平面单位圆上的解析函数, 因此在整个单位圆上恒等. 注意到本题要证等式左右都是关于 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 实解析函数, 所以只需在 a,b 合适的范围计算即可. 于是运用习题23.就有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \arctan\left(a+b\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta&=\frac{1}{2i}\int_0^\pi\ln\left(\frac{1+ai+bi\cos\theta}{1-ai-bi\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2i}\left(\pi\ln\frac{1+ai}{1-ai}+\int_0^\pi\ln\left(\frac{1+\frac{bi}{1+ai}\cos\theta}{1-\frac{bi}{1-ai}\cos\theta}\right)\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2i}\left(\pi\ln\frac{1+ai}{1-ai}+\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{bi}{1+ai}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{bi}{1-ai}\right)^2}}\right)\right)\\&=\frac{\pi}{2i}\ln\left(\frac{1+ai+\sqrt{(1+ai)^2+b^2}}{1-ai+\sqrt{(1-ai)^2+b^2}}\right)\\&=\Re\left(\frac{\pi}{2i}\ln\left(\frac{1+ai+\sqrt{(1+ai)^2+b^2}}{1-ai+\sqrt{(1-ai)^2+b^2}}\right)\right)\\&=\frac{\pi}{2}\Im\left(\ln\left(\frac{1+ai+\sqrt{(1+ai)^2+b^2}}{1-ai+\sqrt{(1-ai)^2+b^2}}\right)\right)\\&=\frac{\pi}{2}\arg\left(1+ai+\sqrt{(1+ai)^2+b^2}\right)\\&\quad-\frac{\pi}{2}\arg\left(1-ai+\sqrt{(1-ai)^2+b^2}\right)\\&=\pi\arg\left(1+ai+\sqrt{(1+ai)^2+b^2}\right).\end{aligned}$$

特别的, 当 $a\in(0,1),b>0,4a^2-b^2=\frac{4}{3}$, 我们有

$$\pi\arg\left(1+ai+\sqrt{(1+ai)^2+b^2}\right)=\pi\arg\left[\left(1+\sqrt{3}a\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right]=\frac{\pi^2}{6}.$$

25. (25.) 利用第一类曲面积分的参数方程计算方法20.4知

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\sin x\sin y\right)\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1,\text{第一象限}}\sin y\mathrm{d}S\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cdot\sin\cos\psi\mathrm{d}\psi=\frac{\pi}{2}\left(1-\cos 1\right).\end{aligned}$$

26. (26.) 直接计算有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin x\cdot\sin\left(x+y\right)}{x\left(x+y\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\overset{u=x+y}{=}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^\infty\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\&=-\int_0^\infty\left(\int_x^\infty\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\left(\int_x^\infty\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

27. (27.) 对 $a>0$, 一方面, 注意到

$$\int_0^\infty\frac{\sin x\cos\left(ax\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin\left(x+ax\right)+\sin\left(x-ax\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\tag{30.73}$$

另外一方面, 由傅汝兰尼积分14.2我们有

$$\int_0^\infty\frac{\sin x\sin\left(ax\right)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos\left(x+ax\right)-\cos\left(x-ax\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}.\tag{30.74}$$

现在定义

$$F(a) \triangleq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x\cdot \sin y\cdot \sin\left[a\left(x+y\right)\right]}{xy\left(x+y\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, a\geqslant 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x\cdot \sin y\cdot \cos\left[a\left(x+y\right)\right]}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x\cdot \sin y\cdot \cos\left(ax\right)\cos\left(ay\right)}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad -\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\sin x\cdot \sin y\cdot \sin\left(ax\right)\sin\left(ay\right)}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \left(\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\left(ax\right)}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\sin\left(ax\right)}{x}\mathrm{d}x\right)^2\\
&\overset{(30.73),(30.74)}{=} \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+a}{1-a}.
\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}
F(1) &= F(0)+\int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\int_0^1\ln^2\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x \overset{u=\frac{1-x}{1+x}}{=} \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2 u}{\left(1+u\right)^2}\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-1\right)^n u^{n-1}\cdot\ln^2 u\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-1\right)^n\int_0^1 u^{n-1}\ln^2 u\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-1\right)^n\int_{\infty}^0 e^{-(n-1)y}y^2\mathrm{d}e^{-y}\\
&= \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

28. (28.) 注意到

$$\begin{aligned}
\ln 3\cdot e^{\frac{4}{3}} &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(\ln x\cdot e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\right)'\mathrm{d}x\\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{x}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\ln x e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x-2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\ln x\cdot e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{x^3}\mathrm{d}x\\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{x}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\ln x e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x-2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\frac{\ln\frac{1}{x}\cdot e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x^3}}\mathrm{d}x\\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{x}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\ln x e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\ln x e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&= 4\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{4x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\ln x e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

我们有

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(x\ln x+\frac{1}{4x}\right)e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\ln 3}{4}e^{\frac{4}{3}}.$$

29. (29.) 注意到下凸函数导函数单调递增, 所以当 x 充分大必有 f 导数不变号, 因此 x 充分大时 f 单调, 所以结

合 f 有界知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 取

$$f(x)=\int_0^x\left(-\frac{1}{(y+1)^2\ln(y+2)}\right)\mathrm{d}y,x\geqslant 0,$$

则

$$\int_0^\infty xf'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^\infty\frac{x}{(x+1)^2\ln(x+2)}\mathrm{d}x=-\infty.$$

取 $f(x)=e^{-x},x\geqslant 0$, 则

$$\int_0^\infty xf'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x>-\infty.$$

故不一定收敛或者发散.

30. (30.) 本题虽然不难, 解答来自 Mse, 但我直接抄的八一考研竞赛数学.

不妨设 $a,b>0$, 换元得

$$I(a,b)=\int_0^\infty\left[\frac{\ln\left(1+b^2t^2\right)\ln\left(1+a^2t^2\right)}{t^2}\right]\mathrm{d}t.$$

然后求导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}I(a,b)&=4ab\int_0^\infty\frac{t^2}{\left(1+a^2t^2\right)\left(1+b^2t^2\right)}\mathrm{d}t\\&=\frac{4ab}{a^2-b^2}\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{1+b^2t^2}-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{1+a^2t^2}\right)\\&=\frac{4a}{a^2-b^2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{4b}{a^2-b^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{a+b}.\end{aligned}$$

注意到

$$I(0,b)=I(0,a)=\frac{\partial}{\partial b}I(0,b)=0,$$

现在我们有

$$\frac{\partial}{\partial b}I(a,b)=\int_0^a\frac{2\pi}{t+b}\mathrm{d}t=2\pi\ln\left(1+\frac{a}{b}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}I(a,b)&=2\pi\int_0^b\ln\left(1+\frac{a}{t}\right)\mathrm{d}t=2\pi\left[b\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)+\int_0^b\frac{a}{a+t}\mathrm{d}t\right]\\&=2\pi\left[b\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)+a\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]\\&=2\pi\left[(a+b)\ln(a+b)-a\ln a-b\ln b\right].\end{aligned}$$

31. (31.) 直接计算有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n\left|\left|\frac{n}{x}\right|\right|\mathrm{d}x\overset{x=\frac{n}{y}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{||y||}{y^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{||y||}{y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+\frac{1}{2}}\frac{||y||}{y^2}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\frac{||y||}{y^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+\frac{1}{2}}\frac{y-k}{y^2}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\frac{k+1-y}{y^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2k+1}-\ln k+\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{k\left(\ln 4-2\right)-2+\ln 2}{2k+1}-\ln\left(k+1\right)+\ln\left(2k+1\right)-1\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{(2k+1)^2}{2k\left(2k+2\right)}=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k+2}\right)\right]$$

$$\overset{\text{Waliis 公式9.18}}{=}\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{\sqrt{\pi\left(n-1\right)}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\right)\right]=\ln\frac{4}{\pi}.$$

32. (32.) 设 $F\left(a\right)\triangleq\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$, 然后有

$$F\left(0\right)=\int_0^{\infty}\frac{\ln 1}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=0,F'\left(a\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+ax\right)\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x,a>0.$$

设

$$\frac{1}{\left(1+ax\right)\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{1+ax}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

我们有

$$A=\lim_{x\to-\frac{1}{a}}\frac{1}{1+x^2}=\frac{a^2}{a^2+1}.$$

然后对比系数得

$$A+C=1,A+aB=0\Rightarrow B=-\frac{a}{1+a^2},C=\frac{1}{1+a^2}.$$

现在

$$F'\left(a\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+ax\right)\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\int_0^{X}\frac{1}{\left(1+ax\right)\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{A}{a}\ln\left(1+aX\right)+\frac{B}{2}\ln\left(1+X^2\right)+C\arctan X\right]$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{a}{1+a^2}\ln\left(1+aX\right)-\frac{a}{2\left(1+a^2\right)}\ln\left(1+X^2\right)\right]+\frac{\pi}{2\left(1+a^2\right)}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{a}{1+a^2}\ln\frac{1+aX}{\sqrt{1+X^2}}+\frac{\pi}{2\left(1+a^2\right)}\right]=\frac{a\ln a}{1+a^2}+\frac{\pi}{2\left(1+a^2\right)}.$$

于是

$$F\left(a\right)=F\left(0\right)+\int_0^{a}F'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{a}\left[\frac{x\ln x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2\left(1+x^2\right)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{a}\ln x\mathrm{d}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{\pi}{2}\arctan a$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{a}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\mathrm{d}x+\frac{\ln\left(1+a^2\right)}{2}+\frac{\pi}{2}\arctan a.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\mathrm{d}x+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{nx}\mathrm{d}x+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}\mathrm{d}x+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\\&=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\\&=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\\&=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{7\pi^2}{48}+\frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

33. (33.) 设

$$f(x)\triangleq\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{(2k-1)^2}, & x\in\left[(2k-1)^2,(2k)^2-1\right],k\in\mathbb{N}\\ \left(\frac{1}{(2k)^2}-\frac{1}{(2k-1)^2}\right)\left(x-(2k)^2\right)+\frac{1}{(2k)^2}, & x\in\left((2k)^2-1,(2k)^2\right),k\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{x^2}, & x\in\left[(2k)^2,(2k+1)^2\right),k\in\mathbb{N}\end{cases},$$

以及

$$g(x)\triangleq\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{(2k)^2}, & x\in\left[(2k)^2,(2k+1)^2-1\right],k\in\mathbb{N}\\ \left(\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(2k)^2}\right)\left(x-(2k+1)^2\right)+\frac{1}{(2k+1)^2}, & x\in\left((2k+1)^2-1,(2k+1)^2\right),k\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{x^2}, & x\in\left[(2k-1)^2,(2k)^2\right),k\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

现在

$$\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{x^2}, & x\in(1,+\infty)\end{cases},$$

即 $\int_0^{\infty}\min\{f(x),g(x)\}\mathrm{d}x$ 不一定发散.

34. (34.) 一方面

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}|F(x)|\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{x}f(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\left|\int_x^{\infty}f(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}|f(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}|f(y)|\mathrm{d}y\int_0^{y}1\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}y|f(y)|\mathrm{d}y<\infty.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}|F(x)|\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{0}\left|\int_{-\infty}^{x}f(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{x}|f(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{0}|f(y)|\mathrm{d}y\int_y^{0}1\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}-y|f(y)|\mathrm{d}y<\infty.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}|F(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}|F(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

注意到

$$0\leqslant\lim_{x\to-\infty}|xF(x)|=\lim_{x\to-\infty}\left|x\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant-\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x}t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t=0;$$
$$0\leqslant\lim_{x\to+\infty}|xF(x)|=\lim_{x\to+\infty}\left|x\int_{x}^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{\infty}t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t=0,$$

我们有

$$\lim_{x\to\infty}xF(x)=0.$$

现在分部积分得

$$\int_{B}^{A}tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_{B}^{A}tf(t)\,\mathrm{d}t=AF(A)-BF(B)-\int_{B}^{A}F(t)\,\mathrm{d}t,$$

我们让 $A\to+\infty,B\to-\infty$ 就有(14.31)成立.

35. (35.) 首先由 f 单调有界知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 因为

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(n+\frac{1}{x^2}\right)f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{n\alpha-\frac{1}{\alpha}}^{n\beta-\frac{1}{\beta}}f'(t)\,\mathrm{d}t=f\left(n\beta-\frac{1}{\beta}\right)-f\left(n\alpha-\frac{1}{\alpha}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left(n+\frac{1}{x^2}\right)f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0.$$

由积分中值定理11.3得

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(n+\frac{1}{x^2}\right)f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(n+\frac{1}{\theta_n^2}\right)\int_{\alpha}^{\beta}f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,\theta_n\in(\alpha,\beta).$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{\theta_n^2}\right)=+\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0.$$

36. (36.) 我们断言 $\arctan\frac{2^{\sin x}+2^{-\cos x}}{1-2^{\sin x}2^{-\cos x}}$ 关于 $\frac{\pi}{4}$ 中心对称, 从而

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\arctan\frac{2^{\sin x}+2^{-\cos x}}{1-2^{\sin x}2^{-\cos x}}\mathrm{d}x=0.$$

事实上对

$$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],x_2\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],x_1+x_2=\frac{\pi}{2},$$

我们有

$$\begin{aligned}\arctan\frac{2^{\sin x_2}+2^{-\cos x_2}}{1-2^{\sin x_2}2^{-\cos x_2}}&=\arctan\frac{2^{\cos x_1}+2^{-\sin x_1}}{1-2^{\cos x_1}2^{-\sin x_1}}\\&\overset{\text{分子分母同除以}2^{\cos x_1}\cdot 2^{\sin x_1}}{=}\arctan\frac{2^{-\cos x_1}+2^{\sin x_1}}{2^{-\cos x_1}2^{\sin x_1}-1}\\&=-\arctan\frac{2^{\sin x_1}+2^{-\cos x_1}}{1-2^{\sin x_1}2^{-\cos x_1}},\end{aligned}$$

这就证明了中心对称性.

37. (37.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right\rfloor\right)\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\lfloor y\rfloor - \lfloor y-\frac{1}{2}\rfloor}{y^2}\mathrm{d}y\\
&= \sum_{k=1}^\infty \int_k^{\frac{1}{2}+k} \frac{\lfloor y\rfloor - \lfloor y-\frac{1}{2}\rfloor}{y^2}\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{2}+k}^{1+k} \frac{\lfloor y\rfloor - \lfloor y-\frac{1}{2}\rfloor}{y^2}\mathrm{d}y\\
&= \sum_{k=1}^\infty \int_k^{\frac{1}{2}+k} \frac{k-(k-1)}{y^2}\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{2}+k}^{1+k} \frac{k-k}{y^2}\mathrm{d}y\\
&= \sum_{k=1}^\infty \int_k^{\frac{1}{2}+k} \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\frac{1}{2}+k}\right) = 2-2\ln 2,
\end{aligned}$$

这里

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\frac{1}{2}+k}\right)$$

的计算可以参考例题8.14.

38. (38.) 首先

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+2^{\cos x})(1+2^{\sin x})}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+2^{\cos x})(1+2^{-\sin x})}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2^{\sin x}+1}{(1+2^{\cos x})(1+2^{\sin x})}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+2^{\cos x}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+2^{\cos x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2^{\cos x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+2^{-\cos x}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1+2^{-\cos x}}+\frac{1}{1+2^{\cos x}}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1}{(1+2^{\cos x})(1+2^{\sin x})}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1+2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)\left(1+2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)}\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\mathrm{d}x = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+2^{\sin x})(1+2^{\cos x})}\mathrm{d}x = \pi.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\int_{\frac{25}{4}\pi}^{\frac{53}{4}\pi} \frac{1}{(1+2^{\cos x})(1+2^{\sin x})}\mathrm{d}x = \frac{7}{4}\pi.$$

39. (39.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}\\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{(x+n\pi)\,\mathrm{d}x}{1+(x+n\pi)^6\sin^2 x} \leqslant \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{(\pi+n\pi)\,\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\\
&= \pi\sum_{n=0}^\infty (n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x}{\frac{1}{\sin^2 x}+(n\pi)^6} = -2\pi\sum_{n=0}^\infty (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\cot x}{\cot^2 x+1+(n\pi)^6}\\
&= 2\pi\sum_{n=0}^\infty (n+1)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1+(n\pi)^6} = \pi^2\sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} < \infty.
\end{aligned}$$

40. (40.) **Case 1** 当 $k=1$, 此时

$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{1}{x^{1-\alpha}},x\to0^{+};$$
$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{(\pi-x)^{\alpha-1}}{\left(\frac{(x-\pi)^2}{2}\right)^{\alpha}}=2^{\alpha}\frac{1}{(\pi-x)^{\alpha+1}},x\to\pi^{-},$$

即不能同时保证两个端点附近积分收敛, 因此原积分发散.

Case 2 当 $k=-1$, 此时

$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1-\cos x|^{\alpha}}\sim2^{\alpha}\frac{1}{x^{\alpha+1}},x\to0^{+};$$
$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1-\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{1}{(\pi-x)^{1-\alpha}},x\to\pi^{-},$$

即不能同时保证两个端点附近积分收敛, 因此原积分发散.

Case 3 当 $|k|<1$, 此时

$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+k\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{1}{|1+k|^{\alpha}}\cdot\frac{1}{x^{1-\alpha}},x\to0^{+};$$
$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+k\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{1}{|1-k|^{\alpha}}\cdot\frac{1}{(\pi-x)^{1-\alpha}},x\to\pi^{-},$$

即此时原积分当且仅当 $\alpha>0$ 收敛.

Case 4 当 $|k|>1$, 此时

$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+k\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{1}{|1+k|^{\alpha}}\cdot\frac{1}{x^{1-\alpha}},x\to0^{+};$$
$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+k\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{1}{|1-k|^{\alpha}}\cdot\frac{1}{(\pi-x)^{1-\alpha}},x\to\pi^{-};$$
$$\frac{\sin^{\alpha-1}x}{|1+k\cos x|^{\alpha}}\sim\frac{\sin^{\alpha-1}\left(\arccos\left(-\frac{1}{k}\right)\right)}{\left|\sqrt{k^2-1}\right|^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\left|x-\arccos\left(-\frac{1}{k}\right)\right|^{\alpha}},x\to\arccos\left(-\frac{1}{k}\right),$$

即此时原积分当且仅当 $0<\alpha<1$ 收敛.

41. (41.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{\ln(x^4+4)-\ln(x^2+4)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln\left(x^4+4\right)\mathrm{d}\ln x - \int_1^2 \ln\left(x^2+4\right)\mathrm{d}\ln x \\
&= \ln 20\cdot\ln 2 - \ln 8\cdot\ln 2 - \int_1^2 \frac{4x^3\ln x}{x^4+4}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{2x\ln x}{x^2+4}\mathrm{d}x \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{\ln x^4}{x^4+4}\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\ln x^2}{x^2+4}\mathrm{d}x^2 \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \frac{1}{4}\int_1^{16} \frac{\ln t}{t+4}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{\ln t}{t+4}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t - \int_1^4 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln\left(4\frac{1}{t}\right)}{4\frac{1}{t}+4}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln(4t)}{4t+4}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln 4}{4t+4t^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln t}{4t+4t^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln 4+\ln t}{4t+4}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln 4}{4t+4t^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln 4}{4t+4}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{(t+1)\ln t}{4t+4t^2}\mathrm{d}t \\
&= \ln\frac{5}{2}\cdot\ln 2 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln 4}{4t+4t^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln 4}{4t+4}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\ln t}{4t}\mathrm{d}t = \frac{\ln^2 2}{2}.
\end{aligned}$$

42. (42.) 一方面

$$g'(t) = -2t\int_0^1 e^{-t^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x = -2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\mathrm{d}x,$$

另外一方面

$$f'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=t\cdot x}{=} 2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\mathrm{d}x.$$

于是

$$f'(t)+g'(t)=0,$$

即

$$f(t)+g(t) = f(0)+g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

又

$$0 \leqslant g(t) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}e^{-t^2}, \forall t \geqslant 0,$$

我们有

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

43. (43.) 注意到 $\frac{1}{\sqrt{x}}\downarrow 0$,

$$\left|\int_1^A \frac{f'(x)}{\left[1+f^2(x)\right]}\mathrm{d}x\right| = \left|\arctan f(A) - \arctan f(1)\right| \leqslant \pi.$$

由 A-D 判别法14.4, 我们知道

$$\int_1^\infty \frac{f'(x)}{\left[1+f^2(x)\right]\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

收敛.

44. (44.) 首先如果 $\int_0^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x$ 收敛, 那么结合 $\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}$ 单调递减以及例题14.52, 我们知道

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\right]=\lim_{x\to+\infty}\min\{xf(x),1\}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0.$$

现在存在 $X>0$ 使得

$$xf(x)<1,\forall x\geqslant X.$$

显然 $f\geqslant 0$, 于是

$$\int_X^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x=\int_X^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了 $\int_X^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x$ 发散.

45. (45.) 考虑

$$f(x)=\begin{cases}a_n, & x\in\left[\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j a_j},\sum\limits_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2^j a_j}\right),n=1,2,\cdots,\\ 1, & \text{其他}\end{cases},a_{2k}=2^{2^k},a_{2k+1}=2^{-2^k},k=0,1,2,\cdots,$$

我们有

$$\int_{\frac{1}{2a_1}}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2^j a_j}}^{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j a_j}}a_n\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty.$$

若 $p>1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2a_1}}^{\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2^j a_j}}^{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j a_j}}a_n^p\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sum\limits_{j=1}^{2n-1}\frac{1}{2^j a_j}}^{\sum\limits_{j=1}^{2n}\frac{1}{2^j a_j}}a_{2n}^p\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}\cdot 2^{2^n}}2^{2^n\cdot p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2^n\cdot(p-1)}}{2^{2n}}=+\infty.\end{aligned}$$

若 $0<p<1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2a_1}}^{\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2^j a_j}}^{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j a_j}}a_n^p\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\sum\limits_{j=1}^{2n}\frac{1}{2^j a_j}}^{\sum\limits_{j=1}^{2n+1}\frac{1}{2^j a_j}}a_{2n+1}^p\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}\cdot 2^{-2^n}}2^{-2^n\cdot p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2^n\cdot(1-p)}}{2^{2n}}=+\infty.\end{aligned}$$

这就完成了构造.

46. (46.) 首先

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\cos(2jt)=\sum_{j=1}^{n-1}\cos(2jt+j\pi)\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\cos(2jt+j\pi)\right]\\&\overset{\text{积化和差}}{=}\frac{1}{2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sin\left((2j+1)t+\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\right)-\sin\left((2j-1)t+\left(j-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right]\\&=\frac{1}{2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\left[\sin\left((2n-1)t+\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2\cos t}\left[(-1)^{n-1}\cos((2n-1)t)-\cos t\right]=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{\cos((2n-1)t)}{\cos t}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

然后我们有

$$\begin{aligned}&-2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}\cos(2jt)-\cos(2nt)-(-1)^n\\&=\frac{\cos((2n-1)t)}{\cos t}-\cos(2nt)\\&=\frac{\cos(2nt)\cos t}{\cos t}+\sin(2nt)\frac{\sin t}{\cos t}-\cos(2nt)\\&=\sin(2nt)\cdot\tan t.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nt)\cdot\tan t\mathrm{d}t&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}\cos(2jt)-\cos(2nt)-(-1)^n\right]\mathrm{d}t\\&=-2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2jt)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nt)\,\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}(-1)^{n-1}=\frac{\pi}{2}(-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

47. (47.) 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x\right]=f(a+T)-f(a)$$

即 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为常值函数等价于

$$f(a+T)-f(a)=0,\forall a\in\mathbb{R}.$$

于是我们知道 f 以 T 为周期的充要条件是 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $a\in\mathbb{R}$ 为常数.

♠ 现在我们关心 f 只是内闭黎曼可积的情况, 此时不再可以变限求导.

事实上当 f 周期为 T, 对 $a\in\mathbb{R}$ 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^0f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^Tf(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^0f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^Tf(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^af(x+T)\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^0f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^Tf(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^af(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^Tf(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是常值函数.

反过来, 若 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是常值函数, 事实上我们并不知道是否 f 为周期 T 函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1&x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\0,&x=0\end{cases}$$

就是反例.

48. (48.) 设

$$I_n\triangleq\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(nx)}{1-\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2x}\mathrm{d}x,$$

我们由式(9.61)得

$$I_{n+1}-I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2((n+1)x)-\sin^2(nx)}{\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\,\mathrm{d}x=0,\forall n\in\mathbb{N},$$

我们知道

$$I_{n+1}-I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\Rightarrow I_n=n\pi,n=1,2,\cdots.$$

49. (49.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sinh x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{1}{\sinh x} + \sqrt{1+\frac{1}{\sinh^2 x}}\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{t=e^{-x}}{=} \int_0^1 \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-2}}{2n-1}\right)\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\int_0^1 t^{2n-2}\mathrm{d}t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \\
&= 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right] = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

50. (50.) 注意到 $x \neq 1$ 时有

$$1 - 2x\cos\alpha + x^2 > 0, \forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

再注意到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\ln\left(1 - 2x\cos\alpha + x^2\right) = \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(1-2x+x^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln|x-1|.
\end{aligned}$$

若 $x = 1$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha}{1-2\cos\alpha+1}\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}\alpha = +\infty,$$

因此我们完成了计算.

51. (51.) 显然我们只需证明不定积分的递推, 后面两个递推自然得到.
设 $u \triangleq \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}$, 然后注意到三角函数恒等式

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sin a}{2\sin^2\left(\frac{x+a}{2}\right)}, u^2 - 2\cos a\cdot u + 1 = \frac{\sin^2 a}{\sin^2\left(\frac{x+a}{2}\right)} = 2\sin a\cdot\frac{du}{dx}.$$

于是对 $n \geqslant 2$ 得

$$\begin{aligned}
&F_n - 2\cos a\cdot F_{n-1} + F_{n-2} = \int \left(u^n - 2u^{n-1}\cos a + u^{n-2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int u^{n-2}\left(u^2 - 2u\cos a + 1\right)\mathrm{d}x = 2\sin a\cdot\int u^{n-2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sin a}{n-1}u^{n-1} = \frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

我们完成了计算.

52. (52.) 容易看到

$$F_1'(t) = \sqrt{\pi}e^{-t^2}, F_2'(t) = \int_0^{\infty}\cos(tx)\,e^{-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}F_2'(t)&=\int_0^{\infty}\cos(tx)\,e^{-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\,e^{-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Re\left(e^{itx-\frac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{x^2}{4}}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\Re\left(e^{-t^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x}{2}-it\right)^2}\mathrm{d}x\right)=\Re\left(e^{-t^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\sqrt{\pi}e^{-t^2}=F_1'(t).\end{aligned}$$

结合 $F_1(0)=F_2(0)=0$ 得

$$F_1(t)=F_2(t),\forall t\in\mathbb{R}.$$

53. (53.) 对 $f\in C[1,+\infty)\bigcap C^1(1,+\infty)$, 首先均值不等式得

$$2\int_1^{\infty}|f'(x)f(x)|\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{\infty}\left(|f'(x)|^2+|f(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty.$$

然后对 $y\geqslant 1$ 分部积分得

$$\begin{aligned}&2\int_1^{y}f'(x)f(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x=f^2(y)\,e^{-\frac{y^2}{2a^2}}-f^2(1)\,e^{-\frac{1}{2a^2}}+\frac{1}{a^2}\int_1^{y}xf^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\&\geqslant -f^2(1)\,e^{-\frac{1}{2a^2}}+\frac{1}{a^2}\int_1^{y}xf^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\int_1^y xf^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[1,+\infty)$ 递增, 于是我们有

$$\frac{1}{a^2}\int_1^{\infty}xf^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty.$$

从而我们有

$$\lim_{y\to+\infty}f^2(y)\,e^{-\frac{y^2}{2a^2}}$$

存在. 由 $\int_1^{\infty}xf^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty$ 和结论14.3.1得

$$\lim_{x\to+\infty}f^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)\,e^{-\frac{x^2}{4a^2}}=0.$$

对 $y\geqslant 1$ 得

$$0\leqslant\int_1^{y}\left(xf(x)-2a^2f'(x)\right)^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x,$$

即

$$4a^2\int_1^{y}xf(x)f'(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{y}x^2|f(x)|^2\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x+4a^4\int_1^{y}|f'(x)|^2\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x.$$

还能得

$$\begin{aligned}&2\int_1^{y}xf(x)f'(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x=yf^2(y)\,e^{-\frac{y^2}{2a^2}}-f^2(1)\,e^{-\frac{1}{2a^2}}-\int_1^{y}f^2(x)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\&\geqslant -f^2(1)\,e^{-\frac{1}{2a^2}}-\int_1^{y}f^2(x)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此我们有

$$-2a^2f^2(1)\,e^{-\frac{1}{2a^2}}+\int_1^{y}x^2f^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\leqslant 2a^2\int_1^{y}|f(x)|^2\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x+4a^4\int_1^{y}|f'(x)|^2\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x.$$

现在上述不等式右边积分收敛, 左边关于 y 递增, 因此

$$\int_1^{\infty}x^2f^2(x)\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty.$$

对 $y\geqslant 1$ 得

$$0\leqslant\int_1^{y}\left(x|f(x)|-2a^2|f'(x)|\right)^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x,$$

即

$$4a^2\int_1^y x\left|f\left(x\right)f'\left(x\right)\right|e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^y x^2\left|f\left(x\right)\right|^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x+4a^4\int_1^y\left|f'\left(x\right)\right|^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x.$$

于是我们知道

$$\int_1^\infty x\left|f\left(x\right)f'\left(x\right)\right|e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty.$$

现在

$$2\int_1^\infty xf\left(x\right)f'\left(x\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x=\lim_{y\to+\infty}\left(yf^2\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\right)-f^2\left(1\right)e^{-\frac{1}{2a^2}}-\int_1^\infty f^2\left(x\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x,$$

即 $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(yf^2\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\right)$ 存在. 由 $\int_1^\infty x^2\left|f\left(x\right)\right|^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty$ 和结论14.3.1得

$$\lim_{y\to+\infty}\left(yf^2\left(y\right)e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\right)=0.$$

因此我们完成了证明.

54. (54.) 由例题14.23可得

$$F\left(y\right)=2\int_0^\infty\frac{\sin\left(xy\right)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x,F'\left(y\right)=2\int_0^\infty\frac{\cos\left(xy\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi e^{-\left|y\right|}.$$

于是

$$F\left(y\right)=\int_0^y\pi e^{-\left|s\right|}\mathrm{d}s=\pi\mathrm{sgn}y\left(1-e^{-\left|y\right|}\right),\forall y\in\mathbb{R}.$$

55. (55.) 一方面

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left|\sin\left(x\left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor\right)\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^\infty\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\left|\sin\left(x\left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor\right)\right|\mathrm{d}x\\&=2\pi\sum_{n=0}^\infty\int_n^{n+1}\left|\sin\left(2\pi nx\right)\right|\mathrm{d}x=2\pi\sum_{n=0}^\infty\int_0^1\left|\sin\left(2\pi nx\right)\right|\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^\infty\frac{\int_0^{2\pi n}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x}{n}=2\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=+\infty.\end{aligned}$$

另外一方面, 对 $x\in\left[2\pi n,2\left(n+1\right)\pi\right),n\in\mathbb{N}_0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^x\sin\left(y\left\lfloor\frac{y}{2\pi}\right\rfloor\right)\mathrm{d}y&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\sin\left(y\left\lfloor\frac{y}{2\pi}\right\rfloor\right)\mathrm{d}y+\int_{2n\pi}^x\sin\left(y\left\lfloor\frac{y}{2\pi}\right\rfloor\right)\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\sin\left(ky\right)\mathrm{d}y+\int_{2n\pi}^x\sin\left(ny\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{2n\pi}^x\sin\left(ny\right)\mathrm{d}y=\frac{1-\cos\left(nx\right)}{n},\end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty\sin\left(y\left\lfloor\frac{y}{2\pi}\right\rfloor\right)\mathrm{d}y=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\sin\left(y\left\lfloor\frac{y}{2\pi}\right\rfloor\right)\mathrm{d}y=0,$$

因此原积分条件收敛.

56. (56.) 直接计算有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|H_n'\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x&=\sum_{j=0}^n\int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}}\left(\sum_{k=1}^j1+\sum_{k=j+1}^n\left(-1\right)\right)^2\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^n\int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}}\left(2j-n\right)^2\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^n\frac{\left(2j-n\right)^2}{n+1}=\frac{n\left(n+2\right)}{3}.\end{aligned}$$

57. (57.) 考虑傅立叶级数

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= -\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n};\\ \ln\sin x &= -\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{n},\end{aligned}\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right)$$

我们由三角函数正交性得

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cdot\ln\sin x\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}\right)\left(-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{n}\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos^2(2nx)}{n^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(2nx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\\ &=\frac{\pi}{2}\ln^2 2-\frac{\pi^3}{48},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\cos x\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{n}\right)^2\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(2nx)}{n^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(2nx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\ &=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi^3}{24}.\end{aligned}$$

现在就有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\ln x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\cdot\ln\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t\\ &=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\tan t\cdot\ln\cos t\mathrm{d}t\\ &=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\cdot\ln\cos t\mathrm{d}t+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\cos t\mathrm{d}t\\ &=2\left(\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi^3}{48}\right)=\frac{\pi^3}{8}.\end{aligned}$$

58. (58.) 对任何 $Y>X>0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_X^Y\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(X)}\int_X^Y[f(x)-f(x+1)]\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{f(X)}\left(\int_X^Y f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{X+1}^{Y+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &=\frac{1}{f(X)}\left(\int_X^{X+1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_Y^{Y+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &\geqslant\frac{f(X+1)-f(Y)}{f(X)}.\end{aligned}$$

若 $\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$0\leqslant\varlimsup_{X\to+\infty}\frac{f\left(X+1\right)}{f\left(X\right)}\leqslant\varlimsup_{X\to+\infty}\int_X^{\infty}\frac{f\left(x\right)-f\left(x+1\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)-f\left(x+1\right)}{f\left(x\right)}=1.$$

此时显然和 $\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x$ 收敛矛盾!, 因此我们证明了 $\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

30.8 数学类含参变量积分一致收敛性

1. (1.) 对 $\lambda_0\in\mathbb{R}$, 存在 $X>0$, 使得对任何 $x\geqslant X$ 都有

$$3x^2-|\lambda|>0,\forall\lambda\in\left[\lambda_0-1,\lambda_0+1\right].$$

于是

$$\int_X^{\infty}x\sin\left(x^3-\lambda x\right)\mathrm{d}x=-\int_X^{\infty}\frac{x}{3x^2-\lambda}\mathrm{d}\cos\left(x^3-\lambda x\right)=\frac{X\cos\left(X^3-\lambda X\right)}{3X^2-\lambda}-\int_X^{\infty}\frac{\left(\lambda+3x^2\right)\cos\left(x^3-\lambda x\right)}{\left(3x^2-\lambda\right)^2}\mathrm{d}x.$$

现在

$$\int_X^{\infty}\left|\frac{\left(\lambda+3x^2\right)\cos\left(x^3-\lambda x\right)}{\left(3x^2-\lambda\right)^2}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_X^{\infty}\frac{3x^2+\lambda}{\left(3x^2-\lambda\right)^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_X^{\infty}\frac{3x^2+\lambda_0+1}{\left(3x^2-\lambda_0-1\right)^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

即 $\int_X^{\infty}\frac{\left(\lambda+3x^2\right)\cos\left(x^3-\lambda x\right)}{\left(3x^2-\lambda\right)^2}\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in\left[\lambda_0-1,\lambda_0+1\right]$ 一致收敛, 因此 $\int_X^{\infty}\frac{\left(\lambda+3x^2\right)\cos\left(x^3-\lambda x\right)}{\left(3x^2-\lambda\right)^2}\mathrm{d}x$ 在 λ_0 连续, 从而 $\int_X^{\infty}x\sin\left(x^3-\lambda x\right)\mathrm{d}x$ 在 λ_0 连续. 常意积分 $\int_0^X x\sin\left(x^3-\lambda x\right)\mathrm{d}x$ 显然在 λ_0 连续, 因此 f 也在 λ_0 连续, 这就完成了证明.

2. (2.) 首先 $|e^{-\alpha x}|\leqslant 1$ 且固定 α 后单调. 又 $\int_0^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ 一致收敛, 因此原积分无论针对哪个奇点都在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 现在我们知道

$$\lim_{\alpha\to0+}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

3. (3.) 由

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)=\frac{1-3t^2}{\left(1+t^2\right)^3}$$

和

$$x+y\geqslant1,1-x+y\geqslant1,x+y\leqslant1-x+y,\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],y\in\left[1,+\infty\right)$$

得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left(\int_0^1\frac{\cos\left(\pi x\right)}{1+\left(x+y\right)^2}\mathrm{d}x\right)&=\int_0^1\frac{-2\left(x+y\right)\cos\left(\pi x\right)}{\left(1+\left(x+y\right)^2\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2\left(x+y\right)\cos\left(\pi x\right)}{\left(1+\left(x+y\right)^2\right)^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{-2\left(x+y\right)\cos\left(\pi x\right)}{\left(1+\left(x+y\right)^2\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x+y}{\left(1+\left(1-x+y\right)^2\right)^2}-\frac{x+y}{\left(1+\left(x+y\right)^2\right)^2}\right)2\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant0,\end{aligned}$$

即 $\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{1+(x+y)^2}\mathrm{d}x$ 在 $[1,+\infty)$ 递减且

$$\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{1+(x+y)^2}\mathrm{d}x \geqslant \lim_{y\to+\infty}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{1+(x+y)^2}\mathrm{d}x = 0.$$

考虑

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{\cos(\pi x+\pi n)}{1+(x+n)^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{1+(x+n)^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这是一个交错级数, 于是由交错级数不等式18.4得

$$\int_1^\infty \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

又

$$\int_1^\infty \frac{\cos(0x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x > 0,$$

因此由定理得 $f(t) = \int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[0,\pi]$ 至少有一个零点.

4. (4.) 对 $\alpha_0 \in (0,1)$, 当 $|\alpha-\alpha_0| < \min\left\{\frac{1-\alpha_0}{2}, \alpha_0\right\}$, 我们有

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{|\sin t|^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\alpha_0+\frac{1-\alpha_0}{2}}}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\frac{1+\alpha_0}{2}}}\mathrm{d}t < \infty,$$

即积分在这个区间一致收敛, 因此 f 在 α_0 连续. 现在由 α_0 任意性, 我们有 $f \in C(0,1)$.

5. (5.) 本题虽然也能分析一致收敛性来得到, 但我们想展示一个更强的技术. 对 $\alpha,\beta \in (0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}|g(\alpha)-g(\beta)| &= \left|\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{|t-\alpha|}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{|t-\beta|}}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sup_{(0,1)}|f| \cdot \int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{|t-\alpha|}} - \frac{1}{\sqrt{|t-\beta|}}\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{(0,1)}|f| \cdot \int_{-\infty}^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{|t-\alpha|}} - \frac{1}{\sqrt{|t-\beta|}}\right|\mathrm{d}t \\ &\overset{t=\alpha+(\alpha-\beta)s}{=} \sup_{(0,1)}|f| \cdot \sqrt{|\alpha-\beta|}\int_{-\infty}^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{|s|}} - \frac{1}{\sqrt{|s+1|}}\right|\mathrm{d}s \\ &= 4\sqrt{2}\cdot \sup_{(0,1)}|f| \cdot \sqrt{|\alpha-\beta|},\end{aligned}$$

这就证明了 $g \in C(0,1)$.

30.9 非数学类积分不等式

1. (1.) 取 $g(x) = \begin{cases} x^2, & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right] \\ -2x^2+2x-\frac{1}{3}, & x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \\ (1-x)^2, & x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases}$, 于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx \int_0^1 |g(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 f''(x)\,g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\,g''(x)\,dx\right)^2 = 4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2,$$

这里最后一个等号用到了 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx = 0$. 注意到 $\int_0^1 |g(x)|^2\,dx = \frac{11}{1215}$, 我们有

$$4860\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant 11\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx.$$

2. (2.) 设 $a \geqslant f(1)$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)-a|\,dx &= a-\int_0^1 f(x)\,dx\\ &\geqslant f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx\\ &\geqslant 2\int_{\frac12}^1 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\\ &=\int_{\frac12}^1 f(x)\,dx-\int_0^{\frac12} f(x)\,dx\\ &=\int_0^{\frac12}\left[f\left(\frac12\right)-f(x)\right]dx+\int_{\frac12}^1\left[f(x)-f\left(\frac12\right)\right]dx\\ &=\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac12\right)\right|dx.\end{aligned}$$

当 $a \leqslant f(0)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)-a|\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx-a\\ &\geqslant \int_0^1 f(x)\,dx-f(0)\\ &\geqslant \int_0^1 f(x)\,dx-2\int_0^{\frac12} f(x)\,dx\\ &=\int_{\frac12}^1 f(x)\,dx-\int_0^{\frac12} f(x)\,dx\\ &=\int_0^{\frac12}\left[f\left(\frac12\right)-f(x)\right]dx+\int_{\frac12}^1\left[f(x)-f\left(\frac12\right)\right]dx\\ &=\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac12\right)\right|dx.\end{aligned}$$

当 $f(0)<a<f(1)$, 由于 f 递增, 存在 $\theta\in[0,1]$, 使得

$$f(x)\leqslant a, \forall x\in[0,\theta], f(x)\geqslant a, \forall x\in[\theta,1].$$

当 $\theta\in\left[\frac12,1\right]$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)-a|\,dx &= \int_0^\theta [a-f(x)]\,dx+\int_\theta^1 [f(x)-a]\,dx\\ &=(2\theta-1)a-\int_0^\theta f(x)\,dx+\int_\theta^1 f(x)\,dx\\ &=2\int_{\frac12}^\theta a\,dx-\int_0^\theta f(x)\,dx+\int_\theta^1 f(x)\,dx\\ &\geqslant 2\int_{\frac12}^\theta f(x)\,dx-\int_0^\theta f(x)\,dx+\int_\theta^1 f(x)\,dx\\ &=\int_{\frac12}^1 f(x)\,dx-\int_0^{\frac12} f(x)\,dx\\ &=\int_0^{\frac12}\left[f\left(\frac12\right)-f(x)\right]dx+\int_{\frac12}^1\left[f(x)-f\left(\frac12\right)\right]dx\\ &=\int_0^1\left|f(x)-f\left(\frac12\right)\right|dx.\end{aligned}$$

当 $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)-a|\,dx &= \int_0^\theta [a-f(x)]\,dx + \int_\theta^1 [f(x)-a]\,dx \\
&= (2\theta-1)\,a - \int_0^\theta f(x)\,dx + \int_\theta^1 f(x)\,dx \\
&= -2\int_\theta^{\frac{1}{2}} a dx - \int_0^\theta f(x)\,dx + \int_\theta^1 f(x)\,dx \\
&\geqslant -2\int_\theta^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_0^\theta f(x)\,dx + \int_\theta^1 f(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x)\right] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right] dx \\
&= \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

这就完成了证明.

3. (3.) 当 $\alpha = 0$, 显然. 当 $\alpha = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{N}$ 且 $p > 0$. 我们有

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx = \int_{-\alpha}^{1-\alpha} \frac{f(x+\alpha)}{f(x+2\alpha)}dx = \int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x+2\alpha)}dx = \int_0^1 \frac{f(x+2\alpha)}{f(x+3\alpha)}dx = \cdots \int_0^1 \frac{f(x+(p-1)\alpha)}{f(x+p\alpha)}dx.$$

于是运用 p 个函数积的 Holder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx\right)^p &= \prod_{k=1}^p \left[\int_0^1 \left(\frac{f^{\frac{1}{p}}(x+(k-1)\alpha)}{f^{\frac{1}{p}}(x+k\alpha)}\right)^p dx\right] \\
&\geqslant \left[\int_0^1 \prod_{k=1}^p \left(\frac{f^{\frac{1}{p}}(x+(k-1)\alpha)}{f^{\frac{1}{p}}(x+k\alpha)}\right) dx\right]^p \\
&= \left[\int_0^1 \frac{f^{\frac{1}{p}}(x)}{f^{\frac{1}{p}}(x+p\alpha)}dx\right]^p \\
&= \left[\int_0^1 \frac{f^{\frac{1}{p}}(x)}{f^{\frac{1}{p}}(x)}dx\right]^p = 1.
\end{aligned}$$

因此我们就证明了 $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx \geqslant 1$. 注意到 $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx$ 是关于 α 的连续函数, 所以由有理数在 $\mathbb{R}$ 中稠密知: 对所有无理数 α 命题也成立, 我们就完成了证明.

4. (4.) 取 $g(x) = \begin{cases} x-4, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ -x, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$, 则运用积分的 Cauchy 不等式和 $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$, 我们有

$$\int_0^4 |g(x)|^2\,dx \int_0^4 |f'(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^4 f'(x)\,g(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^4 f(x)\,g'(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^4 f(x)\,dx\right)^2.$$

注意到

$$\int_0^4 |g(x)|^2\,dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x-4)^2\,dx = \frac{16}{3}.$$

这就证明了习题4.

5. (5.) 注意到
$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx \int_0^1 |f(x)|^2 dx &\geqslant \left(\int_0^1 (1-x) f'(x) f(x) dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 (1-x) df^2(x)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f^2(x) dx\right)^2,\end{aligned}$$
即证明了
$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx.$$
由 Cauchy 不等式取等条件, 我们知道
$$f(x) = c(1-x) f'(x), \forall x \in [0,1], f(0) = 0.$$
这是可分离变量的微分方程, 解得 $\frac{C}{1-x} = f^c(x)$, 代入 $x=0$ 即可得 $C=0$, 因此 $f(x)=0, x\in[0,1]$ 是唯一取等条件.

6. (6.) 注意到 $f(x) = \int_0^x f'(y) dy$ 和 cauchy 不等式, 我们有
$$\int_0^1 \left(\int_0^x f'(y) dy\right)^2 dx \leqslant \int_0^1 x\int_0^x |f'(y)|^2 dydx = \int_0^1 |f'(y)|^2 dy \int_y^1 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)|f'(y)|^2 dy.$$
因此
$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2 dx.$$
由 Cauchy 不等式取等条件容易知道取等条件是 $f(x) = cx, c\in\mathbb{R}$.

7. (7.) 由牛顿莱布尼兹公式和 Cauchy 不等式, 我们有
$$|f(x)|^2 \leqslant \left|\int_{-1}^x f'(y) dy\right|^2 \leqslant (x+1)\int_{-1}^x |f'(y)|^2 dy, \tag{30.75}$$
$$|f(x)|^2 \leqslant \left|\int_x^1 f'(y) dy\right|^2 \leqslant (1-x)\int_x^1 |f'(y)|^2 dy. \tag{30.76}$$
于是利用 $e^{\frac{y^2}{2a^2}} \leqslant e^{\frac{1}{2a^2}}, \forall y\in[-1,1]$, 我们得到
$$|f(x)|^2 \leqslant (x+1)\sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^x |f'(y)|^2 d\gamma, \tag{30.77}$$
$$|f(x)|^2 \leqslant (1-x)\sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\int_x^1 |f'(y)|^2 d\gamma. \tag{30.78}$$
当 $x\geqslant 0$, 用(30.77), 当 $x\leqslant 0$, 用(30.78)我们得到
$$|f(x)|^2 \leqslant \sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^1 |f'(y)|^2 d\gamma, \forall x\in[-1,1]. \tag{30.79}$$
注意到
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f(x)|^p d\gamma &= \int_{-1}^1 |f(x)|^{p-2}|f(x)|^2 d\gamma \leqslant \left[\sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^1 |f'(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{p-2}{2}} \int_{-1}^1 |f(x)|^2 d\gamma \\ &\leqslant \frac{p-2}{2}\left\{\left(\frac{2}{4-p}\right)^{\frac{p-4}{2}}\left[\sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^1 |f'(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{p-2}{2}}\right\}^{\frac{2}{p-2}} + \left(2-\frac{p}{2}\right)\left(\left(\frac{2}{4-p}\right)^{\frac{4-p}{2}}\int_{-1}^1 |f(x)|^2 d\gamma\right)^{\frac{2}{4-p}} \\ &= \sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\frac{p-2}{2}\left(\frac{2}{4-p}\right)^{\frac{p-4}{p-2}}\int_{-1}^1 |f'|^2 d\gamma + \left(\int_{-1}^1 |f|^2 d\gamma\right)^{\frac{2}{4-p}}.\end{aligned}$$
其中第一个不等号来自(30.79), 第二个不等号来自高中版本的Young 不等式. 这就完成了证明.

8. (8.) 我们希望值能最大, 因此集中在 $\sin x$ 的最大值点. 通过期望的放缩 $f\leqslant 1$ 得到尽可能大的上界, 但被积分条件限制导致不能远离 $\sin x$ 最大值点太多, 所以我们给出如下证明.

由积分中值定理, 存在 $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \theta_2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)-1]\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= \sin\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \sin\theta_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)-1]\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= \sin\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \sin\theta_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx - \sin\theta_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= \sin\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx - \sin\theta_2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&\overset{\theta_1 \leqslant \theta_2}{\leqslant} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

当 $f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$ 我们知道等号成立, 因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$ 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

我们希望值能最小, 因此集中在 $\sin x$ 的最大值点附近, 通过期望的放缩 $f \geqslant 0$ 得到尽可能小的下界, 但这被积分条件限制导致不能远离 $\sin x$ 最大值点太多, 所以我们给出如下证明.

由积分中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)-1]\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \\
&= \sin\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)-1]\,dx + \sin\theta_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \\
&= \sin\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx - \sin\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \sin\theta_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \\
&= -\sin\theta_1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \sin\theta_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \\
&\overset{\theta_2 \geqslant \theta_1}{\geqslant} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

当 $f(x) = \begin{cases} 0, & \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$ 我们知道等号成立, 因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$ 最小值为 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. (9.) 和上题一致, 我们希望值能最大, 因此集中在 e^x 的最大值点. 通过期望的放缩 $f \leqslant 1$ 得到尽可能大的上界, 但被积分条件限制导致不能远离 e^x 最大值点太多, 所以我们给出如下证明.

由积分中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)e^x dx &= \int_0^1 f(x)e^x dx + \int_1^2 f(x)e^x dx \\
&= \int_0^1 f(x)e^x dx + \int_1^2 [f(x)-1]e^x dx + \int_1^2 e^x dx \\
&= e^{\theta_1} \int_0^1 f(x)\,dx + e^{\theta_2} \int_1^2 (f(x)-1)\,dx + \int_1^2 e^x dx \\
&= e^{\theta_1} \int_0^1 f(x)\,dx - e^{\theta_2} \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 e^x dx \\
&\overset{\theta_1 \leqslant \theta_2}{\leqslant} \int_1^2 e^x dx = e^2 - e,
\end{aligned}$$

且 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 等号成立.

我们希望值能最小, 因此集中在 e^x 的最大值点附近, 通过期望的放缩 $f\geqslant 0$ 得到尽可能小的下界, 但这被积分条件限制导致不能远离 e^x 最大值点太多, 所以我们给出如下证明.

由积分中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)e^x dx&=\int_0^1 f(x)e^x dx+\int_1^2 f(x)e^x dx\\&=\int_0^1 (f(x)-1)e^x dx+\int_1^2 f(x)e^x dx+\int_0^1 e^x dx\\&=e^{\xi_1}\int_0^1 (f(x)-1)dx+e^{\xi_2}\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 e^x dx\\&=-e^{\xi_1}\int_1^2 f(x)dx+e^{\xi_2}\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 e^x dx\\&\overset{\xi_1\leqslant\xi_2}{\geqslant}\int_0^1 e^x dx=e-1,\end{aligned}$$

且 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 等号成立. 这样我们就完成了证明.

10. (10.) 注意到

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right|&=\left|\int_0^1 f(xt)dt-\int_0^1 f(yt)dt\right|\\&\leqslant\int_0^1 |f(xt)-f(yt)|dt\leqslant M|x-y|\int_0^1 tdt=\frac{M}{2}|x-y|,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自拉格朗日中值定理和导数的界. 我们这就证明了不等式(16.74).

11. (11.) 由拉格朗日中值定理, 我们得到此类问题必须且只能用的不等式

$$|f(x)-f(0)|\leqslant L|x|,\forall x\in(0,+\infty).$$

于是对任何 $c\geqslant 0$, 我们有

$$\int_0^\infty f(x)dx\geqslant\int_0^c f(x)dx\geqslant\int_0^c [f(0)-Lx]dx=cf(0)-\frac{L}{2}c^2.$$

取 $c=\frac{f(0)}{L}$ 我们可得

$$\int_0^\infty f(x)dx\geqslant\frac{1}{2L}|f(0)|^2.$$

12. (12.) 事实上, 由拉格朗日插值11.1, 我们知道存在 $\theta\in(0,x)$ 使得

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\frac{x}{2}-0}{x-0}f(x)+\frac{\frac{x}{2}-x}{0-x}f(0)+\frac{f''(\theta)}{2}\left(\frac{x}{2}-0\right)\left(\frac{x}{2}-x\right)=\frac{f(x)+f(0)}{2}-\frac{f''(\theta)}{8}x^2,$$

即

$$2f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)+f(0)-\frac{f''(\theta)}{4}x^2\geqslant f(0)-\frac{k}{4}x^2,\forall x>0.$$

于是

$$\begin{aligned}4\int_0^\infty f(x)dx\geqslant 4\int_0^c f(x)dx&=\int_0^{2c}2f\left(\frac{x}{2}\right)dx\\&\geqslant\int_0^{2c}\left[f(0)-\frac{k^2}{4}x^2\right]dx=2cf(0)-\frac{2k^2c^3}{3},\end{aligned}$$

再取 $c=\frac{\sqrt{f(0)}}{k}$, 我们有

$$\int_0^\infty f(x)dx\geqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{4f^{\frac{3}{2}}(0)}{3k}=\frac{f^{\frac{3}{2}}(0)}{3k}.$$

13. (13.) 考虑 $F(x)=\int_0^x f(y)dy, x\in[0,1]$, 由拉格朗日插值定理11.1, 我们知道对每个 $\alpha\in[0,1]$, 存在 $\theta\in$

$(0,1)$, 使得

$$F(\alpha)=f'(\theta)\frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

于是

$$|F(\alpha)|=\left|f'(\theta)\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

这就完成了证明.

14. (14.) 注意到

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx-\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2&=3\int_{-1}^{1}x^2dx\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(y)dy\right]^2dx\\&\geqslant3\left(\int_{-1}^{1}\left[xf(x)-\frac{x}{2}\int_{-1}^{1}f(y)dy\right]dx\right)^2=3\left(\int_{-1}^{1}xf(x)dx\right)^2,\end{aligned}$$

这里最后一步是 Cauchy 不等式. 我们完成了证明.

15. (15.) 我们证明更强的结果, 即

$$\int_0^1|f(x)|^2dx\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1|f'(x)|^2dx.\tag{30.80}$$

运用定理16.7的第三个结论知

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|^2dx\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(x)|^2dx,\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|^2dx\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(x)|^2dx.$$

两式相加即得(30.80). 等号成立条件为 $f(x)=c\sin(2\pi x),c\in\mathbb{R}$.

16. (16.) 注意到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^kf\left(\frac{k}{2n+2}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{2k}{2n+2}\right)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{2k+1}{2n+2}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2}\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k}{2n+2}}f'(y)dy+\frac{1}{2}\int_0^1f'(y)dy\right|=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+2}{2n+2}}f'(y)dy-\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}f'(y)dy\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+2}{2n+2}}f'(y)dy-2\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}f'(y)dy\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k+1}{2n+2}}^{\frac{2k+2}{2n+2}}f'(y)dy-\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}f'(y)dy\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}f'\left(y+\frac{1}{2n+2}\right)dy-\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}f'(y)dy\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}\int_y^{y+\frac{1}{2n+2}}f''(x)dxdy\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}f''(x+y)dxdy\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}f''(x+y)dydx\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+1}{2n+2}}|f''(x+y)|dydx=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}\int_{x+\frac{2k}{2n+2}}^{x+\frac{2k+1}{2n+2}}|f''(y)|dydx\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+2}{2n+2}}|f''(y)|dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{2k}{2n+2}}^{\frac{2k+2}{2n+2}}|f''(y)|dydx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2n+2}}1dx\int_0^1|f''(y)|dy=\frac{1}{4(n+1)}\int_0^1|f''(y)|dy,\end{aligned}$$

我们证明了不等式(16.76).

17. (17.) 我们有

$$\int_0^{n\pi}x^a|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x^a|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(x+(k-1)\pi)^a\sin xdx,$$

一方面, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(x+(k-1)\pi)^a\sin x dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(\pi+(k-1)\pi)^a\sin x dx=\pi^a\sum_{k=1}^{n}k^a\int_0^{\pi}\sin x dx\\&=2\pi^a\sum_{k=1}^{n}k^a=2\pi^a\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}k^a dx\leqslant 2\pi^a\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}x^a dx=2\pi^a\int_1^{n+1}x^a dx\\&\leqslant 2\pi^a\int_0^{n+1}x^a dx=\frac{2\pi^a}{a+1}\cdot(n+1)^{a+1},\end{aligned}$$

另外一方面, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(x+(k-1)\pi)^a\sin x dx\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}((k-1)\pi)^a\sin x dx=\pi^a\sum_{k=1}^{n}(k-1)^a\int_0^{\pi}\sin x dx\\&=2\pi^a\sum_{k=1}^{n}(k-1)^a=2\pi^a\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(k-1)^a dx\geqslant 2\pi^a\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}(x-1)^a dx=2\pi^a\int_1^{n}(x-1)^a dx\\&=\frac{2\pi^a}{a+1}\cdot(n-1)^{a+1},\end{aligned}$$

故可取 $C_a=C_a'=\frac{2\pi^a}{a+1}>0$. 此外由黎曼引理9.2, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}\int_0^{n\pi}x^a|\sin x|dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}x^a|\sin(nx)|dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|dx\int_0^{\pi}x^a dx=\frac{2\pi^a}{a+1},$$

故所求常数不可改进.

18. (18.)

(a). 待定 $t>0$. 利用 Jordan 不等式[31]和

$$|\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|,\forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right|\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_0^{t}\left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right|\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_t^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{t}(2n+1)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_t^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{2}{\pi}x}\mathrm{d}x=\frac{2n+1}{\pi}t+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2t}.\end{aligned}$$

取 $t>0$ 使得上述不等式达到最佳, 即 $t=\frac{\pi}{2(2n+1)}$ 就有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1+\ln(2n+1)}{2},$$

即(16.78)成立.

[31] 即 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x,x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

(b). 对 $n \geqslant 2$, 注意到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right|dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)x|}{x}dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{x}dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)|\sin(2n+1)x|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{x}dx\\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{\frac{k\pi}{2}}dx\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}|\sin x|\,dx\\
&= 1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\leqslant 1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=2}^{2n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
&= 1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\int_1^{2n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\ln(2n)\\
&\leqslant 1+\frac{\ln n}{2},
\end{aligned}$$

这里用到了

$$\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}|\sin x|\,dx=1,\forall k\in\mathbb{Z}.$$

19. (19.) 利用 Holder 不等式16.1, 我们有

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3\leqslant\int_0^1 f^3(x)\,dx,$$

于是只需证明

$$9\int_0^1 f^3(x)\,dx+13\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant 50,$$

可以猜测是由多项式构造的, 但并不清楚 50 有多少来自 $\int_0^1 f^2(x)\,dx$, 所以待定

$$9\int_0^1 f^3(x)\,dx+13\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\frac{c}{2}\int_0^1 f^2(x)\,dx+50-c,$$

即寻求 $c\in\mathbb{R}$, 使得

$$9t^3+13t\leqslant\frac{c}{2}t^2+50-c,\forall t\in(0,2).$$

令 $t=2$, 有 $c\geqslant 48$, 代入 $t=\frac{1}{3}$, 有 $c\leqslant 48$, 因此对 $c=48$, 我们有

$$9t^3+13t-\frac{c}{2}t^2-50+c=(t-2)(3t-1)^2<0,\forall t\in(0,2),$$

这就证明了

$$8\int_0^1 f^3(x)\,dx+\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3+13\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant 50.$$

20. (20.) 取

$$k(x,y)=\begin{cases}(x-a)(y-b), & b\geqslant y\geqslant x\\ (y-a)(x-b), & x\geqslant y\geqslant a\end{cases},$$

读者可以自行验证有

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,y)\,f''(y)\,dy.$$

因此由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &\leqslant \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |k(x,y)|^2\,dy\int_a^b |f''(y)|^2\,dy\\ &=\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_x^b (x-a)^2(y-b)^2\,dy+\int_a^x (y-a)^2(x-b)^2\,dy\right)\int_a^b |f''(y)|^2\,dy\\ &=\frac{(b-x)^2(x-a)^2}{3(b-a)}\int_a^b |f''(y)|^2\,dy\\ &\leqslant \frac{(b-a)^3}{48}\int_a^b |f''(y)|^2\,dy.\end{aligned}$$

21. (21.) 考虑 $g(x)=(x-a)(x-b)$, 则由 cauchy 不等式16.1, 我们知道

$$\begin{aligned}\int_a^b |f''(x)|^2\,dx\int_a^b |g(x)|^2\,dx &\geqslant \left(\int_a^b f''(x)g(x)\,dx\right)^2\\ &=\left(f(b)g'(b)-f(a)g'(a)-\int_a^b f(x)g''(x)\,dx\right)^2\\ &=(f(b)g'(b)-f(a)g'(a))^2=(b-a)^2[f(a)+f(b)]^2,\end{aligned}$$

结合 $\int_a^b |g(x)|^2\,dx=\frac{(b-a)^5}{30}$, 我们知道不等式(16.80)成立.

22. (22.) 设 $g(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ (x+1)^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$, 则由 cauchy 不等式16.1, 我们知道

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f''(x)|^2\,dx\int_{-1}^1 |g(x)|^2\,dx &\geqslant \left(\int_{-1}^1 g(x)f''(x)\,dx\right)^2\\ &=\left(\int_{-1}^1 g''(x)f(x)\,dx\right)^2=4\left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right)^2,\end{aligned}$$

结合 $\int_{-1}^1 |g(x)|^2\,dx=\frac{2}{5}$, 我们有不等式(16.81)成立.

23. (23.) 取 $g(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $\int_0^1 |g(x)|^2\,dx=\frac{1}{840}$, 则由 cauchy 不等式16.1, 我们知道

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|^2\,dx\int_0^1 |g(x)|^2\,dx &\geqslant \left(\int_0^1 g(x)f''(x)\,dx\right)^2\\ &=\left(\int_0^1 g'(x)f'(x)\,dx\right)^2=\left(\int_0^1 g''(x)f(x)\,dx\right)^2=36\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2,\end{aligned}$$

这就证明了不等式(16.82).

24. (24.) 为了计算方便, 不妨设 $[a,b]=[0,1]$. 用

$$f(x)-\frac{f'(1)-f'(0)}{2}x^2-f'(0)x-f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{f'(1)}{8}+\frac{3f'(0)}{8}$$

代替 f 可以不妨设 $f'(0)=f'(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 于是只需证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{M-m}{36\sqrt{3}}. \tag{30.81}$$

引理 30.4

设 $f''\in L^1(a,b)$, 则 $f,f'\in L^1(a,b)$ 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b k(x)f''(x)\,\mathrm{d}x, \tag{30.82}$$

这里

$$k(x)=\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{2}, & a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}\\ \frac{(b-x)^2}{2}, & \frac{a+b}{2}<x\leqslant b\end{cases}.$$

♡

注非数学类和考研竞赛只需要掌握 $f\in C^2[a,b]$ 的情况, 此时无需繁琐的可积性讨论.

证明

(a). 当 $f\in C^2[a,b]$, 不妨设 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 否则我们用 $f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 代替 $f(x)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f''(x)\,k(x)\,\mathrm{d}x&=-\int_a^b f'(x)\,k'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(x)(x-b)\,\mathrm{d}x-\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)(x-a)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即(30.82)成立.

♠, * 一般性讨论:

Step 1

对 $x\in(a,b)$, 由牛顿莱布尼兹公式得

$$f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=\int_{\frac{a+b}{2}}^x\int_{\frac{a+b}{2}}^y f''(z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

注意到

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\in L^1(a,b),$$

以及

$$\int_a^b\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^x\int_{\frac{a+b}{2}}^y f''(z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^x\int_{\frac{a+b}{2}}^y|f''(z)|\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f''(z)|\,\mathrm{d}z\cdot\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^x 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x<\infty,$$

于是我们有 $f\in L^1(a,b)$. 由

$$f'(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(y)\,\mathrm{d}y$$

类似的知道 $f'\in L^1(a,b)$.

Step 2

对 $[c,d]\subset[a,b],c<\frac{a+b}{2}<d$, 直接分部积分得

$$\begin{aligned}\int_c^d k(x)\,f''(x)\,\mathrm{d}x&=-\int_c^d k'(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{\frac{a+b}{2}}^d(x-b)\,f'(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-(d-b)\,f(d)-\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\int_{\frac{a+b}{2}}^d f(x)\,\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(c-a)\,f(c)+\int_c^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(c-a)\,f(c)-(d-b)\,f(d).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{c\to a^+}(c-a)\,f(c)&=\lim_{c\to a^+}(c-a)\left[f(c)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\&=\lim_{c\to a^+}(c-a)\int_{\frac{a+b}{2}}^c f'(y)\,\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

类似的得

$$\lim_{d\to b^-}(d-b)\,f(d)=0.$$

从而让 $c\to a^+,d\to b^-$ 得(30.82). 这就完成了引理的证明.

现在回到原题. 由非数学积分不等式习题62., 我们得

$$\left|\int_0^1 k(x)f''(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M-m}{2}\int_0^1\left|k(x)-\int_0^1 k(y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x.$$

由引理30.4得

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M-m}{2}\int_0^1\left|k(x)-\int_0^1 k(y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_0^1 k(y)\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac12}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{24},$$

读者可以继续分段去绝对值计算得

$$\int_0^1\left|k(x)-\int_0^1 k(y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{18\sqrt3},$$

即(30.81)成立. 因此我们完成了证明.

25. (25.) 不失一般性, 假定 $\int_a^b f(x)\,dx=0,[a,b]=[0,1]$. 则只需证明

$$|f(x)|\leqslant\left(x^2-x+\frac12\right)M.\tag{30.83}$$

因为导数有界, 所以导数勒贝格可积[32]于是由积分余项11.2, 我们知道

$$\int_0^x f(y)\,dy=\int_0^1 k(x,y)f'(y)\,dy.$$

于是有

$$f(x)=\int_0^1\frac{d}{dx}k(x,y)f'(y)\,dy=\int_0^x yf'(y)\,dy+\int_x^1(y-1)f'(y)\,dy.$$

当然你可以借助积分余项猜出上式而不必引入积分余项. 于是我们有

$$|f(x)|\leqslant M\int_0^x ydy+M\int_x^1(1-y)\,dy=M\left(x^2-x+\frac12\right),$$

这就证明了不等式(30.83), 从而得到了不等式(16.84).

26. (26.) 显然可不妨设 $A=0,[a,b]=[0,1]$, 则不等式(16.85)变成

$$\int_0^1|f(x)|^2\,dx\leqslant\frac12\int_0^1|f'(x)|^2\,dx.$$

由16.7的第一条知

$$\int_0^1|f(x)|^2\,dx\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_0^1|f'(x)|^2\,dx,$$

这就证明了不等式(16.85).

27. (27.) 由 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\int_0^1|f'(x)|^2\,dx\int_0^1\left(1-3x^2\right)^2dx\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)\left(1-3x^2\right)dx\right)^2=36\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2.$$

注意到 $\int_0^1\left(1-3x^2\right)^2dx=\frac45$, 我们就得到不等式(16.86). 由 cauchy 不等式取等条件, 我们有 $f'(x)=A\left(1-3x^2\right)$, 故 $f(x)=A\left(x-x^3\right)$.

28. (28.) 取 $g(x)=\begin{cases}-x, & x\in\left[0,\frac{1}{2n}\right]\\(2n-1)x-1, & x\in\left[\frac{1}{2n},\frac1n\right]\\1-x, & x\in\left[\frac1n,1\right]\end{cases}$, 则由 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\int_0^1|f'(x)|^2\,dx\int_0^1|g(x)|^2\,dx\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)g(x)\,dx\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)g'(x)^2\,dx\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

[32]非数学类只对导数连续操作.

此外

$$\int_0^1 |h(x)|^2 dx = \frac{4n^2-10n+7}{12n^2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

这就的了不等式(16.87).

29. (29.) 由积分中值定理11.3, 存在 $\theta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \theta_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得

$$|f(\theta_1)| = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx, |f(\theta_2)| = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx.$$

于是一方面

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &\leqslant \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(\theta_1)\right| + |f(\theta_1)| \\ &\leqslant \int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}} |f'(x)| dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)| dx + 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &\leqslant \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(\theta_2)\right| + |f(\theta_2)| \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\theta_2} |f'(x)| dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)| dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx.\end{aligned}$$

两个不等式相加即得(16.88).

30. (30.) 先断言存在 $\theta \in [0,1]$, 使得

$$|f'(\theta)| \leqslant 3|f(x_2) - f(x_1)|. \tag{30.84}$$

注意到 $x_2 - x_1 > \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, 于是由拉格朗日中值定理, 我们有

$$3|f(x_2) - f(x_1)| = 3|x_2 - x_1| \cdot |f'(\theta)| \geqslant |f'(\theta)|,$$

这就证明了(30.84).

于是取满足(30.84)的 θ, 然后就有

$$|f'(x)| \leqslant |f'(\theta)| + |f'(x) - f'(\theta)| \leqslant 3|f(x_2) - f(x_1)| + \left|\int_\theta^x |f''(y)| dy\right| \leqslant 3|f(x_2) - f(x_1)| + \int_0^1 |f''(y)| dy,$$

这就证明了不等式(16.89).

31. (31.)31-38 虽然是经典题, 但抄自八一的积分不等式. 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{100}^{200} \frac{x^5}{x^4+x-1} dx - \ln 2\right| &= \left|\int_{100}^{200} \left(\frac{x^5}{x^4+x-1} - \frac{1}{x}\right) dx\right| = \left|\int_{100}^{200} \frac{x-1}{x(x^4-1+x)} dx\right| \\ &< \int_{100}^{200} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3\cdot 100^3} - \frac{1}{3\cdot 200^3} < \frac{1}{3}\cdot 10^{-6},\end{aligned}$$

这就证明了(16.90).

32. (32.) 显然有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi = \int_0^1 \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{x-x^2}} dx < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}} dx < \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x-x^2}} dx = \pi,$$

这就证明了(16.91).

33. (33.) 想法是变二重积分用几何意义. 把矩阵自然的放大放小为 $\frac{1}{4}$ 的圆.

一方面

$$\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{\iint_{[0,x]^2}e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}dydz}\geqslant\sqrt{\frac{1}{4}\iint_{y^2+z^2\leqslant x^2}e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}dydz}$$
$$\overset{\text{极坐标计算}}{=}\sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^x re^{-\frac{r^2}{2}}dr}=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}.$$

另外一方面

$$\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{\iint_{[0,x]^2}e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}dydz}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}\iint_{y^2+z^2\leqslant\left(\sqrt{2}x\right)^2}e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}dydz}$$
$$\overset{\text{极坐标计算}}{=}\sqrt{\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}x}re^{-\frac{r^2}{2}}dr}=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)}.$$

我们证明了不等式(16.92).

34. (34.) 直接放缩分母就有

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\int_0^1 xe^xdx<\int_0^1\frac{xe^x}{\sqrt{x^2-x+25}}dx<\frac{2}{3\sqrt{11}}\int_0^1 xe^xdx=\frac{2\sqrt{11}}{33},$$

这就证明了不等式(16.93).

35. (35.) 利用

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3\pi},\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

即得不等式(16.94)

36. (36.) 由 cauchy 不等式16.1, 我们知道

$$\begin{aligned}\left[\int_0^1\frac{f(x)}{t^2+x^2}dx\right]^2&=\left(\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}\frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}}dx\right)^2\\&\leqslant\int_0^1\frac{1}{t^2+x^2}dx\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx\\&=\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx.\end{aligned}$$

37. (37.) 分部积分[33]得

$$\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b xd\int_a^x f(y)dy=-\int_a^b\int_a^x f(y)dydx\leqslant 0.$$

38. (38.) 记

$$M_1=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|,M_2=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

由条件(16.96)知 f 必有零点 $c\in[a,b]$. 故由 Taylor 中值定理, 我们有

$$f(x)=f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2.$$

[33] 可积足够分部积分.

从而

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|f'(c)\int_a^b (x-c)\,dx+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-c)^2\,dx\right|\\ &\leqslant M_1\left|\int_a^b (x-c)\,dx\right|+\frac{M_2}{2}\int_a^b (x-c)^2\,dx\\ &= M_1\left|(b-c)^2-(a-c)^2\right|+\frac{M_2}{6}\left[(b-c)^3-(a-c)^3\right]\\ &= M_1(b-a)|b+a-2c|+\frac{M_2}{6}\left[(b-c)^3+(c-a)^3\right]\\ &\leqslant M_1(b-a)^2+\frac{M_2}{6}(b-a)^3,\end{aligned}$$

这就证明了不等式(16.97).

39. (39.) 由哈达马不等式11.4, 我们有 $a=\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\frac{f(1)+f(0)}{2}=\frac{1}{2}$.

注意到

$$\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(a)-f(0)}{a-0}, & 1\geqslant x>a\\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & 0\leqslant x<a\end{cases}.$$

因此

$$\begin{aligned}a&\geqslant\int_0^1 f(a)+\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\,dx=f(a)+\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\left(\frac{1}{2}-a\right)\\ &\geqslant f(a)+\frac{f(a)-0}{a-0}\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{f(a)}{2a},\end{aligned}$$

这便是

$$2\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\geqslant f\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right).$$

40. (40.) 不妨设 $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|<\infty$, 那么有

$$\begin{aligned}f(0)&=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\theta_1(0))}{2}(0-x_0)^2\\ f(x_0)&=(1-x_0)f(0)+x_0f(1)+\frac{f''(\theta_2(x_0))}{2}x_0(x_0-1)\end{aligned}.$$

于是

$$|f'(x_0)|\leqslant\left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}-\frac{f''(\theta_1(0))}{2}x_0\right|\leqslant\left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}\right|+\left|\frac{f''(\theta_1(0))}{2}x_0\right|\leqslant\frac{M}{2}(1-x_0)+\frac{M}{2}x_0=\frac{M}{2},$$

由 x_0 任意性, 我们完成了证明.

41. (41.) 对任何 $C>0,u\leqslant 0$, 运用 $\int_{-\infty}^u f(x)\,dx=\int_{x-C\leqslant u-C}f(x)\,dx$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^u f(x)\,dx&=\int_{x-C\leqslant u-C}f(x)\,dx\leqslant\int_{|x-C|\geqslant|u-C|}f(x)\,dx=\int_{|x-C|\geqslant|u-C|}\frac{|x-C|^2}{|x-C|^2}f(x)\,dx\\ &\leqslant\int_{|x-C|\geqslant|u-C|}\frac{|x-C|^2}{|u-C|^2}f(x)\,dx=\frac{1}{|u-C|^2}\int_{|x-C|\geqslant|u-C|}|x-C|^2f(x)\,dx\\ &\leqslant\frac{1}{|u-C|^2}\int_{\mathbb{R}}|x-C|^2f(x)\,dx=\frac{1+C^2}{|u-C|^2}=\frac{1+C^2}{||u|+C|^2}\triangleq g(C).\end{aligned}$$

于是

$$g'(C)=\frac{2(C|u|-1)}{||u|+C|^3}\Rightarrow g(C)\geqslant g\left(\frac{1}{|u|}\right)=\frac{1}{u^2+1},$$

这就得到了

$$\int_{-\infty}^u f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1+u^2},\forall u\leqslant 0.$$

另外一侧不等式注意到 $f(-x)$ 代替 f 可得

$$\int_u^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1+u^2}, \forall u \geqslant 0,$$

即

$$\int_{-\infty}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_u^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{u^2}{1+u^2}, \forall u \geqslant 0.$$

42. (42.) 记 $f(x)\,dx = d\mu$, 有 $\int_0^1 1 d\mu = 1$, 那么

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x - \int_0^1 x d\mu\right)^2 d\mu &= \int_0^1 x^2 d\mu - \left(\int_0^1 x d\mu\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 x d\mu - \left(\int_0^1 x d\mu\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

我们完成了证明.

43. (43.) 对 $a, b \in \mathbb{R}, c > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{a+bx-cx^2} dx &= e^{\frac{4ac+b^2}{4c}} \sqrt{\frac{\pi}{c}}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} x e^{a+bx-cx^2} dx &= \frac{b}{2c} e^{\frac{4ac+b^2}{4c}} \sqrt{\frac{\pi}{c}}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{a+bx-cx^2} &= e^{\frac{4ac+b^2}{4c}} \left(\frac{1}{2c} + \frac{b^2}{4c^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{c}}.\end{aligned}$$

选取这样的 a, b, c 使得

$$a = 0, \frac{b}{2c} = \mu, \frac{1}{2c} + \frac{b^2}{4c^2} = r^2,$$

利用 $\ln x \leqslant x - 1$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \frac{e^{-\frac{4ac+b^2}{4c}} \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{a+bx-cx^2}}{f(x)} dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{4ac+b^2}{4c}} \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{a+bx-cx^2} - f(x)\right) dx = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) &\leqslant -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(-\frac{4ac+b^2}{4c} + \ln \sqrt{\frac{c}{\pi}} + a + bx - cx^2\right) dx \\ &= \frac{4ac+b^2}{4c} - \ln \sqrt{\frac{c}{\pi}} - a - b\mu + cr^2 \\ &= \left(r^2 - \mu^2\right) c - \frac{1}{2} \ln c + \frac{1}{2} \ln \pi \\ &= -\frac{1}{2} \ln c + \frac{1 + \ln \pi}{2}.\end{aligned}$$

现在取 $c = \frac{1}{2r^2}$, 则

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) \leqslant \frac{\ln\left(2\pi e r^2\right)}{2}.$$

注意到

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{x^2}{2r^2}}$$

使得等号成立, 因此

$$\sup\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x)\,dx\right) = \frac{\ln\left(2\pi e r^2\right)}{2}.$$

高级版: 首先取

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{x^2}{2r^2}},$$

我们有

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln f(x)=\frac{\ln\left(2\pi er^2\right)}{2}.$$

利用 $\ln x\leqslant x-1$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln\frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi r^2}}e^{-\frac{x^2}{2r^2}}}{f(x)}dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi r^2}}e^{-\frac{x^2}{2r^2}}-f(x)\right)dx=0,$$

这恰好蕴含

$$\sup\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln f(x)\,dx\right)=\frac{\ln\left(2\pi er^2\right)}{2}.$$

44. (44.) 事实上利用 Cauchy 不等式16.1和

$$3x^2-\frac{6x-1}{3}=\frac{(3x-1)^2}{3}\geqslant 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(t)|^2dt&=3\int_0^1(1-t)^2dt\int_0^1|f(t)|^2dt\\&\geqslant 3\left(\int_0^1(1-t)f(t)\,dt\right)^2\\&=3\left(\int_0^1(1-t)\,d\int_0^t f(y)\,dy\right)^2\\&=3\left(\int_0^1\int_0^t f(y)\,dydt\right)^2\\&\geqslant\frac{6\int_0^1\int_0^t f(y)\,dydt-1}{3}\\&\geqslant\frac{6\int_0^1 g(t)\,dt-1}{3}\\&=\frac{6a-1}{3},\end{aligned}$$

我们完成了证明.

45. (45.) 我们希望值能最大, 因此集中在 e^x 的最大值点通过期望的放缩 $f\leqslant 1$ 得到尽可能大的上界, 但被积分条件限制导致不能远离 e^x 最大值点太多, 所以我们给出如下证明.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)e^xdx&=\int_0^1 f(x)e^xdx+\int_1^2 f(x)e^xdx\\&=\int_0^1 f(x)e^xdx+\int_1^2[f(x)-1]e^xdx+\int_1^2 e^xdx\\&=e^{\theta_1}\int_0^1 f(x)\,dx+e^{\theta_2}\int_1^2(f(x)-1)\,dx+\int_1^2 e^xdx\\&=e^{\theta_1}\int_0^1 f(x)\,dx-e^{\theta_2}\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 e^xdx\\&\overset{\theta_1\leqslant\theta_2}{\leqslant}\int_1^2 e^xdx=e^2-e,\end{aligned}$$

且 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 等号成立.

我们希望值能最小, 因此集中在 e^x 的最大值点附近, 通过期望的放缩 $f\geqslant 0$ 得到尽可能小的下界, 但这被积

分条件限制导致不能远离 e^x 最大值点太多, 所以我们给出如下证明.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,e^x dx &= \int_0^1 f(x)\,e^x dx + \int_1^2 f(x)\,e^x dx\\ &= \int_0^1 (f(x)-1)\,e^x dx + \int_1^2 f(x)\,e^x dx + \int_0^1 e^x dx\\ &= e^{\xi_1}\int_0^1 (f(x)-1)\,dx + e^{\xi_2}\int_1^2 f(x)\,dx + \int_0^1 e^x dx\\ &= -e^{\xi_1}\int_1^2 f(x)\,dx + e^{\xi_2}\int_1^2 f(x)\,dx + \int_0^1 e^x dx\\ &\overset{\xi_1\leqslant\xi_2}{\geqslant} \int_0^1 e^x dx = e-1,\end{aligned}$$

且 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 等号成立. 这样我们就完成了证明.

46. (46.) 首先取 $f(x)=\cos\left[\frac{\pi}{R}\left(x-\frac{R}{2}\right)\right]e^{-\frac{\lambda}{2}x}$, 我们有等号成立.

为证明不等式, 我们取 $g(x)=\frac{\pi}{R}\tan\left[\frac{\pi}{R}\left(x-\frac{R}{2}\right)\right]+\frac{\lambda}{2}$, 则有

$$g\in C(0,R),\lambda g-g^2+g'=\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\pi^2}{R^2}.$$

我们注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to R} f(x)\,g(x) &= \frac{\pi}{R}\lim_{x\to R} f(x)\tan\left[\frac{\pi}{R}\left(x-\frac{R}{2}\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{R}\lim_{x\to R} f(x)\frac{\sin\left[\frac{\pi}{R}\left(x-\frac{R}{2}\right)\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{R}\left(x-\frac{R}{2}\right)\right]}\\ &= -\frac{\pi}{R}\lim_{x\to R} f(x)\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{R}(x-R)\right)}\\ &= -\lim_{x\to R}\frac{f(x)-f(R)}{x-R}\\ &= -f'(R),\end{aligned}$$

类似的我们有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,g(x)$ 存在, 这给出了

$$\lim_{x\to R} f^2(x)\,g(x)=\lim_{x\to 0} f^2(x)\,g(x)=0.$$

因此

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_0^R |f'(x)+g(x)f(x)|^2 e^{\lambda x}dx\\ &= \int_0^R |f'(x)|^2 e^{\lambda x}dx + \int_0^R |g(x)f(x)|^2 e^{\lambda x}dx + \int_0^R \left|f^2(x)\right|' g(x)\,e^{\lambda x}dx\\ &= \int_0^R |f'(x)|^2 e^{\lambda x}dx + \int_0^R |g(x)f(x)|^2 e^{\lambda x}dx - \int_0^R |f(x)|^2\left|g'(x)+\lambda g(x)\right| e^{\lambda x}dx\\ &= \int_0^R |f'(x)|^2 e^{\lambda x}dx - \left(\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\pi^2}{R^2}\right)\int_0^R |f(x)|^2 e^{\lambda x}dx.\end{aligned}$$

现在我们就有

$$\int_0^R |f(x)|^2 e^{\lambda x}dx \leqslant \frac{4R^2}{\lambda^2R^2+4\pi^2}\int_0^R |f'(x)|^2 e^{\lambda x}dx,$$

且说明了系数是最佳的.

47. (47.) 由 Holder 不等式16.1, 记 $q=\frac{p}{p-1}$, 我们有

$$\left(\int_{-1}^1 |f''(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-1}^1 |x|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant -\int_{-1}^1 xf''(x)\,dx=\int_{-1}^1 f'(x)\,dx=2.$$

于是直接计算就有

$$\int_{-1}^{1}\left|f''(x)\right|^{p}dx\geqslant 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.$$

.

48. (48.) 假定 $\int_0^1\frac{\left|f''(x)+f'(x)\right|}{|f(x)|}dx<\infty$, 取 $x_0\in(0,1)$ 使得

$$|f(x_0)|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|>0.$$

由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{e^{x_0}f(x_0)-e^0f(0)}{e^{x_0}-e^0}&=f(\theta_1)+f'(\theta_1),\theta_1\in(0,x_0),\\ \frac{e^{x_0}f(x_0)-e^1f(1)}{e^{x_0}-e^1}&=f(\theta_2)+f'(\theta_2),\theta_2\in(0,x_0).\end{aligned}$$

现在就有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{|f''(x)+f'(x)|}{|f(x)|}dx&\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\int_0^1|f''(x)+f'(x)|\,dx\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\int_{\theta_1}^{\theta_2}|f''(x)+f'(x)|\,dx\\ &\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}[f''(x)+f'(x)]\,dx\right|=\frac{1}{|f(x_0)|}\left|[f'(\theta_2)+f(\theta_2)]-[f'(\theta_1)+f(\theta_1)]\right|\\ &=\frac{1}{|f(x_0)|}\left[\frac{e^{x_0}|f(x_0)|}{e^{x_0}-1}+\frac{e^{x_0}|f(x_0)|}{e-e^{x_0}}\right]=\frac{(e-1)e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)(e-e^{x_0})}\\ &\overset{\text{求导求极值}}{\geqslant}\frac{(e-1)e^{\frac12}}{\left(e^{\frac12}-1\right)\left(e-e^{\frac12}\right)}=\frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1},\end{aligned}$$

我们完成了证明.

49. (49.) 由非数学中值定理习题5., 这是显然的.

50. (50.) 注意到

$$\int_0^1f(x)\,dx\geqslant\int_t^1f(x)\,dx\geqslant f(t)-tf(t)\geqslant f(t)-t\quad,\forall t\in[0,1],$$

我们有

$$\int_0^1f(g(x))\,dx\leqslant\int_0^1\left[g(x)+\int_0^1f(x)\,dx\right]dx=\int_0^1g(x)\,dx+\int_0^1f(x)\,dx,$$

这恰好是(16.100).

51. (51.) 模仿反向 Cauchy 不等式的思路, 我们自然考虑

$$\int_0^1[f(x)+a][f(x)-b]\,dx\leqslant 0.$$

展开得

$$\int_0^1|f(x)|^2\,dx-(b-a)\int_0^1f(x)\,dx-ab\leqslant 0.$$

由题目条件得

$$\frac{1}{b-a}\int_0^1f(x)\,dx\geqslant 0.$$

对任何 $k\in\mathbb{R}$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1[f(x)-k]^2\,dx&=\int_0^1|f(x)|^2\,dx+k^2-2k\int_0^1f(x)\,dx\\ &=ab+k^2-2k\int_0^1f(x)\,dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

现在我们由关于 k 的二次函数非负知

$$4\left(\int_0^1f(x)\,dx\right)^2\leqslant 4ab\Rightarrow\frac{1}{b-a}\int_0^1f(x)\,dx\leqslant\frac{\sqrt{ab}}{|b-a|}.$$

再令 $b=at,t>0$, 我们有

$$\frac{\sqrt{ab}}{|b-a|}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{t}}{|t-1|}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2\Leftrightarrow\frac{t}{|t-1|^2}\leqslant\frac{1}{16}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^4.$$

又

$$\frac{t}{|t-1|^2}-\frac{1}{16}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^4=-\frac{\left(t-2\sqrt{2}-3\right)^2\left(t+2\sqrt{2}-3\right)^2}{16\left(t-1\right)^4}\leqslant0,$$

这就完成了证明.

52. (52.) 证明的想法在于 g 能扮演 δ 函数筛值的作用, 不过不必采用如此深刻的思路, 可以直接待定分段一次函数即可.

取

$$g\left(x\right)=\begin{cases}2x-\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2x-\frac{3}{2}, & \frac{1}{2}<x\leqslant1\end{cases}.$$

由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|f'\left(x\right)\right|^2dx\int_0^1\left|g\left(x\right)\right|^2dx&\geqslant\left(\int_0^1f'\left(x\right)g\left(x\right)dx\right)^2\\&=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}f'\left(x\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1f'\left(x\right)\left(2x-\frac{3}{2}\right)dx\right)^2\\&=\left(\frac{f\left(1\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(0\right)}{2}-2\int_0^{\frac{1}{2}}f\left(x\right)dx-2\int_{\frac{1}{2}}^1f\left(x\right)dx\right)^2\\&=4\left(\int_0^1f\left(x\right)dx\right)^2.\end{aligned}$$

然后由

$$\int_0^1\left|g\left(x\right)\right|^2dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12},$$

我们知道(16.101)成立.

53. (53.) 证明的想法在于 g 能扮演 δ 函数筛值的作用和 0 边界条件的想法, 不过不必采用如此深刻的思路, 可以直接待定分段二次函数即可. 考虑

$$g\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2x^2-3x+1, & \frac{1}{2}<x\leqslant1\end{cases}.$$

由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|f''\left(x\right)\right|^2dx\int_0^1\left|g\left(x\right)\right|^2dx&\geqslant\left(\int_0^1f''\left(x\right)g\left(x\right)dx\right)^2\\&=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}f''\left(x\right)\left(2x^2-x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1f''\left(x\right)\left(2x^2-3x+1\right)dx\right)^2\\&=\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}f'\left(x\right)\left(4x-1\right)dx-\int_{\frac{1}{2}}^1f'\left(x\right)\left(4x-3\right)dx\right)^2\\&=16\left(\int_0^1f\left(x\right)dx\right)^2.\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1\left|g\left(x\right)\right|^2dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(2x^2-3x+1\right)^2dx=\frac{1}{120},$$

我们就证明了(16.102).

54. (54.) 取

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f'(x)|^2dx\int_0^1|g(x)|^2dx&\geqslant\left(\int_0^1f'(x)g(x)dx\right)^2\\&=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}f'(x)xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1f'(x)(1-x)dx\right)^2\\&=\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1f(x)dx\right)^2=\left(\int_0^1f(x)dx\right)^2.\end{aligned}$$

注意到 $\int_0^1|g(x)|^2dx=\frac{1}{12}$, 这就证明了(16.103).

55. (55.) 由单调性和下凸性, 利用拉格朗日中值定理, 我们有

$$x\geqslant y\quad\Rightarrow\quad f(x)-f(y)\geqslant(x-y)f'(y)\geqslant 0. \tag{30.85}$$

$$x\geqslant y\quad\Rightarrow\quad 0\leqslant f(x)-f(y)\leqslant(x-y)f'(x). \tag{30.86}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1|f(x)|^2dx-\left(\int_0^1f(x)dx\right)^2=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}[f(x)-f(y)]^2dxdy\\&\overset{\text{对称性}}{=}\int_0^1\int_y^1[f(x)-f(y)]^2dxdy\overset{(30.85)}{\geqslant}\int_0^1\int_y^1(x-y)^2|f'(y)|^2dxdy\\&=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3|f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

反过来

$$\begin{aligned}&\int_0^1|f(x)|^2dx-\left(\int_0^1f(x)dx\right)^2=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}[f(x)-f(y)]^2dxdy\\&\overset{\text{对称性}}{=}\int_0^1\int_y^1[f(x)-f(y)]^2dxdy\overset{(30.86)}{\leqslant}\int_0^1\int_y^1(x-y)^2|f'(x)|^2dxdy,\\&=\int_0^1\int_0^x(x-y)^2|f'(x)|^2dydx=\frac{1}{3}\int_0^1x^3|f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

这就证明了(16.104).

56. (56.) 我们有

$$\begin{aligned}n\int_0^{2\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi n}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{2\pi j}^{(2j+1)\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x+\sum_{j=0}^{n-1}\int_{(2j+1)\pi}^{(2j+2)\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{2\pi j}^{(2j+1)\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x-\sum_{j=0}^{n-1}\int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi}f\left(\frac{x+\pi}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{2\pi j}^{(2j+1)\pi}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x+\pi}{n}\right)\right]\sin x\mathrm{d}x\geqslant 0.\end{aligned}$$

57. (57.) 利用割线斜率递减, 我们有

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x},\forall t\in(0,x].$$

于是记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 就有

$$F(x)\geqslant\int_0^x\left[\frac{f(x)-1}{x}t+1\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x\left[f(x)+1\right],$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x&=F(1)-2\int_0^1 xF(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant F(1)-2\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x\\&=F(1)-\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

现在我们就有

$$\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{F(1)}{2}-\frac{1}{6},$$

从而

$$2\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\leqslant F(1)-\frac{1}{4}\leqslant F^2(1),$$

这里用到了 $t-\frac{1}{4}\leqslant t^2,\forall t\in\mathbb{R}$. 现在我们就证明了(16.105).

58. (58.) 考虑 $F(x)\triangleq\int_0^x e^{-y^2}\sin y\mathrm{d}y$, 我们有

$$F'(x)=e^{-x^2}\sin x.$$

又 F 可能的极值点都是 $n\pi,n\in\mathbb{N}$, 又

$$F((2n+1)\pi)=\int_0^{(2n+1)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x>\int_0^{2n\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots,$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{2n\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-(x+\pi)^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left(e^{-x^2}-e^{-(x+\pi)^2}\right)\sin x\mathrm{d}x>0.\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-y^2}\sin y\mathrm{d}y&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-(x+\pi)^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left(e^{-x^2}-e^{-(x+\pi)^2}\right)\sin x\mathrm{d}x>0.\end{aligned}$$

因此我们证明了 $\int_0^x e^{-y^2}\sin y\mathrm{d}y>0,\forall x>0$.

59. (59.) 由 Cauchy 不等式积分形式就有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{4}{\pi}\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{4}{\pi}\left(\int_0^1\sqrt{1+x^2}f(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{4}{\pi},\end{aligned}$$

且等号成立条件为

$$\sqrt{1+x^2}f(x)=\frac{c}{\sqrt{1+x^2}},\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1\Rightarrow f(x)=\frac{4}{\pi(1+x^2)}.$$

60. (60.) 考虑 $F(x)\triangleq\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$, 则有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1 f(x)\left[f^2(x)-f^2(0)\right]\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_0^1\left[f^2(x)-f^2(0)\right]\mathrm{d}\left(F(x)-F(1)\right)\right|=\left|2\int_0^1 f(x)f'(x)\left[F(x)-F(1)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant 2\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\cdot\int_0^1\left(f(x)\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\cdot\left(\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2|_1^0\\&=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\cdot\left(\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

61. (61.) 当 $k=1$, 命题显然, 当 $k>1$, 令

$$g(x)=\int_0^x(x-z)z^{k-1}(1-z)^{k-1}\,dz-\frac{(k-1)!k!}{(2k)!}x^2,$$

读者可以自行计算有

$$g(0)=g'(0)=g(1)=g'(1)=g'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

以及

$$g'''(x)=(k-1)x^{k-2}(1-x)^{k-2}(1-2x).$$

现在 $g'(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 下凸, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上凸, 做出函数草图, 就有

$$g'(x)\leqslant 0,x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],g'(x)\geqslant 0,x\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

利用 $g(x)\leqslant\max\{g(0),g(1)\}=0$, 我们有

$$\int_0^x(x-z)z^{k-1}(1-z)^{k-1}\,dz\leqslant\frac{(k-1)!k!}{(2k)!}x^2.$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^1|g(x)|\,dx&=\int_0^1\left|\int_0^x(x-z)z^{k-1}(1-z)^{k-1}\,dz-\frac{(k-1)!k!}{(2k)!}x^2\right|dx\\&=\frac{(k-1)!k!}{3(2k)!}-\int_0^1\int_z^1(x-z)z^{k-1}(1-z)^{k-1}\,dxdz\\&=\frac{(k-1)!k!}{3(2k)!}-\frac{1}{2}\int_0^1 z^{k-1}(1-z)^{k+1}\,dz=\frac{(k-1)k!(k-1)!}{6(2k+1)!},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f'(x)x^{k-1}(1-x)^{k-1}\,dx\right|=\left|\int_0^1 f'(x)g''(x)\,dx\right|\\&=\left|\int_0^1 f'''(x)g(x)\,dx\right|\quad\leqslant\int_0^1|g(x)|\,dx\cdot\max_{x\in[0,1]}|f'''(x)|\\&=\frac{k!(k-1)!(k-1)}{6(2k+1)!}\max_{x\in[0,1]}|f'''(x)|,\end{aligned}$$

我们完成了证明.

62. (62.) 用 $f-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ 代替 f 可不妨设 $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y=0$. $g-m$ 代替 g 可以不妨设 $m=0$. 于是(16.106)等价于

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.\tag{30.87}$$

现在考虑

$$I \triangleq \{x \in [a,b] : f(x) \geqslant 0\}, J \triangleq \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}.$$

不妨设

$$\int_I f(x) g(x) \,\mathrm{d}x \geqslant \int_J [-f(x)] g(x) \,\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \,\mathrm{d}x \right| = \int_I f(x) g(x) \,\mathrm{d}x - \int_J [-f(x)] g(x) \,\mathrm{d}x \leqslant M \int_I f(x) \,\mathrm{d}x. \tag{30.88}$$

注意到

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_I f(x) \,\mathrm{d}x = \int_J [-f(x)] \,\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$\frac{M}{2} \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x = \frac{M}{2} \int_I f(x) \,\mathrm{d}x + \frac{M}{2} \int_J [-f(x)] \,\mathrm{d}x = M \int_I f(x) \,\mathrm{d}x.$$

结合(30.88)得(30.87).

63. (63.) 注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - 3x + 1]^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^2(x) \,\mathrm{d}x + \int_0^1 (3x-1)^2 \,\mathrm{d}x - 2 \int_0^1 f(x)(3x-1) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f^2(x) \,\mathrm{d}x + 1 - 6 \int_0^1 x f(x) \,\mathrm{d}x + 2 \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f^2(x) \,\mathrm{d}x + 2 - 6 \int_0^1 x f(x) \,\mathrm{d}x \geqslant 0, \end{aligned}$$

于是

$$2 + \int_0^1 f^2(x) \,\mathrm{d}x \geqslant 6 \int_0^1 x f(x) \,\mathrm{d}x.$$

64. (64.) 考虑 $F(x) \triangleq \int_0^x f(y) \,\mathrm{d}y$, 有 $F(0) = F(1) = 0$. 由拉格朗日插值的积分余项11.2, 我们有

$$F(x) = \int_0^1 k(x,y) f'(y) \,\mathrm{d}y,$$

从而

$$\left| \int_0^\alpha F(y) \,\mathrm{d}y \right| |F(\alpha)| \leqslant \int_0^1 |k(\alpha,y)| |f'(y)| \,\mathrm{d}y \leqslant \alpha(1-\alpha) \int_0^1 |f'(y)| \,\mathrm{d}y.$$

65. (65.)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{k-1} f(1-x) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{(2k-2)(2k-3)\cdots k} \int_0^1 \left(x^{2k-2}\right)^{(k-1)} f(1-x) \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{分部积分}}{=} \frac{1}{(2k-2)(2k-3)\cdots k} \int_0^1 x^{2k-2} f^{(k-1)}(1-x) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(k-1)!}{(2k-2)!} \int_0^1 (1-x)^{2k-2} f^{(k-1)}(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{k!}{(2k-2)!} \int_0^1 (1-x)^{k-1} \,\mathrm{d}x \int_0^1 (1-x)^{2k-2} f^{(k-1)}(x) \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{切比雪夫不等式}}{\leqslant} \frac{k!}{(2k-2)!} \int_0^1 (1-x)^{2k-2} \,\mathrm{d}x \int_0^1 (1-x)^{k-1} f^{(k-1)}(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{k!}{(2k-1)!} \int_0^1 (1-x)^{k-1} f^{(k-1)}(x) \,\mathrm{d}x \overset{\text{分部积分}}{=} \frac{k!\,(k-1)!}{(2k-1)!} \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自切比雪夫不等式16.6.

66. (66.) 注意到

$$\int_a^b [(x+a)(b-x)] f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

于是我们打开括号就得到(16.108).

67. (67.) 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\left[2f(x)-f(0)-f(1)\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|\left[\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t+\int_x^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这就得到了(16.109).

68. (68.) 利用 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 注意到恒等式

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x-f^2\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\mathrm{d}x-2\left(\int_0^1\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\right)^2,$$

于是设 $g(x)\triangleq f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)$. 只需证明

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{30.89}$$

事实上, 由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} g^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+2\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\geqslant 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+2\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+4\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=2\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,\end{aligned}$$

这就证明了(30.89), 我们完成了证明.

69. (69.) 设 $f(x)\triangleq\int_0^x t(1-t)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$, 注意到当 $x\geqslant 1$ 时 f 递减, $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 f 递增, 所以

$$f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1 t(1-t)\sin^{2n}t\mathrm{d}t,\forall x\geqslant 0.$$

于是对所有 $n\in\mathbb{N}$, 利用 $\sin t\leqslant t$, 我们有

$$\int_0^1 t(1-t)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^{2n+1}(1-t)\,\mathrm{d}t=\beta(2n+2,2)=\frac{\Gamma(2n+2)\Gamma(2)}{\Gamma(2n+4)}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},$$

这就是(16.111).

70. (70.) 注意到

$$\frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}-\frac{1}{1+f(x)}=\frac{f(x)-b+a+1}{(f(x)+1)(f^2(x)+b-a-1)},$$

于是不能期望通过

$$\frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\leqslant\frac{1}{1+f(x)}$$

来实现证明. 本题应当使用最常规的分组放缩法, 即设

$$M\triangleq\{x\in[a,b]:f(x)\leqslant b-a-1\},N\triangleq\{x\in[a,b]:f(x)>b-a-1\},$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\mathrm{d}x &= \int_M \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\mathrm{d}x + \int_N \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_M \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x + \int_N \frac{b-a-1}{b-a-1+(b-a-1)^2}\mathrm{d}x\\ &= 1-\int_N \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x + \int_N \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

不等式没能实现, 于是猜想加权分配

$$\frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)} \leqslant \lambda\frac{1}{1+f(x)} + (1-\lambda)\frac{1}{b-a}, \forall\lambda\in[0,1].$$

从而

$$\lambda \geqslant \frac{\frac{t}{b-a-1+t^2}-\frac{1}{b-a}}{\frac{1}{1+t}-\frac{1}{b-a}}, \forall t\in[0,b-a-1).$$

于是

$$\lambda \geqslant \lim_{t\to(b-a-1)^+}\frac{\frac{t}{b-a-1+t^2}-\frac{1}{b-a}}{\frac{1}{1+t}-\frac{1}{b-a}} = \lim_{t\to(b-a-1)^+}\frac{\frac{b-a-1-t^2}{(b-a-1+t^2)^2}}{-\left(\frac{1}{1+t}\right)^2} = 1-\frac{1}{b-a-1}.$$

下面证明 $\lambda = 1-\frac{1}{b-a-1}$ 为所需要的常数. 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{t}{b-a-1+t^2}-\left(\frac{1-\frac{1}{b-a-1}}{1+t}-\frac{1}{(b-a)(b-a)}\right)\\ &= -\frac{(t-b+a+1)^2(t+b-a-1)}{(b-a)(b-a-1)(t+1)(t^2+b-a-1)} \leqslant 0,\end{aligned} \tag{30.90}$$

我们有

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a-1+f^2(x)}\mathrm{d}x \leqslant \left(1-\frac{1}{b-a-1}\right)\int_a^b \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{b-a-1}\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = 1.$$

显然由(30.90)知等号成立条件为 $f(x)=b-a-1, \forall x\in[0,1]$.

71. (71.) 考虑

$$g(t) \triangleq \int_a^t |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{(t-a)^2}{2}\int_a^t |f'(x)|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^t |f'(x)|^2(x-a)^2\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned}g'(t) &= |f(t)|^2 - (t-a)\int_a^t |f'(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{(t-a)^2}{2}|f'(t)|^2 + \frac{1}{2}|f'(t)|^2(t-a)^2\\ &= |f(t)|^2 - (t-a)\int_a^t |f'(x)|^2\mathrm{d}x = \left|\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x\right|^2 - (t-a)\int_a^t |f'(x)|^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant 0,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 Cauchy 不等式16.1. 因此我们有 g 递减, 从而 $g(b)\leqslant g(a)=0$, 即(16.112)成立.

72. (72.) 我们由积分中值定理11.3, 存在 $\theta\in(a,b)$ 使得 $f(\theta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 于是我们运用 Cauchy 不等式16.1有

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-A|^2\mathrm{d}x &= \int_a^b |f(x)-f(\theta)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_\theta^x f'(y)\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_a^b |x-\theta|\int_\theta^x |f'(y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |x-\theta|\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_a^b (b-a)\mathrm{d}x\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y = (b-a)^2\int_a^b |f'(y)|^2\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

止步于此我们当然是不满意的, 稍微改进一下放缩技术我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-A|^2\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b |x-\theta|\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\\ &=\int_a^\theta (\theta-x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y+\int_\theta^b (x-\theta)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\\ &=\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\theta(\theta-a-b)\right]\cdot\int_a^b |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(y)|^2\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自关于 θ 的二次函数 $\frac{a^2+b^2}{2}+\theta(\theta-a-b)$ 在 $\theta\in[a,b]$ 求最值.

为探索最佳系数, 我们注意到

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-A|^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x+(b-a)A^2-2A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x-A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

由定理16.7知

$$\int_a^b |f(x)-A|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

这里取等条件是

$$f(x)=c_1+c_2\cos\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right),c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

73. (73.) 我们由 Cauchy 不等式16.1有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_0^1\left(x-\frac12\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac12\right)\mathrm{d}x\right)^2\\ &=\left(\frac{f(1)+f(0)}{2}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\frac{1}{24}+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\frac16\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自

$$\left(\frac{1}{24}+t\right)^2-\frac16 t=\frac{(24t-1)^2}{576}\geqslant 0.$$

于是由 $\int_0^1\left(x-\frac12\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$ 得

$$\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

然后

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\frac12\int_0^1\left|2a+f'(x)-f'\left(\frac12\right)\right|^2\mathrm{d}x\\ &=\frac12\int_0^1\left[4a^2+\left(\int_{\frac12}^x f''(y)\,\mathrm{d}y\right)^2+4a\int_{\frac12}^x f''(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2a^2+\frac12\int_0^1\left[\left(\int_{\frac12}^x 2b\mathrm{d}y\right)^2\right]\mathrm{d}x+2a\int_0^1\left|\int_{\frac12}^x 2b\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\ &=2a^2+2b^2\int_0^1\left(x-\frac12\right)^2\mathrm{d}x+4ab\int_0^1\left|x-\frac12\right|\mathrm{d}x\\ &=2a^2+\frac{b^2}{6}+ab.\end{aligned}$$

74. (74.) 首先由开集上的上凸函数一定连续13.2知 f 连续. 考虑

$$F(h)\triangleq\frac{b-a+2h}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{a-h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x,h\in[0,+\infty),$$

我们有

$$F'(h)=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-f(b+h)+f(a-h).$$

由割线不等式

$$f(x)\geqslant\frac{f(b+h)-f(a-h)}{b-a+2h}(x-a+h)+f(a-h),x\in[a-h,b+h],$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\frac{f(b+h)-f(a-h)}{b-a+2h}(x-a+h)+f(a-h)\right]\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{b-a}\left[\frac{f(b+h)-f(a-h)}{b-a+2h}\int_a^b(x-a+h)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+f(a-h)\\&=\frac{f(b+h)-f(a-h)}{2(b-a+2h)(b-a)}(x-a+h)^2\,|_a^b+f(a-h)\\&=\frac{f(b+h)-f(a-h)}{2(b-a+2h)(b-a)}\left[(b-a+h)^2-h^2\right]+f(a-h)\\&=\frac{f(b+h)-f(a-h)}{2}+f(a-h)=\frac{f(b+h)+f(a-h)}{2}.\end{aligned}$$

于是 $F'(h)\geqslant0\Rightarrow F(h)\geqslant F(0)=0$, 这就证明了(16.113).

75. (75.) 首先因为在 $[\alpha,1]$ 上 $\chi_{[\alpha,\beta]}$ 递减, 由切比雪夫不等式16.6我们有

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_\alpha^1\chi_{[\alpha,\beta]}(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant(1-\alpha)\int_\alpha^1\chi_{[\alpha,\beta]}(x)f(x)\,\mathrm{d}x=(1-\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[\alpha,1]\\0, & x\in[0,\alpha)\end{cases}$, 可知不等式(16.114)等号成立, 但 f 不满足连续性假设. 于是我们改进为

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\alpha+\frac{1}{n},1\right]\\n(x-\alpha), & x\in\left[\alpha,\alpha+\frac{1}{n}\right)\\0, & x\in[0,\alpha)\end{cases},n\in\mathbb{N}.$$

此时当 n 充分大我们有

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1-\alpha-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n},\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}+\beta-\alpha-\frac{1}{n}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1-\alpha,\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x=\beta-\alpha,$$

这就证明了 $\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不可改进.

76. (76.) 由 Hermite 插值定理11.1, 对每一个 $x\in[0,2]$, 存在 $\theta\in[0,2]$ 使得

$$f(x)=\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}x(x-2)(x-1)^2.\tag{30.91}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_0^2 \left[\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}x(x-2)(x-1)^2\right]\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\frac{1}{24}\cdot\int_0^2 x(2-x)(x-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{90}\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right|.\end{aligned}$$

77. (77.) 对 $t\in(0,T)$, 取 $N\in\left(\frac{t}{\tau}-1,\frac{t}{\tau}\right]\bigcap\mathbb{Z}$, 于是

$$t-N\tau\geqslant 0>t-(N+1)\tau.$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-a(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{t-N\tau} e^{-a(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t-(k+1)\tau}^{t-k\tau} e^{-a(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant e^{-aN\tau}\int_0^{\tau} g(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{k=0}^{N-1}e^{-ak\tau}\int_{t-(k+1)\tau}^{t-k\tau} g(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant b\tau e^{-aN\tau}+b\tau\sum_{k=0}^{N-1}e^{-ak\tau}=b\tau\sum_{k=0}^{N}e^{-ak\tau} \\ &< b\tau\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ak\tau}=\frac{b\tau}{1-e^{-a\tau}}.\end{aligned}$$

78. (78.)

(a). 用 $-f$ 代替 f 可不妨设 f 非负, 用 $f(a+b-x)$ 代替 f 可不妨设 f 递增, 因此可不妨设 $f',f\geqslant 0$.

设

$$g(x)\triangleq[f(x)-f(a)]^2-2\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y,$$

我们有

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2[f(x)-f(a)]f'(x)-2\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot f(x) \\ &\leqslant 2f(x)f'(x)-2\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot f(x)\leqslant 0,\end{aligned}$$

即

$$g(b)\leqslant g(a)=0\Rightarrow[f(b)-f(a)]^2\leqslant 2\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y,$$

这就是(16.115).

(b). 最后我们指出, 如果我们已经先证明了 f 不变号的情况, 那么对于变号的情况可以如此得到: 设 $f(x_0)=0,x_0\in[a,b]$, 则

$$\begin{aligned}(f(b)-f(a))^2 &\leqslant 2\left[(f(b)-f(x_0))^2+(f(x_0)-f(a))^2\right] \\ &\leqslant 4\sup_{x\in[x_0,b]}|f'(x)|\int_{x_0}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x+4\sup_{x\in[a,x_0]}|f'(x)|\int_a^{x_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 4\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_{x_0}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x+4\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_a^{x_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= 4\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

79. (79.) 注意本题如果采用下述做法, 则是错的.

$$\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}.$$

这是因为导数未必可以做积分. 但是微分学方法和积分学方法往往可以互相转化, 也即下面的:

考虑

$$g(x) \triangleq \int_a^x \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y + \frac{1}{f(x)},$$

我们有

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f(x) - f'(x)}{f^2(x)} \leqslant 0.$$

于是

$$g(b) = \int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y + \frac{1}{f(b)} \leqslant g(a) = \frac{1}{f(a)},$$

这就证明了(16.116).

80. (80.) 由定积分定义得

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) \pm f(y)|^\alpha \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| f\left(\frac{i}{n}\right) \pm f\left(\frac{j}{n}\right)\right|^\alpha.$$

由极限的保不等式性, 我们只需证明

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|^\alpha \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i + x_j|^\alpha, \forall x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n. \tag{30.92}$$

当 $\alpha = 2$, 我们有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(|x_i + x_j|^2 - |x_i - x_j|^2\right) = 4\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geqslant 0,$$

即(30.92)成立.

当 $\alpha \in (0, 2)$, 记

$$C \triangleq \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t > 0,$$

我们由换元积分法得

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(at)}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t = |a|^\alpha \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t, \forall a \in \mathbb{R}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(|x_i + x_j|^\alpha - |x_i - x_j|^\alpha\right) &= \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \frac{\cos[(x_i - x_j)t] - \cos[(x_i + x_j)t]}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{C} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \frac{\sin(x_i t)\sin(x_j t)}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t = \frac{2}{C} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n \sin(x_i t)\right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0,\end{aligned}$$

即(30.92)成立. 自然的就有(16.117)成立.

注注意到当 $\alpha = 1$, 我们有

$$\begin{aligned}2\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\geqslant \int_0^1 \int_0^1 |f(x) - f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\geqslant \int_0^1 \int_0^1 |f(x) - f(y) + f(x) + f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

就得到蒲和平的积分不等式

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_0^1 \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

81. (81.) 设

$$g(x) \triangleq f(x) - \frac{f(1) - f(-1)}{2}(x + 1) - f(-1).$$

由 f 在割线下方得 $g\leqslant 0$ 且 g 下凸. 因为 $f(1),f(-1)\geqslant 0$, 我们有

$$\frac{f(1)-f(-1)}{2}(x+1)+f(-1)\geqslant 0, x\in[-1,1]\Rightarrow g(x)\leqslant f(x), x\in[-1,1].$$

此外我们注意到 $g(1)=g(-1)=0$, 于是 $g(x)\leqslant 0,\forall x\in[-1,1]$. 现在

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x)\geqslant \min_{x\in[-1,1]} g(x), -\int_{-1}^{1} f''(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1} g''(x)\,\mathrm{d}x,$$

即我们只需对 g 证明(16.118).

若 g 最小值为 0, 则 $g(x)=0,\forall x\in[-1,1]$, 此时显然(16.118)成立. 若 g 最小值为负数, 则设 $c\in(-1,1)$ 使得 $g(c)=\min\limits_{x\in[-1,1]} g(x)$. 于是利用 $g'(c)=0$ 得

$$g(c)=-\int_{-1}^{c} g''(t)(1+t)\,\mathrm{d}t\geqslant -2\int_{-1}^{c} g''(t)\,\mathrm{d}t;$$
$$g(c)=-\int_{c}^{1} g''(t)(1-t)\,\mathrm{d}t\geqslant -2\int_{c}^{1} g''(t)\,\mathrm{d}t,$$

相加即

$$g(c)\geqslant -\int_{-1}^{1} g''(t)\,\mathrm{d}t,$$

这就是不等式(16.118).

82. (82.) 由 Cauchy 不等式16.1得

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

即(16.119)成立.

注[♠] 有同学问, 如果要证明的是

$$\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2,\tag{30.93}$$

那又该如何呢?

事实上由卷积磨光13.14, 我们考虑

$$\varphi_\delta(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}|y|\chi_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\delta y|\chi(y)\,\mathrm{d}y, x\in\mathbb{R},\delta>0.$$

对 $x=0$, 注意到

$$\begin{aligned}\varphi_\delta'(0)&=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\chi_\delta'(-y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\chi'(-y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\chi'(y)\,dy=0.\end{aligned}$$

对 $x>0$, 当 δ 充分小, 我们知道

$$\begin{aligned}\varphi_\delta'(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\chi_\delta'(x-y)\,dy\\&=\frac{1}{\delta}\int_{-1}^{1}|x-\delta y|\chi'(y)\,dy\\&=\frac{1}{\delta}\int_{-1}^{1}(x-\delta y)\chi'(y)\,dy\\&=-\int_{-1}^{1}y\chi'(y)\,dy\\&=1.\end{aligned}$$

对 $x<0$, 当 δ 充分小, 类似的 $\varphi_\delta'(x)=-1$.

又对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}|\varphi_\delta(x_1)-\varphi_\delta(x_2)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}(|x_1-\delta y|-|x_2-\delta y|)\chi(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|x_1-x_2|\chi(y)\,\mathrm{d}y = |x_1-x_2|,\end{aligned}$$

从而

$$|\varphi_\delta'(x)| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \delta > 0. \tag{30.94}$$

我们还有

$$|\varphi_\delta(f(x))| = \int_{-1}^{1}|f(x)-\delta y|\chi(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \int_{-1}^{1}|y|\chi(y)\,\mathrm{d}y, \forall \delta \in (0,1). \tag{30.95}$$

注意到由(16.119)知

$$12\left(\int_0^1 \varphi_\delta(f(x))\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 |\varphi_\delta'(f(x))f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

由控制收敛定理[34]和

$$\lim_{\delta\to 0^+}\varphi_\delta(f(x)) = |f(x)|, \lim_{\delta\to 0^+}\varphi_\delta'(f(x)) = \mathrm{sgn}f(x)$$

可得

$$12\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 |\mathrm{sgn}f(x)\cdot f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

这就证明了(30.93).

如果借助一点“高端”的语言, 即

定理 30.1

设 $f \in W^{1,p}(V,\mathrm{loc}), V \subset \mathbb{R}^n, 1 \leqslant p < \infty$ 是一个开集, 则 $|f| \in W^{1,p}(V,\mathrm{loc})$ 且 $|f|$ 有弱导数

$$\mathrm{sgn}f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1,2,\cdots,n.$$

♡

83. (83.) 由 Cauchy 积分不等式16.1得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{1+x}\mathrm{d}x\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 (1-2x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = 4\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{4}{\int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{1+x}\mathrm{d}x} = \frac{2}{\ln 2 - \frac{2}{3}},$$

我们就得到了(16.120).

84. (84.) 首先

$$g(x,y) \triangleq \frac{\partial^2(1-\cos(xy))}{\partial x\partial y} = \sin(xy) + xy\cos(xy) \geqslant 0, \forall x,y \in [0,1].$$

然后[35]

$$\begin{aligned}1-\cos(xy) &= \int_0^y\left(\int_0^x g(u,v)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v \leqslant \int_0^x \mathrm{d}u\int_0^{f(u)} g(u,v)\,\mathrm{d}v + \int_0^y \mathrm{d}v\int_0^{f^{-1}(v)} g(u,v)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^x f(u)\sin(uf(u))\,\mathrm{d}u + \int_0^y f^{-1}(v)\sin\left(vf^{-1}(v)\right)\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

[34]控制函数的不等式由(30.94)和(30.95)提供.

[35]画图理解不等式最佳, 图见mse.

这就证明了(16.121).

85. (85.) 一方面

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x+2\right)^2\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\left|f'''(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x+2\right)f'''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$=\left(-\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x+2\right)'''f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=36\left(\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

另外一方面我们有

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x+2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{416}{35},\frac{416}{35\cdot36}=\frac{104}{315},$$

于是不等式(16.122)成立.

86. (86.) 记 $k(x)\triangleq x+f(x)$, 首先由 $f(-1)\geqslant f(1)$, 我们有

$$k(-1)+1\geqslant k(1)-1.$$

由 k 递增我们有

$$k(y)-k(x)\leqslant k(1)-k(-1)\leqslant 2,\ \forall x,y\in[-1,1]. \tag{30.96}$$

若 k 为常数, 则 $f(x)=-x$, 因此

$$\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

下设 k 不为常值函数并运用第二积分中值定理11.3和

$$\int_{-1}^{1}k(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=0,$$

我们知道对某个 $\theta\in(-1,1)$ 有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x-\frac{2}{3}&=\int_{-1}^{1}(k(x)-2x)\,k(x)\,\mathrm{d}x\\&=k(-1)\int_{-1}^{\theta}(k(x)-2x)\,\mathrm{d}x+k(1)\int_{\theta}^{1}(k(x)-2x)\,\mathrm{d}x\\&=k(-1)\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,\mathrm{d}x-\theta^2+1\right]+k(1)\left[\int_{\theta}^{1}k(x)\,\mathrm{d}x-1+\theta^2\right]\\&=k(-1)\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,\mathrm{d}x-\theta^2+1\right]-k(1)\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,\mathrm{d}x-\theta^2+1\right]\\&=[k(-1)-k(1)]\cdot\left[\int_{-1}^{\theta}k(x)\,\mathrm{d}x-\theta^2+1\right].\end{aligned}$$

另一方面, 如果

$$-\int_{\theta}^{1}k(x)\,\mathrm{d}x-\theta^2+1=\int_{-1}^{\theta}k(x)\,\mathrm{d}x-\theta^2+1<0,$$

对上式两边用第一积分中值定理11.3, 存在 $\zeta\in(\theta,1),\eta\in(-1,\theta)$ 成立

$$[k(\zeta)-\theta-1](\theta-1)=[k(\eta)-\theta+1](\theta+1)<0,$$

因此

$$k(\zeta)-k(\eta)>(\theta+1)-(\theta-1)=2,$$

这是和(30.96)矛盾! 现在我们证明了(16.123)且知道 $\frac{2}{3}$ 是不可改进的.

87. (87.) 注意到

$$\int_0^1(x-1)e^xf''(x)\,\mathrm{d}x=f'(0)-\int_0^1xe^xf'(x)\,\mathrm{d}x=f'(0)-ef(1)+\int_0^1(x+1)e^xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

我们由 Cauchy 不等式16.1得

$$\left|\int_0^1 (x+1)\,e^x f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x}\mathrm{d}x \int_0^1 |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e^2-5}{4},$$

这就证明了

$$\left|\int_0^1 (x+1)\,e^x f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\sqrt{e^2-5}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3^2-5}}{2} = 1.$$

88. (88.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{\sqrt{x}} 1\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} 1\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} 1\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} \\
&= 1\cdot\sqrt{x} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)} + \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)} \\
&\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant} \sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)} = 11.
\end{aligned}$$

上述 Cauchy 不等式等号成立充要条件是 $x=9$. 而当 $x=9$ 时有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{9}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{9+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-9}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{周期性}}{=} 3\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + 6\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 11.
\end{aligned}$$

故要证不等式等号成立的充要条件是 $x=9$.

89. (89.) 把 $f_j(xt), j=1,2,\cdots$ 看成整体可不妨设 $x=1$. 当 $n=2$, 我们考虑

$$\varphi(a,b) \triangleq \ln\frac{e^a+e^b}{2}.$$

其 Hess 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{a+b}}{(e^a+e^b)^2} & -\frac{e^{a+b}}{(e^a+e^b)^2} \\ -\frac{e^{a+b}}{(e^a+e^b)^2} & \frac{e^{a+b}}{(e^a+e^b)^2} \end{pmatrix}$$

半正定, 故 Taylor 中值定理得

$$\begin{aligned}
\varphi(a(t),b(t)) \geqslant{}& \varphi\left(\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&+ \left[a(t) - \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t\right]\varphi_x'\left(\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&+ \left[b(t) - \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t\right]\varphi_y'\left(\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t\right),
\end{aligned}$$

从而由

$$\int_0^1 \left[a(t) - \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[b(t) - \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t = 0$$

得

$$\int_0^1 \varphi(a(t),b(t))\,\mathrm{d}t \geqslant \varphi\left(\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

现在取 $a(t)=\ln f_1(t), b(t)=\ln f_2(t)$, 我们有

$$\int_0^1 \ln\left[\frac{f_1(t)+f_2(t)}{2}\right]\mathrm{d}t \geqslant \ln\frac{e^{\int_0^1 \ln f_1(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_0^1 \ln f_2(t)\mathrm{d}t}}{2},$$

即

$$e^{\int_0^1 \ln[f_1(t)+f_2(t)]\mathrm{d}t} \geqslant e^{\int_0^1 \ln f_1(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_0^1 \ln f_2(t)\mathrm{d}t}.$$

现在对一般的 n, 由上式反复迭代即可得证, 即

$$\begin{aligned} e^{\int_0^1 \ln[f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)]\mathrm{d}t} &\geqslant e^{\int_0^1 \ln f_1(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_0^1 \ln[f_2(t)+f_3(t)+\cdots+f_n(t)]\mathrm{d}t} \\ &\geqslant e^{\int_0^1 \ln f_1(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_0^1 \ln f_2(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_0^1 \ln[f_3(t)+\cdots+f_n(t)]\mathrm{d}t} \\ &\cdots \\ &\geqslant e^{\int_0^1 \ln f_1(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_0^1 \ln f_2(t)\mathrm{d}t} + \cdots + e^{\int_0^1 \ln f_n(t)\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

90. (90.) 显然 $f \in C(\mathbb{R})$. 首先

$$f(0) = \int_1^\infty \frac{\cos(0\cdot x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x > 0.$$

注意到 $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ 在 $[1,+\infty)$ 递减, 于是

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \int_1^\infty \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\sin(\pi x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{x\sin(\pi x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \int_{2n-1}^{2n} \frac{x\sin(\pi x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \int_{2n}^{2n+1} \frac{x\sin(\pi x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \int_{2n-1}^{2n} \frac{x\sin(\pi x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \int_{2n-1}^{2n} \frac{(x+1)\sin(\pi x)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \int_{2n-1}^{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{x+1}{\left(1+(x+1)^2\right)^2}\right)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x < 0. \end{aligned}$$

现在由零点定理得 f 在 $[0,\pi]$ 有零点.

91. (91.) 注意到 $t+\sin t$ 在 $\mathbb{R}$ 严格递增, 其反函数为 g, 则题目条件不等式即

$$f(x) \geqslant g(x), \forall x \in [0,\pi].$$

现在

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi g(t+\sin t)\,\mathrm{d}(t+\sin t) \\ &= \int_0^\pi t(1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2} - 2. \end{aligned}$$

92. (92.) 设

$$u(x) \triangleq \int_a^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t, v(x) \triangleq \int_a^x \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t, \phi(x) \triangleq \sqrt{1+x^2},$$

我们有

$$\phi''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, u''(t) = \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}, v''(t) = \frac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}} > 0.$$

现在原不等式等价于

$$\int_a^b [\phi(u'(t)) - \phi(v'(t))]\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

注意到

$$u(a) = v(a), u(b) = v(b), v(t) \geqslant u(t), \forall t \in [a,b],$$

利用切线不等式我们有

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left[\phi\left(u'\left(t\right)\right)-\phi\left(v'\left(t\right)\right)\right]\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \phi'\left(v'\left(t\right)\right)\left(u'\left(t\right)-v'\left(t\right)\right)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b \phi''\left(v'\left(t\right)\right)v''\left(t\right)\left(v\left(t\right)-u\left(t\right)\right)\mathrm{d}t \geqslant 0,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

93. (93.) 考虑

$$F\left(x\right)\triangleq x+\frac{f\left(x\right)f'\left(x\right)}{\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}+1}-\int_0^x \sqrt{1+\left[f'\left(t\right)\right]^2}\,\mathrm{d}t,$$

我们有

$$F'\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)f''\left(x\right)}{\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}\cdot\left(\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}+1\right)}.$$

由题目初值条件有

$$f''\left(x\right)>0\Rightarrow f'\left(x\right)\geqslant f'\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)>f\left(0\right)=0,\forall x\in\left(0,a\right),$$

即

$$F'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(0,a\right).$$

现在自然有

$$F\left(x\right)>F\left(0\right)=0,\forall x\in\left(0,a\right),$$

即不等式(16.125)成立.

94. (94.) 注意到

$$\int_{-1}^1 \left|x^2-1\right|^2\mathrm{d}x=\frac{16}{15},$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 \left|f''\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x\int_{-1}^1 \left|x^2-1\right|^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{-1}^1 f''\left(x\right)\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_{-1}^1 f'\left(x\right)\left(2x\right)\mathrm{d}x\right)^2=\left(2-\left(-2\right)-2\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2\\&=16,\end{aligned}$$

于是

$$\int_{-1}^1 \left|f''\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{16}{\frac{16}{15}}=15.$$

由 Cauchy 不等式取等条件得

$$f''\left(x\right)=c\left(x^2-1\right)\Rightarrow f\left(x\right)=c\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}\right)+ax+b.$$

代入初值条件得

$$f\left(x\right)=-\frac{5}{16}x^4+\frac{15}{8}x^2-\frac{9}{16},$$

这就是使得等号成立的所有函数.

95. (95.) 直接计算得

$$\left(\frac{y}{y^2+t}\right)'=\frac{t-y^2}{\left(t+y^2\right)^2},\left(\frac{y}{y^2+t}\right)''=\frac{2y\left(y^2-3t\right)}{\left(t+y^2\right)^3}.$$

下证明[36]

$$\frac{y}{y^2+t} \leqslant \frac{t-1}{(t+1)^2}(y-1)+\frac{1}{1+t}, \forall y \geqslant 0, t \geqslant 1. \tag{30.97}$$

直接计算得

$$\frac{y}{y^2+t}-\frac{t-1}{(t+1)^2}(y-1)-\frac{1}{1+t}=-\frac{(y-1)^2[(t-1)y+2t]}{(t+1)^2(y^2+t)} \leqslant 0.$$

由(30.97)得

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+t}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[\frac{t-1}{(t^2+1)^2}(f(x)-1)+\frac{1}{1+t}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{1+t}.$$

96. (96.) 由 Holder 不等式16.1得

$$|f(x)|^p=\left|\int_a^x f'(y)\,\mathrm{d}y\right|^p \leqslant (x-a)^{p-1}\int_a^x |f'(y)|^p\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b (x-a)^{p-1}\int_a^x |f'(y)|^p\,\mathrm{d}y\\ &=\int_a^b |f'(y)|^p\,\mathrm{d}y\int_y^b (x-a)^{p-1}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{p}\int_a^b [(b-a)^p-(x-a)^p]\,|f'(x)|^p\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

97. (97.) 由定义得

$$x_1=\frac{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}, x_2=\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\iint_{[0,1]^2} xf^2(x)f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{[0,1]^2} xf(x)f^2(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{[0,1]^2} xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{[0,1]^2} yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}(x-y)f(x)f(y)[f(x)-f(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,\end{aligned}$$

即 $x_2>x_1$.

98. (98.) 设

$$L^c \triangleq [0,1]\setminus[a,b], L \triangleq [a,b].$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_L f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_L |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |L|;\\ \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{L^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{L^c} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |L^c|,\end{aligned}$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \min\{|L|,|L^c|\}.$$

[36]看出 Jensen 不等式结构, 猜想切线不等式成立.

又

$$|L|+|L^c|=1\Rightarrow\min\left\{|L|,|L^c|\right\}\leqslant\frac{1}{2},$$

这就完成了证明.

99. (99.) 设 $F(x)\triangleq\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$F(0)=F(1)=0,|F''(x)|\leqslant 1.$$

由拉格朗日插值公式11.1得 $\theta\in[0,1]$ 使得

$$F(x)=\frac{F''(\theta)}{2}x(1-x).$$

于是

$$\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\frac{|F''(\theta)|}{2}x(1-x)\leqslant\frac{1}{8},\forall x\in[0,1].$$

100. (100.) 利用 w 的严格递增性得

$$\frac{d}{dt}W\left(a+\int_{t_0}^t f(s)\,w(u(s))\,\mathrm{d}s\right)=\frac{f(t)\,w(u(t))}{w\left(a+\int_{t_0}^t f(s)\,w(u(s))\,\mathrm{d}s\right)}\leqslant f(t),\forall t\in[t_0,T].$$

不等式两边积分并利用 W 递增得

$$W(u(t))\leqslant W\left(a+\int_{t_0}^t f(s)\,w(u(s))\,\mathrm{d}s\right)-W(a)\leqslant\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s,\forall t\in[t_0,T].$$

101. (101.) 不妨设

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty,\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

若 $\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x=0$, 则 f 是线性函数, 从而 $f=0$. 不等式自然成立. 下设 $\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x>0$.
对 $h>0$, 由 Taylor 公式积分余项得

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\int_0^h(h-t)f''(x+t)\,\mathrm{d}t;$$
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\int_0^h(h-t)f''(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)-\int_0^h(h-t)\left(f''(x+t)-f''(x-t)\right)\mathrm{d}t}{2h}\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|+\int_0^h(h-t)\left(|f''(x+t)|+|f''(x-t)|\right)\mathrm{d}t}{2h}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{2h}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^h\frac{h-t}{2h}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}}\left(|f''(x+t)|+|f''(x-t)|\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^h\frac{h-t}{h}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}h\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在上述不等式取

$$h\triangleq\sqrt{\frac{2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x}},$$

则

$$\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x},$$

这就证明了不等式.

102. (102.) 注意到恒等式[37]

$$f(x)-1=(x-1)\int_0^x tf''(t)\,\mathrm{d}t-x\int_x^1(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,$$

于是有

$$\begin{aligned}|f(x)-1|&\leqslant(1-x)\int_0^x t|f''(t)|\,\mathrm{d}t+x\int_x^1(1-t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant(1-x)x\int_0^x|f''(t)|\,\mathrm{d}t+x(1-x)\int_x^1|f''(t)|\,\mathrm{d}t\\&=(1-x)x\int_0^1|f''(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1|f''(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

103. (103.) 不等式左边是 Jensen 不等式16.5. 我们主要来证明右边.

记

$$M\triangleq\max_{x\in[0,1]}f(x),m\triangleq\min_{x\in[0,1]}f(x),$$

我们有

$$\frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}\geqslant0\Rightarrow f(x)+\frac{mM}{f(x)}\leqslant m+M.$$

积分并由 Jensen 不等式16.5得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+mMe^{\int_0^1\ln\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant m+M.$$

由均值不等式得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant m+M-\left(e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}+mMe^{-\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\right)\\&\leqslant m+M-\sqrt{mMe^{-\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}}=m+M-2\sqrt{mM}\\&=\left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)^2=\max_{0\leqslant x,y\leqslant1}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}\right)^2,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

104. (104.) 首先对 $x,y\in[-1,1],\lambda\in(0,1)$, 我们有

$$\begin{aligned}&f^2(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant[\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)]^2\\&=\lambda^2f^2(x)+(1-\lambda)^2f^2(y)+2\lambda(1-\lambda)f(x)f(y)\\&=\lambda f^2(x)+(1-\lambda)f^2(y)-\lambda(1-\lambda)(f(x)-f(y))^2\\&\leqslant\lambda f^2(x)+(1-\lambda)f^2(y),\end{aligned}$$

即 f^2 在 $[-1,1]$ 下凸. 然后由 Hadamard 不等式11.4, 我们有

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant2f^2\left(\frac{1+(-1)}{2}\right)=2f^2(0).$$

105. (105.) 分部积分得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{1}{3}\right]f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是由 Cauchy 不等式16.1得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{1}{3}\right]^2\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}\\&=\frac{1}{3\sqrt{5}}\sqrt{\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

等号在 $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+x^2$ 取等.

[37] 即拉格朗日插值积分余项11.2

106. (106.) 记全体不超过 n 次的多项式空间为 V. 考虑 V 上的内积为

$$(p,q) \triangleq \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x.$$

注意到

$$T : V \to \mathbb{R}, p \to p(0)$$

是 V 上的线性函数. 取 V 的一组标准正交基为 $p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}$, 则

$$q \triangleq \sum_{i=1}^{n+1} p_i(0)\, p_i \in V.$$

对任何 $p \in V$ 有[38]

$$p(0) = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x,$$

因此

$$|p(0)| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |q(x)| \int_{-1}^{1} |p(x)|\, \mathrm{d}x.$$

即

$$C \triangleq \sup_{x\in[-1,1]} |q(x)| > 0$$

为所求.

107. (107.) 注意到

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0), \lim_{x\to 0^+} \frac{f^2(x)}{x} = 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left[f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1-x^2\right)|f'(x)|^2\, \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right) f(x) f'(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1-x^2\right)|f'(x)|^2\, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1-x^2}{x}\mathrm{d}f^2(x) + \int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1-x^2\right)|f'(x)|^2\, \mathrm{d}x + \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\frac{1-x^2}{x} + \int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1-x^2\right)|f'(x)|^2\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{-x^2-1}{x^2} f^2(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1-x^2\right)|f'(x)|^2\, \mathrm{d}x - 2\int_0^1 |f(x)|^2\, \mathrm{d}x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

30.10 非数学类级数

1. (1.) 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n^{p-1}} = p,$$

于是存在 $c > 0$ 使得

$$(n+1)^p - n^p \leqslant cn^{p-1}.$$

[38] 利用线性性, 你可以对 $p = p_i$ 验证即可.

定义 $S_0 \triangleq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p\left(S_n-S_{n-1}\right)}{S_n^p}=\frac{1}{S_1^{p-1}}+\sum_{n=2}^{N}n^p\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{S_1^{p-1}}+\sum_{n=2}^{N}n^p\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}\left[n^p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\right)\right]\\&=\frac{1}{S_1^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n^p}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{(n+1)^p}{S_n^{p-1}}\right)+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{(n+1)^p-n^p}{S_n^{p-1}}\right)\\&\leqslant c_1+c_2\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n}{S_n}\right)^{p-1}=c_1+c_2\sum_{n=2}^{N}\frac{n^{p-1}p_n^{\frac{p-1}{p}}}{S_n^{p-1}}\frac{1}{p_n^{\frac{p-1}{p}}}\\&\overset{\text{Holder 不等式}}{\leqslant}c_1+c_2\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{p_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant c_1+c_3\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

注意上述不等式左边的阶大于最右边的阶, 我们只能有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p p_n}{S_n^p}<\infty$.

2. (2.) 由幂级数的 Cauchy 积理论, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}H_n x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x},|x|<1.$$

于是两边积分有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n x^{n+1}}{n+1}=-\int_0^x\frac{\ln(1-y)}{1-y}dy.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n(n+1)}&=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-y)}{1-y}dy\\&\overset{y=1-y}{=}-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln y}{y}dy\\&=\ln^2 2.\end{aligned}$$

3. (3.) 固定 $M>1$, 我们考虑

$$A_M\triangleq\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{x_n}{x_{n+1}}\leqslant M\right\}.$$

由

$$+\infty=\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n\in A_M}x_n+\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A_M}x_n,$$

我们有 $\sum\limits_{n\in A_M}x_n=+\infty$ 或者 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus A_M}x_n$. 如果是前者, 那么

$$\sum_{n\in A_M}x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}}\geqslant\sum_{n\in A_M}x_n e^{-M}=+\infty.$$

如果是后者, 显然 $\mathbb{N}\setminus A_M$ 是无限集. 注意到

$$x_{n+1}<\frac{1}{M}x_n,\forall n\in\mathbb{N}\setminus A_M.$$

设 n_k 严格递增正整数列且

$$x_{n_k+1}<\frac{1}{M}x_{n_k},k=1,2,\cdots.$$

运用 x_n 递减我们知道

$$x_{n_{k+1}} \leqslant x_{n_k+1} < \frac{1}{M} x_{n_k}, k = 1, 2, \cdots,$$

这暗示

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A_M} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} < \infty.$$

这是一个矛盾!, 因此我们证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{-\frac{x_n}{x_{n+1}}} = +\infty.$$

4. (4.) 不妨设 $a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, 记

$$\mathcal{M} = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{a_n \ln \frac{1}{a_n}}{\ln (n+1)} < 2a_n \right\},$$

于是

$$n \notin \mathcal{M} \Rightarrow \frac{a_n \ln \frac{1}{a_n}}{\ln (n+1)} \geqslant 2a_n \Rightarrow a_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

因此我们就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ln \frac{1}{a_n}}{\ln (1+n)} \leqslant \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{a_n \ln \frac{1}{a_n}}{\ln (1+n)} + \sum_{n \notin \mathcal{M}} \frac{a_n \ln \frac{1}{a_n}}{\ln (1+n)} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

证毕!

5. (5.) 注意到, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi \sqrt{n^2+n}\right) \arcsin \frac{n}{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\pi \sqrt{n^2+n} - \pi n\right) \arcsin \frac{n}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi^2}{16n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right].
\end{aligned}$$

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^2}{16n}$ 条件收敛, 我们知道原本级数条件收敛.

笔记 在卷纸上可以更简洁的写为注意到

$$\lim_{n \to \infty} n\sqrt{n} \left[\cos \frac{\pi n}{n + \sqrt{n^2+n}} \arcsin \frac{n}{n+1} - \frac{\pi^2}{16n}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{8}\pi.$$

于是

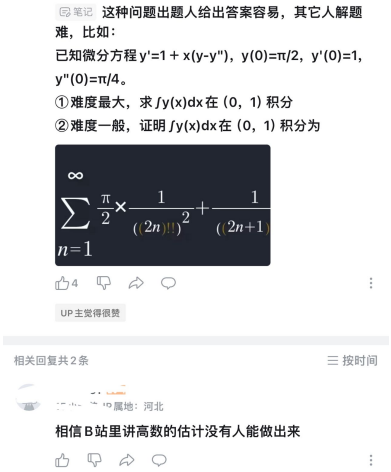
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi \sqrt{n^2+n}\right) \arcsin \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi^2}{16n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]$$

条件收敛.

6. (6.) 本题是标准的形式幂级数法, 我们考虑

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

图 30.10.1: 本题是一个简单的挑衅题.



于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=1+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-1},$$

化简得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)a_{n+2}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^{n+1}.$$

对比系数即得

$$\left(n+2\right)a_{n+2}=a_n-\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2},n=0,1,2,\cdots,$$

即

$$a_{n+2}=\frac{1}{\left(n+2\right)^2}a_n,n=0,1,2,\cdots.$$

迭代得

$$a_{2n}=\frac{1}{\left[(2n)!!\right]^2}\frac{\pi}{2},a_{2n+1}=\frac{1}{\left[(2n+1)!!\right]^2},n=0,1,2,\cdots,$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^1y\left(x\right)dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(a_{2n}x^{2n}+a_{2n+1}x^{2n+1}\right)dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_{2n}}{2n+1}+\frac{a_{2n+1}}{2n+2}\right)\\&=\frac{\pi+1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\left(2n+1\right)\left[(2n)!!\right]^2}+\frac{1}{\left(2n+2\right)\left[(2n+1)!!\right]^2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\pi_1F_2\left(\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)+_2F_3\left(1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;\frac{1}{4}\right)\right)\approx2.2352,\end{aligned}$$

这里的符号是超几何函数.

7. (7.) 由交错级数判别法, 显然原本级数条件收敛. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}}\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\sqrt{n}-\left(n-1\right)\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-\left(n-1\right)\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

于是

$$\sqrt{n+1}\left(S_n\right)^p\text{ 同阶于}n^{\frac{3p+1}{2}},$$

从而级数绝对收敛当且仅当 $\frac{3p+1}{2}>1\Leftrightarrow p>\frac{1}{3}$.

8. (8.) 直接用傅立叶级数有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{x+k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{x+k\pi}\frac{\pi-2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-2\right]\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[(2k+1)\ln(1+k)-(2k-1)\ln k\right]-2\sum_{k=1}^{n}\ln k-2n\right)\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\ln(1+n)-2\sum_{k=1}^{n}\ln k-2n\right)\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(1+n)^{2n+1}}{n!^2e^{2n}}\right)\overset{\text{斯特林公式9.4}}{=}\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(1+n)^{2n+1}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}e^{2n}}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(1+n)^{2n+1}}{2\pi n^{2n+1}}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

9. (9.) 证明的想法类似于 Carleman 不等式, 记

$$c_n=\begin{cases}1, & n=1\\ e^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{\lambda_j}{\Lambda_j}}, & n>1\end{cases},$$

我们运用 Jensen 不等式和求和顺序交换有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left[\frac{(c_1a_1)^{\lambda_1}(c_2a_2)^{\lambda_2}\cdots(c_na_n)^{\lambda_n}}{c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n}}\right]^{\frac{1}{\Lambda_n}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\left(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}}}e^{\frac{\lambda_1}{\Lambda_n}\ln(c_1a_1)+\frac{\lambda_2}{\Lambda_n}\ln(c_2a_2)+\cdots+\frac{\lambda_n}{\Lambda_n}\ln(c_na_n)}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\left(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}}}e^{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\Lambda_n}c_1a_1+\frac{\lambda_2}{\Lambda_n}c_2a_2+\cdots+\frac{\lambda_n}{\Lambda_n}c_na_n\right)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\left(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\Lambda_n}c_ja_j=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\Lambda_n\left(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}}}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\Lambda_ne^{\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i}{\Lambda_n}\sum\limits_{t=1}^{i-1}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t}}}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\Lambda_ne^{\sum\limits_{t=1}^{n-1}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t\Lambda_n}\sum\limits_{i=t+1}^{n}\lambda_i}}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\Lambda_ne^{\sum\limits_{t=1}^{n}\lambda_t\left(\frac{1}{\Lambda_t}-\frac{1}{\Lambda_n}\right)}}=e\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\Lambda_ne^{\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t}}}\\&\overset{x\leqslant e^x-1}{\leqslant}e\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{e^{\frac{\lambda_n}{\Lambda_n}}-1}{e^{\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t}}}=e\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jc_ja_j\sum_{n=j}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{\sum\limits_{t=1}^{n-1}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t}}}-\frac{1}{e^{\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t}}}\right)\\&\leqslant e\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_jc_ja_j}{e^{\sum\limits_{t=1}^{j-1}\frac{\lambda_t}{\Lambda_t}}}=e\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_ja_j.\end{aligned}$$

从证明可以看到, 等号成立条件等且仅当 $a_n=0,n\in\mathbb{N}$.

10. (10.) 注意到

$$\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{1}{2(n+1)}=4\left[\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)}-\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{n(n+1)}{2(n+1)}\right].$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{1}{2(n+1)}=4\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)}-\frac{1}{8}\right].$$

利用 Wallis 公式9.18, 我们有

$$\begin{aligned}&4\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)}-\frac{1}{8}\right]\\&=4\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}\right)^2\frac{n+1}{2}-\frac{1}{8}\right]=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2(n+1)}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

11. (11.) 考虑 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}x^n$, 于是注意到由 Cauchy 积, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}H_nx^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

于是 $x(xf')'=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$, 即

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_0^1f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\ln(1-y)}{(1-y)y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{(1-y)y}\mathrm{d}y\int_y^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1-y)\ln y}{(1-y)y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{\ln(1-y)\ln y}{y}\mathrm{d}y+\int_0^1\frac{\ln(1-y)\ln y}{1-y}\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\frac{\ln(1-y)\ln y}{y}\mathrm{d}y=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1y^{n-1}\ln y\mathrm{d}y\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}xe^{-nx}\mathrm{d}x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^{\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=2\zeta(3).\end{aligned}$$

12. (12.) 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k2^n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1x^{k2^n}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k2^n}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^n}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln\left(\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\left[\lim_{m\to\infty}\frac{(1-x)\prod\limits_{n=0}^{m}\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln\left[\lim_{m\to\infty}\frac{\left(1-x^2\right)\prod\limits_{n=1}^{m}\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\left[\lim_{m\to\infty}\frac{\left(1-x^{2^2}\right)\prod\limits_{n=2}^{m}\left(1+x^{2^n}\right)}{1-x}\right]\mathrm{d}x\\&=\cdots=\int_0^1\ln\left[\lim_{m\to\infty}\frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

13. (13.) 注意到幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 条件收敛, 而幂级数在收敛区间上一定绝对收敛, 因此幂级数收敛半径是 1, 从而
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1.$$
现在 $L=1$ 或者 -1, 若为前者, 则当 n 充分大有 a_{n+1}, a_n 同号, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 这就是一个矛盾! 现在 $L=-1$.

14. (14.) 我们有
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!}{[(2n)!!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\sqrt{e},\end{aligned}$$
这里倒数第二个等号用到了(9.27).

15. (15.) 注意到恒等式
$$\sin^4 x=\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^2(2x),x\in\mathbb{R}.$$
于是我们有
$$4^n\sin^4\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=4^n\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)-4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right),n=1,2,\cdots,$$
即
$$\sum_{n=1}^{\infty}4^n\sin^4\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}4^n\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)-\theta^2=\sin^2\theta-\theta^2.$$

16. (16.) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n}$ 收敛, 由命题8.3, 我们有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=0.$$
由均值不等式, 我们有
$$0=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{b_{k+1}}{b_k}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=0.$$
故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_{n+1}}=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b_n}}=+\infty$, 由根值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=+\infty$, 这就是一个矛盾! 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n}$ 发散.

17. (17.) 我们有
$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)(1-q^{2n-1})&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+q^k)(1-q^{2k-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+q^k)(1-q^{2k-1})(1-q^k)}{1-q^k}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1-q^{2k})(1-q^{2k-1})}{1-q^k}\\&=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}=1.\end{aligned}$$

18. (18.) 注意到

$$\sum_{m_n=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\sum_{m_n=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}\int_0^1 x^{m_1+m_2+\cdots+m_n-1}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{x}\sum_{m_n=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}(-x)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{x}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(-x)^j\right)^n\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{(-x)^n}{x\,(1+x)^n}\mathrm{d}x=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n-1}}{(1+x)^n}\mathrm{d}x.$$

19. (19.) 解决本题的手法叫做 Ravi 替换, 即考虑映射

$$f:T\to\mathbb{N}^3,(a,b,c)\mapsto(b+c-a,a+c-b,a+b-c)\,.$$

注意到 f 是单射且 f 值域是每个分量同为正偶数或者正奇数的三元对且有逆映射 $(x,y,z)\mapsto\left(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{x+z}{2}\right)$, 因此

$$\sum_{(a,b,c)\in T}\frac{2^a}{3^b5^c}=\sum_{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3,\text{同奇偶}}\frac{2^{\frac{x+y}{2}}}{3^{\frac{y+z}{2}}5^{\frac{x+z}{2}}}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{2i+2j}{2}}}{3^{\frac{2i+2k}{2}}5^{\frac{2j+2k}{2}}}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{2i-1+2j-1}{2}}}{3^{\frac{2i-1+2k-1}{2}}5^{\frac{2j-1+2k-1}{2}}}$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{i+j}}{3^{i+k}5^{j+k}}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{i+j-1}}{3^{i+k-1}5^{j+k-1}}=\left(1+\frac{15}{2}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{i+j}}{3^{i+k}5^{j+k}}$$
$$=\frac{17}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{15}\right)^k=\frac{17}{2}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}\frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{15}}=\frac{17}{21}.$$

20. (20.) 首先注意到 $u'=w,v'=u,w'=v$. 于是

$$\left(u^3+v^3+w^3-3uvw\right)'=3u^2u'+3v^2v'+3w^2w'-3u'vw-3uv'w-3uvw'$$
$$=3u^2w+3v^2u+3w^2v-3wvw-3uuw-3uvv=0,$$

因此

$$\left(u^3+v^3+w^3-3uvw\right)|_{x=0}=(1+0+0-3\cdot1\cdot0\cdot0)=1.$$

21. (21.) 首先由(18.64)得 $u_n-u_{n+1}=u_{n+1}^2$, 于是

$$u_{n+1}=\frac{\sqrt{1+4u_n}-1}{2},n\in\mathbb{N}.$$

注意到 u_n 递减到 0, 于是若 u_n 是正数列则由定理8.2得 $u_n\sim\frac{1}{n},n\to\infty$, 这就和 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$ 存在矛盾! 因此 u_n 在 n 充分大时必然恒为 0. 由

$$u_n-u_{n+1}=u_{n+1}^2$$

可得 $u_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$, 这就完成了证明.

22. (22.) 直接计算有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{\max\{i,j\}}}{3^i5^j}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{2^j}{3^i5^j}+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\frac{2^i}{3^i5^j}\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\sum_{j=i+1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^j+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{5^j}\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{i+1}}{1-\frac{2}{5}}+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{i+1}}{1-\frac{1}{5}}\\
&=\frac{5}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{5}\right)^{i+1}+\frac{5}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i-\left(\frac{2}{3}\right)^i\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{i+1}\right]\\
&=\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^i+\frac{5}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i-\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^i\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{15}}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{15}}=\frac{55}{13}.
\end{aligned}$$

23. (23.) 注意到 $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{x}$ 为数列递推函数, 这是递增的且有唯一不动点 0. 求导可证

$$f(x)\leqslant x,\forall x\geqslant 0,f(x)\geqslant x,\forall x\leqslant 0.$$

因此由递增递推数列结论8.4.1我们知道当 $x\geqslant 0$ 成立 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$. 当 $x\leqslant 0$ 成立 $0\geqslant a_{n+1}\geqslant a_n$. 因此我们知道对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

对每个 $k\geqslant 2$, 我们有

$$\prod_{n=1}^{k}a_n\cdot e^{a_{k+1}}=\prod_{n=1}^{k-1}a_n\cdot e^{a_k}-\prod_{n=1}^{k-1}a_n.$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}\prod_{n=1}^{k-1}a_n&=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{k-1}a_n\cdot e^{a_k}-\prod_{n=1}^{k}a_n\cdot e^{a_{k+1}}\right)=a_1e^{a_2}-\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}a_n\cdot e^{a_{k+1}}\\
&=e^x-1-\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}a_n\cdot e^{a_{k+1}}=e^x-1,
\end{aligned}$$

这里[39]

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}a_n\cdot e^{a_{k+1}}=0\cdot 1=0.$$

于是

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}a_n=1+\sum_{k=2}^{\infty}\prod_{n=1}^{k-1}a_n=e^x.$$

24. (24.) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=1.$$

[39]若 n 充分大时 $|a_n|<\frac{1}{2}$, 则

$$0\leqslant\left|\prod_{n=1}^{k}a_n\right|\leqslant C\left(\frac{1}{2}\right)^k\to 0,k\to\infty.$$

现在和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散矛盾! 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

25. (25.) 首先注意到恒等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=na_n-(n+1)\,a_{n+1},n\in\mathbb{N}.$$

于是我们有 na_n 递减有下界 0, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$ 存在.

现在

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_1}{a_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[ka_k-(k+1)\,a_{k+1}\right]=\frac{1}{2}+1\cdot a_1-\lim_{n\to\infty}na_n=1-a.$$

于是由级数收敛的必要条件有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$, 于是存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}a_n,\forall n\geqslant N.$$

因此对 $n\geqslant N$ 成立

$$a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}a_n\leqslant\frac{1}{2^2}a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}a_N.$$

于是夹逼准则给出 $a=\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 这就给出了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$.

26. (26.) 首先要估计 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+k^2},n\to\infty$ 的阶. 由 EM 公式9.3, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{n^2+k^2}&=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+m^2}}{2}+\int_0^m\frac{1}{n^2+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^m b_1(x)\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\mathrm{d}x\\&=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+m^2}}{2}+\int_0^m\frac{1}{n^2+x^2}\mathrm{d}x-2\int_0^m\frac{xb_1(x)}{\left(x^2+n^2\right)^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+k^2}&=\frac{1}{2n^2}+\int_0^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\mathrm{d}x-2\int_0^{\infty}\frac{xb_1(x)}{\left(x^2+n^2\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi}{2n}+O\left(\int_0^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+n^2\right)^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2+k^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

由例题19.72知原级数收敛.

27. (27.) 当 $\alpha>1$, 我们有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}\right|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}-1}<\infty.$$

因此原级数绝对收敛.

当 $0<\alpha\leqslant1$, 我们有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}\right|\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}+1}=\infty,$$

因此原级数不可能绝对收敛. 取 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $m\alpha>1$, 然后由 Taylor 公式得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}{1+\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{2\alpha}}+\frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}-\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{4\alpha}}+\cdots+O\left(\frac{1}{n^{m\alpha}}\right)\right\}.$$

先来证明估计

$$\left|\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|=O\left(\sqrt{n}\right),n\to\infty. \tag{30.98}$$

事实上, 对每一个 $j\in\mathbb{N}$ 都有

$$\left|\sum_{n=j^2}^{(j+1)^2-1}(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right|=\left|\sum_{n=j^2}^{(j+1)^2-1}(-1)^n\right|\leqslant 1.$$

于是对任何正整数 $m\geqslant 4$, 存在唯一的 $j\geqslant 2$ 使得 $j^2\leqslant m<(j+1)^2$. 从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=4}^{m}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|&\leqslant\left|\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}+\sum_{k=j^2}^{m}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{j-1}\left|\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1}(-1)^{k+i}\right|+\left|\sum_{k=j^2}^{m}(-1)^{k+j}\right|\\&\leqslant j-1+1=j\leqslant\sqrt{m},\end{aligned}$$

这就证明了(30.98).

对每一个 $\beta>\frac{1}{2}$, 利用估计(30.98)并由 Abel 变换8.2得

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\beta}&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\beta}\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m-1}\left(\frac{1}{n^\beta}-\frac{1}{(n+1)^\beta}\right)\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}+\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{m}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{m^\beta}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\beta}-\frac{1}{(n+1)^\beta}\right)\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}.\end{aligned}$$

因此由(30.98)得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{n^\beta}-\frac{1}{(n+1)^\beta}\right)\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\right|\leqslant C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{\beta+1}}<\infty.$$

于是原级数在 $\frac{1}{4}<\alpha\leqslant 1$ 时, 因为 $\cdots>4\alpha>2\alpha>\frac{1}{2}$ 以及交错级数判别法给出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}+\cdots+O\left(\frac{1}{n^{m\alpha}}\right)\right)$$

收敛而条件收敛.

对 $0<\beta\leqslant\frac{1}{2}$, 我们来证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\beta}$ 发散. 事实上

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\beta}&=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{(-1)^n}{n^\beta}\\&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^j}{(k^2+j)^\beta}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{1}{(k^2+2j)^\beta}-\frac{1}{(k^2+2j+1)^\beta}\right]+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k^2+2k)^\beta}.\end{aligned}$$

又由拉格朗日中值定理得

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{1}{\left(k^2+2j\right)^\beta}-\frac{1}{\left(k^2+2j+1\right)^\beta}\right]\leqslant\beta\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\left(k^2+2j\right)^{\beta+1}}$$
$$\leqslant\beta\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k^{2\beta+2}}=\frac{\beta}{k^{2\beta+1}},$$

以及 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+2k)^\beta}=+\infty$, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\beta}$ 发散. 现在容易知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{2\alpha}}$ 发散且 Taylor 展开中后面的项不会影响前面的项, 因此我们有原级数在 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{4}$ 发散.

28. (28.) 由 a_n 单调递减到 0 知 a_n 非负, 不妨假设 a_n 是正数列, 否则问题是平凡的. 首先由 Stolz 定理9.1, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}{n+1-n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln a_{n+1}}=0.$$

利用 a_n 单调性, 我们有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\ln a_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\ln a_k+\frac{\ln a_{n+1}}{n+1}$$
$$\leqslant-\frac{1}{n\left(n+1\right)}\sum_{k=1}^{n}\ln a_{n+1}+\frac{\ln a_{n+1}}{n+1}=0,$$

即 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}$ 递减. 故由莱布尼兹判别法知原级数收敛.

29. (29.) 设 $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{c_k}{x+k}$, 则

$$c_j=\lim_{x\to-j}\frac{x+j}{x\left(x+1\right)\cdots\left(x+n\right)}=\frac{(-1)^j}{(n-j)!j!},j=0,1,2,\cdots,n.$$

于是

$$I_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{(n-j)!j!}\int_1^m\frac{1}{x+j}\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j\,n!}{(n-j)!j!}\ln\frac{m+j}{1+j}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^jC_n^j\left[\ln m+\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)\right]-\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^jC_n^j\ln\left(1+j\right)$$
$$\overset{\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_n^j=0}{=}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^jC_n^j\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)-\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^jC_n^j\ln\left(1+j\right)$$
$$=-\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^jC_n^j\ln\left(1+j\right).$$

又

$$\left|-\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^jC_n^j\ln\left(1+j\right)\right|\leqslant\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\ln\left(1+n\right)=\frac{2^n\ln\left(1+n\right)}{n!},$$

我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 绝对收敛.

30. (30.) 只需考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=0$ 的情形, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由 $\frac{1}{a_n+1}\sim\frac{1}{a_n},n\to\infty$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+1}$ 发散.

31. (31.) 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{S_k}\left(a_k-a_{k+1}\right)\sim\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(a_k-a_{k+1}\right).$$

结合18.100知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{S_k}\left(a_k-a_{k+1}\right)$ 收敛.

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{S_k}\left(a_k-a_{k+1}\right)$ 收敛, 定义 $S_0=1$, 则对 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{S_k}\left(a_k-a_{k+1}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_k}{S_k}-\frac{(k+1)a_{k+1}}{S_{k+1}}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}\\&=\frac{1\cdot a_1}{S_1}-\frac{(n+1)a_{n+1}}{S_{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}-\frac{(n+1)a_{n+1}}{S_{n+1}},\end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}-\frac{(n+1)a_{n+1}}{S_{n+1}}\leqslant A\triangleq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{S_k}\left(a_k-a_{k+1}\right),\forall n\in\mathbb{N}.\tag{30.99}$$

我们还有

$$\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}=\frac{(k+1)S_k-kS_{k+1}}{S_{k+1}S_k}=\frac{S_k-ka_{k+1}}{S_{k+1}S_k}\geqslant\frac{ka_k-ka_{k+1}}{S_{k+1}S_k}\geqslant 0,\forall k\in\mathbb{N}_0.$$

现在对任何 $m\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant m+1$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}&=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}+\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}\\&\geqslant\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}+a_{n+1}\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}+a_{n+1}\left(\frac{n+1}{S_{n+1}}-\frac{m+1}{S_{m+1}}\right),\end{aligned}$$

即由不等式(30.99)得

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}-\frac{m+1}{S_{m+1}}a_{n+1}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)-\frac{n+1}{S_{n+1}}a_{n+1}\leqslant A.$$

让 $n\to\infty$ 得

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}\leqslant A.$$

由 m 任意性得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}<\infty$. 继续由

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}-\frac{(n+1)a_{n+1}}{S_{n+1}}\right]=A$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=B\in[0,+\infty).$$

若 $B>0$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}=A+B>A,$$

这就是一个矛盾! 故 $B=0$, 从而存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$ka_{k+1}\leqslant ka_k\leqslant\frac{1}{2}S_k,\forall k\geqslant N,$$

即

$$\sum_{k=N}^{\infty}\left(\frac{k+1}{S_{k+1}}-\frac{k}{S_k}\right)a_{k+1}=\sum_{k=N}^{\infty}\frac{S_k-ka_{k+1}}{S_{k+1}S_k}a_{k+1}\geqslant\sum_{k=N}^{\infty}\frac{S_k-\frac{1}{2}S_k}{S_{k+1}S_k}a_{k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{S_{k+1}}.$$

因此由例题18.44知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 我们证明了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{S_k}(a_k - a_{k+1})$ 同敛散.

32. (32.) 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{S_{k+1}} - \frac{k+1}{S_k}\right)a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{S_{k+1}}a_{k+1} - \frac{k+1}{S_k}a_k\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{S_k}(a_k - a_{k+1}) \\ &= \frac{n+2}{S_{n+1}}a_{n+1} - 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{S_k}(a_k - a_{k+1}) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{S_k}(a_k - a_{k+1}) - 2.\end{aligned}$$

我们由习题31.知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{S_{k+1}} - \frac{k+1}{S_k}\right) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

反之继续由习题31.的证明得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Rightarrow \begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{S_k}(a_k - a_{k+1}) < \infty; \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)a_{n+1}}{S_{n+1}} = 0;\end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{S_{k+1}} - \frac{k+1}{S_k}\right)a_{k+1} < \infty,$$

即我们证明了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{S_{k+1}} - \frac{k+1}{S_k}\right)a_{k+1}$ 同敛散.

33. (33.) 注意到存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{7}, \left(3-\sqrt{7}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{7}, n \in \mathbb{N},$$

于是

$$\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{7}\right)^n\right] = \sin\left[\pi A_n + \pi B_n\sqrt{7} - 2\pi A_n\right] = -\sin\left[\pi\left(3-\sqrt{7}\right)^n\right], n \in \mathbb{N}.$$

因此结合 $0 < 3-\sqrt{7} < 1$ 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{7}\right)^n\right] = -\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi\left(3-\sqrt{7}\right)^n\right] \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(3-\sqrt{7}\right)^n \text{收敛}.$$

34. (34.) 由高中数学知

$$a_n = c_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

代入初值得 $c_2 \neq 0$, 由于

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 > \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0,$$

我们显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} \text{收敛}.$$

35. (35.) 首先

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n\left(1+n^2\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\left(1+(2n-1)^2\right)}.$$

一方面

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\left(1+(2n-1)^2\right)}\\&=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n-1)\left(1+(4n-1)^2\right)}-\frac{1}{(4n+1)\left(1+(4n+1)^2\right)}\right]\\&<\frac{1}{2},\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\left(1+(2n-1)^2\right)}\\&=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n-1)\left(1+(4n-1)^2\right)}-\frac{1}{(4n+1)\left(1+(4n+1)^2\right)}\right]\\&>\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n-1)\left(1+(4n-1)^2\right)}-\frac{1}{(4n+3)\left(1+(4n+3)^2\right)}\right]\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}=\frac{7}{15}.\end{aligned}$$

36. (36.) 记

$$R_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k.$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\frac{R_k-R_{2k+1}}{k}&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{R_{2k}}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{R_{2k-1}}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{R_{2k+1}}{k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{2k}}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{R_{2k+1}}{(2k-1)(2k)}\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}+\sum_{k=1}^{2n}a_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k-1)},\end{aligned}$$

即原级数收敛.

37. (37.) 当 $p\in(0,1)$, 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_n)^p}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{(1-x)^p}\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{1}\frac{1}{(1-x)^p}\mathrm{d}x<\infty,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_n)^p}$ 收敛.

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-p}}<\infty,$$

故对 $a_n=1-\frac{1}{n}$ 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_{n+1})^p}$ 收敛.

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a^n}-e^{-a^{n+1}}}{\left(e^{-a^{n+1}}\right)^p}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{pa^{n+1}-a^n}\left[1-e^{a^n-a^{n+1}}\right]\sim\sum_{n=1}^{\infty}e^{(pa-1)a^n}\left[1-e^{a^n-a^{n+1}}\right].$$

取 $a=\frac{1}{p}>1$ 和 $a_n=1-e^{-a^n}$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_{n+1})^p}$ 发散.

于是此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_{n+1})^p}$ 收敛性无法判断.

当 $p\in[1,+\infty)$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_n)^p}$ 收敛, 则我们有

$$\sum_{k=n}^{n+N}\frac{a_{k+1}-a_k}{(1-a_k)^p}\geqslant\sum_{k=n}^{n+N}\frac{a_{k+1}-a_k}{(1-a_n)^p}=\frac{a_{n+N+1}-a_n}{(1-a_n)^p},$$

即让 $N\to+\infty$ 得

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{(1-a_k)^p}\geqslant\frac{1-a_n}{(1-a_n)^p}=\frac{1}{(1-a_n)^{p-1}}.$$

现在我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{(1-a_k)^p}=0$ 不能成立, 这就和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_n)^p}$ 收敛矛盾!, 故原级数发散.

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_{n+1})^p}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{(1-x)^p}\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{1}\frac{1}{(1-x)^p}\mathrm{d}x=+\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(1-a_{n+1})^p}$ 发散.

38. (38.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\cdot\arctan^2 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\pi^2}{32}.
\end{aligned}$$

39. (39.) 注意到

$$\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)}=e^{n\left[-\frac{p\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right]}=e^{-p\ln n+O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)}=\frac{1}{n^p}\left(1+o\left(1\right)\right).$$

于是当且仅当 $p>1$ 原级数收敛.

40. (40.) 注意到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}\right|}=3,$$

于是收敛半径是 $\frac{1}{3}$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty,$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\right)=+\infty.$$

因此原幂级数收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

41. (41.) 我们来找 $\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m^\beta}$ 的等价量.

Case 1 当 $\beta>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m^\beta}$ 存在, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha m^\beta}\sim c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},$$

即当且仅当 $\alpha>1$ 原级数收敛.

Case 2 当 $\beta=1$, 由例题8.6知

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\sim\ln n, n\to\infty,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}m^{\beta}}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}},$$

即当且仅当 $\alpha>1$ 原级数收敛.

Case 3 当 $\beta<1$, 由拉格朗日中值定理和 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{1-\beta}}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{\beta}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^{\beta}}}{n^{1-\beta}-(n-1)^{1-\beta}}\right)=\frac{1}{1-\beta}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^{\beta}}}{\theta_n^{-\beta}}\right)=\frac{1}{1-\beta},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha}m^{\beta}}\sim\frac{1}{1-\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}}.$$

因此当且仅当 $\alpha+\beta>2$ 原级数收敛.

42. (42.) 由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{A_n}-e^{A_{n-1}}}{A_n^e-A_{n-1}^e}\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\theta}\left(A_n-A_{n-1}\right)}{e\theta^{e-1}\left(A_n-A_{n-1}\right)}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\theta}}{e\theta^{e-1}}\right)=\frac{e}{e}=1,\end{aligned}$$

这里用到了

$$\theta\in(A_{n-1},A_n)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\theta=1.$$

43. (43.) 利用真分数的性质得

$$0\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\sqrt{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2}\leqslant\sqrt{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}},$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0.$$

又

$$\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}=\frac{2n+2}{2n+1}\geqslant1, n=1,2,\cdots,$$

我们知道 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 递减, 至此我们知道原级数是一个交错级数并由莱布尼兹判别法得收敛.

44. (44.) 由 Taylor 公式 Peano 余项得

$$n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2=-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), n\to\infty.$$

于是原级数收敛, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\right]=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{2m}(-1)^n\left[n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\right]\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left[(2n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2\right]-\sum_{n=1}^{m}\left[(2n-1)\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)-2\right]\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left[(2n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-(2n-1)\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left[(2n)\ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{2n-1}}\right)\right]+\sum_{n=1}^{m}\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left[(2n)\ln\left(\frac{(n+1)(2n-1)}{n(2n+1)}\right)\right]+\ln(2m+1)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left[2n\ln\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)-(2n-2)\ln\left(\frac{n}{2n-1}\right)-2\ln\left(\frac{n}{2n-1}\right)\right]+\ln(2m+1)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{2m\ln\left(\frac{m+1}{2m+1}\right)-2\sum_{n=1}^{m}\ln\left(\frac{n}{2n-1}\right)+\ln(2m+1)\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{2m\ln(m+1)-(2m-1)\ln(2m+1)-2\ln\left(\frac{m!}{(2m-1)!!}\right)\right\}=\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{(m+1)^{2m}(2m-1)!!^2}{m!^2(2m+1)^{2m-1}}\right)$$

$$\overset{\text{Wallis 公式9.18}}{=}\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{(m+1)^{2m}\frac{(2m)!!^2}{\pi m}}{m!^2(2m+1)^{2m-1}}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{(m+1)^{2m}\cdot 4^m}{\pi(2m+1)^{2m-1}m}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{2}{\pi}+\ln\frac{(m+1)^{2m}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{2m-1}m}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{2}{\pi}+\ln\frac{(m+1)^{2m}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{2m}}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{2}{\pi}+2m\ln\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}\right)\right)=\ln\frac{2}{\pi}+1.$$

45. (45.) 我们有

$$\sum_{\pi\in S_n}\frac{\sigma(\pi)}{v(\pi)+1}=\sum_{\pi\in S_n}\int_0^1\sigma(\pi)t^{v(\pi)}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{\pi\in S_n}\sigma(\pi)t^{v(\pi)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\begin{vmatrix}t&1&\cdots&1\\1&t&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&t\end{vmatrix}\mathrm{d}t=\int_0^1(t-1)^n\det\left(E+\frac{1}{t-1}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T\right)\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{降阶公式21.7}}{=}\int_0^1(t-1)^n\left(1+\frac{1}{t-1}\mathbf{1}_n^T\mathbf{1}_n\right)\mathrm{d}t=\int_0^1(t-1)^n\left(1+\frac{n}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(t-1)^n\,\mathrm{d}t+n\int_0^1(t-1)^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^n}{n+1}-(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}.$$

46. (46.) 首先归纳证明

$$0<x_n<\sqrt{n},n=1,2,\cdots. \tag{30.100}$$

当 $n=1$, 显然有(30.100)成立. 假设 n 时(30.100)成立, 当 $n+1$ 时我们有

$$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}>x_n\geqslant x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{\sqrt{n}}=x_n\left(1-\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)>0,$$

这就由数学归纳法证明了(30.100).

然后

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{\sqrt{n}-x_n},n=1,2,\cdots,$$

即

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}-x_k}&\leqslant\frac{1}{x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}-x_1}\\&<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{1-x_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}-1},\end{aligned}$$

以及

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}-x_k}\geqslant\frac{1}{x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)=2,\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)=2,$$

于是我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}x_n}=2\Rightarrow x_n\sim\frac{1}{2\sqrt{n}},n\to\infty.$$

因此我们知原级数收敛等价于 $\alpha>2$.

47. (47.) 反复利用平方差公式得

$$(1-x)\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=1-x^{2^{n+1}},|x|<1,$$

即

$$(1-x)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2^k}\right)=1,|x|<1.$$

现在在

$$\sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^k}\right)=-\ln(1-x)$$

两边求导得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2^k-1}}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{1-x},$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2^k}}{1+x^{2^k}}=\frac{x}{1-x},|x|<1.$$

48. (48.) 对 $0<|x|<1$, 我们有

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}&=\frac{x\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}{i\left(1-xe^{i\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)}\\&=\frac{i}{1-xe^{-i\theta}}-\frac{i}{1-xe^{i\theta}}=i\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-in\theta}-e^{in\theta}\right)x^n\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n\theta)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta)x^n,\end{aligned}$$

这就完成了计算.

49. (49.) 设

$$H_n\triangleq1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},n=1,2,\cdots.$$

由 Stolz 定理9.1得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\ln n}=1.$$

由 Abel 变换8.2得

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{n}=\sum_{n=1}^{m-1}\left(a_n-a_{n+1}\right)H_n+a_mH_m,m=1,2,\cdots. \tag{30.101}$$

充分性: 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)H_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)\ln n<\infty,$$

我们有 $\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{a_n}{n}$ 有界, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}<\infty$.

必要性: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}<\infty$, 由(30.101)得

$$0\leqslant a_mH_m\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}<\infty,,m=1,2,\cdots;\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)\ln n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}<\infty,$$

这就完成了证明.

50. (50.) 求导或者初等不等式可得

$$\left|\sin\left(2x\right)\sin^2x\right|=2\left|\sin x\right|^3\sqrt{1-\left|\sin x\right|^2}\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

现在

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=0}^{n}\left|\sin\left(2^kx\right)\right|\right)^3&=\left|\sin x\right|\cdot\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(2^{k+1}x\right)\sin^2\left(2^kx\right)\right|\right]\cdot\left|\sin^2\left(2^nx\right)\right|\\&\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n},\end{aligned}$$

即

$$\prod_{k=0}^{n}\sin^2\left(2^kx\right)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n,\forall x\in\mathbb{R}.$$

因此我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2x\sin^2\left(2x\right)\cdots\sin^2\left(2^nx\right)$ 对任何 x 都收敛.

51. (51.) 显然 a_n 正值且严格递增. 注意到递推函数在 $x>0$ 没有不动点, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

由 Stolz 定理9.1得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(e^{\frac{1}{a_n}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{a_n}\right)=1,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n-1}{\ln\left(n+1\right)-\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(a_ne^{\frac{1}{a_n}}-a_n-1\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[a_n\left(a_ne^{\frac{1}{a_n}}-a_n-1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(xe^{\frac{1}{x}}-x-1\right)\right]\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

即

$$\frac{a_n-n}{n\ln^pn}\sim\frac{\frac{1}{2}\ln n}{n\ln^pn}\sim\frac{1}{2n\ln^{p-1}n},n\to\infty.$$

由积分判别法得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{p-1}n}\sim\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^{p-1}x}\mathrm{d}x=\int_{\ln2}^{\infty}\frac{1}{y^{p-1}}\mathrm{d}y,$$

即原级数当且仅当 $p>2$ 收敛.

52. (52.) 解微分方程得

$$f(x)=\frac{e^{-\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\int_0^x\frac{e^{\arctan y}}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y>0,$$

于是

$$f'(x)=\frac{1-(1+x)f(x)}{1+x^2}<1,$$

现在 $f(x)<x$ 从而

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n^2},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}<1.$$

又

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1)\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-n\int_0^{\frac{1}{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\frac{1}{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-f(0)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

于是结合

$$\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant\frac{1}{2x},x\in(0,1]$$

得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)&\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{e^{-\arctan x}}{x\sqrt{1+x^2}}\int_0^x\frac{e^{\arctan y}}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{e^{-\arctan x}}{x\sqrt{1+x^2}}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{-\arctan x}\right)\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\\
&\overset{\pi>4\ln 2}{>}\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{4\ln 2}{4}}\right)=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

53. (53.) 要证不等式右边等价于

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\forall n\geqslant2.$$

这也等价于

$$\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}>-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right),\forall n\geqslant2.$$

注意到

$$\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^m>\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^m}{m}=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right),\forall n\geqslant2,$$

这就得证不等式右边.

要证不等式左边等价于

$$e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<1-\frac{1}{2n},\forall n\geqslant 2.$$

这也等价于

$$-\frac{1}{n}-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)>-\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right),\forall n\geqslant 2.$$

注意到

$$-\frac{1}{n}-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+1}\frac{1}{n^{m+1}}>\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m m}\frac{1}{n^{m+1}}=-\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right),\forall n\geqslant 2,$$

这就得证不等式左边.

54. (54.) 我们直接计算有

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{kC_n^k}&=\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}=\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}\\&=\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\beta(k,n-k+1)=\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=2}^{n-2}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=k+2}^{\infty}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{x}\sum_{k=2}^{\infty}x^{k-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{x}\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

55. (55.) 考虑

$$S\triangleq\left\{k\in\mathbb{N}:ea_k<a_k^{1-k^{-\alpha}}\right\}.$$

对 $k\in S$ 我们有

$$ea_k<a_k^{1-k^{-\alpha}}\Rightarrow a_k<e^{-k^{\alpha}}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{1-k^{-\alpha}}&=\sum_{k\in S}a_k^{1-k^{-\alpha}}+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus S}a_k^{1-k^{-\alpha}}\\&\leqslant\sum_{k\in S}ee^{-k^{\alpha}}+e\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus S}a_k\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}ee^{-k^{\alpha}}+e\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty,\end{aligned}$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+a_k^{1-k^{-\alpha}}\right)$ 收敛.

56. (56.) 首先因为 f 周期 2π, 我们就在 $x\in[-\pi,\pi]$ 考虑 f 的最大最小值. 因为 sin 是奇函数, 所以 f 是奇函数, 所以我们只需要考虑 f 的最大值.

首先

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^n}.$$

当 $n=1$, 计算傅里叶级数得

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin((2i+1)x)}{2i+1}=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & x\in(0,\pi)\\0, & x=0,\pm\pi\\-\frac{\pi}{4}, & x\in(-\pi,0)\end{cases}.$$

因为

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^n}.$$

又

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

即我们证明了 $n=1$ 的情况.

对于 $n>1$, 我们有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^{n-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}t^{n-2}e^{-(2k+1)t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}t^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\cos\left((2k+1)x\right)e^{-(2k+1)t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}t^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\Re e^{-(2k+1)(t-ix)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}t^{n-2}\Re\frac{e^{-(t-ix)}}{1-e^{-2(t-ix)}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\cos x}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}t^{n-2}\frac{\sinh t}{2\left(\sin^2 x\cosh^2 t+\cos^2 x\sinh^2 t\right)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

现在我们知道 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 递增, $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 递减. 于是我们有

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right),\forall x\in[0,\pi],$$

即我们有 f 最大值为

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^n}.$$

57. (57.) 记 $S_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^\sigma}$, 由 Abel 变换8.2和 Stolz 定理9.1可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n^\sigma}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^\sigma\frac{a_k}{k^\sigma}}{n^\sigma}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(k^\sigma-(k+1)^\sigma\right)S_k+n^\sigma S_n}{n^\sigma}\\
&=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left((k+1)^\sigma-k^\sigma\right)S_k}{n^\sigma}\\
&=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)^\sigma-n^\sigma\right)S_n}{(n+1)^\sigma-n^\sigma}=0.
\end{aligned}$$

58. (58.) 取 $C_0\triangleq 0$, 注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k-C_{k-1}}{k}&=\sum_{a_k\geqslant\frac{1}{k}}\frac{C_k-C_{k-1}}{k}+\sum_{a_k<\frac{1}{k}}\frac{C_k-C_{k-1}}{k}\\
&=\sum_{a_k\geqslant\frac{1}{k}}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{a_k\geqslant\frac{1}{k}}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty.
\end{aligned}$$

由命题8.3得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{C_N}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}k\frac{C_k-C_{k-1}}{k}}{N}=0,$$

这就完成了证明.

59. (59.) 若积分收敛, 则因为被积函数单调, 所以容易得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 因此 f 非负. 因此由

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n f(S_n)=\sum_{n=2}^{\infty}(S_n-S_{n-1}) f(S_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{S_1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$$

就有 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n f(S_n)$ 收敛.
反之, 考虑

$$a_n \triangleq \frac{2^{2^n}}{n^2}, n=1,2,\cdots.$$

然后取

$$f(x) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{2^{2^1}}, & x\in(0,a_1] \\ \frac{1}{2^{2^n}}, & x=S_n, n=1,2,\cdots, \\ \text{线性连接}, & \text{其他} \end{cases}$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(S_n)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}<\infty$$

以及

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n}^{S_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}\left(f(S_{n+1})+f(S_n)\right)}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2^{2^{n+1}}}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2^{2^{n+1}}}+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(1+2^{2^n}\right)}{2}=+\infty. \end{aligned}$$

故如果 $\int_{2026}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f(S_n)$ 不一定发散.

60. (60.) 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} &= \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-nt}\mathrm{d}t\right] \\ &= -\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-t}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} &< \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\mathrm{d}t=1; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} &> \frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

这就完成了证明.

61. (61.) 对 $n\in\mathbb{N}$, 一方面

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}>\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

另外一方面, 因为 $\sqrt{x}$ 是上凸函数, 由 Hadamard 不等式11.4得

$$\int_k^{k+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}, k=0,1,\cdots,n-1.$$

于是

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}=\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\sqrt{x}\mathrm{d}x>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{\sqrt{n}}{2},$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{2}{3}n\sqrt{n}=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

62. (62.) 设

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{k}}-\frac{2}{3}\sin\frac{1}{k}\right)=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(e^{\frac{1}{k}}-\frac{2}{3}\sin\frac{1}{k}\right)}$$
$$=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{k}}\sin\frac{1}{k}\right)\right]}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]}$$
$$=e^{\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum\limits_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)}=e^{\frac{1}{3}(\ln n+\gamma+o(1))+\sum\limits_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)}$$
$$\sim C\left(n+1\right)^{\frac{1}{3}},n\to+\infty,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{k}}-\frac{2}{3}\sin\frac{1}{k}\right)}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$$

存在. 故 $\alpha\leqslant\frac{1}{3}$.
由经典不等式

$$e^x>1+x,\sin x<x,(1+x)^{\frac{1}{3}}<1+\frac{x}{3},\forall x>0$$

得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{k}}-\frac{2}{3}\sin\frac{1}{k}\right)>\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{2}{3k}\right)$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{3k}\right)>\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{3}}=(n+1)^{\frac{1}{3}},$$

即所求最大的 $\alpha=\frac{1}{3}$.

63. (63.)

(a). 对固定的 $k\in\mathbb{N}$, 取数列 $a_j\triangleq\delta_{jk},j\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}t_{nk}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}t_{nj}a_j=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

(b). **Method 1** 由例题18.92得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_{nk}|<\infty,\forall n\in\mathbb{N}.$$

若

$$\sup_{n\geqslant1}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{nk}|=+\infty,$$

归纳定义两个严格递增的正整数列 $\{q_k\}_{k=0}^{\infty},\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ 如下:

取 $q_0=n_0=0$, 假设

$$n_0,n_1,\cdots,n_{j-1},q_0,q_1,\cdots,q_{j-1}$$

已经定义好. 由

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{q_{j-1}}|t_{nk}|=0,\ \sup_{n>n_{j-1}}\left(\sum_{k=q_{j-1}+1}^{\infty}|t_{nk}|\right)=+\infty$$

可取自然数 $n_j>n_{j-1}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{q_{j-1}}\left|t_{n_jk}\right|\leqslant 1,\ \sum_{k=q_{j-1}+1}^{\infty}\left|t_{n_jk}\right|\geqslant 2\cdot 10^{2j}.$$

再取自然数 $q_j>q_{j-1}$ 使得 $\sum\limits_{k=q_j}^{\infty}\left|t_{n_jk}\right|\leqslant 1$. 于是我们构造完毕.

对 $j\in\mathbb{N}$, 考虑

$$a_k\triangleq\frac{1}{10^j}\begin{cases}\frac{\overline{t_{n_jk}}}{|t_{n_jk}|}, & t_{n_jk}\neq 0\\ 0, & t_{n_jk=0}\end{cases},k=q_{j-1}+1,\cdots,q_j.$$

显然 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\left|x_{n_j}\right|&=\left|\sum_{k=1}^{q_{j-1}}t_{n_jk}a_k+\sum_{k=q_{j-1}+1}^{q_j}t_{n_jk}a_k+\sum_{k=q_j+1}^{\infty}t_{n_jk}a_k\right|\\&\geqslant\left|\sum_{k=q_{j-1}+1}^{q_j}t_{n_jk}a_k\right|-\left|\sum_{k=1}^{q_{j-1}}t_{n_jk}a_k\right|-\left|\sum_{k=q_j+1}^{\infty}t_{n_jk}a_k\right|\\&=\frac{1}{10^j}\left(\sum_{k=q_{j-1}+1}^{\infty}\left|t_{n_jk}\right|-\sum_{k=q_j}^{\infty}\left|t_{n_jk}\right|\right)-\left|\sum_{k=1}^{q_{j-1}}t_{n_jk}a_k\right|-\left|\sum_{k=q_j+1}^{\infty}t_{n_jk}a_k\right|\\&\geqslant\frac{1}{10^j}\left(2\cdot 10^{2j}-1\right)-\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{q_{j-1}}\left|t_{n_jk}\right|-\frac{1}{10^{j+1}}\sum_{k=q_j+1}^{\infty}\left|t_{n_jk}\right|\\&\geqslant\frac{1}{10^j}\left(2\cdot 10^{2j}-1\right)-\frac{1}{10}-\frac{1}{10^{j+1}}\to+\infty,j\to+\infty,\end{aligned}$$

这就和 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾! 因此我们证明了存在 $M>0$ 使得对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_{nk}|\leqslant M.$$

Method 2 考虑全体收敛到 0 的数列构成的 Banach 空间 c_0, 对固定 $n\in\mathbb{N}$, 我们考虑 c_0 上的连续线性泛函

$$T_m\left(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\right)=\sum_{k=1}^{m}t_{nk}a_k,m\in\mathbb{N}.$$

对 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\in c_0$, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k$ 收敛, 我们有

$$\sup_{m\geqslant 1}\left|T_m\left(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\right)\right|=\sup_{m\geqslant 1}\left|\sum_{k=1}^{m}t_{nk}a_k\right|<\infty,$$

因此由共鸣定理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_{nk}|=\sup_{m\geqslant 1}\sum_{k=1}^{m}|t_{nk}|=\sup_{m\geqslant 1}||T_m||<\infty.$$

我们进一步考虑 c_0 上的连续线性泛函

$$T^n\left(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k, n\in\mathbb{N}.$$

对 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\in c_0$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k=0,$$

我们有

$$\sup_{n\geqslant 1}\left|T^n\left(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\right)\right|=\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}a_k\right|<\infty,$$

因此由共鸣定理得

$$M\triangleq\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{nk}|=\sup_{n\geqslant 1}||T^n||<\infty,$$

这就完成了证明.

(c). 取 $a_j=1,\forall j\in\mathbb{N}$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_{nk}=1.$$

64. (64.) 补充定义 $a_0=0$, 则 a_n 仍然满足递推, 高中数学告诉我们

$$a_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{\sqrt{3}}, n=0,1,2,\cdots.$$

又对 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}&a_{n+1}^2-a_na_{n+2}-\left(a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}\right)\\&=a_{n+1}^2+a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2-a_na_{n+2}\\&=a_{n+1}\left(a_{n+1}+a_{n-1}\right)-a_n\left(a_n+a_{n+2}\right)\\&=4a_na_{n+1}-4a_na_{n+1}=0,\end{aligned}$$

即

$$a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=a_1^2-a_0a_2=4.$$

我们对 $n\in\mathbb{N}$ 就有

$$\tan\left(\arctan\frac{a_n}{a_{n+1}}-\arctan\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=\frac{\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{a_{n-1}}{a_n}}{1+\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{a_{n-1}}{a_n}}=\frac{a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n+a_na_{n-1}}=\frac{4}{4a_n^2}=\frac{1}{a_n^2}.$$

容易验证

$$0<\frac{a_{n-1}}{a_n}<1,\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$\arctan\frac{a_n}{a_{n+1}}-\arctan\frac{a_{n-1}}{a_n}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\forall n\in\mathbb{N},$$

从而

$$\arctan\frac{1}{a_n^2}=\arctan\frac{a_n}{a_{n+1}}-\arctan\frac{a_{n-1}}{a_n},\forall n\in\mathbb{N}.$$

现在就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{a_n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{a_n}{a_{n+1}}-\arctan\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\arctan\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

30.11 非数学类多元积分和解析几何

1. (1.) 实际上

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]^3}\frac{1}{x+y+z}dxdydz &= \iint_{[0,1]^2}\left(\int_0^1\frac{1}{x+y+z}dz\right)dxdy\\ &= \iint_{[0,1]^2}\left[\ln(1+x+y)-\ln(x+y)\right]dxdy\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\left[\ln(1+x+y)-\ln(x+y)\right]dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left[x\ln x-2(x+1)\ln(x+1)+(x+2)\ln(x+2)\right]dx\\ &= \ln\frac{81\sqrt{3}}{64},\end{aligned}$$

这里倒数第二个等号来自

$$\int\ln(\alpha+y)\,dy=(\alpha+y)\ln(\alpha+y)-\alpha-y+C,$$

最后一个等号来自

$$\int(x+\alpha)\ln(x+\alpha)\,dx=\frac{(\alpha+x)^2\ln(\alpha+x)}{2}-\frac{(\alpha+x)^2}{4}+C.$$

推论:

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]^3}\frac{1}{x+y+z}dxdydz &= \iiint_{[0,1]^3}\int_0^\infty e^{-t(x+y+z)}dtdxdydz\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^1 e^{-tx}dx\right)^3dt\\ &= \int_0^\infty\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^3dt.\end{aligned}$$

2. (2.) 由牛顿莱布尼兹公式, 我们有 $u(x,y)=\int_{-\infty}^{y}u_y(x,y')\,dy'$. 于是

$$|u(x,y)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|u_y(x,y')|\,dy'\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y')|\,dy'.$$

类似的我们得到

$$|u(x,y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y')|\,dy'; \tag{30.102}$$

$$|u(x,y)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x',y)|\,dx'. \tag{30.103}$$

因此将式(30.102)和式(30.103)相乘得

$$|u(x,y)|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x',y)|\,dx'\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y')|\,dy'.$$

两边积分就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,y)|^2dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x',y)|\,dx'dy\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y')|\,dy'$$

两边再积分就有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,y)|^2dxdy &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x',y)|\,dx'^{dy}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y')|\,dy'dx\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,y)|\,dxdy\right)^2.\end{aligned}$$

这就完成了习题2.的证明.

3. (3.) 由对称性, 我们知道

$$\iint_D \left(xy+x^2+y^2\right)dxdy = 2\iint_{D_1}\left(xy+x^2+y^2\right)dxdy,$$

这里

$$D_1 = \left\{(x,y):\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)^2 \leqslant xy, x, y>0\right\}.$$

考虑

$$x = r\cos\theta, y = \sqrt{2}r\sin\theta, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

我们有

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt{\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{D_1}\left(xy+x^2+y^2\right)dxdy &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta}}\left(\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)r^3dr\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\\ &= \frac{1}{12}+\frac{3\pi}{32\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

于是

$$\iint_D\left(xy+x^2+y^2\right)dxdy = \frac{1}{6}+\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

4. (4.)

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega xy^2z^2dxdydz &\overset{\text{截面法}}{=} \int_0^{xy}z^2dz\iint_{1\geqslant y\geqslant x\geqslant 0}xy^2dxdy\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 y^5dy\int_0^y x^4dx = \frac{1}{165}.\end{aligned}$$

5. (5.) 注意到

$$\begin{aligned}\iint_\Omega\left[\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right]dudv &= \iint_\Omega\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right|^2\right]dxdy\\ &= \iint_\Omega\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2\right]dxdy\\ &= \iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\cdot\left(\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2+\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2\right)dxdy\\ &= \iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dxdy\\ &= \iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dxdy\\ &= \iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)dxdy.\end{aligned}$$

6. (6.) 我们有

$$\begin{aligned}
&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dV \overset{\text{Poisson 公式}}{=} \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dV\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\psi d\psi\int_0^1 r^2 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\psi\right)dr\\
&=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\psi f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\psi\right)d\psi\\
&=\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t\right)dt.
\end{aligned}$$

7. (7.)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega}(x+y)^{2n}(x-y)^{2m}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{|u|+|v|\leqslant 1}u^{2n}v^{2m}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=2\iint_{u+v\leqslant 1,u,v\geqslant 0}u^{2n}v^{2m}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^1 u^{2n}\mathrm{d}u\int_0^{1-u}v^{2m}\mathrm{d}v\\
&=\frac{2}{2m+1}\int_0^1 u^{2n}(1-u)^{2m+1}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{2m+1}\beta(2n+1,2m+2)\\
&=\frac{2}{2m+1}\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(2m+2)}{\Gamma(2n+2m+3)}=\frac{2(2n)!(2m)!}{(2n+2m+2)!}.
\end{aligned}$$

8. (8.)

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}x^{2n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x^{2n}+y^{2n}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 r^{2n+1}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left[\cos^{2n}\theta+\sin^{2n}\theta\right]\mathrm{d}\theta\\
&\overset{\text{奇偶性}}{=}\frac{8}{2(2n+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{(2n-1)!!}{(n+1)(2n)!!}\pi.
\end{aligned}$$

9. (9.)

$$\iint_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\sin\theta\left[16\cos^4\theta-1\right]\mathrm{d}\theta=\frac{9}{16}\quad.$$

10. (10.)

$$\iint_D(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{对称性+极坐标}}{=}2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\frac{5}{4}\pi.$$

11. (11.)

$$\begin{aligned}
\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\overset{\begin{cases}x=x\\ y=\sqrt{3}y\end{cases}}{=}\sqrt{3}\iint_D\left(x^2+3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\left(\cos^2\theta+3\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r.\\
&=\frac{\sqrt{3}}{8}(\pi+1).
\end{aligned}$$

12. (12.) 注意到

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty}\iiint_{\Omega_R}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{r^3\sin\psi\cos\theta}{r^2\left(1+r^2\right)^p}\mathrm{d}r\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{\infty}\frac{r}{\left(1+r^2\right)^p}\mathrm{d}r\\
&=\begin{cases}\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}\frac{r}{\left(1+r^2\right)^p}\mathrm{d}r, & p>1\\ \text{发散} & p\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{\pi}{8(p-1)}, & p>1\\ \text{发散} & p\leqslant 1\end{cases}.
\end{aligned}$$

13. (13.) 直接计算有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+y+z\right)\right|dxdydz\overset{t=x+y+z}{=}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{y+z}^{\pi+y+z}\left|\cos\left(t\right)\right|dtdydz\\
&\overset{\text{周期性}}{=}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(t\right)\right|dtdydz=\pi^2\int_0^{\pi}\left|\cos\left(t\right)\right|dtdydz=2\pi^2.
\end{aligned}$$

14. (14.) 利用 Poisson 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\frac{f\left(x+y\right)}{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\frac{f\left(\sqrt{2}y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}f\left(\sqrt{2}r\sin\theta\right)\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}f\left(\sqrt{2}r\sin\theta\right)\mathrm{d}r\\
&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}\sqrt{2}r\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}\frac{2}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta=+\infty.
\end{aligned}$$

15. (15.) 由高斯公式, 我们有

$$\iint_{\Sigma}\left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\iiint 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由两个圆柱面围成体积命题20.1, 我们有 $I=16$.

16. (16.) 用两类曲面积分的关系, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}S=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}S\\
&=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}x\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=5\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=5abc\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\frac{5}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).
\end{aligned}$$

17. (17.) 考虑换元 $\begin{cases}x=a\rho\sin\psi\cos\theta\\ y=b\rho\sin\psi\sin\theta\\ z=c\rho\cos\psi\end{cases}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\iiint 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{\sin\psi}\rho^2\mathrm{d}\rho\\
&=\frac{2abc}{3}\pi\int_0^{\pi}\sin^4\psi\mathrm{d}\psi=\frac{abc}{4}\pi^2.
\end{aligned}$$

18. (18.) 首先 $\begin{pmatrix}1&\beta\\ \beta&1\end{pmatrix}$ 是正定矩阵的充要条件是 $1-\beta^2>0\Rightarrow -1<\beta<1$.

于是, 存在 2 阶实正交矩阵 T 使得

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1 & \beta\\ \beta & 1\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}1+\beta & 0\\ 0 & 1-\beta\end{pmatrix}.$$

于是在积分中做正交变换 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ 得

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon^2\leqslant F(x,y)\leqslant 1}\ln\sqrt{F(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\lim_{\epsilon\to 0^+}\iint_{\epsilon^2\leqslant(\beta+1)u^2+(1-\beta)v^2\leqslant 1}\ln\sqrt{(\beta+1)u^2+(1-\beta)v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\ln r\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}$$

19. (19.) 直接计算有

$$\begin{aligned}&\iint_D e^{4x^2y^2-x^2-4y^2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{y=\frac{y}{2}}{=}\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}e^{x^2y^2-x^2-y^2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{\left(x^2-1\right)y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}e^{-y^2}\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 re^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1 re^{-r^2}\mathrm{d}r\\ &=\frac{\pi}{8}\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\left(1-e^{-1}\right).\end{aligned}$$

20. (20.) 视 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 为关于 z 的二次函数, 其有解的充要条件是

$$y^2-4\left(x^2+y^2-1\right)\geqslant 0\Rightarrow D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}\leqslant 1\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\iint_D\frac{|xy|\left(1+e^{x^2}\right)}{2+e^{x^2}+e^{\frac{3}{4}y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{|xy|\left(1+e^{x^2}\right)}{2+e^{x^2}+e^{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{2}{3}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{|xy|\left(1+e^{x^2}+1+e^{y^2}\right)}{2+e^{x^2}+e^{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{8}{3}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1,x,y\geqslant 0}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{6}\cos(2\theta)\left|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

21. (21.) 利用柱坐标得

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z\\ &\overset{r^2=v}{=}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}\mathrm{d}v\int_v^{\sqrt{t^2-v}}f\left(v+z^2\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

于是应用含参积分求导公式得

$$\begin{aligned}F'(t)&=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}\left[\frac{d\left(\int_v^{\sqrt{t^2-v}}f\left(v+z^2\right)\mathrm{d}z\right)}{dt}\right]\mathrm{d}v+\frac{2\pi t}{\sqrt{4t^2+1}}\int_{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}^{\sqrt{t^2-\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}}f\left(\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}+z^2\right)\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}\frac{tf\left(t^2\right)}{\sqrt{t^2-v}}\mathrm{d}v+\frac{2\pi t}{\sqrt{4t^2+1}}\int_{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}f\left(\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}+z^2\right)\mathrm{d}z=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}\frac{tf\left(t^2\right)}{\sqrt{t^2-v}}\mathrm{d}v\\&=\pi tf\left(t^2\right)\int_0^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t^2-v}}\mathrm{d}v=-2\pi tf\left(t^2\right)\left(t^2-v\right)^{\frac{1}{2}}|_0^{\frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2}}=\pi tf\left(t^2\right)\left(2t+1-\sqrt{4t^2+1}\right).\end{aligned}$$

22. (22.) 注意到显然 $N(x,y)$ 在 $x^2+y^2\notin\mathbb{Z}$ 时都连续且

$$|N(x,y)|\leqslant\left(2\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2,$$

这是因为

$$-\sqrt{x^2+y^2}\leqslant m,n\leqslant\sqrt{x^2+y^2}.$$

所以题目二重积分有意义且绝对收敛.

再设 P 为 $\mathbb{Z}^2$ 计数测度, 因为 $\mathbb{Z}^2$ 至多可数, 所以 P 是 σ 有限测度且

$$N(x,y)=\int_{\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:m^2+n^2\leqslant x^2+y^2\}}1\mathrm{d}P.$$

于是运用 Fubini 定理我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:m^2+n^2\leqslant x^2+y^2\}}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{Z}^2}\left(\iint_{x^2+y^2\geqslant m^2+n^2}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}P\\&=\int_{\mathbb{Z}^2}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{m^2+n^2}}^{\infty}re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}P\\&=\pi\int_{\mathbb{Z}^2}\left(\int_{\sqrt{m^2+n^2}}^{\infty}e^{-r^2}\mathrm{d}r^2\right)\mathrm{d}P\\&=\pi\int_{\mathbb{Z}^2}e^{-\left(m^2+n^2\right)}\mathrm{d}P=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\left(m^2+n^2\right)}\\&=\pi\left(2c-1\right)^2.\end{aligned}$$

23. (23.) 设 $y=tx$, 则得参数方程

$$x^3+t^3x^3-\frac{3}{2}tx^2=0\Rightarrow x=\frac{3t}{2\left(1+t^3\right)}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3t}{2(1+t^3)}\\y=\frac{3t^2}{2(1+t^3)}\end{cases}.$$

注意到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}t=-1,\lim_{x\to\infty}(y+x)=\lim_{t\to-1}\frac{3t+3t^2}{2\left(1+t^3\right)}=\lim_{t\to-1}\frac{3+6t}{2\cdot3t^2}=-\frac{1}{2},$$

我们有渐近线 $y=-x-\frac{1}{2}$.

注意到 C 围的区域应该在第一象限, 所以

$$\begin{cases}\frac{3t}{2(1+t^3)}>0\\\frac{3t^2}{2(1+t^3)}>0\end{cases}\Leftrightarrow t>0.$$

故面积为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_C(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(-\frac{3t^2}{2\left(1+t^3\right)}\mathrm{d}\left(\frac{3t}{2\left(1+t^3\right)}\right)+\frac{3t}{2\left(1+t^3\right)}\mathrm{d}\left(\frac{3t^2}{2\left(1+t^3\right)}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9t^2}{4\left(1+t^3\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

24. (24.) 当 $p \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{[-1,1]^2} \frac{1}{|x^3+y^3+xy|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_{x^2+y^2<1,x,y>0} \frac{1}{|x^3+y^3+xy|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \geqslant &\iint_{x^2+y^2<1,x,y>0} \frac{1}{\left|x^2+y^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p \int_0^1 \frac{1}{r^{2p-1}}\mathrm{d}r = +\infty.\end{aligned}$$

我们知道原积分发散.

当 $p<1$, 注意到

$$\begin{aligned}&\iint_{[-1,1]^2} \frac{1}{|x^3+y^3+xy|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{x^2+y^2\leqslant 2} \frac{1}{|x^3+y^3+xy|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\ 2\int_0^{\sqrt{2}} r^{1-2p}\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \frac{1}{\left|r\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)+\cos\theta\sin\theta\right|^p}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

先来证明内层积分对 $r\in\left[0,\sqrt{2}\right]$ 收敛. 事实上, 对固定的 r, 关于 θ 的方程 $r\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)+\cos\theta\sin\theta=0$ 的解显然是孤立的. 于是对单根 θ_r, 我们有

$$\frac{1}{\left|r\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)+\cos\theta\sin\theta\right|^p} = O\left(\frac{1}{|\theta-\theta_r|^p}\right).$$

对重根 θ_r, 必然满足方程

$$\begin{cases} r\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)+\cos\theta\sin\theta=0;\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[r\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)+\cos\theta\sin\theta\right]=0.\end{cases}.$$

初等计算表明上述方程在 $r\in\left(0,\sqrt{2}\right], \theta\in[0,\pi]$ 无解. 因此内层积分处处收敛. 读者不难证明

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\left|r\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)+\cos\theta\sin\theta\right|^p}\mathrm{d}\theta \in C\left[0,\sqrt{2}\right].$$

于是我们知道原积分收敛.

25. (25.) 直接分段计算有

$$\begin{aligned}&\iint_{x^2+y^2<1,x,y>0} y\sqrt{\frac{|2x-x^2-y^2|}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^1 r^2\sin\theta\sqrt{\frac{r^2-2r\cos\theta}{r^2}}\mathrm{d}r\\ &+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta\sqrt{\frac{2r\cos\theta-r^2}{r^2}}\mathrm{d}r\\ &+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\sqrt{\frac{2r\cos\theta-r^2}{r^2}}\mathrm{d}r\\ =&\frac{1}{12}+\frac{\pi}{128}+\frac{7\pi}{128}=\frac{1}{12}+\frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

26. (26.) 考虑换元 $\begin{cases}x=-u\\ y=-v\end{cases}$, 则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}=1>0$, 因此定向不变. 于是

$$\oint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = -\oint_{\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{9}=1}\frac{\mathrm{d}u+\mathrm{d}v}{|u|+|v|}=0.$$

27. (27.) 对 $(x_0,y_0,z_0)\in S$, 由定理20.10知 S 在 (x_0,y_0,z_0) 切平面可以写为

$$x_0x+yy_0+zz_0-\frac{1}{2}\left(y_0z+z_0y\right)=1.$$

由垂直条件知 $z_0=\frac{1}{2}y_0$, 于是

$$1=x_0^2+y_0^2+z_0^2-y_0z_0=x_0^2+y_0^2-z_0^2=x_0^2+\frac{3}{4}y_0^2,$$

即曲线方程为

$$C:\begin{cases}x^2+\frac{3}{4}y^2=1\\ z=\frac{1}{2}y\end{cases}.$$

在 Σ 上容易算得

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$I=\iint_{x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{3}\iint_{x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\pi=2\pi.$$

28. (28.) 求导得

$$f_x(x,x)+f_y(x,x)=1,$$

即 $f_y(x,x)=1-f_x(x,x)=1-x^3$. 继续求导得

$$f_{xx}(x,x)+f_{xy}(x,x)=3x^2, f_{xy}(x,x)+f_{yy}(x,x)=-3x^2.$$

结合 $f_{xx}(x,x)+f_{yy}(x,x)=0$, 我们得

$$f_{xx}(x,x)=3x^2=-f_{yy}(x,x).$$

于是

$$\begin{aligned}I&=6\iint_D x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1 y^3e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t=1-\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

29. (29.) 当 $n=1$, 不等式两侧都是等号. 当 $n>1, r>0$, 设 $B_n(r)$ 表示半径为 r 中心在原点的 $\mathbb{R}^n$ 的球. 取 $r=\frac{|\Omega|^{\frac{1}{n}}}{(w_n)^{\frac{1}{n}}}$, 利用余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}&=\int_{\Omega\bigcap B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\Omega\setminus B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant\int_{\Omega\bigcap B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\Omega\setminus B_n(r)}\frac{1}{r^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_{\Omega\bigcap B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{|\Omega|-|\Omega\bigcap B_n(r)|}{r^{n-1}}\\&=\int_{\Omega\bigcap B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{|B_n(r)|-|\Omega\bigcap B_n(r)|}{r^{n-1}}\\&=\int_{\Omega\bigcap B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{B_n(r)\setminus\Omega}\frac{1}{r^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant\int_{B_n(r)\bigcap\Omega}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{B_n(r)\setminus\Omega}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_{B_n(r)}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{n-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_0^r\mathrm{d}s\int_{\partial B_n(s)}\frac{1}{s^{n-1}}\mathrm{d}S\\&=nw_n\int_0^r\mathrm{d}s=nw_nr=nw_n^{1-\frac{1}{n}}|\Omega|^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

30. (30.) 考虑曲面

$$S:x^4+y^4+z^4+2x^2z^2+2y^2z^2-2x^2y^2-4z^2=0,$$

有参数方程:

$$\begin{cases} x=\cos s \\ y=\sin t \\ z=\sin s-\cos t \end{cases} \qquad t,s\in[0,2\pi].$$

注意到对 $(x,y,z)\neq(0,0,1)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-1}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=0.$$

当 $\epsilon>0$ 充分小, 取积分曲面方向为朝内方向[40], 我们有

$$\begin{aligned}
-4\pi&=-\frac{1}{\epsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant\epsilon^2}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iint_{x^2+y^2+(z-1)^2=\epsilon^2}\left[\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{z-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\\
&=\iint_S\left[\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\frac{\left[x\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}+y\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}+(z-1)\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right]}{\left[3+2\left(\cos t-\sin s-\cos t\sin s\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\frac{\begin{vmatrix}\cos s & 0 & -\sin s\\ \sin t & \cos t & 0\\ \sin s-\cos t-1 & \sin t & \cos s\end{vmatrix}}{\left[3+2\left(\cos t-\sin s-\cos t\sin s\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\frac{\cos t-\sin s-\cos t\sin s}{\left[3+2\left(\cos t-\sin s-\cos t\sin s\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

31. (31.) 取旋转轴一点 $(0,0,0)$, 对旋转直线上的点 $(0,0,z_0)$ 考虑

$$x^2+y^2+z^2=z_0^2, x+y+z-z_0=0,$$

即 Σ 为

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2\Rightarrow xy+yz+xz=0.$$

补充 $\Sigma_2: x+y+z=1$ 介于 Σ 内的那部分, 朝上, 然后

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_2}\left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_2}\left(x\cdot1+(y+1)\cdot1+(1-x-y+2)\cdot1\right)\mathrm{d}S\\
&=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

这里圆的半径可以由几何意义求出. 又利用圆锥体积公式得

$$\iint_{\Sigma_2+\Sigma_1}\left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\iiint3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

[40]不知道方向也没事, 我们最后算出来的结果只会差一个符号, 简单估计正负即可确定符号, 或者注意到 S 围成区域是

$$x^4+y^4+z^4+2x^2z^2+2y^2z^2-2x^2y^2-4z^2<0,$$

则由引理20.1来严格确定方向, 但如此计算量太大了, 因此本题仅做兴趣题.

因此

$$\iint_{\Sigma_1}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{6\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

32. (32.) 注意到

$$\triangle\left(\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x\right)=0.$$

由调和函数平均值定理20.7得

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\cdot 1^2\cdot\left(e^{0}+e^{-0}\right)\cos 0=2\pi.$$

33. (33.) 本题的核心想法即极限由 u 在 (x_0,y_0,z_0) 的 Taylor 公式二阶部分提供.

Step 1

由积分中值定理可得

$$T(R)=u(\xi,\zeta,\eta),\ \lim_{R\to 0^+}(\xi,\zeta,\eta)=(x_0,y_0,z_0).$$

于是

$$\lim_{R\to 0^+}T(R)=\lim_{R\to 0^+}u(\xi,\zeta,\eta)=u(x_0,y_0,z_0).$$

Step 2

为书写方便, 不失一般性, 假设 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$,

由对称性得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u'_x(0,0,0)\,x\right]\mathrm{d}S=0;\\
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u'_y(0,0,0)\,y\right]\mathrm{d}S=0;\\
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u'_z(0,0,0)\,z\right]\mathrm{d}S=0;\\
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u''_{xy}(0,0,0)\,xy\right]\mathrm{d}S=0;\\
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u''_{yz}(0,0,0)\,yz\right]\mathrm{d}S=0;\\
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u''_{xz}(0,0,0)\,xz\right]\mathrm{d}S=0.
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left[u''_{xx}(0,0,0)\,x^2+u''_{yy}(0,0,0)\,y^2+u''_{zz}(0,0,0)\,z^2\right]\mathrm{d}S\\
=&\frac{\Delta u(0,0,0)}{12\pi R^2}\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\frac{\Delta u(0,0,0)}{12\pi}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{R^2}{3}\Delta u(0,0,0).
\end{aligned}$$

考虑 $u-0$处二阶 Taylor 公式 可以不妨设 u 在 0 处的二阶 Taylor 公式部分为 0, 从而

$$u(x,y,z)=o\left(x^2+y^2+z^2\right),(x,y,z)\to(0,0,0).$$

于是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x^2+y^2+z^2\leqslant\delta^2$, 就有

$$|u(x,y,z)|\leqslant\epsilon\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

于是当 $0<R<\delta$, 我们有

$$\left|\frac{T(R)-u(0,0,0)}{R^2}\right|\leqslant\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\cdot\epsilon\cdot\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\epsilon,$$

即我们证明了(20.43).

34. (34.) 设 M 是 f 在 Ω 最大值, 则考虑

$$S\triangleq\{\mathbf{x}\in\Omega:f(\mathbf{x})=M\}.$$

显然 S 相对 Ω 是闭集. 对 $\mathbf{x}_0 \in S$, 取 $r>0$ 充分小使得 $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)} \subset \Omega$, 于是

$$0=f(\mathbf{x}_0)-\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r(\mathbf{x}_0)}[M-f(\mathbf{y})]\,\mathrm{d}\mathbf{y}\Rightarrow f(\mathbf{y})=M,\forall \mathbf{y}\in B_r(\mathbf{x}_0),$$

即 $B_r(\mathbf{x}_0)\subset S$. 现在 S 相对 Ω 是开集, 因此我们由 Ω 连通性得 $S=\Omega$. 这就证明了 f 为常数.

35. (35.)**Step 1**

当 $f\in C^2(\Omega)$, 对 $\overline{B_r(\mathbf{x})}\subset\Omega$, 由余面积公式20.5得

$$\begin{aligned}2\pi r f(\mathbf{x})&=\frac{d}{dr}\left(\pi r^2 f(\mathbf{x})\right)=\frac{d}{dr}\left(\int_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\\&=\frac{d}{dr}\left(\int_0^r \mathrm{d}t\int_{\partial B_t(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)=\int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

于是换元得

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(\mathbf{x}+r\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}).$$

现在对 r 求导得

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dr}\left(\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(\mathbf{x}+r\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})\right)=\int_{\partial B_1(\mathbf{0})}\nabla f(\mathbf{x}+r\mathbf{y})\cdot\mathbf{y}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\&=\int_{\partial B_r(\mathbf{x})}\nabla f(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{r}\mathrm{d}S(\mathbf{y})=\int_{B_r(\mathbf{x})}\Delta f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}.\end{aligned}$$

于是由积分中值定理得

$$0=\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r(\mathbf{x})}\Delta f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=\Delta f(\mathbf{x}),$$

这就证明了 f 是调和函数.

Step 2 对于 $f\in C(\Omega)$, 考虑卷积磨光13.14

$$f_\delta(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\chi_\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\delta>0,$$

这里 $f|_{\Omega^c}\triangleq 0$. 从 **Step 1** 的证明可以看到, 也成立曲面积分版本的平均值公式

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}),\forall\overline{\partial B_r(\mathbf{x})}\subset\Omega.$$

对开集 $U\subset\subset\Omega$, 设 $\delta_0>0$ 使得

$$\overline{B_{\delta_0}(\mathbf{x})}\subset\Omega,\forall\mathbf{x}\in U,$$

于是对 $\mathbf{x}\in U$ 我们有

$$\begin{aligned}f_{\delta_0}(\mathbf{x})&=\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{y})\chi_{\delta_0}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=\int_0^{\delta_0}\frac{1}{\delta_0^2}\chi\left(\frac{t}{\delta_0}\right)\mathrm{d}t\int_{\partial B_t(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\&=2f(\mathbf{x})\int_0^{\delta_0}\frac{\pi t}{\delta_0^2}\chi\left(\frac{t}{\delta_0}\right)\mathrm{d}t=f(\mathbf{x})\int_0^{\delta_0}\frac{1}{\delta_0^2}\chi\left(\frac{t}{\delta_0}\right)\mathrm{d}t\int_{\partial B_t(\mathbf{0})}1\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\&=f(\mathbf{x})\int_{B_{\delta_0}(\mathbf{0})}\chi_{\delta_0}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}=f(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

这就证明了 $f(\mathbf{x})=f_{\delta_0}(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in U$, 因此 $f\in C^\infty(\Omega)$. 现在由 **Step 1** 即得证.

36. (36.) 单位向量场意味着 $u^2+v^2+w^2=1$, 即

$$\begin{cases}uu'_x+vv'_x+ww'_x=0;\\uu'_y+vv'_y+ww'_y=0;\\uu'_z+vv'_z+ww'_z=0.\end{cases}$$

注意到单位球面单位外法向量公式为 (x,y,z), 我们利用题目条件和 Gauss 公式得

$$\begin{aligned}
&\iiint_{B(\mathbf{0},1)} \left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint_{B(\mathbf{0},1)}\left[u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+uw\frac{\partial u}{\partial z}+uv\frac{\partial v}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+vw\frac{\partial v}{\partial z}+wu\frac{\partial w}{\partial x}+vw\frac{\partial w}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iint_{\partial B(\mathbf{0},1)}\left[xu^3+yu^2v+zu^2w+xuv^2+yv^3+zv^2w+xw^2u+yvw^2+zw^3\right]\mathrm{d}S\\
&-\iiint_{B(\mathbf{0},1)}\left[u\frac{\partial u^2}{\partial x}+u\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}+u\frac{\partial\left(uw\right)}{\partial z}+v\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial x}+v\frac{\partial v^2}{\partial y}+v\frac{\partial\left(vw\right)}{\partial z}+w\frac{\partial\left(wu\right)}{\partial x}+w\frac{\partial\left(wv\right)}{\partial y}+w\frac{\partial w^2}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iint_{\partial B(\mathbf{0},1)}\left[\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\right]\mathrm{d}S\\
&-\iiint_{B(\mathbf{0},1)}\left[u\left(2uu'_x+uv'_y+vu'_y+wu'_z+uw'_z\right)+v\left(u'_xv+v'_xu+2vv'_y+v'_zw+vw'_z\right)+w\left(w'_xu+wu'_x+w'_yv+v'_yw+2ww'_z\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-\iiint_{B(\mathbf{0},1)}\left[u\left(uu'_x+vu'_y+wu'_z\right)+v\left(v'_xu+vv'_y+v'_zw\right)+w\left(w'_xu+w'_yv+ww'_z\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-\iiint_{B(\mathbf{0},1)}\left[u\left(uu'_x+vv'_x+ww'_x\right)+v\left(uu'_y+vv'_y+ww'_y\right)+w\left(uu'_z+vv'_z+ww'_z\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=0.
\end{aligned}$$

37. (37.) 我们有

$$\begin{aligned}
H\left(r\right)&=\int_{B_r}u^2\left(\mathbf{x}\right)\left(r^2-\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\overset{\text{余面积公式}}{=}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}t\int_{\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|=t}u^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
H'\left(r\right)&=2\alpha r\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\int_{\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|=t}u^2\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}S\\
&\overset{\text{余面积公式}}{=}2\alpha r\int_{B_r}u^2\left(\mathbf{x}\right)\left(r^2-\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
H\left(r\right)&=\int_{B_r}u^2\left(\mathbf{x}\right)\left(r^2-\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\overset{\text{换元}}{=}r^3\int_{B_1}u^2\left(r\mathbf{x}\right)\left(r^2-r^2\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&=r^{2\alpha+3}\int_{B_1}u^2\left(r\mathbf{x}\right)\left(1-\left|\left|\mathbf{x}\right|\right|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x},
\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
H'(r) &= (2\alpha+3)\, r^{2\alpha+2}\int_{B_1} u^2(r\mathbf{x})\left(1-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x} + r^{2\alpha+3}\int_{B_1} 2u(r\mathbf{x})\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(r\mathbf{x})\left(1-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\overset{\text{换元}}{=} (2\alpha+3)\, r^{2\alpha+2}\int_{B_r} u^2(\mathbf{x})\left(1-\left|\left|\frac{\mathbf{x}}{r}\right|\right|^2\right)^{\alpha}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}\mathbf{x} + r^{2\alpha+3}\int_{B_r} 2u(\mathbf{x})\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{r}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})\left(1-\left|\left|\frac{\mathbf{x}}{r}\right|\right|^2\right)^{\alpha}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{2\alpha+3}{r}\int_{B_r} u^2(\mathbf{x})\left(r^2-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{r}\int_{B_r} 2u(\mathbf{x})\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})\left(r^2-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\overset{\text{余面积公式}}{=} \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{r}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha}t\mathrm{d}t\int_{||\mathbf{x}||=t} 2u(\mathbf{x})\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{t}\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S \\
&\overset{\text{Gauss-Green}}{=} \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{2}{r}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha}t\mathrm{d}t\int_{B_t}\left[u(\mathbf{x})\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2\right]\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{2}{r}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha}t\mathrm{d}t\int_{B_t}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{2\alpha+3}{r}H(r) - \frac{1}{r(\alpha+1)}\int_0^r\left(\int_{B_t}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\left(r^2-t^2\right)^{\alpha+1} \\
&= \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{r(\alpha+1)}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}\left(\int_{B_t}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \\
&\overset{\text{余面积公式}}{=} \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{r(\alpha+1)}\int_0^r\left(r^2-t^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}\left(\int_0^t\mathrm{d}v\int_{||\mathbf{x}||=v}||\nabla u(\mathbf{x})||^2\,\mathrm{d}S\right) \\
&= \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{r(\alpha+1)}\int_0^r\left[\left(r^2-t^2\right)^{\alpha+1}\int_{||\mathbf{x}||=t}||\nabla u(\mathbf{x})||^2\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{余面积公式}}{=} \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{(\alpha+1)\,r}\int_{B_r}||\nabla u(\mathbf{x})||^2\left(r^2-||\mathbf{x}||^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{(\alpha+1)\,r}I(r).
\end{aligned}
$$

38. (38.) 注意到围成区域关于 XOY 平面对称, 因此我们有

$$V = 2\iint_D\sqrt{4ax-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4ax\geqslant y^2, (x-a)^2+y^2\leqslant a^2\right\}.$$

注意到

$$y^2>4ax, x^2+y^2\leqslant 2ax\Rightarrow x\geqslant 0, x^2<-2ax,$$

这就是一个矛盾! 故

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+y^2\leqslant a^2\right\}.$$

现在

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint_D\sqrt{4ax-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^{2a} x\left[\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{2} + 2ax\arcsin\left(\frac{\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{a}}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \left(2\pi+\frac{16}{3}\right)a^3.
\end{aligned}
$$

39. (39.) 由例题20.54, 我们有
$$\int_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}}{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||}=\int_{\mathbb{B}}\left(\int_{\mathbb{B}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\mathbb{B}}\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}||\mathbf{x}||^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\overset{\text{余面积公式20.5}}{=}4\pi\int_0^1\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}t^2\right)t^2\mathrm{d}t=\frac{32}{15}\pi^2.$$

40. (40.) 我们有
$$\int_L ye^{y^2}\mathrm{d}y+\left(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}e^{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x^{\frac{1}{3}}+\left(xe^{x^{\frac{2}{3}}}+2xx^{\frac{2}{3}}e^{x^{\frac{2}{3}}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 e^{x^{\frac{2}{3}}}\left(2x^{\frac{5}{3}}+x+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{x^{\frac{2}{3}}}\left(-15x^{\frac{4}{3}}+30x^{\frac{2}{3}}+6x^2-29\right)|_0^1=\frac{29}{2}-4e.$$

41. (41.) 不妨设 $A,B>0$,

(a). 我们有
$$\int_{||\mathbf{x}||<\epsilon}\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant B\int_{||\mathbf{x}||<\epsilon}\frac{1}{||\mathbf{x}||^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$=B\int_0^\epsilon\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\int_{||\mathbf{x}||=r}\mathrm{d}s=2\pi B\int_0^\epsilon r^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r$$
$$=4\pi B\sqrt{\epsilon}.$$

(b). 我们有
$$\int_{\epsilon<||\mathbf{x}||<R}\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant A\int_{\epsilon<||\mathbf{x}||<R}\frac{1}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$=A\int_\epsilon^R\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\int_{||\mathbf{x}||=r}\mathrm{d}s=2\pi A\int_\epsilon^R\frac{1}{r}\mathrm{d}r$$
$$=2\pi A\ln\frac{R}{\epsilon}.$$

(c). 我们结合前两问有
$$\int_{||\mathbf{x}||<R}\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{||\mathbf{x}||<\frac{A^2}{B^2}}\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\frac{A^2}{B^2}<||\mathbf{x}||<R}\frac{|f(\mathbf{x})|}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\leqslant 4\pi B\sqrt{\frac{A^2}{B^2}}+2\pi A\ln\frac{R}{\frac{A^2}{B^2}}=2\pi A\left(2+\ln\frac{RB^2}{A^2}\right).$$

42. (42.**Case 1** 考虑平面 $x+by=0$.
此时截面往 YOZ 投影的边界为 $\left(\frac{b^2}{6}+\frac{1}{9}\right)y^2+z^2=1$. 于是此时有面积
$$S=\iint\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sqrt{1+b^2}\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{b^2}{6}+\frac{1}{9}}}\leqslant\pi\sqrt{1+0^2}\sqrt{\frac{1}{\frac{0^2}{6}+\frac{1}{9}}}=3\pi.$$

Case 2 考虑平面 $ax+y=0$.
此时截面往 XOZ 投影的边界为 $\left(\frac{1}{6}+\frac{a^2}{9}\right)x^2+z^2=1$. 于是此时有面积
$$S=\iint\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\sqrt{1+a^2}\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{a^2}{9}}}<3\pi.$$

Case 3 考虑平面 $z=1+ax+by$.
此时截面往 XOY 投影的边界为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}+(1+ax+by)^2=1$. 把边界曲线化成标准的椭圆形式
$$\left(\frac{1}{6}+a^2\right)x^2+2abxy+\left(\frac{1}{9}+b^2\right)y^2+2ax+2by=0.$$
注意到
$$\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}+a^2 & ab & a\\ ab & \frac{1}{9}+b^2 & b\\ a & b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

设

$$A=\begin{pmatrix}B & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}+a^2 & ab\\ ab & \frac{1}{9}+b^2\end{pmatrix}.$$

考虑

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix},T\in\mathbb{R}^{2\times 2}\text{是正交矩阵}$$

使得 $T^TBT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned}0&=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix}.\\&=\begin{pmatrix}x' & y' & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T^TBT & T^T\alpha\\ \alpha^TT & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

对于椭圆 $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+2c_1x+2c_2y\leqslant 0$, 我们配方得

$$\lambda_1\left(x+\frac{c_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y+\frac{c_2}{\lambda_2}\right)^2=\frac{c_1^2}{\lambda_1}+\frac{c_1^2}{\lambda_2},$$

即椭圆面积为

$$\frac{\pi\left(\frac{c_1^2}{\lambda_1}+\frac{c_1^2}{\lambda_2}\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}=-\pi\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & c_1\\ 0 & \lambda_2 & c_2\\ c_1 & c_2 & 0\end{vmatrix}}{(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注意到正交变换不改变行列式和特征值之积是行列式, 我们有所求截面面积为

$$S=\iint\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=-\pi\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot\frac{\det A}{|\det B|^{\frac{3}{2}}}=9\sqrt{6}\pi\frac{\left(2a^2+3b^2\right)\sqrt{1+a^2+b^2}}{\left(6a^2+9b^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

注意到

$$\frac{\left(2a^2+3b^2\right)\sqrt{1+a^2+b^2}}{\left(6a^2+9b^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{\left(2a^2+3b^2\right)\sqrt{1+a^2+\frac{3}{2}b^2}}{\left(6a^2+9b^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们考虑

$$f(x)\triangleq\frac{x^2\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{(3x+1)^3},x\geqslant 0,$$

则

$$f'(x)=\frac{x(4-3x)}{2(3x+1)^4}.$$

因此我们有

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{675}\Rightarrow S\leqslant 9\sqrt{6}\pi\sqrt{\frac{16}{675}}=\frac{12\sqrt{2}}{5}\pi.$$

注意到 $b=0,a=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 等号成立, 因此所求最大面积为 $\frac{12\sqrt{2}}{5}\pi$.

43. (43.) 做正交换元使得 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 使得

$$\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)} T^T \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

由 $\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$ 正定我们知道 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2\left(1-\rho^2\right)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda_1 u^2-\lambda_2 v^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 u^2} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_2 v^2} \mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \end{aligned}$$

从而

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2\left(1-\rho^2\right)}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{2^2\left(1-\rho^2\right)^2}\left(1-\rho^2\right)}} = 2\sqrt{\left(1-\rho^2\right)}\pi.$$

44. (44.)**Step 1**

对 $u \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 由高斯公式得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} &= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u^2(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial\left(\frac{x_i u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}\right)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{2\|\mathbf{x}\| u(\mathbf{x}) x_i u_{x_i}(\mathbf{x}) - \frac{x_i^2}{\|\mathbf{x}\|} u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^3} \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= (n-1) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{x}) x_i u_{x_i}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

于是对 $K = \sqrt{\frac{n-2}{2}}$, 由均值不等式我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} &= \frac{2}{2-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\mathbf{x})(\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leqslant \frac{1}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K^2 u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}}{K\|\mathbf{x}\|} \right|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leqslant \frac{K^2}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{(n-2)K^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{(n-2-K^2)K^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{4}{(n-2)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Step 2 $((*, \spadesuit))$

对 $u \in H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, 存在 $u_k \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right), k = 1, 2, \cdots$ 使得

$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

于是

$$u_k \Rightarrow u, \nabla u_k \Rightarrow \nabla u.$$

由里斯引理得严格递增正整数列 k_i 使得

$$\lim_{i \to \infty} u_{k_i} = u, \lim_{i \to \infty} \nabla u_{k_i} = \nabla u, a.e.$$

于是法图引理告诉我们

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}&=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{i\to\infty}\frac{u_{k_i}^2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant\varliminf_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u_{k_i}^2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant\frac{4}{(n-2)^2}\varliminf_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u_{k_i}(\mathbf{x})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{4}{(n-2)^2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Step 3

设

$$v\neq0\in C_c^\infty(\mathbb{R}),\mathrm{supp}v\subset[0,1].$$

构造

$$v_m(r)\triangleq v\left(-\frac{\ln r}{m}\right),m=1,2,\cdots,\mathrm{supp}v_m\subset\left[e^{-m},1\right].$$

我们有

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty r^{-1}|v_m(r)|^2\mathrm{d}r=\lim_{m\to\infty}\int_{e^{-m}}^1 r^{-1}\left|v\left(-\frac{\ln r}{m}\right)\right|^2\mathrm{d}r\overset{r=e^{-ms}}{=}\lim_{m\to\infty}\left[m\int_0^1|v(s)|^2\mathrm{d}s\right]=+\infty,$$

以及

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty r\left|v_m'(r)\right|^2\mathrm{d}r=\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty r\left|\frac{-1}{rm}v'\left(-\frac{\ln r}{m}\right)\right|^2\mathrm{d}r\\&=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m^2}\int_{e^{-m}}^1\frac{1}{r}\left|v'\left(-\frac{\ln r}{m}\right)\right|^2\mathrm{d}r\right]\overset{r=e^{-ms}}{=}\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{m}\int_0^1|v'(s)|^2\mathrm{d}s\right]=0.\end{aligned}$$

取

$$u_m(\mathbf{x})=||\mathbf{x}||^{-\frac{n-2}{2}}v_m(||\mathbf{x}||),m=1,2,\cdots.$$

初等计算得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u_m^2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\mathbb{R}^n}||\mathbf{x}||^{-n}v_m(||\mathbf{x}||)\mathrm{d}\mathbf{x}=na(n)\int_0^\infty r^{-1}v_m(r)\mathrm{d}r;$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_m(\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x}&=na(n)\int_0^\infty\left|\left(-\frac{n-2}{2}r^{-\frac{1}{2}}v_m(r)+r^{\frac{1}{2}}v_m'(r)\right)\right|^2\mathrm{d}r\\&=na(n)\left[\frac{(n-2)^2}{4}\int_0^\infty r^{-1}v_m^2(r)\mathrm{d}r+\int_0^\infty r\left|v_m'(r)\right|^2\mathrm{d}r\right].\end{aligned}$$

现在我们就知道

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u_m^2(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_m(\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x}}=\frac{4}{(n-2)^2},$$

即所求最佳常数为 $C=\frac{4}{(n-2)^2}$.

45. (45.) 注意到

$$r\frac{\partial f}{\partial r}=r\cos\theta\cdot f_x'+r\sin\theta\cdot f_y'=xf_x'+yf_y',$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{-1}{2\pi}\iint_{\epsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\epsilon^1\frac{xf'_x+yf'_y}{r}\mathrm{d}r\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\epsilon^1\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)-f\left(\epsilon\cos\theta,\epsilon\sin\theta\right)\right]\mathrm{d}\theta\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\epsilon\cos\theta,\epsilon\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=f\left(0,0\right).
\end{aligned}$$

46. (46.) 由格林公式得

$$\oint_C\left(x^2y+y^3\right)\mathrm{d}x+x\left(4+y^2\right)\mathrm{d}y=\iint\left(4+y^2-x^2-3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\left(4-2y^2-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要使得值最大, 我们需要被积函数尽可能非负, 因此最大值为

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+2y^2\leqslant 4}\left(4-2y^2-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(4-r^2\right)r\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\int_0^2\left(4-r^2\right)\mathrm{d}r^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\int_0^4\left(4-t\right)\mathrm{d}t=4\sqrt{2}\pi,
\end{aligned}$$

这里等号在 $C:2y^2+x^2=4$ 时成立.

47. (47.) 我们有

$$\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\iiint 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iint_{\Omega,\text{朝外}}\left(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&=\frac{1}{3}\iint_\Omega\left[\frac{4x^4}{\sqrt{\left(4x^3\right)^2+\left(4y^3\right)^2+\left(4z^3\right)^2}}+\frac{4y^4}{\sqrt{\left(4x^3\right)^2+\left(4y^3\right)^2+\left(4z^3\right)^2}}+\frac{4z^4}{\sqrt{\left(4x^3\right)^2+\left(4y^3\right)^2+\left(4z^3\right)^2}}\right]\mathrm{d}S\\
&=\frac{1}{3}\iint_\Omega\frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_\Omega\frac{1}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

48. (48.) 我们有

$$\begin{aligned}
I&=\int_{[0,1]^n}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\ln x_i\right\}\mathrm{d}V=n!\int_0^1\ln x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^1\mathrm{1d}x_2\cdots\int_{x_{n-1}}^1\mathrm{1d}x_n\\
&=n!\int_0^1\ln x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^1\mathrm{1d}x_2\cdots\int_{x_{n-2}}^1\left(1-x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_{n-1}\\
&=\frac{1}{2}n!\int_0^1\ln x_1\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^1\mathrm{1d}x_2\cdots\int_{x_{n-3}}^1\left(1-x_{n-2}\right)^2\mathrm{d}x_{n-2}\\
&\vdots\\
&=\frac{n!}{(n-1)!}\int_0^1\left(1-x_1\right)^{n-1}\ln x_1\mathrm{d}x_1\\
&=-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自结论18.1.5.

49. (49.) 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S\left(\mathbf{x}\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^n}&=\int_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S\left(\mathbf{x}\right)}{(n-1)!}\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-t\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i\right)}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}t^{n-1}\mathrm{d}t\int_{\Sigma}e^{-t\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i\right)}\mathrm{d}S\left(\mathbf{x}\right)\\&\overset{\begin{cases}x_1=\frac{x_1}{t}\\x_2=\frac{x_2}{t}\\\vdots\\x_n=\frac{x_n}{t}\end{cases}}{=}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_{x_1+x_2+\cdots+x_n=t,x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n}e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i\right)}\mathrm{d}S\left(\mathbf{x}\right)\\&\overset{\text{余面积公式20.5}}{=}\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}\int_{x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n}e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i\right)}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}\cdot\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}e^{-p_ix_i}\mathrm{d}x_i=\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{p_1p_2\cdots p_n}.\end{aligned}$$

50. (50.) 考虑

$$g\left(x,y\right)\triangleq f\left(x,y\right)-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{12}y^4,$$

我们有 g 是 D 上调和函数. 现在由调和函数平均值定理20.7, 我们有

$$f\left(0,0\right)=g\left(0,0\right)=\frac{1}{\pi}\iint_Dg\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{12}y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\iint_D\left(x^4+y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r^5\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{72}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{18}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{48},\end{aligned}$$

我们有

$$\iint_Df\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{48}+\pi f\left(0,0\right).$$

51. (51.) 首先记

$$c_n\triangleq\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant1,x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n}\mathrm{d}1x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

我们有

$$\begin{aligned}c_n&=\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant1,x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n}1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_0^1\left(\int_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\leqslant1-x_n,x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n}1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n\\&\overset{\text{换元法}}{=}\int_0^1\left(\int_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\leqslant1,x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,n}\left(1-x_n\right)^{n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n\\&=\int_0^1c_{n-1}\left(1-x_n\right)^{n-1}\mathrm{d}x_n=\frac{c_{n-1}}{n},\end{aligned}$$

即递推得

$$c_n = \frac{c_1}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

由余面积公式20.5得

$$\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant t, x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n} 1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{d}u \int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = u, x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n} 1 \mathrm{d}S,$$

即求导得

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = t, x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n} 1 \mathrm{d}S = n c_n t^{n-1} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

现在

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&\overset{\text{余面积公式20.5}}{=} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t \int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = t, x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n} 1 \mathrm{d}S \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{n}} \mathrm{d}t \int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = t, x_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n} 1 \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)! \left(n+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

52. (52.) 设 $c \triangleq \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{a_j}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n a_1 a_2 \cdots a_n} \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - y_j}{a_j} \right) \frac{y_i}{a_i} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{2a_j^2}} \mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \operatorname{sgn}\left(c - \sum_{j=1}^{n} y_j \right) y_i e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{2}} \mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \operatorname{sgn}\left(c - \sum_{j=1}^{n} y_j \right) \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{2}} \mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&\overset{\text{Poisson 公式}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \operatorname{sgn}\left(c - \sqrt{n} y_1 \right) y_1 \cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{y_j^2}{2}} \mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}\left(c - \sqrt{n} y_1 \right) y_1 \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2}} \mathrm{d}y_1 \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{\frac{c}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y_1 \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2}} \mathrm{d}y_1 - \int_{\frac{c}{\sqrt{n}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y_1 \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2}} \mathrm{d}y_1 \right| \\
&= \sqrt{n} \left| \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2n}} \right| = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} e^{-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} \right)^2}{2n}}.
\end{aligned}$$

53. (53.) 牛顿莱布尼兹公式给出

$$\iint_{0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint_{0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = 0,$$

以及

$$\begin{aligned}&\iint_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\iint_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\left[\frac{\partial\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2}\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.\\&=0.\end{aligned}\tag{30.104}$$

于是

$$\begin{aligned}&\iint_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\det\left(\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\iint_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=1.\end{aligned}$$

但是聪明的读者敏锐的注意到(30.104)需要 u 二阶连续可微.

$*$ 考虑卷积磨光核13.14, 我们构造

$$u_{i,\delta}\triangleq\int_{\mathbb{R}^2}u_i\left(\mathbf{y}\right)\chi_\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\mathrm{d}\mathbf{y},i=1,2.$$

这里 $u_{i,\delta}\in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right),i=1,2$ 是周期 1 的. 然后

$$\iint_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\left(\frac{\partial u_{1,\delta}}{\partial x_1}\frac{\partial u_{2,\delta}}{\partial x_2}-\frac{\partial u_{1,\delta}}{\partial x_2}\frac{\partial u_{2,\delta}}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=0.$$

由

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{[0,1]^2}\left|\frac{\partial u_{i,\delta}}{\partial x_j}\left(\mathbf{x}\right)-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\mathbf{x}\right)\right|^2\mathrm{d}\mathbf{x}=0,$$

我们知道(30.104)成立.

54. (54.) 我们有

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega x^py^qz^s\left(1-x-y-z\right)^r\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=8\iiint u^{2p+1}v^{2q+1}w^{2s+1}\left(1-u^2-v^2-w^2\right)^r\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p+1}\theta\sin^{2q+1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(p+q)+3}\psi\cos^{2s+1}\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\rho^{2p+2q+2s+5}\left(1-\rho^2\right)^r\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(4+p+q+r+s)},\end{aligned}$$

这里最后一个等号用到了 Beta 函数性质.

55. (55.) 区域只和奇点附近的性态有关, 因此不妨设

$$\Omega_1\triangleq\left\{\mathbf{x}=\{x_i\}_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n|x_i|^{p_i}\leqslant 1\right\};$$

$$\Omega_2\triangleq\left\{\mathbf{x}=\{x_i\}_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n|x_i|^{p_i}>1\right\}.$$

对第一种情况, 我们有由余面积公式20.5和对称性得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^{p_i}}\mathrm{d}V = 2^n \int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant 1, x_i\geqslant 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\frac{2}{p_i}-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\mathrm{d}V \\
&= 2^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\int_0^1 \mathrm{d}t\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=t^2, x_i\geqslant 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\frac{2}{p_i}-1}}{t^2}\mathrm{d}S \\
&\overset{\text{换元}}{=} 2^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\int_0^1 \frac{t^{n-1}t^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}-n}}{t^2}\mathrm{d}t\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=1, x_i\geqslant 0}\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{2}{p_i}-1}\mathrm{d}S \\
&= 2^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\int_0^1 \frac{1}{t^{3-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}}}\mathrm{d}t\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=1, x_i\geqslant 0}\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{2}{p_i}-1}\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

即当且仅当

$$3-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}<1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$$

原积分收敛.

对第二种情况, 我们有由余面积公式20.5和对称性得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^{p_i}}\mathrm{d}V = 2^n \int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant 1, x_i\geqslant 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\frac{2}{p_i}-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\mathrm{d}V \\
&= 2^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\int_1^{\infty} \mathrm{d}t\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=t^2, x_i\geqslant 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\frac{2}{p_i}-1}}{t^2}\mathrm{d}S \\
&\overset{\text{换元}}{=} 2^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\int_1^{\infty} \frac{t^{n-1}t^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}-n}}{t^2}\mathrm{d}t\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=1, x_i\geqslant 0}\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{2}{p_i}-1}\mathrm{d}S \\
&= 2^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}\cdot\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{3-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}}}\mathrm{d}t\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=1, x_i\geqslant 0}\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{2}{p_i}-1}\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

即当且仅当

$$3-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{p_i}>1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<1$$

原积分收敛.

56. (56.) 由均值不等式得

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega}\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega}\frac{f(x,y)}{f(y,x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{f(x,y)}{f(y,x)}+\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_{\Omega}\sqrt{\frac{f(x,y)}{f(y,x)}\cdot\frac{f(y,x)}{f(x,y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4\iint_{\Omega,x,y\geqslant 0} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y \begin{cases} x = r\cos^3\theta \\ y = r\sin^3\theta \end{cases} = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8},
\end{aligned}$$

等号成立条件是

$$\frac{f(x,y)}{f(y,x)}=\frac{f(y,x)}{f(x,y)},\forall x,y\in\Omega,$$

即

$$f(x,y)=f(y,x),\forall x,y\in\Omega.$$

现在一个满足条件的例子是 $f=1$.

57. (57.)Green 公式给出

$$\begin{aligned}0&=\int_{\partial D}(H-1)\frac{\partial(H-1)}{\partial n}\mathrm{d}s\\&=\iint_D\left[\frac{\partial\left((H-1)\frac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left((H-1)\frac{\partial H}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(\left|\frac{\partial H}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial H}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial y}=0\Rightarrow H=1.$$

58. (58.) 记 $n=(n_1,n_2)$ 为单位外法向量, 由格林公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{xf_x'}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial D\bigcup x^2+y^2=\epsilon^2}\frac{x}{x^2+y^2}\cdot f\cdot n_1\mathrm{d}s\\&=-\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{\epsilon^2}\int_{x^2+y^2=\epsilon^2}\frac{x^2}{\epsilon}\cdot f\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

类似可得

$$\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{yf_y'}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{\epsilon^2}\int_{x^2+y^2=\epsilon^2}\frac{y^2}{\epsilon}\cdot f\mathrm{d}s.$$

于是由积分中值定理我们有

$$\begin{aligned}&\iint_{D,x^2+y^2\geqslant\epsilon^2}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{\epsilon^3}\int_{x^2+y^2=\epsilon^2}\left(x^2+y^2\right)\cdot f\mathrm{d}s\\&=-\frac{1}{\epsilon}\int_{x^2+y^2=\epsilon^2}f(x,y)\mathrm{d}s=-2\pi f(\theta,\eta)\to-2\pi f(0,0).\end{aligned}$$

59. (59.) 补充 $y=x$ 从下到上, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_L\left(e^{x^2}\sin x-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(6x-x^2-y\cos^4y\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{4}\\&=\iint(6-2x+2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iint1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=6\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}}}r\mathrm{d}r=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}+2}\mathrm{d}\theta\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cot^2\theta+3}\mathrm{d}\cot\theta=6\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+3}\mathrm{d}x=\sqrt{3}\pi,\end{aligned}$$

于是

$$\int_L\left(e^{x^2}\sin x-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(6x-x^2-y\cos^4y\right)\mathrm{d}y=\sqrt{3}\pi-\frac{1}{4}.$$

60. (60.) 首先

$$\rho^2 \leqslant \rho \sin\psi\cos\varphi \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \rho \leqslant \sin\psi\cos\varphi.$$

直接使用球坐标得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\psi \int_0^{\sin\psi\cos\varphi} \frac{\rho^2 \sin^2\psi\cos^2\varphi}{\rho^4} \rho^2 \sin\psi \mathrm{d}\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^4\psi \mathrm{d}\psi = \frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

61. (61.) 必要性: 若在 D 上有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

则对任何满足题目条件的 L 直接格林公式得

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = \iint_O \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

充分性: 若对任何含于 D 且内部 O 也含于 D 的圆周 L, 都有 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = 0$, 但是存在一个 $(x_0, y_0) \in D$ 使得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x_0, y_0) \neq 0.$$

由连续函数性质, 存在含于 D 且内部 O 也含于 D 的圆周 L 使得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in O.$$

不妨设

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) > 0, \forall (x, y) \in O.$$

现在格林公式得

$$\iint_O \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = 0,$$

这就是一个矛盾!, 于是在 D 上有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

62. (62.) 若 $P_0 \notin \Omega$, 则直接 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} &\iint_S \cos\angle(PQ, \mathbf{n}) \mathrm{d}S = \iint_S \frac{PQ\cdot\mathbf{n}}{r\cdot|\mathbf{n}|} \mathrm{d}S \\ &= \iint_S \frac{\xi - x_0}{r} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + \frac{\eta - y_0}{r} \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + \frac{\zeta - z_0}{r} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= \iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi - x_0}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y_0}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta - z_0}{r}\right) \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\ &= \iiint_\Omega \left(\frac{3r - \frac{r^2}{r}}{r^2}\right) \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = 2\iiint_\Omega \frac{1}{r} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

若 $P_0 \in \Omega$, 记

$$\Omega_\epsilon \triangleq \{(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega : r \geqslant \epsilon\}, \epsilon > 0.$$

首先 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} &\iint_S \frac{\xi - x_0}{r} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + \frac{\eta - y_0}{r} \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + \frac{\zeta - z_0}{r} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &- \iint_{r=\epsilon, \text{朝外}} \frac{\xi - x_0}{r} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + \frac{\eta - y_0}{r} \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + \frac{\zeta - z_0}{r} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= \iiint_{\Omega_\epsilon} \frac{2}{r} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&=\iint_{r=\epsilon,\text{朝外}}\frac{\xi-x_0}{r}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+\frac{\eta-y_0}{r}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+\frac{\zeta-z_0}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{\epsilon}\iint_{r=\epsilon,\text{朝外}}(\xi-x_0)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+(\eta-y_0)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+(\zeta-z_0)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{\epsilon}\iiint_{r\leqslant\epsilon}3\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=4\pi\epsilon^2\to0,\epsilon\to0^+.\end{aligned}$$

又

$$\iiint_\Omega\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta<\infty\Rightarrow\lim_{\epsilon\to0^+}\iiint_{\Omega_\epsilon}\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\iiint_\Omega\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

于是我们同样证明了

$$\iiint_\Omega\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2}\iint_S\cos\angle(PQ,\mathbf{n})\,\mathrm{d}S.$$

63. (63.) 记 n_i 为单位球面上点的单位外法向量的第 i 个分量, 直接 Gauss 公式得

$$\begin{aligned}\int_B|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_B\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_{\partial B}\sum_{i=1}^n u\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot n_i\mathrm{d}S-\int_B\sum_{i=1}^n\left(u\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-\lambda\int_B u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\geqslant0.\end{aligned}$$

u 不为常数给出了

$$\int_B u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z>0,\int_B|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z>0,$$

这就证明了 $\lambda<0$ 且

$$\int_B|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\lambda\int_B|u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

64. (64.) 考虑换元

$$\begin{aligned}x_1&=y_1y_2y_3\dots y_{n-1}y_n\\x_2&=y_1y_2y_3\dots y_{n-1}(1-y_n)\\x_3&=y_1y_2y_3\dots y_{n-2}(1-y_{n-1})\\&\vdots\\x_{n-1}&=y_1y_2(1-y_3)\\x_n&=y_1(1-y_2)\end{aligned},y_i\in[0,1],1=1,2,\cdots,n,$$

此时

$$\begin{aligned}y_1&=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n\\y_1y_2&=x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}\\y_1y_2y_3&=x_1+x_2+\cdots+x_{n-3}+x_{n-2}\\&\vdots\\y_1y_2\cdots y_{n-1}&=x_1+x_2\\y_1y_2\cdots y_n&=x_1.\end{aligned}$$

换元的雅可比矩阵为

$$J=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_2y_3\cdots y_n & y_1y_3y_4\cdots y_n & y_1y_2y_4\cdots y_n & \cdots & y_1y_2\cdots y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

于是我们有

$$|\det J|=y_1^{n-1}y_2^{n-2}\cdots y_{n-1}^1.$$

现在用 Beta 函数的性质得

$$\begin{aligned} &\int_D x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n. \\ &=\int_0^1 y_1^{\sum_{j=1}^{n}p_j-1}\,\mathrm{d}y_1\int_0^1 y_2^{\sum_{j=1}^{n-1}p_j-1}(1-y_2)^{p_n-1}\,\mathrm{d}y_2\cdots\int_0^1 y_n^{p_1-1}(1-y_n)^{p_2-1}\,\mathrm{d}y_n \\ &=\beta\left(\sum_{j=1}^{n}p_j,1\right)\beta\left(\sum_{j=1}^{n-1}p_j,p_n\right)\beta\left(\sum_{j=1}^{n-2}p_j,p_{n-1}\right)\cdots\beta\left(p_1,p_2\right) \\ &=\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\Gamma\left(1\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^{n}p_j\right)}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{n-1}p_j\right)\Gamma\left(p_n\right)}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)}\frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{n-2}p_j\right)\Gamma\left(p_{n-1}\right)}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{n-1}p_j\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(p_1\right)\Gamma\left(p_2\right)}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{2}p_j\right)} \\ &=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(p_j\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{j=1}^{n}p_j\right)}. \end{aligned}$$

65. (65.) 首先容易计算得

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^3}\right)=0.$$

若 $\mathbf{x}_0\in\Omega$, 则取 $\mathbf{x}_0$ 为心, 半径为 $r>0$ 的开球 $B\subset\Omega$, 然后

$$\begin{aligned} &\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^3}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{\partial B}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^3}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \\ &=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\partial B}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{r^3}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\frac{3}{r^3}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iiint_B 1\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

若 $\mathbf{x}_0\notin\overline{\Omega}$, 则

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^3}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^3}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}=0.$$

66. (66.) **Method 1**

当 $\epsilon \to 0^+$, 由余面积公式20.5, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iiint_{B_r \setminus B_\epsilon} \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}V = \int_\epsilon^r \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t \iint_{\partial B_t} \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S \\
&\overset{\text{换元}}{=} \int_\epsilon^r \mathrm{d}t \iint_{\partial B_1} \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S = \iint_{\partial B_1} \mathrm{d}S \int_\epsilon^r \frac{df(t\mathbf{x})}{dt} \mathrm{d}t \\
&= \iint_{\partial B_1} [f(r\mathbf{x}) - f(\epsilon\mathbf{x})] \, \mathrm{d}S = -\iint_{\partial B_1} f(\epsilon\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S \to -4\pi f(\mathbf{0}).
\end{aligned}$$

Method 2

首先

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right) = 0.$$

然后一方面

$$\begin{aligned}
&-\iint_{\partial B_\epsilon} \frac{x_1 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + \frac{x_2 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + \frac{x_3 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \iint_{\partial B_r} \frac{x_1 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + \frac{x_2 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + \frac{x_3 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&\quad - \iint_{\partial B_\epsilon} \frac{x_1 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + \frac{x_2 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + \frac{x_3 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \iiint_{B_r \setminus B_\epsilon} \frac{x_1}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2 f}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{x_3}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathrm{d}V + \iiint_{B_r \setminus B_\epsilon} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right) f \mathrm{d}V \\
&= \iiint_{B_r \setminus B_\epsilon} \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

利用两类曲面积分的关系和积分中值定理以及球面的单位外法向量公式得

$$\begin{aligned}
&-\iint_{\partial B_\epsilon} \frac{x_1 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + \frac{x_2 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + \frac{x_3 f}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= -\iint_{\partial B_\epsilon} \frac{x_1 f}{\epsilon^3} \cdot \frac{x_1}{\epsilon} \mathrm{d}S + \frac{x_2 f}{\epsilon^3} \cdot \frac{x_2}{\epsilon} \mathrm{d}S + \frac{x_3 f}{\epsilon^3} \cdot \frac{x_3}{\epsilon} \mathrm{d}S \\
&= -\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S = -4\pi f(\theta), \theta \in \partial B_\epsilon.
\end{aligned}$$

让 $\epsilon \to 0^+$ 得 $\theta \to \mathbf{0}$, 从而

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \iiint_{B_r \setminus B_\epsilon} \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \mathrm{d}V = -4\pi f(\mathbf{0}).$$

67. (67.)

(a). 一个初等计算表明

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_{-t}^{t} \frac{d}{dt}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)dx+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=t} \\
&\quad+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=-t} \\
&= \int_{-t}^{t}\left(2\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+2u\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx \\
&\quad+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=t}+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=-t} \\
&= 2\int_{-t}^{t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)dx \\
&\quad+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=t}+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=-t} \\
&= 2\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx \\
&\quad+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=t}+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=-t} \\
&= 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=t}-2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=-t} \\
&\quad+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=t}+\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)\Big|_{x=-t} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big|_{x=t}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big|_{x=-t}+|u|^2\Big|_{x=t}+|u|^2\Big|_{x=-t} \\
&= \left|v_+'(t)\right|^2+\left|v_-'(t)\right|^2+|v_+(t)|^2+|v_-(t)|^2.
\end{aligned}$$

显然这也给出了 E 在 $\mathbb{R}$ 单调递增.

(b). 现在由单调有界必收敛得 $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)$ 存在, 从而

$$\int_0^{\infty}\left|v_+'(t)\right|^2+\left|v_-'(t)\right|^2+|v_+(t)|^2+|v_-(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{dE}{dt}(t)\,\mathrm{d}t<\infty.$$

由均值不等式得

$$2\int_0^{\infty}\left|v_{\pm}'(t)\,v_{\pm}(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\infty}\left|v_{\pm}'(t)\right|^2+|v_{\pm}(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty,$$

即

$$2\int_0^{\infty}v_{\pm}'(t)\,v_{\pm}(t)\,\mathrm{d}t=v_{\pm}^2(+\infty)-v_{\pm}^2(0)$$

存在.

又 $\int_0^{\infty}|v_{\pm}(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty$ 和积分收敛必有子列趋于 0, 即结论14.3.1, 我们得

$$\lim_{t\to+\infty}v_{\pm}(t)=0.$$

68. (68.) 注意到

$$\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)=\cos x^2\cos y^2\cos z^2-\cos x^2\sin y^2\sin z^2-\sin x^2\cos y^2\sin z^2-\sin x^2\sin y^2\cos z^2.$$

于是记

$$a\triangleq\int_0^{\infty}\cos t^2\cdot\ln t\mathrm{d}t,b\triangleq\int_0^{\infty}\sin t^2\cdot\ln t\mathrm{d}t,$$

我们有

$$I=a^3-3ab^2=\Re\left((a+ib)^3\right).$$

又我们有

$$\begin{aligned}a+ib&=\int_0^\infty e^{it^2}\cdot\ln t\mathrm{d}t=\left(\int_0^\infty e^{it^2}\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t\right)'|_{s=1}\\&=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}is}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)'|_{s=1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}ie^{\frac{\pi}{4}is}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)e^{\frac{\pi}{4}is}\right)|_{s=1}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}ie^{\frac{\pi}{4}i}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{\pi}{4}i}\right),\end{aligned}$$

因此[41]

$$\begin{aligned}I&=\Re\left(\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}ie^{\frac{\pi}{4}i}\sqrt{\pi}+\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\right]^3\right)\\&=-\frac{\sqrt{2}}{1024}\left(8\left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3+12\pi^{\frac{3}{2}}\left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2-6\pi^3\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)-\pi^{\frac{9}{2}}\right).\end{aligned}$$

69. (69.) 我们分部积分有

$$\begin{aligned}&(n-p)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(\mathbf{x})|^p}{||\mathbf{x}||^p}\mathrm{d}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x})|^p\frac{\partial\left(\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^p}\right)}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x})|^p\frac{\partial\left(\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^p}\right)}{\partial x_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=-p\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x})|^{p-1}\mathrm{sgn}u\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_i}{||\mathbf{x}||^p}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant p\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x})|^{p-1}\frac{|\mathbf{x}\cdot\nabla u|}{||\mathbf{x}||^p}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant p\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x})|^{p-1}\frac{|\nabla u|}{||\mathbf{x}||^{p-1}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant p\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(\mathbf{x})|^p}{||\mathbf{x}||^p}\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

这里倒数第二个不等号来自 Cauchy 不等式, 最后一个不等号来自 Holder 不等式16.1. 于是我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(\mathbf{x})|^p}{||\mathbf{x}||^p}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant\left(\frac{p}{n-p}\right)^p\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(\mathbf{x})|^p\mathrm{d}\mathbf{x},\forall u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

我们完成了证明.

70. (70.) 首先 Green 公式得

$$\begin{aligned}0&=\iint_{\partial\Omega}(v-u)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega\nabla(v-u)\cdot\nabla u\mathrm{d}\mathbf{x}+\iiint_\Omega(v-u)\cdot\Delta u\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\iiint_\Omega\nabla(v-u)\cdot\nabla u\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

记 $w\triangleq v-u$, 我们由 $\iiint_\Omega(\nabla w\cdot\nabla u)\mathrm{d}\mathbf{x}=0$ 得

$$\iiint_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}\mathbf{x}=\iiint_\Omega|\nabla(w+u)|^2\mathrm{d}\mathbf{x}=\iiint_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\iiint_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}\mathbf{x}\geqslant\iiint_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}\mathbf{x},$$

这就完成了证明.

[41] 当然 $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ 可以用欧拉常数表示, 仍然非初等我们就不再化简了.

71. (71.) 我们记 $z \triangleq x+iy, w=\xi+i\eta$, 然后当 $|z| \geqslant \max\left\{1, 2\sup\limits_{w\in L}|w|\right\}$ 就有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \left|\frac{u(z)}{\ln|z|}+\oint_L f(w)\,\mathrm{d}s\right| = \frac{1}{\ln|z|}\left|\oint_L f(w)\ln\frac{|z|}{|z-w|}\mathrm{d}s\right| \\ &= \frac{1}{\ln|z|}\left|\oint_L f(w)\ln\left|1-\frac{w}{z}\right|\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{1}{\ln|z|}\sup_{w\in L}\left|\ln\left|1-\frac{w}{z}\right|\right|\oint_L |f(w)|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{\sup\limits_{s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|\ln|1-s||}{\ln|z|}\oint_L |f(w)|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由夹逼准则就有

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty}\frac{u(x,y)}{\ln\sqrt{x^2+y^2}} = -\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s.$$

72. (72.) 证明的想法是把正方形内部的点和边界最小距离的点连线.

连接 $[0,1]^2$ 对角线, 把正方形分为四个区域. 对 (x,y) 最上面的区域 (记为 D_1.), 则由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= |f(x,y)-f(x,1)| = \left|(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)\right| \\ &\leqslant |1-y|\max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}\iint_{D_1}(1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-y)\,\mathrm{d}y\int_{1-y}^y 1\mathrm{d}x \\ &= \max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}\int_{\frac{1}{2}}^1(2y-1)(1-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{24}\max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}.\end{aligned}$$

由对称性可以给出剩下三个区域类似的估计, 从而

$$\left|\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant 4\cdot\frac{1}{24}\max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2} = \frac{1}{6}\max_{[0,1]^2}\sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}.$$

73. (73.) 考虑正交变换

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & 0\\ -\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & -\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} & \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} & \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}. \\ &= T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} y(y-x) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以及积分区域变成

$$(x')^2 + (y')^2 = 1, z' = 0.$$

因此结合积分的对称性, 变换后被积函数只需保留 $c_1 (x')^2 + c_2 (y')^2$ 这一项.
我们有

$$\begin{aligned} \int_C y(y-x)\,\mathrm{d}s &= \int_{(x')^2+(y')^2=1, z'=0} \left[\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2} (x')^2 + \frac{\beta(\beta-\alpha)\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2)} (y')^2 \right] \mathrm{d}s \\ &= \frac{\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\beta(\beta-\alpha)\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2)}}{2} \int_{(x')^2+(y')^2=1} \left((x')^2 + (y')^2 \right) \mathrm{d}s \\ &= \pi \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}. \end{aligned}$$

74. (74.)

引理 30.5

设 $u \in C^1[0,1]$ 满足 $u(0) = 0$, 证明:

$$|u(1)|^2 \leqslant \tanh 1 \cdot \left(\int_0^1 \left[|u(r)|^2 + |u'(r)|^2 \right] \mathrm{d}r \right).$$

♡

证明 取 $\eta(r) \triangleq \frac{\sinh r}{\cosh 1}$, 我们有

$$u(1) = \int_0^1 (u'(r)\eta'(r) + u(r)\eta(r))\,\mathrm{d}r,$$

于是由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} |u(1)|^2 &= \left| \int_0^1 (u'\eta' + u\eta)\,\mathrm{d}r \right|^2 \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{|u'|^2 + |u|^2} \cdot \sqrt{|\eta'|^2 + |\eta|^2} \mathrm{d}r \right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 \left(|u'|^2 + |u|^2 \right) \mathrm{d}r \int_0^1 \left(|\eta'|^2 + |\eta|^2 \right) \mathrm{d}r \\ &= \tanh 1 \cdot \int_0^1 \left(|u'|^2 + |u|^2 \right) \mathrm{d}r, \end{aligned}$$

这就得证.

回到原题, 我们对 $F_w(r) \triangleq rf(rw), w \in \partial B$ 用引理30.5得我们有

$$\begin{aligned}
|f(w)|^2 &\leqslant \tanh 1 \int_0^1 \left(|F_w(r)|^2 + |F_w'(r)|^2\right) \mathrm{d}r \\
&= \tanh 1 \int_0^1 \left(|F_w(r)|^2 + |f(rw) + r\partial_r f(rw)|^2\right) \mathrm{d}r \\
&= \tanh 1 \int_0^1 \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |\partial_r f(rw)|^2 + |f(rw)|^2 + 2rf(rw)\,\partial_r f(rw)\right) \mathrm{d}r \\
&= \tanh 1 \int_0^1 \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |\partial_r f(rw)|^2 + \frac{\mathrm{d}\left(r|f(rw)|^2\right)}{\mathrm{d}r}\right) \mathrm{d}r \\
&= \tanh 1 \left[\int_0^1 \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |\partial_r f(rw)|^2\right) \mathrm{d}r + |f(w)|^2\right],
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
|f(w)|^2 &\leqslant \frac{\tanh 1}{1-\tanh 1} \int_0^1 \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |\partial_r f(rw)|^2\right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{e^2-1}{2} \int_0^1 \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |\partial_r f(rw)|^2\right) \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

现在由余面积公式20.5得

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} |f(w)|^2 \,\mathrm{d}S(w) &\leqslant \frac{e^2-1}{2} \int_{\partial B} \int_0^1 \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |\partial_r f(rw)|^2\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}S(w) \\
&= \frac{e^2-1}{2} \int_0^1 \int_{\partial B} \left(r^2 |f(rw)|^2 + r^2 |w \cdot \nabla f(rw)|^2\right) \mathrm{d}S(w)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{e^2-1}{2} \int_0^1 \int_{|w|=r} \left(|f(w)|^2 + \left|\frac{w}{r} \cdot \nabla f(w)\right|^2\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}S(w) \\
&\leqslant \frac{e^2-1}{2} \int_0^1 \int_{|w|=r} \left(|f(w)|^2 + \left|\frac{w}{r}\right|^2 |\nabla f(w)|^2\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}S(w) \\
&= \frac{e^2-1}{2} \int_B \left(|f|^2 + |\nabla f|^2\right) \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

特别的, 当

$$f(x,y,z) \triangleq \frac{\sinh\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

不等式等号成立, 因此我们完成了证明.

75. (75.) 推论20.1.2给出单位球面外法向量为 (x,y,z). 例题10.20给出

$$x\frac{\partial p_n}{\partial x} + y\frac{\partial p_n}{\partial y} + z\frac{\partial p_n}{\partial z} = np_n, n = 1, 2, \cdots.$$

现在对自然数 m, n 有

$$\begin{aligned}
\iint_S p_n p_m \mathrm{d}S &= \frac{1}{n} \iint_S \left(x\frac{\partial p_n}{\partial x} + y\frac{\partial p_n}{\partial y} + z\frac{\partial p_n}{\partial z}\right) p_m \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{n} \iint_{S,\text{朝外}} \left(p_m \frac{\partial p_n}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + p_m \frac{\partial p_n}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + p_m \frac{\partial p_n}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{n} \iiint_{\text{单位球}} \left(\frac{\partial p_m}{\partial x}\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{\partial p_m}{\partial y}\frac{\partial p_n}{\partial y} + \frac{\partial p_m}{\partial z}\frac{\partial p_n}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

交换 m, n 有

$$\iint_S p_n p_m \mathrm{d}S = \frac{1}{m} \iiint_{\text{单位球}} \left(\frac{\partial p_m}{\partial x}\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{\partial p_m}{\partial y}\frac{\partial p_n}{\partial y} + \frac{\partial p_m}{\partial z}\frac{\partial p_n}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

所以 $n \neq m$ 时就有

$$\iint_S p_m p_n \mathrm{d}S = 0,$$

我们完成了证明.

76. (76.) 考虑

$$H(\theta) \triangleq \iint_{(x-d)^2+y^2\leqslant r^2} h(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

然后

$$\begin{aligned} H'(\theta) = &\iint_{(x-d)^2+y^2\leqslant r^2} (-x\sin\theta - y\cos\theta)\frac{\partial h}{\partial x}(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{(x-d)^2+y^2\leqslant r^2} (x\cos\theta - y\sin\theta)\frac{\partial h}{\partial y}(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \\ = &\iint_{(u-d\cos\theta)^2+(v-d\sin\theta)^2\leqslant r^2} \left(u\frac{\partial h}{\partial v} - v\frac{\partial h}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

因为 $H(0) = H(2\pi)$, 所以由罗尔中值定理得 $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ 使得 $H'(\theta_0) = 0$. 故

$$(x - d\cos\theta_0)^2 + (y - d\sin\theta_0)^2 \leqslant r^2$$

为所求 S.

77. (77.) 设

$$\rho(\mathbf{x}) \triangleq e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}}.$$

首先直接计算有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\left(x_j|f|^2\rho\right)}{\partial x_j} &= n|f|^2\rho + 2f\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho - |f|^2\rho\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j^2} \\ &\leqslant n|f|^2\rho + \rho\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j^2}{a_j^2}|f|^2 + \left|a_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|^2\right) - |f|^2\rho\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j^2} \\ &\leqslant n\left(|f|^2 + \sum_{j=1}^{n}a_j^2\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|^2\right)\rho. \end{aligned}$$

然后由 Gauss-Green 公式有

$$\begin{aligned} \int_{\partial B}|f|^2\rho\mathrm{d}S &= \sum_{j=1}^{n}\int_B\frac{\partial\left(x_j|f|^2\rho\right)}{\partial x_j}\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leqslant n\int_B\left(|f|^2 + \sum_{j=1}^{n}a_j^2\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|^2\right)\rho\mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

这就完成了证明.

30.12 非数学类线性代数

1. (1.)

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji} = \mathrm{tr}(AB).$$

于是我们只需证明

$$\det(AB) \leqslant \left(\frac{\mathrm{tr}(AB)}{n}\right)^n.$$

如果 AB 特征值都是正的, 那么由均值不等式并考虑 AB 的特征值即可证明. 我们来证明 AB 特征值是正的. 事实上, 由正定矩阵等价定义, 我们知道存在可逆矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=CC^T$, 于是

$$AB=CC^TB\sim C^TBC\cong B.$$

现在我们就证明了 AB 特征值都是正的. 我们完成了证明.

2. (2.) 由齐次性和单位球面紧性, 我们有

$$\lambda_0\triangleq\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}=\max_{||\alpha||_{\mathbb{R}^n}=1}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}<\infty.$$

注意到对 $\lambda\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}\leqslant\lambda\Leftrightarrow\alpha^T\left(A-\lambda B\right)\alpha\leqslant0,\forall\alpha\in\mathbb{R}^n\Leftrightarrow\lambda B-A\text{半正定}.$$

注意到 λ_0B-A 半正定, 由引理21.1我们知道 $\left(\lambda_0B-A\right)B^{-1}=\lambda_0E-AB^{-1}$ 特征值都非负, 所以 AB^{-1} 特征值都是实数且小于等于 λ_0.

再证明 λ_0 的确是 AB^{-1} 特征值. 若不然, 记 AB^{-1} 最大特征值为 $\lambda_1<\lambda_0$. 于是我们有 λ_1E-AB^{-1} 所有特征值都非负. 设 $B=DD^T,D$ 是实可逆矩阵, 则我们有

$$D^{-1}\left(\lambda_1B-A\right)D^{-T}=D^{-1}\left(\lambda_1DD^T-A\right)D^{-T}=\lambda_1E-D^{-1}AD^{-T}.$$

注意由命题21.7, 我们知道

$$\left|\lambda E-\lambda_1E+D^{-1}AD^{-T}\right|=\left|\lambda E-\lambda_1E+AD^{-T}D^{-1}\right|=\left|\lambda E-\lambda_1E+AB^{-1}\right|,$$

即 $\lambda_1E-D^{-1}AD^{-T}$ 特征值和 λ_1E-AB^{-1} 一致, 从而 λ_1B-A 半正定, 故

$$\lambda_0=\max_{\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^TB\alpha}\leqslant\lambda_1<\lambda_0,$$

这就是一个矛盾! 这就证明了(21.24).

3. (3.) 注意到逆矩阵是原矩阵的多项式21.11, 我们直接猜出 B 的逆矩阵. 也就是说待定 a,b 使得 $\left(x^3+x^2\right)(a+bx)=1$[42], 于是反复运用 $x^2=3x-2$ 得

$$\begin{aligned}&bx^4+(a+b)x^3+ax^2=1\Leftrightarrow3ax^2+ax-2a+12bx^2-14bx+4b=1\\&\Leftrightarrow(10a+22b)x-8a-20b=1\Leftrightarrow10a+22b=0,8a+20b=-1\\&\Leftrightarrow a=\frac{11}{12},b=-\frac{5}{12},\end{aligned}$$

即 $B^{-1}=\frac{11}{12}E-\frac{5}{12}A$.

呈现在卷子上的过程应该是: 注意到

$$\begin{aligned}\left(\frac{11}{12}E-\frac{5}{12}A\right)\left(A^3+A^2\right)&=\frac{-5A^4+6A^3+11A^2}{12}\\&=\frac{-5\left(3A-2E\right)^2+6A\left(3A-2E\right)+11\left(3A-2E\right)}{12}\\&=\frac{-9A^2+27A-14E}{4}=\frac{-9\left(3A-2E\right)+27A-14E}{4}=E,\end{aligned}$$

故 $B^{-1}=\frac{11}{12}E-\frac{5}{12}A$.

4. (4.) 这是秩一矩阵且

$$A=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1}&\frac{1}{x_2}&\cdots&\frac{1}{x_n}\end{pmatrix}.$$

[42] 因此超过 2 次的都会因为 $x^2-3x+2=0$ 而被丢掉高次项.

由推论21.1知 A 有唯一非 0 特征值

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 1.$$

5. (5.) 由于实对称矩阵可以正交相似对角化和幂等矩阵的特征值为 $0, 1$, 我们不妨设

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^T & B_4 \end{pmatrix}, B_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}, 0 \leqslant r < n.$$

于是

$$C = A - B = \begin{pmatrix} E_r - B_1 & -B_2 \\ -B_2^T & -B_4 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2^T & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $B^2 = B$ 知 $B_2^T B_2 = B_4 - B_4^2$. 由左边半正定知 B_4 特征值在 $[0, 1]$ 之间. 现在由 C 半正定知 $-B_4$ 半正定, 故只能有 B_4 特征值恒为 0, 从而 $B_4 = 0$. 由引理23.5知 $B_2 = 0$. 此时我们就有

$$AB = BA, C = \begin{pmatrix} E_r - B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1^2 = B_1.$$

因此

$$C^2 = \begin{pmatrix} (E_r - B_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r + B_1^2 - 2B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r - B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C,$$

这就证明了 C 也是幂等矩阵.

6. (6.) 我们知道存在实可逆矩阵 C 使得 $C^T AC = E_n$, 于是

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{\det C^T \cdot \det(A+B) \cdot \det C} = \sqrt[n]{\det(E_n + C^T BC)}; \\ &\sqrt[n]{\det C^T \cdot \det A \cdot \det C} = \sqrt[n]{\det E_n} = 1; \\ &\sqrt[n]{\det C^T \cdot \det B \cdot \det C} = \sqrt[n]{\det(C^T BC)}. \end{aligned}$$

因为 B 正定, 所以 $C^T BC$ 正定, 因此设 $C^T BC$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n > 0$, 我们有

$$\sqrt[n]{\det(E_n + C^T BC)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \lambda_i} = 1 + \sqrt[n]{\det(C^T BC)},$$

这里不等号来自均值不等式

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) &= 1 + \sum_{m=1}^n \sum_{|S|=m, S\subset\{1,2,\cdots,n\}} \prod_{i\in S} \lambda_i \\ &\geqslant 1 + \sum_{m=1}^n C_n^m \sqrt[C_n^m]{\prod_{i=1}^n \lambda_i^{C_{n-1}^{m-1}}} = 1 + \sum_{m=1}^n C_n^m \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{m}{n}} = \left(1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \lambda_i}\right)^n, \end{aligned}$$

且等号成立条件为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, 即 $C^T BC$ 是数量矩阵. 注意到 $C^T BC = \lambda_1 C^T AC \Leftrightarrow B = \lambda_1 A$, 于是我们证明了不等式(21.25)且(21.25)等号成立的充要条件是存在正实数 $\lambda > 0$ 使得 $B = \lambda A$.

7. (7.) 若 $A \neq 0$, 则由条件知若 $A^* \neq 0$. 由矩阵和伴随矩阵秩关系21.12, 我们知道 $r(A^*) = 1, r(A) = 2$. 注意到 A^* 的任何 2 阶子式皆为 0. 特别地有

$$\begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21}^2 & a_{22}^2 \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} = \pm a_{12}a_{21}; \\ a_{21}a_{32} = \pm a_{22}a_{31}; \\ a_{12}a_{31} = \pm a_{11}a_{32}. \end{cases} . \tag{30.105}$$

若(30.105)中三个等式的某个等式正号成立, 不妨设 $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, 于是有 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, 它也是 a_{33} 的代数余子式, 故 $a_{33}^2 = 0 \Rightarrow a_{33} = 0$.

如果(30.105)三个等式都是负号, 则将它们相乘得

$$a_{11}a_{22}a_{21}a_{32}a_{12}a_{31} = -a_{11}a_{22}a_{21}a_{32}a_{12}a_{31}.$$

从而 $a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{32}, a_{12}, a_{31}$ 至少有一个为 0. 总之 A^* 至少有一个元素为 0.

不妨设 $a_{11} = 0$, 否则同时交换行列即可. 若 A^* 的第一列不全为 0, 则由 A^* 的第二, 三列向量都可以被 A^* 的第一列向量表出得 A^* 的第一行元素全为 0. 于是 A^* 有一行或者一列元素全为 0, 从而 A 也有一行或者一列元素全为 0. 不妨设 A 第一行元素全为 0, 此时 A 除去第一行的元素外其代数余子式全为 0. 于是

$$a_{22}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = a_{33}^2 = 0 \Rightarrow a_{22} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0.$$

此时 $r(A) \leqslant 1$, 这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $A = 0$.

8. (8.) 考虑 $n = 1$, A, B 为非 0 数字, $C = 0$ 可知 3, 4 不对. 下证 1, 2 是正确的.

由秩不等式21.6得

$$r(ABC) \geqslant r(AB) + r(C) - n \geqslant r(A) + r(B) + r(C) - 2n,$$

即等号成立, 从而 1, 2 成立.

9. (9.) 若 $r(BA) \leqslant 1$, 则

$$r\left(\begin{pmatrix} ABA \\ BAB \end{pmatrix}\right) \leqslant r(ABA) + r(BAB) \leqslant r(BA) + r(BA) \leqslant 2 < 3,$$

即 $\begin{pmatrix} ABA \\ BAB \end{pmatrix} x = 0$ 有非 0 解, 从而线性方程组 $ABAx = 0, BABx = 0$ 有公共非 0 解. 若 $r(BA) \geqslant 2$, 则

$$3 \geqslant r(AB) = r(BA) + 1 \geqslant 3 \Rightarrow r(AB) = 3 \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |BA| \neq 0 \Rightarrow r(BA) = 3,$$

这就是一个矛盾! 因此这种情况不存在. 我们完成了证明.

10. (10.) 本题是例题23.165的特殊情况.

11. (11.) 考虑

$$A = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right\}, B = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right\},$$

则

$$AB = 0, BA = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \cdots, 0\right\}.$$

12. (12.) 首先注意到

$$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix},$$

我们有 $A \pm B$ 可逆.

注意到

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B(A+B)^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix},$$

我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix}E & -E\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A+B & 0\\ 0 & A-B\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E & 0\\ -B(A+B)^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & E\\ 0 & E\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(A+B)^{-1} & -(A-B)^{-1}\\ 0 & (A-B)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & E\\ -B(A+B)^{-1} & E-B(A+B)^{-1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} & (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}+(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1}\\ -(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1} & (A-B)^{-1}-(A-B)^{-1}B(A+B)^{-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

13. (13.) 注意到由命题知 Jordan 块的块数21.3

$$r\left(A^{m-1}\right)+r\left(A^{m+1}\right)-2r\left(A^{m}\right)\geqslant 0,\forall m\in\mathbb{N}.$$

记

$$a_m\triangleq r\left(A^m\right),d_m\triangleq a_{m+1}-a_m,m=1,2,\cdots,$$

我们有 $\{d_m\}$ 递增. 所以

$$a_{m+2}=a_1+\sum_{j=1}^{m+1}d_j\geqslant a_1+(m+1)d_1=a_1+(m+1)(a_2-a_1),$$

这就证明了(21.26).

14. (14.) 设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times(n+1)}.$$

显然 $Ax=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上有非 0 解. 由例题23.2知

$$Ax=0\Leftrightarrow A^TAx=0.$$

而 $A^TA=\left(\alpha_i^T\alpha_j\right)$ 且 $A^TAx=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上有非 0 解. 又

$$\alpha_i^T\alpha_j=\alpha_i\cdot\alpha_j=\frac{|\alpha_i|^2+|\alpha_j|^2-|\alpha_i-\alpha_j|^2}{2}\in\mathbb{Q}.$$

于是由线性方程组是否有非 0 解和扩域无关知在 $\mathbb{Q}$ 上的线性方程组 $A^TAx=0$ 有非 0 解, 这也是 $Ax=0$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的非 0 解. 因此我们证明了 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关.

15. (15.) 首先

$$(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}\beta^T\\ \gamma^T\\ \alpha^T\end{pmatrix}=\alpha\beta^T+\beta\gamma^T+\gamma\alpha^T=0.$$

于是记 $r\triangleq r(\{\alpha,\beta,\gamma\})$, 则有

$$0=r\left((\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}\beta^T\\ \gamma^T\\ \alpha^T\end{pmatrix}\right)\geqslant 2r-3\Rightarrow r\leqslant\frac{3}{2}.$$

因为 r 是正整数, 于是 $r\leqslant 1$.

现在取

$$\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\beta=\alpha,\gamma=-\frac{1}{2}\alpha,$$

这就是一个秩 1 的例子.

16. (16.) 由条件得

$$(A+E)C=0,(A-2E)B^T=0,r(C)+r\left(B^T\right)=n.$$

注意到 C 的列向量组的极大无关组是 A 属于特征值 -1 的线性无关特征向量, B^T 的列向量组的极大无关组是 A 属于特征值 2 的线性无关特征向量. 结合秩条件知这给出了 A 的 n 个线性无关特征向量, 因此 A 可

对角化且相似标准型为

$$\begin{pmatrix} -E_r & 0 \\ 0 & 2E_{n-r} \end{pmatrix}, r \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}.$$

17. (17.) 一方面

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ker A \Rightarrow \begin{pmatrix} A & BA \\ 0 & A^TA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x} + BA\mathbf{y} \\ A^TA\mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

另外一方面,

$$\begin{pmatrix} A & BA \\ 0 & A^TA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x} + BA\mathbf{y} \\ A^TA\mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow A\mathbf{x} + BA\mathbf{y} = 0, A^TA\mathbf{y} = 0$$

$$\overset{A^TA\text{和}A\text{有相同的秩}21.8}{\Rightarrow} A\mathbf{y} = 0 \Rightarrow A\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ker A,$$

于是我们知道[43]

$$\dim \ker \begin{pmatrix} A & BA \\ 0 & A^TA \end{pmatrix} = 2n - 2r(A) \Rightarrow r\left(\begin{pmatrix} A & BA \\ 0 & A^TA \end{pmatrix}\right) = 2r(A).$$

18. (18.) 对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 我们有

$$\mathbf{x}^T\left(Q + BPB^T\right)\mathbf{x} = \mathbf{x}^TQ\mathbf{x} + \left(B^T\mathbf{x}\right)^T PB^T\mathbf{x} > 0,$$

即 $Q + BPB^T$ 是正定矩阵, 从而 $\left(Q + BPB^T\right)^{-1}$ 也是正定矩阵. 现在对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, 我们有

$$\mathbf{x}^TB^T\left(Q + BPB^T\right)^{-1}B\mathbf{x} = (B\mathbf{x})^T\left(Q + BPB^T\right)^{-1}B\mathbf{x} \geqslant 0,$$

即 $B^T\left(Q + BPB^T\right)^{-1}B$ 是半正定矩阵, 从而

$$\left|B^T\left(Q + BPB^T\right)^{-1}B\right| \geqslant 0.$$

注意到正定矩阵可以开方23.5, 我们知道右边不等式可以写做

$$\left|P^{\frac{1}{2}}B^TQ^{-\frac{1}{2}}\left(E + Q^{-\frac{1}{2}}BP^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}B^TQ^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}BP^{\frac{1}{2}}\right| < 1,$$

因此可以不妨设 $Q = P = E$.

由命题21.7得

$$\left|\lambda E - B^T\left(E + BB^T\right)^{-1}B\right| = \lambda^{m-n}\left|\lambda E - BB^T\left(E + BB^T\right)^{-1}\right|,$$

于是 $B^T\left(E + BB^T\right)^{-1}B$ 的特征值只有 0 或者 $\frac{\lambda}{1+\lambda}, \lambda \geqslant 0$. 于是我们由 $\frac{\lambda}{1+\lambda} \in [0, 1)$ 和行列式为特征值之积可得

$$\left|B^T\left(E + BB^T\right)^{-1}B\right| < 1.$$

19. (19.) 由21.7知 $E_n - DC$ 可逆. 然后

$$\begin{aligned} &\left(E_m + C\left(E_n - DC\right)^{-1}D\right)\left(E_m - CD\right) \\ &= E_m - CD + C\left(E_n - DC\right)^{-1}D - C\left(E_n - DC\right)^{-1}DCD \\ &= E_m - CD + C\left(E_n - DC\right)^{-1}\left(E_n - DC\right)D \\ &= E_m, \end{aligned}$$

即得

$$\left(E_m - CD\right)^{-1} = E_m + C\left(E_n - DC\right)^{-1}D.$$

[43] dim ker 表示齐次方程组解空间维数.

20. (20.) 显然 $\det(xA+yB)$ 是关于 x,y 的齐 3 次多项式, 于是我们可设

$$\det(xA+yB)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3.$$

代入 $(x,y)=(1,0)$ 得 $a=0$. 代入 $(x,y)=(0,1)$ 得 $b=0$. 代入 $(x,y)=(1,\pm1)$ 得

$$c\pm d=0\Rightarrow c=d=0.$$

因此我们知道

$$\det(xA+yB)=0,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

21. (21.) 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 则由条件得

$$|\lambda_i|=1,i=1,2,\cdots,n,n=\left|\sum_{i=1}^n\lambda_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^n|\lambda_i|=n.$$

由绝对值不等式取等条件得 λ_i 有相同的幅角, 从而只能全部相同, 因此

$$\lambda_i=1,i=1,2,\cdots,n.$$

而 A 有零化多项式 x^m-1, 因此极小多项式可以分解为一次式的积, 所以可相似对角化. 又因为和数量矩阵相似的矩阵只能是数量矩阵, 所以 $A=I_n$.

30.13 微分方程

1. (1.) 注意到题目条件可以变形为

$$\left(\frac{1}{xy'-y}\right)'=-\left(\frac{1}{y}\right)'.$$

因此

$$\frac{1}{xy'-y}=-\frac{1}{y}+C,$$

即

$$\frac{y'}{y+\frac{1}{C-\frac{1}{y}}}=\frac{1}{x}.$$

解得

$$x=C_2yC_1^{\frac{1}{y}}.$$

2. (2.) 注意到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx}\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{y''}{(y')^3}.\tag{30.106}$$

于是视 x 为因变量, 方程变为

$$-\frac{d^2x}{dy^2}+x=-e^{2y}.$$

这是一个二阶常系数非齐次微分方程, 高数课本告诉我们解为

$$x=C_1e^y+C_2e^{-y}+\frac{e^{2y}}{3}.$$

3. (3.) 注意到 $(xy'+y)(y'-2x)=0$, 故 $xy'+y=0$ 或 $y'-2x=0$. 分别解两个微分方程得通解有两族

$$y=x^2+C,y=\frac{C}{x}.$$

4. (4.) 这是一个黎卡提微分方程, 因此猜特解为 $y_0=\frac{2}{x}$, 考虑 $z=y-\frac{2}{x}$ 得 Bernouli 微分方程 $z'=z^2+\frac{3z}{x}$, 解之得通解 $z(x)=-\frac{4x^2}{c+x^4}$, 故得原微分方程的通解为 $y(x)=-\frac{4x^2}{c+x^4}+\frac{2}{x}$.
5. (5.) 注意学习高阶的常系数线性微分方程的解法[44], 和二阶几乎是类似的, 我们考虑特征方程 $x^4-2x^2+1=0$

[44] 本题也可以先解 y'', 再求两次原函数得到, 这样就可以在二阶微分方程的框架下解决.

的根为 $1,1,-1,-1$, 可得齐次通解为

$$y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}+(c_3+c_4x)\,e^{x}.$$

直接观察得特解[45] x^2+1, 于是得原微分方程通解

$$y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}+(c_3+c_4x)\,e^{x}+x^2+1.$$

6. (6.) 和差化积得 $-\frac{y'}{\sin\frac{y}{2}}=2\cos\frac{x}{2}$, 这就得到了通解 $\cot\frac{y}{4}=Ce^{2\sin\frac{x}{2}}$.
7. (7.) 对(22.11)两边求导, 我们有 $y'\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=1$, 即

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+y^2}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\Rightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)+C.$$

在(22.11)两边令 $x=0$ 得 $y(0)=0$, 故 $C=0$. 现在我们就有

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\Rightarrow y(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

8. (8.) 注意反函数求导公式

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx}\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{y''}{(y')^3}.\tag{30.107}$$

于是

$$\frac{d^2x}{d^2y}-x=\sin y,$$

这是一个二阶线性常系数非齐次微分方程, 解得

$$x=c_1e^{y}+c_2e^{-y}-\frac{\sin y}{2}.$$

9. (9.) 注意到 $\frac{y'}{\sin^2 y}-\cos x=\cot y$, 我们考虑 $u=\cot y$, 则有

$$-u'-\cos x=u.$$

解一阶线性非齐次微分方程得

$$u=ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}.$$

于是微分方程的通解为

$$\cot y=ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}.$$

10. (10.) 这是 Bernouli 方程. 设 $v=y^{-1}$, 我们有

$$v'-v=\sin x-\cos x.$$

解一阶线性非齐次微分方程得 $v=ce^x-\sin x$, 从而原微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{ce^x-\sin x}.$$

11. (11.) 取 $r=e^t$, 则

$$\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{dt}\frac{1}{\frac{dr}{dt}}=\frac{1}{e^t}\frac{dR}{dt};$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d\left(\frac{dR}{dr}\right)}{dr}=\frac{d\left(\frac{dR}{dr}\right)}{dt}\frac{1}{\frac{dr}{dt}}=-\frac{1}{e^{2t}}\frac{dR}{dt}+\frac{1}{e^{2t}}\frac{d^2R}{dt^2};$$

$$\frac{d^3R}{dr^3}=\frac{d\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right)}{dr}=\frac{d\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right)}{dt}\frac{1}{\frac{dr}{dt}}=\frac{2}{e^{3t}}\frac{dR}{dt}-\frac{3}{e^{3t}}\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{1}{e^{3t}}\frac{d^3R}{dt^3}.$$

带入原微分方程得

$$\frac{d^3R}{dt^3}-\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{dR}{dt}+R=2025.$$

[45] 显然应该是多项式, 待定系数可求.

特征方程

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1).$$

故解常系数线性微分方程得通解

$$R(e^t)=c_1e^{-t}+(c_2+c_3t)e^t+2025.$$

即

$$R(r)=\frac{c_1}{r}+(c_2+c_3\ln r)r+2025.$$

代入初值条件得

$$R(r)=\frac{1}{4}\left(-r+\frac{1}{r}+2r\ln r+8100\right).$$

12. (12.) 这是欧拉方程, 套公式得

$$y=x(c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x))+x\ln x.$$

13. (13.) 做换元 $y=x^3u$, 然后有

$$xy'=3x^3u+x^4u',\sqrt{x^6-y^2}=|x|^3\sqrt{1-u^2}.$$

原方程变为

$$3x^3u+x^4u'=|x|^3\sqrt{1-u^2}+3x^3u,$$

即 $u=\pm1$ 为奇解且

$$\begin{cases}\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{x}, & ,x>0\\ \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}.$$

解得

$$u=\begin{cases}\sin(\ln x+C_1), & x>0\\ \sin(C_2-\ln|x|), & x<0\end{cases}.$$

于是解为 $y=\pm x^3$ 或者

$$y=\begin{cases}x^3\sin(\ln x+C_1), & x>0\\ x^3\sin(C_2-\ln|x|), & x<0\end{cases}.$$

30.14 数学类线性代数

1. (1.) 事实上可以不妨设 A 可逆, 否则以 $A+tE_n$ 代替 A 并让 $t\to0$. 于是我们有

$$|A+B+ACB|=|A|\left|E_n+\left(A^{-1}+C\right)B\right|=\left|E_n+B\left(A^{-1}+C\right)\right||A|=|A+B+BCA|,$$

这里用到了经典结论

$$|E_n+MN|=|E_n+NM|,\forall N,M\in\mathbb{F}^{n\times n}.$$

我们完成了证明.

2. (2.) 充分性: 若 A 的所有几何重数都是 1, 则 A 的特征多项式等于极小多项式, 这种矩阵一定有 $\lambda E-A$ 相抵 $\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&f(\lambda)\end{pmatrix}$, 这里 f 是 A 的极小多项式 (因为对角线之积必须为特征多项式). 不妨设为 $f(\lambda)=$

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$. 而 f 的友矩阵也满足特征多项式等于极小多项式等于 f, 因此

$$A \sim \begin{pmatrix} & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

于是存在可逆矩阵 $P = (\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 使得

$$AP = P \begin{pmatrix} & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

对比系数可得 $\alpha_i = A^{i-1}\alpha, i = 1, 2, \cdots, n$. P 可逆知如此构造的 $\{\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha\}$ 是一组基. 这就证明了充分性.

必要性: 直接设 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ 是 A 的极小多项式, 于是

$$A\left(\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha\right) = \left(\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha\right) \begin{pmatrix} & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

而友矩阵特征多项式等于极小多项式, 因此 A 的所有几何重数都是 1. 这就证明了必要性.

3. (3.) 利用 sin 的和角公式, 容易想到

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \vdots & \vdots \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \sin\theta & \sin 2\theta & \cdots & \sin n\theta \end{pmatrix}.$$

利用 BC 和 CB 有完全一样的非 0 Jordan, 只需计算

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \sin\theta & \sin 2\theta & \cdots & \sin n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \vdots & \vdots \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \cos j\theta \sin j\theta & \sum_{j=1}^{n} \cos^2 j\theta \\ \sum_{j=1}^{n} \sin^2 j\theta & \sum_{j=1}^{n} \cos j\theta \sin j\theta \end{pmatrix}$$

的 Jordan, 容易得到这个二阶矩阵有两个不同的特征值

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{j=1}^{n} \cos j\theta \sin j\theta \pm \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \cos^2 j\theta \sum_{j=1}^{n} \sin^2 j\theta} \\ &= \frac{\sin(\theta n)\sin(\theta(n+1))}{2\sin\theta} \pm \sqrt{\frac{1}{8}\left[n + \frac{\sin(\theta n)\cos(\theta(n+1))}{\sin\theta}\right]\left[2n + 1 - \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}\right]} \\ &= \pm\sqrt{\frac{n}{8}2n} \\ &= \pm\frac{n}{2}, \end{aligned}$$

这里用二倍角公式和半角公式转化为标准的一次的三角函数即可用经典方法求和.

因此

$$\det\left(E + A^{2023}\right) = \left(1 + \left(\frac{n}{2}\right)^{2023}\right)\left(1 - \left(\frac{n}{2}\right)^{2023}\right) = 1 - \left(\frac{n}{2}\right)^{4046}.$$

4. (4.) 假设 O 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密. 因为任意真子空间是闭的, 所以真子空间不可能在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密, 于是必须有

$\mathrm{span}O=\mathbb{R}^n$. 设 $i\in\mathbb{N}_0$ 使得 $A^i\mathbf{x}$ 不是 O 的孤立点, 则存在 $m_k\to+\infty$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}A^{m_k}\mathbf{x}=A^i\mathbf{x}.$$

对任何 $j\in\mathbb{N}_0$, 我们有严格递增的正整数列 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}A^{m_k}\left(A^j\mathbf{x}\right)=\lim_{k\to+\infty}A^j\left(A^{m_k}\mathbf{x}\right)=A^i\left(A^j\mathbf{x}\right).$$

于是由线性性, 对任何 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 都有

$$\lim_{k\to+\infty}A^{m_k}\mathbf{y}=A^i\mathbf{y}.$$

于是取 $\mathbf{y}=e_1,e_2,\cdots,e_n$ 可得

$$\lim_{k\to+\infty}A^{m_k}=A^i.$$

若 A 的所有特征值的模都小于 1, 则由命题23.11可得矩阵范数 $||\cdot||$ 使得 $||A||<1$. 那么

$$0\leqslant\left|\left|A^i\right|\right|=\lim_{k\to+\infty}||A^{m_k}||\leqslant\lim_{k\to+\infty}||A||^{m_k}=0,$$

即 $A^i=0$. 因此 O 是有限集从而和 O 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密矛盾!.

若 A 有特征值 λ 的模大于等于 1, 设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $P^{-1}AP$ 是 Jordan 标准型. 考虑矩阵所有元素模的平方的和这个范数 $||\cdot||_F$. 注意到由命题21.3得 A^{m_k} 的块 $J_s^{m_k}(\lambda)$ 的复对角线为 $m_k\lambda^{m_k-1}$. 但是

$$\lim_{k\to+\infty}m_k\left|\lambda^{m_k-1}\right|=+\infty,$$

这就是一个矛盾!. 因此我们证明了 O 在 $\mathbb{R}^n$ 中不稠密.

5. (5.) 事实上设 $A=U+V,B=aU+bV$, 只要 $a\neq b$, 那么从解线性方程组的角度, 显然这样的 U,V 可以唯一确定. 现在

$$\begin{aligned}A^2-2AB-B^2&=(U+V)^2-2(U+V)(aU+bV)-(aU+bV)^2\\&=\left(1-2a-a^2\right)U^2+\left(1-2b-b^2\right)V^2+(1-2b-ab)UV+(1-2a-ab)VU.\end{aligned}\tag{30.108}$$

为了消去平方项, 我们取 $a=\sqrt{2}-1,b=-\sqrt{2}-1$, 则(30.108)变为

$$A^2-2AB-B^2=\left(4+2\sqrt{2}\right)UV+\left(4-2\sqrt{2}\right)VU=0.\tag{30.109}$$

现在

$$\left|\left(4+2\sqrt{2}\right)^n\right||V||U|=\left|\left(4+2\sqrt{2}\right)UV\right|=\left|\left(2\sqrt{2}-4\right)VU\right|=\left|\left(2\sqrt{2}-4\right)^n\right||V||U|,$$

于是 V,U 必然有一个行列式为 0, 即其不可逆.

现在利用(30.109), 我们有 $AB-BA=-2\sqrt{2}UV+2\sqrt{2}VU=\left(-2\sqrt{2}+\frac{4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-4}\right)UV$ 是不可逆矩阵, 这就完成了证明.

6. (6.) 不妨设 A 有 s 个不同特征值且 $A=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}$, 这里 J_i 是对应 A_i 的特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵, 阶数为 n_i.

注意到若 λ 不是 A 的特征值, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\ker(A-\lambda I)^n=0$ 当然是 B 的不变子空间. 矩阵乘法表明对每个 $i=1,2,\cdots,s$,

$$v\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\ker(A-\lambda_iI)^n\Leftrightarrow v=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\x\\\vdots\\0\end{pmatrix},\forall x\in\mathbb{C}^{n_i}.$$

此时矩阵乘法告诉我们全体 v 要成为 B 的不变子空间等价于

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}, B_{ii}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

进一步, 由 $l_{J_i-\lambda_i I}$ 的幂零性 (见定理23.21) 和

$$J_iB_{ii}-B_{ii}J_i=\left(J_i-\lambda_iI\right)B_{ii}-B_{ii}\left(J_i-\lambda_iI\right), i=1,2,\cdots,s$$

结合矩阵乘法表明若

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}, B_{ii}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}, i=1,2,\cdots,s,$$

则存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $l_A^k\left(B\right)=0$.

反之设某个 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $l_A^k\left(B\right)=0$. 考虑映射

$$l_{ij}:\mathbb{C}^{n_i\times n_j}\to\mathbb{C}^{n_i\times n_j}, X\to J_iX-XJ_j, i\neq j.$$

则 $l_{ij}^k\left(B_{ij}\right)=0$. 注意到因为 J_i, J_j 特征值不相同, 所以由结论21.5知 $J_iX=XJ_j$ 只有 $X=0$ 解, 所以 l_{ij} 没有 0 特征值, 所以 l_{ij}^k 也没有, 因此 $B_{ij}=0$, 这就证明了

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}, B_{ii}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

这就完成了证明.

7. (7.) 当 A 可逆, 由题目条件我们知道

$$A^4=A^TAA^TA=\left(A^TA\right)^2, A^4=AA^TAA^T=\left(AA^T\right)^2.$$

现在由正定矩阵的正定方根唯一23.5, 我们知道 $A^TA=AA^T$, 故

$$A^5=AA^TAA^TA=A^3\left(A^T\right)^2\Rightarrow A^2=\left(A^T\right)^2.$$

故对一切正偶数 m, 我们有 A^m 是实对称的. 但是当 m 为奇数则未必. 例如取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, 则 $A^m=\begin{pmatrix}0&\sin\frac{m\pi}{2}\\-\sin\frac{m\pi}{2}&0\end{pmatrix}$ 不是对称矩阵.

注意到原问题不随正交变换改变而影响, 当 A 不可逆时从 $\mathrm{Im}A$ 中选一族标准正交基扩充到 $\mathbb{R}^n$ 使得构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. 此时 A 在这组基下形如 $\begin{pmatrix}X&Y\\0&0\end{pmatrix}$, 这里 X 是一个 s 阶矩阵. 此时 $\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}$ 行满秩且由题目条件, 我们有 $A^5A^T=\left(AA^T\right)^3$. 注意到

$$A^5A^T=A^4\left(AA^T\right)=\begin{pmatrix}X^4&*\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}XX^T+YY^T&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X^4\left(XX^T+YY^T\right)&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(XX^T+YY^T\right)^3&0\\0&0\end{pmatrix},$$

我们有

$$X^4\left(XX^T+YY^T\right)=\left(XX^T+YY^T\right)^3.$$

显然

$$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\right)\overset{21.8}{=}\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&Y\end{pmatrix}^T\right)=\mathrm{rank}\left(XX^T+YY^T\right)=s,$$

于是

$$X^4=\left(XX^T+YY^T\right)^2.$$

由于上式右边是正定矩阵, 故 X 可逆, 从而可取可逆 s 阶实矩阵 U, 使得

$$UXX^TU^T=E_s.$$

于是

$$\begin{aligned}&|X|^4=\left|XX^T+YY^T\right|^2\Rightarrow|X|^2=\left|XX^T+YY^T\right|\\&\Rightarrow\left|UXX^TU^T\right|=\left|UXX^TU^T+UYY^TU^T\right|\Rightarrow1=\left|E_s+UY\left(UY\right)^T\right|.\end{aligned}$$

现在考虑半正定矩阵 $UY\left(UY\right)^T$ 的所有非负特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 则

$$\prod_{i=1}^{s}\left(1+\lambda_i\right)=1\Rightarrow\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,s\Rightarrow UY\left(UY\right)^T=0\Rightarrow UY=0\Rightarrow Y=0.$$

因此 $A=\begin{pmatrix}X&0\\0&0\end{pmatrix}$ 且 $X^5=XX^TXX^TX$, 这就转化了可逆的情况. 因此我们完成了证明.

笔记 显然本题可以推广到 $A^{2n+1}=A\underbrace{A^TAA^TA\cdots A^TA}_{n个}$ 的情况.

8. (8.) **Step 1** 化归到单个实特征值或者一对共轭的复特征值情形.

假设 A 的极小多项式在 $\mathbb{R}$ 上有标准分解

$$p\left(x\right)=\left(x-x_1\right)^{a_1}\left(x-x_2\right)^{a_2}\cdots\left(x-x_s\right)^{a_s}\left(x^2+\lambda_1x+\mu_1\right)^{b_1}\left(x^2+\lambda_2x+\mu_2\right)^{b_2}\cdots\left(x^2+\lambda_tx+\mu_t\right)^{b_t},$$

这里 $\lambda_i^2<4\mu_i,i=1,2,\cdots,t$. 则 A 有理标准型, 即

$$A\sim\begin{pmatrix}A_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&A_s&&&&\\&&&B_1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&B_t\end{pmatrix},$$

这里 A_i 为 $\left(x-x_i\right)^{a_i}$ 对应的各阶友矩阵构成的分块对角矩阵, B_i 为 $\left(x^2+\lambda_ix+\mu_i\right)^{b_i}$ 对应的各阶友矩阵构成的分块对角矩阵. 取可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}A_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&A_s&&&&\\&&&B_1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&B_t\end{pmatrix}$. 为书写方便, 我们记 $B_j=A_{s+j},j=1,2,\cdots,t$. 注意到

$$f\left(X\right)=A\Leftrightarrow f\left(P^{-1}XP\right)=P^{-1}AP,$$

于是不妨设

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&A_s&&&&\\&&&A_{s+1}&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&A_{s+t}\end{pmatrix}.$$

若 $f(X)=A$ 有解 $X=(X_{ij})$, 则 $A_iX_{ij}=X_{ij}A_j$. 由命题21.5我们知道当 $i\neq j$ 时必有 $X_{ij}=0$. 于是

$$f(X)=\begin{pmatrix} f(X_{11}) & & & \\ & f(X_{22}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(X_{s+ts+t}) \end{pmatrix}.$$

因此解矩阵方程 $f(X)=A$ 等价于对每个 i, 解矩阵方程 $f(X_{ii})=A_i$, 这就证明了 **Step 1**. **Step 2** 当 A 具有单个实特征值 λ 且满足题目条件, 则考虑多项式方程 $X^n+\lambda I=A$. 注意到若该多项式方程必有解, 则 X 特征值全为 0, 从而幂零 n 阶矩阵, 所以 $X^n=0$, 从而 $A=\lambda I$.

当 n 为奇数, 考虑多项式方程 $X^2+(\lambda+1)I=A$, 注意到奇数阶矩阵必有实特征值但 $x^2+1=0$ 无实根, 于是该多项式方程无解. 从而不存在满足题目条件的 A.

当 n 为偶数, 对任何 $f\in\mathbb{R}[x]$, 若存在某个 $c\in\mathbb{R}$, 使得 $(x-c)\,|\,(f(x)-\lambda I)$, 则取 $X=cI$, 此时必有 $f(X)=\lambda I=A$. 若有某个 $\lambda',\mu\in\mathbb{R}$, 使得 $\left(x^2+\lambda' x+\mu\right)\,|\,(f(x)-\lambda' I)$, 则取

$$X=\operatorname{diag}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0&-\mu\\1&-\lambda'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-\mu\\1&-\lambda'\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&-\mu\\1&-\lambda\end{pmatrix}}_{\frac{n}{2}\text{个}}\right\},$$

此时有 $f(X)=\lambda I=A$.

于是当 A 具有单个实特征值时, 满足题目条件的 A 必须阶数为偶数.

Step 3 对任何固定的 $f\in\mathbb{R}[x]$ 和非常数和 $a\pm bi,a,b\in\mathbb{R},b\neq 0$, 则存在 $z\in\mathbb{C}$ 使得

$$f(z)-a-bi=0,f'(z)\neq 0.$$

对任何固定的 $f\in\mathbb{R}[x]$ 且非常数, 考虑标准分解

$$f(z)-a-bi=\kappa(z-z_1)^{s_1}\cdots(z-z_\nu)^{s_\nu},\kappa\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

则若某个 $z_j\in\mathbb{R}$, 必有

$$f(z_j)-a-bi=0\Rightarrow f(\overline{z_j})-a+bi=0\Rightarrow f(z_j)=a-bi=a+bi,$$

这是一个矛盾! 因此 z_i 都不是实数且容易看到

$$f(\overline{z_j})-a-bi\neq 0,j=1,2,\cdots,\nu.$$

注意到

$$\frac{f'(z)}{f(z)-a-bi}=\sum_{m=1}^{\nu}\frac{s_m}{z-z_m}.$$

若对某个 j, 使得 $f'(\overline{z_j})=0$, 则有

$$0=\frac{f'(\overline{z_j})}{f(\overline{z_j})-a-bi}=\sum_{m=1}^{\nu}\frac{s_m}{\overline{z_j}-z_m}\Rightarrow\sum_{m=1}^{\nu}\frac{s_m(z_j-\overline{z_m})}{|\overline{z_j}-z_m|^2}=0\Rightarrow\sum_{m=1}^{\nu}\frac{s_m(\overline{z_j}-z_m)}{|\overline{z_j}-z_m|^2}=0,$$

即

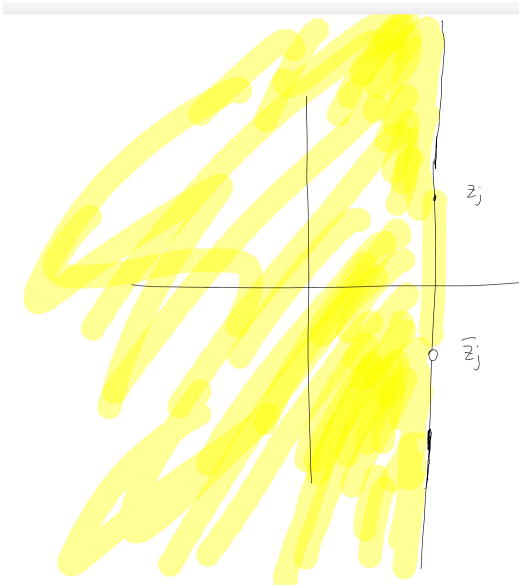
$$\overline{z_j}=\sum_{m=1}^{\nu}\lambda_m z_m,\lambda_m=\frac{\frac{s_m}{|\overline{z_j}-z_m|^2}}{\sum\limits_{\ell=1}^{\nu}\frac{s_\ell}{|\overline{z_j}-z_\ell|^2}},m=1,2,\cdots,\nu.$$

注意 j 并不能取遍 $1,2,\cdots,m$, 因为考虑其实部最大的 z_j, 如果有多个则取其中虚部绝对值最大的, 作图[46]可知 $\overline{z_j}$ 不属于这个凸包.

现在对这个 z_j, 我们有 $f(z_j)-a-bi=0,\overline{f'(z_j)}=f'(\overline{z_j})\neq 0$.

Step 4 当 A 具有一对共轭的复特征值 $a\pm bi,a,b\in\mathbb{R},b\neq 0$ 的情形. 我们指出此时对任何 $f\in\mathbb{R}[x]$ 且非常

[46]即 $z_1,z_2,\cdots,z_\nu$ 的凸包含于黄色部分.



数时必有 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $f(X)=A$.

设 $A \sim \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_s\}$, J_i 都是对应特征值 $a+bi$ 或 $a-bi$ 的 Jordan 块. 注意到对任何 $k \in \mathbb{N}_0$, 都有

$$r\left(\left(A-(a+bi)\,I\right)^k\right)=r\left(\overline{\left(A-(a+bi)\,I\right)^k}\right)=r\left(\left(A-(a-bi)\,I\right)^k\right),$$

所以对应特征值 $a+bi$ 或 $a-bi$ 的 Jordan 块是一一对应的. 现在由 **Step 3**, 取 $z \in \mathbb{C}$, 使得

$$f(z)=a+bi, f'(z)\neq 0,$$

则由命题21.2, 我们知道

$$f\left(\begin{pmatrix} z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & z \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a+bi & f'(z) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} \\ & a+bi & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(z) \\ & & & a+bi \end{pmatrix};$$

$$f\left(\begin{pmatrix} \overline{z} & 1 & & \\ & \overline{z} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \overline{z} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a-bi & f'(\overline{z}) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\overline{z})}{(n-1)!} \\ & a-bi & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\overline{z}) \\ & & & a-bi \end{pmatrix},$$

从而

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \overline{z} & 1 & & \\ & \overline{z} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \overline{z} \end{pmatrix}\right\}\sim \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} a+bi & 1 & & \\ & a+bi & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a+bi \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a-bi & 1 & & \\ & a-bi & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a-bi \end{pmatrix}\right\}$$

从而取 X 为若干 $\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \overline{z} & 1 & & \\ & \overline{z} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \overline{z} \end{pmatrix}\right\}$ 构成的分块对角矩阵使得 $f(X)\sim A$. 注意

到 $\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{z} & 1 & & \\ & \overline{z} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \overline{z} \end{pmatrix}\right\}$ 相似 $x^2-(z+\overline{z})x+|z|^2$ 的友矩阵, 于是这些友矩阵全部放在一起记为 X_0, 则 $f(X_0)\sim A$. 由于相似不随数域的改变而改变, 故存在实可逆矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}f(X_0)Q=f\left(Q^{-1}X_0Q\right)=A.$$

这样我们证明了 **Step 4**.

综上所述, 满足题目条件的 A 就是其实特征值都是偶数重且代数重数和几何重数相同.

9. (9.) 不妨设 $A=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\ker A=\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, x\text{是}n-r\text{维列向量}.$$

必要性:

由 $\ker A=\ker B$, 我们知道

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}=0,\forall x\Rightarrow\begin{pmatrix} B_2x \\ B_4x \end{pmatrix}=0,\forall x\Rightarrow\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix}x=0,\forall x\Rightarrow B_2=0,B_4=0.$$

由 B 是幂等矩阵, 我们知道

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} B_1^2 & 0 \\ B_3B_1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow B_1^2=B_1,B_3B_1=B_3.$$

又若 B_1 不可逆, 则存在 $y\neq 0$, 使得 $B_1y=0$, 则

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ B_3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ B_3B_1y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

这和 $\ker A=\ker B$ 矛盾! 故 B_1 可逆. 而可逆幂等矩阵是单位矩阵, 故 $B_1=E_r$. 则

$$A=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow AB=A,BA=B.$$

充分性:

反之设 $AB=A,BA=B$, 则

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\Rightarrow B_1=E_r,B_2=0,B_4=0,$$

于是我们证明了 $\ker A=\ker B$.

10. (10.) 假定正交矩阵 $S,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$K\triangleq S^TAS=Q^TBQ=\operatorname{diag}\{\mu_1E,\mu_2E,\cdots,\mu_sE\},\mu_i\text{互不相同},i=1,2,\cdots,s.$$

于是

$$A^m=B^m\Rightarrow SK^mS^T=QK^mQ^T\Rightarrow Q^TSK^m=K^mQ^TS.$$

对应分块 $Q^TS=(X_{ij})$, 则

$$\mu_j^mX_{ij}=X_{ij}\mu_i^m,i,j=1,2,\cdots,s.$$

于是当 $i\neq j$ 必有 $X_{ij}=0$. 于是

$$Q^TS=\operatorname{diag}\{X_{11},X_{22},\cdots,X_{ss}\}\Rightarrow Q^TSK=KQ^TS\Rightarrow A=SKS^T=QKQ^T=B,$$

这就完成了证明.

11. (11.) 充分性: 若对每一个正定对称 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 存在唯一一个正定矩阵 $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $BA+A^TB=-C$.

则若 A 有一个特征向量为 $x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 使得其特征值 $a+bi\in\mathbb{C}$ 满足 $a\geqslant 0,b\in\mathbb{R}$. 那么我们取定义组 C,B, 就有有

$$0>x^*\left(-C\right)x=x^*\left(BA+A^TB\right)x=x^*BAx+x^*A^TBx=2ax^*Bx>0,$$

这就是一个矛盾! 故我们证明了充分性.

必要性: 若 A 特征值都有负实部, 那么考虑映射 $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n},X\mapsto XA+A^TX$. 注意到由命题21.4, 我们有 $A\sim A^T$, 于是 A,A^T 特征值完全一致. 现在 A 特征值都有负实部, 故 $A,-A^T$ 没有公共特征值. 现在由命题21.5知 $AX=X\left(-A^T\right)$ 只有 0 解, 故直接验证发现 T 是单射, 故所求解如果存在则必然唯一.

取[47] $B\triangleq\int_0^\infty e^{A^Tt}Ce^{At}dt$. 为了说明 B 是良定义的. 我们先来做估计. 设 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1\right),J_{n_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s\right)\right\},\Re\left(\lambda_i\right)<0,i=1,2,\cdots,s.$$

于是

$$e^{At}=P\operatorname{diag}\left\{e^{J_{n_1}(\lambda_1)t},e^{J_{n_2}(\lambda_2)t},e^{J_{n_s}(\lambda_s)t}\right\}P^{-1}.$$

显然, 命题21.2中的计算要求的多项式 f 可扩充到 e^{tz}, 于是我们对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 我们都有

$$e^{J_{n_i}(\lambda_i)t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_it}&te^{\lambda_it}&\cdots&\frac{t^{n_i-1}e^{\lambda_it}}{(n_i-1)!}\\&e^{\lambda_it}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&te^{\lambda_it}\\&&&e^{\lambda_it}\end{pmatrix}.$$

于是存在 $C_i>0,p_i\in\mathbb{R}[x]$, 有估计[48]

$$\left\|e^{J_{n_i}(\lambda_i)t}\right\|\leqslant C_i\left|p_i\left(t\right)\right|e^{\Re(\lambda_i)t},\forall t\geqslant 0.$$

于是容易得到 $C>0,p\in\mathbb{R}[x],\lambda>0$ 使得

$$\left\|e^{A^Tt}Ce^{At}\right\|\leqslant C\left|p\left(t\right)\right|e^{-\lambda t},\forall t\geqslant 0,$$

这就给出了 B 良定义且

$$\lim_{t\to\infty}\left\|e^{A^Tt}Ce^{At}\right\|=0. \tag{30.110}$$

对任何 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 我们有

$$x^TBx=\int_0^\infty x^Te^{A^Tt}Ce^{At}xdt=\int_0^\infty\left(e^{At}x\right)^TC\left(e^{At}x\right)dt\geqslant 0,$$

以及

$$\frac{d}{dt}e^{A^Tt}Ce^{At}=A^Te^{A^Tt}Ce^{At}+e^{A^Tt}Ce^{At}A.$$

于是我们运用牛顿莱布尼兹公式和(30.110)有

$$-C=\int_0^\infty\frac{d}{dt}e^{A^Tt}Ce^{At}dt=A^T\cdot\int_0^\infty e^{A^Tt}Ce^{At}dt+\int_0^\infty e^{A^Tt}Ce^{At}dt\cdot A=A^TB+BA$$

和 B 正定对称.

12. (12.) 不妨设 $r>0$, 相似定理23.21的证明可不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(0\right),J_{n_2}\left(0\right),\cdots,J_{n_s}\left(0\right)\right\},$$

这里

$$1\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_s\leqslant n.$$

于是 φ 在基

$$\{E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},E_{22},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{n1},E_{n2},\cdots,E_{nn}\}$$

[47] 这里是 Bochner 积分, 通俗的说, 在高等代数中, 对每个矩阵元都作积分.

[48] 有限维矩阵范数等价, 任取一个矩阵范数即可.

下的矩阵是

$$A\otimes I-I\otimes A^T=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(-A^T\right),J_{n_2}\left(-A^T\right),\cdots,J_{n_s}\left(-A^T\right)\right\},$$

这里 $J_{n_i}(\cdot)$ 表示元素是矩阵环上的 n_i 阶属于特征值 $-A^T$ 的 Jordan 块. 运用分块矩阵初等变换[49]得

$$\begin{aligned}
&J_{n_i}\left(-A^T\right)\to\operatorname{diag}\left\{\underbrace{I,I,\cdots,I}_{n_i-1\text{个}},\left(A^T\right)^{n_i}\right\}\\
\Rightarrow&\operatorname{rank}\left(J_{n_i}\left(-A^T\right)\right)=\left(n_i-1\right)n+\operatorname{rank}\left(A^{n_i}\right)\\
\Rightarrow&\operatorname{rank}\left(J_{n_i}\left(-A^T\right)\right)=\left(n_i-1\right)n+\sum_{j=i}^{s-1}\left(n_{j+1}-n_i\right)\\
\Rightarrow&\operatorname{rank}\left(J_{n_i}\left(-A^T\right)\right)=\left(n_i-1\right)n+\sum_{j=i+1}^{s}n_j-\left(s-i\right)n_i\\
\Rightarrow&\operatorname{rank}\left(J_{n_i}\left(-A^T\right)\right)=n_i\left(n-s+i\right)+\sum_{j=i+1}^{s}n_j-n.
\end{aligned}$$

现在我们就有

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}\varphi&=\sum_{i=1}^{s}\left(n_i\left(n-s+i\right)+\sum_{j=i+1}^{s}n_j-n\right)\\
&=\sum_{i=1}^{s}n_i\left(n-s+i\right)+\sum_{j=2}^{s}\sum_{i=1}^{j-1}n_j-sn\\
&=\sum_{i=1}^{s}n_i\left(n-s+i\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(j-1\right)n_j-sn\\
&=\sum_{i=1}^{s}n_i\left(n-s+2i-1\right)-sn\\
&=n^2-sn+\sum_{i=1}^{s}\left(2i-s-1\right)n_i\\
&\overset{\text{切比雪夫不等式离散形式}}{\geqslant}n^2-sn+\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(2i-s-1\right)\sum_{i=1}^{s}n_i\\
&=n^2-ns.
\end{aligned}$$

注意到

$$\left(A\otimes I\right)\times\left(I\otimes A^T\right)=A\otimes A^T=\left(I\otimes A^T\right)\times\left(A\otimes I\right),$$

[49]例如,

$$\begin{pmatrix}-A^T&I&0\\0&-A^T&I\\0&0&-A^T\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-A^T&I&0\\0&-A^T&I\\0&-\left(A^T\right)^2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-A^T&I&0\\0&0&I\\0&-\left(A^T\right)^2&0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}-A^T&I&0\\0&0&I\\\left(-A^T\right)^3&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&I&0\\0&0&I\\\left(-A^T\right)^3&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&\left(A^T\right)^3\end{pmatrix}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\left[(A\otimes I)-\left(I\otimes A^T\right)\right]^{2n_s-1}&=\sum_{j=0}^{2n_s-1}C_{2n_s-1}^j\left(-1\right)^j\left(A\otimes I\right)^{2n_s-1-j}\times\left(I\otimes A^T\right)^j\\&=\sum_{j=0}^{2n_s-1}C_{2n_s-1}^j\left(-1\right)^j\left(A^{2n_s-1-j}\otimes I\right)\times\left(I\otimes\left(A^T\right)^j\right)\\&=\sum_{j=0}^{2n_s-1}C_{2n_s-1}^j\left(-1\right)^jA^{2n_s-1-j}\otimes\left(A^T\right)^j\overset{\bigstar}{=}0,\end{aligned}$$

这里 ★ 来自[50] $A\sim A^T$, 于是有相同幂零指数 n_s. 又

$$n_s\leqslant n-s+1\Rightarrow\sqrt{n^2-ns}\geqslant\sqrt{\left(n-s\right)\left(n-s\right)}=n-s\geqslant n_s-1,$$

我们有

$$r\geqslant n^2-ns\Rightarrow2\sqrt{r}+1\geqslant2n_s-1,$$

即 φ 幂零指数不超过 $2\sqrt{r}+1$.

13. (13.) 不妨设 $A\neq0$. 取 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 使得

$$A\mathbf{x}\neq\mathbf{0},\mathbf{y}^TA\mathbf{x}=1.$$

考虑

$$B\triangleq\mathbf{x}\mathbf{y}^T\in\mathbb{C}^{n\times n}\setminus\{\mathbf{0}\},$$

我们有

$$\left(AB\right)^2=A\mathbf{x}\mathbf{y}^TA\mathbf{x}\mathbf{y}^T=A\mathbf{x}\mathbf{y}^T=AB.$$

幂等矩阵可对角化可得 AB 可对角化.

14. (14.) 考虑

$$\left(A-B\right)^2=A^2+B^2-AB-BA=AB-BA=\left(A-B\right)B-B\left(A-B\right).$$

记 $N=A-B$, 我们有 $N^2=NB-BN$, 类似引理23.4的证明我们知道 N^2 是幂零矩阵, 从而 N 也幂零. 注意到对 $x\in\ker N\neq\{0\}$, 我们有

$$NBx=NBx-BNx=N^2x=0,$$

所以 $\ker N$ 是 B 不变子空间. 于是取 $\ker N$ 一组基扩充为全空间的基, 在这组基下有

$$N=\begin{pmatrix}0&N_2\\0&N_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&B_4\end{pmatrix}.$$

直接计算表明 $N_4^2=N_4B_4-B_4N_4,0^2=0\cdot B_1-B_1\cdot0$. 故归纳可知 B,N 可同时上三角化. 从而 A,B 可同时上三角化. 因此我们不妨设 A,B 都是上三角矩阵, 直接考虑对角元得 A,B 特征多项式一致.

15. (15.) 先断言 $\overline{C}C^T=0$. 事实上假设 $C=(c_{ij})$, 则有

$$0=\operatorname{tr}\left(AB-BA\right)=\operatorname{tr}\left(\overline{C}C^T\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\left|c_{ik}\right|^2=0,$$

于是 $C=0$.

命题对 $n=1$ 显然成立, 假定命题对维数小于 n 的所有情况都成立. 不妨设 $a=b=0$, 否则用 $A-aI_n,B-bI_n$ 代替 A,B 即可. 取 $f\in\mathbb{C}\left[x\right]$ 使得 f 分别是 A,B 特征多项式, 则有 $f\left(0\right)=0$, 故 0 是 A,B 的公共特征值. 不妨设 $A\neq0$, 考虑 B 的不变子空间 $\ker A$, 从中取一组基扩充为全空间的基, 则在这组基下 A,B 形如

$$A=\begin{pmatrix}0&A_2\\0&A_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&B_4\end{pmatrix}.$$

[50] 见21.4.

现在

$$0\cdot B_1=B_1\cdot 0, B_4A_4=A_4B_4, A_2B_4=B_1A_2+B_2A_4, \begin{pmatrix}A_2\\A_4\end{pmatrix}\text{列满秩.}$$

若 B_1 可逆, 考虑 m 是其极小多项式. 注意到若 $g(A_4,B_4)=0, g\in\mathbb{C}[x,y]$, 则

$$[m(B)g(A,B)]^n=\left[\begin{pmatrix}0&*\\0&m(B_4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(0,B_1)&*\\0&0\end{pmatrix}\right]^n=\begin{pmatrix}0&*\\0&0\end{pmatrix}^n=0.$$

故

$$m(0)g(0,0)=0\Rightarrow g(0,0)=0.$$

由归纳假设我们知道存在 $v\neq 0$ 使得 $A_4v=B_4v=0$. 现在运用

$$A_2B_4v=B_1A_2v+B_2A_4v\Rightarrow B_1A_2v=0\overset{\text{注意}B_1\text{可逆}}{\Rightarrow}A_2v=0\Rightarrow\begin{pmatrix}A_2\\A_4\end{pmatrix}v=0$$

我们知道 $v=0$, 这就是一个矛盾!

若 B_1 不可逆, 取 $u\neq 0$ 使得 $B_1u=0$, 此时

$$A\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}=0,\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}\neq 0,$$

这就完成了证明.

16. (16.)

显然 C,D 不能都为 0.

不失一般性, 假设 $n\geqslant m$, 取行满秩矩阵 $m\times n$ 阶矩阵 A. 由

$$r(A)=r\left(\begin{pmatrix}A&C\end{pmatrix}\right),$$

我们知道存在 $n\times m$ 阶矩阵 B 使得 $C=AB$.

对任何 m 阶可逆矩阵 P, 我们有

$$\operatorname{rank}(C-AB)+n=\operatorname{rank}\left(D-BPP^{-1}A\right)+m=\operatorname{rank}\left(C-P^{-1}ABP\right)+n.$$

于是

$$\operatorname{rank}\left(C-P^{-1}CP\right)=0\Rightarrow PC=CP.$$

现在 C 与任何 m 阶可逆矩阵可交换, 于是由命题21.6知存在 k 使得 $C=kE_m$. 若 $k=0$, 则 D 不为 0.

取 n 维列向量 x,y 使得 $y^TDx\neq 0$, 然后对 x 乘以倍数使得 $y^Tx\neq 1$。构造

$$B=\begin{pmatrix}Dx&0&\cdots&0\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}y^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

由命题21.7得

$$\left|E_n-xy^T\right|=1-y^Tx\neq 0,$$

我们有

$$\operatorname{rank}(D-BA)=\operatorname{rank}\left(D\left(E_n-xy^T\right)\right)=\operatorname{rank}(D).$$

于是结合题目秩等式条件得

$$1+n=\operatorname{rank}(AB)+n=\operatorname{rank}(D)+m.$$

但取 $A=0$ 得

$$n=\operatorname{rank}(D)+m,$$

这就是一个矛盾!, 于是 $k \neq 0$.

由推论23.1得

$$\operatorname{rank}(kE_m - AB) + n = \operatorname{rank}(kE_n - BA) + m,$$

我们有

$$\operatorname{rank}(kE_n - BA) = \operatorname{rank}(D - BA).$$

取 $A = 0$ 得 D 可逆.

对任何 n 维列向量 u, v, 取 $BA = uv^T$, 由命题21.7得

$$k^{-1}v^T u = 1 \Leftrightarrow \left|E_n - k^{-1}uv^T\right| = 0 \Leftrightarrow \left|kE_n - uv^T\right| = 0$$
$$\Leftrightarrow \left|D - uv^T\right| = 0 \Leftrightarrow \left|E_n - D^{-1}uv^T\right| = 0 \Leftrightarrow 1 = v^T D^{-1}u,$$

即

$$v^T\left(D^{-1} - k^{-1}E_n\right)u = 0, \forall u, v.$$

因此我们证明了 $D^{-1} = k^{-1}E_n$, 从而

$$C = kE_m, D = kE_n.$$

17. (17.) 取 w 为三次单位根,$C = AB - BA$, 那么

$$(A + wB)\left(A + w^2B\right) = AB + w^2AB + wBA = \left(1 + w + w^2\right)AB - wC = -wC,$$

又 $\overline{A + wB} = A + w^2B$, 因此

$$(-w)^n |C| = \left|(A + wB)\left(A + w^2B\right)\right| \geqslant 0,$$

故 $3|n$, 我们完成了证明.

18. (18.) **Step 1**

我们先证明不计重数下 A, B 有相同的特征值. 事实上设

$$B\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}, \lambda\text{落在包含}\mathbb{F}\text{的代数闭域}.$$

然后利用题目条件等式有

$$0 = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell C_k^\ell A^{k-\ell}B^\ell\alpha = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell C_k^\ell\lambda^\ell A^{k-\ell}\alpha = (A - \lambda E)^k\alpha.$$

于是 $(A - \lambda E)^k$ 有特征值 0, 从而 A 有特征值 λ. 反过来如果 A 有特征值 μ, 那么 A^T 也有特征值 μ, 于是在条件等式取转置得

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell C_k^\ell\left(B^T\right)^\ell\left(A^T\right)^{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell C_k^\ell\left(B^T\right)^{k-\ell}\left(A^T\right)^\ell = 0,$$

即类似的讨论可得 B^T 也有特征值 μ, 从而 B 也有特征值 μ. 至此我们证明了不计重数下 A, B 有相同的特征值.

Step 2

我们断言

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell C_k^\ell(A - \lambda E)^{k-\ell}(B - \lambda E)^\ell = 0, \forall\lambda \in \mathbb{F}. \tag{30.111}$$

事实上, 由二项式定理, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell} C_k^{\ell}(A-\lambda E)^{k-\ell}(B-\lambda E)^{\ell} \\
&=\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-\ell}\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j} A^{i} B^{j}(-\lambda E)^{k-\ell-i}(-\lambda E)^{\ell-j} \\
&=\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-\ell}\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell+i+j+k} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j} A^{i} B^{j} \lambda^{k-i-j} \\
&=\sum_{i=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{k-i}\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell+i+j+k} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j} A^{i} B^{j} \lambda^{k-i-j} \\
&=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\left[(-\lambda)^{k-i-j}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j}\right] A^{i} B^{j} \\
&=\sum_{0 \leqslant i+j<k}\left[(-\lambda)^{k-i-j}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j}\right] A^{i} B^{j} \\
&\quad+\sum_{i+j=k}\left[(-\lambda)^{k-i-j}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j}\right] A^{i} B^{j} \\
&=\sum_{0 \leqslant i+j<k}\left[(-\lambda)^{k-i-j}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} C_k^{\ell} C_{k-\ell}^{i} C_{\ell}^{j}\right] A^{i} B^{j}+\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j} C_k^{j} A^{k-j} B^{j} \\
&=\sum_{0 \leqslant i+j<k}\left[(-\lambda)^{k-i-j}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} \frac{k!(k-\ell)!\ell!}{\ell!(k-\ell)! i!(k-\ell-i)! j!(\ell-j)!}\right] A^{i} B^{j} \\
&=\sum_{0 \leqslant i+j<k}\left[\frac{(-\lambda)^{k-i-j} k!}{i! j!(k-i-j)!}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} \frac{(k-i-j)!}{(k-\ell-i)!(\ell-j)!}\right] A^{i} B^{j} \\
&=\sum_{0 \leqslant i+j<k}\left[\frac{(-\lambda)^{k-i-j} k!}{i! j!(k-i-j)!}\sum_{\ell=j}^{k-i}(-1)^{\ell} C_{k-i-j}^{\ell-j}\right] A^{i} B^{j} \\
&=\sum_{0 \leqslant i+j<k}\left[\frac{(-\lambda)^{k-i-j} k!}{i! j!(k-i-j)!}(1-1)^{k-i-j}\right] A^{i} B^{j}=0,
\end{aligned}
$$

这就证明了(30.111).

Step 3

利用引理23.2, 我们有 $\dim\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\ker(A-\lambda E)^{m}\right)$ 是 A 的特征值 λ 的代数重数. 我们来断言

$$
\bigcup_{m=1}^{\infty}\ker(B-\lambda E)^{m} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty}\ker(A-\lambda E)^{m}, \forall \text{特征值} \lambda. \tag{30.112}
$$

由(30.111), 我们不妨设 $\lambda=0$ 是特征值且只对 $\lambda=0$ 验证(30.112).

假设 $B^{p} v=0, p \geqslant 1$, 注意到

$$
A^{k}=\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1} C_k^{\ell} A^{k-\ell} B^{\ell},
$$

于是

$$
A^{k} B^{p-1} v=\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1} C_k^{\ell} A^{k-\ell} B^{\ell+p-1} v=0,
$$

$$A^{k+1}B^{p-2}v=\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}C_k^{\ell}A^{k+1-\ell}B^{\ell+p-2}v=kA^kB^{p-1}v=0,$$

$$A^{k+2}B^{p-3}v=\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}C_k^{\ell}A^{k+2-\ell}B^{\ell+p-3}v=kA^{k+1}B^{p-2}v-C_k^2A^kB^{p-1}v=0,$$

依次下去有 $A^{k+p-1}B^{p-p}v=0$, 即 $A^{k+p-1}v=0$. 这就证明了(30.112).

Step 4

现在(30.112)成立知 A 特征值 λ 的代数重数小于等于 B 特征值 λ 的代数重数. 对题目条件等式取转置类似可得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\ker\left(A^T-\lambda E\right)^m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\ker\left(B^T-\lambda E\right)^m,\forall\text{特征值}\lambda,$$

从而 B^T 特征值 λ 的代数重数小于等于 A^T 特征值 λ 的代数重数. 故我们证明了 A,B 任何特征值的代数重数一致, 这就证明了他们的特征多项式相同.

19. (19.) 注意到我们总可以不失一般性的交换 C 的行列使得[51]

$$I=J=\{1,2,\cdots,r+1\}.$$

, 现在设

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 是 $r+1$ 阶矩阵, 那么因为

$$r\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{pmatrix}\leqslant r(A)\leqslant r<r+1,$$

取 $r+1$ 阶矩阵 $X\neq 0$, 使得

$$\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{21}\end{pmatrix}X=0.$$

令

$$C=\begin{pmatrix}X&0\\0&0\end{pmatrix}\in V,$$

则 $ACB=0$.

20. (20.) 不妨设 (也就是选好一组基使得有马上将要叙述的性质)$V=U=\mathbb{F}^n$, φ 是一个 n 阶矩阵, 假设 $\ker\varphi$ 的一组基为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$, 这里 $e_i,i=1,2,\cdots,r$ 表第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的列向量, 那么我们设 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1&\varphi_2\\\varphi_3&\varphi_4\end{pmatrix}$, $\varphi_1:r\times r$, 则

$$\begin{pmatrix}\varphi_1&\varphi_2\\\varphi_3&\varphi_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\varphi_1=0,\varphi_3=0,$$

以及

$$\begin{pmatrix}0&\varphi_2\\0&\varphi_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y\\Z\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\varphi_2\\\varphi_4\end{pmatrix}Z=0.$$

因为 $\ker\varphi$ 的一组基为 $e_1,e_2,\cdots,e_r$, 我们知道

$$\begin{pmatrix}\varphi_2\\\varphi_4\end{pmatrix}Z=0\Leftrightarrow Z=0\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}\varphi_2\\\varphi_4\end{pmatrix}=n-r.$$

[51]否则相当于 A,B 分别乘上了可逆矩阵.

总的来说就有 $\varphi=\begin{pmatrix}0&\varphi_2\\0&\varphi_4\end{pmatrix},r\begin{pmatrix}\varphi_2\\\varphi_4\end{pmatrix}=n-r.$

适当交换 $\begin{pmatrix}0&\varphi_2\\0&\varphi_4\end{pmatrix}$ 的行, 使得行极大无关组落在后 $n-r$ 行得到 $\begin{pmatrix}0&\varphi_2'\\0&\varphi_4'\end{pmatrix}$, 如此变换得到的初等矩阵为 T,

由线性方程组解的存在定理, 可取 X' 使得 $-X'\varphi_4'=\varphi_2'$, 考虑 $\psi\triangleq\begin{pmatrix}E_r&X'\\0&0\end{pmatrix}T$, 那么

$$\begin{pmatrix}E_r&X'\\0&0\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}0&\varphi_2\\0&\varphi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\varphi_2'+X'\varphi_4'\\0&0\end{pmatrix}=0,\begin{pmatrix}0&\varphi_2\\0&\varphi_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&X\\0&0\end{pmatrix}T=0.$$

容易发现

$$\ker\psi\subset\varphi(V),\ker\varphi\subset\psi(V),r(\psi)=r=\dim\ker\varphi,$$

于是

$$r(\varphi)=n-r=\dim\ker\psi,$$

因此 $\varphi\psi=0$, 且 $\varphi(V)=\ker\psi,\psi(U)=\ker\varphi$.

21. (21.) 事实上我们不妨设 $\mathscr{A}$ 是矩阵 A, 并不失一般性考虑 $\mathscr{F}=\mathbb{C}$, 那么可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}J_{n_1}(0)&&&\\&\ddots&&\\&&J_{n_s}(0)&\\&&&J\end{pmatrix},$$

这里 J 是可逆矩阵, $J_{n_i}(0),i=1,2,\cdots,s$ 是特征值 0 的 jordan 块.

我们知道 $r(\mathscr{A})-r\left(\mathscr{A}^2\right)$ 是 A 特征值 0 的大于 1 阶的 jordan 块的块数, 而

$$\ker\mathscr{A}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_s\\0\end{pmatrix},$$

这里 $x_i\in\ker J_{n_i}(0),i=1,2,\cdots,s.$

因此

$$A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_s\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{n_1}(0)x_1\\\vdots\\J_{n_s}(0)x_s\\Jy\end{pmatrix}\in\ker\mathscr{A}\Leftrightarrow y=0,J_{n_i}^2(0)x_i=0,i=1,2,\cdots,s.$$

这给出了

$$R(\mathscr{A})\bigcap\ker\mathscr{A}=\begin{pmatrix}J_{n_1}(0)x_1\\\vdots\\J_{n_s}(0)x_s\\0\end{pmatrix},x_i\in\ker J_{n_i}^2(0),i=1,2,\cdots,s.$$

直接算矩阵表明

$$\dim\left(J_{n_i}(0)|_{\ker J_{n_i}^2(0)}\right)=\begin{cases}0,&J_{n_i}(0)\text{阶数为1}\\1,&J_{n_i}(0)\text{阶数大于1}\end{cases},$$

于是我们证明了

$$\dim\left(R(\mathscr{A})\bigcap\ker\mathscr{A}\right)=r(\mathscr{A})-r\left(\mathscr{A}^2\right).$$

22. (22.) 先证 $R(A)\oplus R(B)$, 事实上设
$$Ax=By\in R(A)\bigcap R(B),$$
我们有
$$BAx=B^2y=0\Rightarrow Ax=0,$$
于是就有 $R(A)\oplus R(B)$.
断言
$$\dim\left(\left(R\left(A\right)+R\left(B\right)\right)\bigcap\ker D\right)=0.$$
事实上设 $D\left(Ax+By\right)=0$, 则
$$0=\left(AB+BA\right)\left(Ax+By\right)=ABAx+BABy,$$
因此由 $R(A)\oplus R(B)$ 知
$$ABAx=BABy=0.$$
反复用 $\ker A=\ker BA,\ker B=\ker AB$, 因此
$$BAx=ABy=0,$$
从而 $Ax=By=0$, 所以我们证明了 $Ax+By=0$, 这就完成了断言的证明.
利用
$$\begin{aligned}\dim\left(\ker D+R\left(A\right)+R\left(B\right)\right)=&\dim\ker D+\dim R\left(A\right)+\dim R\left(B\right)\\&-\dim\left(R\left(A\right)\bigcap R\left(B\right)\right)-\dim\left(\left(R\left(A\right)+R\left(B\right)\right)\bigcap\ker D\right),\end{aligned}$$
我们知道
$$\dim\left(\ker D+R\left(A\right)+R\left(B\right)\right)=\dim\ker D+\dim R\left(A\right)+\dim R\left(B\right).$$
这就说明了 $\ker D\oplus R(A)\oplus R(B)$.
设 $\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}x=0$, 我们有 $ABx+BAx=0$, 由 $R(A)\oplus R(B)$ 知
$$ABx=BAx=0.$$
用 $\ker A=\ker BA,\ker B=\ker AB$, 我们有
$$Bx=Ax=0,$$
于是有线性方程组 $\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}x=0,\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}x=0$ 同解, 从而 $r\left(\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}\right)$, 把条件中的 A,B,D 用 A^T,B^T,D^T 替换可得
$$r\left(D^T\right)=r\left(\begin{pmatrix}B^T\\A^T\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}B&A\end{pmatrix}\right).$$
现在
$$\dim\ker D=n-r\left(D\right)=n-r\left(D^T\right)=n-\ r\left(\begin{pmatrix}B&A\end{pmatrix}\right)=n-r\left(B\right)-r\left(A\right),$$
这里最后一个等号相当于把 A,B 的列向量组[52]合并, 结合其是直和而成立. 于是 $n=\dim\ker D+r\left(A\right)+r\left(B\right)$, 这就完成了证明.

23. (23.) 首先 AB 可逆, 故 A,B 可逆. 不妨设 $CA=AC$, 则有
$$\begin{aligned}\left(BA\right)^{14}&=B\left(AB\right)^{13}A=B\left(AB\right)^6CA=B\left(AB\right)^6AC\\&=B\left(AB\right)^{-1}CAC=BB^{-1}A^{-1}AC^2=C^2.\end{aligned}$$

24. (24.) 注意到条件知 $\left(A+I\right)\left(B+I\right)=I$, 从而由命题21.11知存在多项式 f 使得 $B=f(A)$.

[52]值空间.

现在我们不妨设 A 就是一个 Jordan 块, 否则我们可以每个对角块单独验证(23.178). 设 $A=J_n(a), a\neq -1$, 则 B 有 n 重特征值 $-\frac{a}{1+a}$. 注意到如果 A 可逆则 B 可逆, 此时(23.178)显然成立. 只需考虑 $a=0$, 此时运用21.1知

$$B=\begin{pmatrix} f(0) & f'(0) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ & f(0) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(0) \\ & & & f(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & f'(0) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(0) \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

又直接验证发现[53] $B=-A+A^2+\cdots+(-1)^n A^n$, 故

$$f(x)=-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n, f'(0)=-1\neq 0.$$

从而 $B\sim J_n(0)$, 于是 $r\left(A^2\right)+r\left(B^2\right)=2(n-2)$. 又

$$r(AB)=r\left(-A^2+A^3+\cdots+(-1)^n A^{n+1}\right),$$

注意到

$$g(x)=-x^2+x^3+\cdots+(-1)^n x^{n+1}, g(0)=g'(0)=0, g''(0)\neq 0,$$

继续运用 Jordan 块在多项式作用下的表达式(21.1)知 $r(AB)=n-2$, 这就给出了(23.178). 我们完成了证明.

25. (25.) 由秩不等式21.6, 我们有

$$0=r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n.$$

于是不妨设 $r(A)<\frac{n}{2}$, 此时有

$$r(A+A_1)\leqslant r(A)+r(A_1)<\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n,$$

这就证明了 $A+A_1$ 不可逆.

26. (26.) 我们考虑 $A=SO$, 那么 $AA^T=S^2$, 因为 A 的特征多项式和 S 特征多项式一致, 所以 A 特征值都是非负实数, 于是存在实正交矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \star \\ & \lambda_2 & \star & \star \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

现在 $T^{-1}AA^TT=T^{-1}S^2T$, 因此

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2+b=\operatorname{tr}\left(AA^T\right)=\operatorname{tr}S^2=\sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

这里 b 是一个非负实数,$\operatorname{tr}\left(AA^T\right)$ 表示矩阵 A 的所有元素平方和, 故 $T^{-1}AT$ 除对角线外都为 0, 因此 A 是实对称矩阵, 从而 A 半正定, 故 $A^2=S^2$, 由半正定矩阵的半正定平方根唯一知 $A=S$, 我们完成了证明.

27. (27.) 设 $(f,v_i)=0, i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$f=\sum_{i=1}^n (f,e_i)e_i,$$

于是当 $f\neq 0$, 由 Cauchy 不等式, 我们有

$$|f|^2=\sum_{i=1}^n |(f,e_i)|^2=\sum_{i=1}^n |(f,e_i-v_i)|^2\leqslant |f|^2\sum_{i=1}^n |e_i-v_i|^2<|f|^2\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}=|f|^2,$$

这是一个矛盾, 因此 $f=0$, 即

$$(\operatorname{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_n\})^{\perp}=0,$$

[53] 读者可以用形式幂级数计算.

这表明 $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = \mathbb{R}^n$, 因此我们证明了 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

28. (28.) 注意到 $J = 1_n 1_n^T$, 这给出了 J 有唯一非 0 特征值 $1_n^T 1_n = n$, 因此我们有

$$\det(J - I_n) = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

现在因为 A 行和为 0, 所以 $\operatorname{rank}(A) \leqslant 2020$, 另外一方面, 考虑 A 的 2020 阶主子式 A', 我们将 A' 的元素 $\bmod 2$, 这样在 $\bmod 2$ 下, 我们有

$$\det A' = \det(J - I) = -2019 = 1 \neq 0,$$

因此 $\operatorname{rank}(A) \geqslant 2020$, 这样我们就证明了 $\operatorname{rank}(A) = 2020$.

29. (29.) 事实上我们断言 A 可逆, 注意到条件不等式等价于

$$\operatorname{tr}\left((A-E)^T(A-E)\right) < 1.$$

另外一方面, 若 A 有特征值 0, 则设非 0 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Ax = 0$, 此时

$$\frac{x^T(A-E)^T(A-E)x}{x^T x} = 1.$$

因此 $(A-E)^T(A-E)$ 有大于等于 1 的特征值. 而 $(A-E)^T(A-E)$ 所有特征值都是非负数, 且特征值之和为对角线之和, 所以

$$\operatorname{tr}\left((A-E)^T(A-E)\right) \geqslant 1.$$

这就是一个矛盾! 我们完成了证明.

30. (30.) 不妨设 $Q = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$, 否则可以做一个正交变换即可, 则设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_4 \end{pmatrix}, A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

于是由 A 正定知 A_1 正定, 所以

$$\left(Q^T A Q\right)^{-1} = A_1^{-1}.$$

另外一方面注意到有分块矩阵的对应合同的初等变换21.4

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix},$$

因此 $A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2$ 正定, 于是有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_4 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_m & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -A_2^T A_1^{-1} & I_{n-m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} A_2^T A_1^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此

$$Q^T A^{-1} Q = A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} A_2^T A_1^{-1},$$

所以

$$Q^T A^{-1} Q - \left(Q^T A Q\right)^{-1} = A_1^{-1} A_2 \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} A_2^T A_1^{-1} \cong A_2 \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} A_2^T.$$

由对任何 $x \in \mathbb{R}^n$, 利用 $\left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1}$ 是正定的, 我们有

$$x^T A_2 \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} A_2^T x = \left(A_2^T x\right)^T \left(A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2\right)^{-1} A_2^T x \geqslant 0,$$

因此我们证明了 $Q^T A^{-1} Q - \left(Q^T A Q\right)^{-1}$ 是半正定矩阵.

31. (31.) 注意到

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x^T\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&b\end{pmatrix}x,x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

做换元

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&-A^{-1}\beta\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&-A^{-1}\beta\\0&1\end{pmatrix}y,$$

因此只需计算

$$f\left(y_1,y_2,...,y_n\right)=y^T\begin{pmatrix}A&0\\0&b-\beta^TA^{-1}\beta\end{pmatrix}y$$

的最小值, 事实上

$$f\left(y_1,y_2,...,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}y_iy_j+b-\beta^TA^{-1}\beta\geqslant b-\beta^TA^{-1}\beta,$$

这里等号成立当且仅当

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&-A^{-1}\beta\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=-A^{-1}\beta.$$

32. (32.) 首先对任何

$$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{n\times n},p\left(x\right)=\sum_{i=0}^d a_ix^i\in\mathbb{F}\left[x\right],$$

我们记 $A^{[p]}\triangleq\left(p\left(a_{ij}\right)\right)$. 然后

$$A^{[p]}=\sum_{i=0}^d a_iA^{[i]}.$$

现在设 $p=\sum\limits_{i=0}^n a_ix^i$ 是 A 特征多项式, 则有

$$A^{[xp]}=\sum_{i=0}^n a_iA^{[i+1]}=\sum_{i=0}^n a_iA^{i+1}=Ap\left(A\right)=0,$$

即 A 的元素是 xp 的零点.

现在假定 $A^k=A^{[k]},1\leqslant k\leqslant n+r,r\in\mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}0=A^{\left[x^{r+1}p\right]}&=\sum_{i=0}^{n}a_iA^{[i+r+1]}=a_nA^{[n+r+1]}+\sum_{i=0}^{n-1}a_iA^{i+r+1}\\&=a_nA^{[n+r+1]}-a_nA^{n+r+1}+\sum_{i=0}^{n}a_iA^{i+r+1}\\&=a_nA^{[n+r+1]}-a_nA^{n+r+1}+A^{r+1}p\left(A\right)\\&=a_nA^{[n+r+1]}-a_nA^{n+r+1},\end{aligned}$$

从而 $A^{[n+r+1]}=A^{n+r+1}$. 归纳可知证毕!

33. (33.) 不存在. 若存在这样的 A, 由定理23.32, 注意到 $\sin A$ 特征值应该为 $\sin x=1$ 的零点, 注意到 $\begin{pmatrix}1&2024\\0&1\end{pmatrix}$ 不可对角化, 因此 A 必然有一个二重根 $2n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbb{Z}$ 且不可对角化. 考虑 2 阶实可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2n\pi+\frac{\pi}{2}&1\\0&2n\pi+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$, 故由命题21.2知

$$\begin{aligned}P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}&=P\sin\begin{pmatrix}2n\pi+\frac{\pi}{2}&1\\0&2n\pi+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\sin\left[P\begin{pmatrix}2n\pi+\frac{\pi}{2}&1\\0&2n\pi+\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}P^{-1}\right]=\sin A=\begin{pmatrix}1&2024\\0&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!

34. (34.)$n=1$ 命题显然成立, 由数学归纳法假定命题对 $n-1$ 成立. 于是由归纳假设不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1&&&&a_1\\&\ddots&&&\vdots\\&&1&&a_{n-2}\\&&&c&a_{n-1}\\b_1&\cdots&b_{n-2}&b_{n-1}&a_n\end{pmatrix}.$$

让最后一列依此减去前 $n-2$ 列, 最后一行依此减去前 $n-2$ 行可以不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1&&&&0\\&\ddots&&&\vdots\\&&1&&0\\&&&c&a_{n-1}\\0&\cdots&0&b_{n-1}&a_n\end{pmatrix}.$$

如果 $a_{n-1}=0$, 则可逆知 $a_n\neq0$, 可以将最后一行加到倒数第二行, 从而不妨设 $a_{n-1}\neq0$. 考虑 $-\frac{c-1}{a_{n-1}}$ 倍最后一列加到倒数第二列可以不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1&&&&0\\&\ddots&&&\vdots\\&&1&&0\\&&&1&a_{n-1}\\0&\cdots&0&b_{n-1}&a_n\end{pmatrix}.$$

最后, 最后一列减去 a_{n-1} 倍倒数第二列, 最后一行减去 b_{n-1} 倍倒数第二行即完成了证明.

35. (35.) 注意到 x^n-2^n 是 A 零化多项式且无重根, 因此 A 可对角化, 而相似不过是同一线性变换在不同基下

的表示, 因此不妨设

$$A=\begin{pmatrix}2I_{s_0} & & & \\ & 2wI_{s_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2w^{n-1}I_{s_{n-1}}\end{pmatrix},w=e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{tr}\left(A^k\right)}{2^kn}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_jw^{kj}}{n}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_j}{n}\sum_{k=1}^{n}w^{kj}=s_0+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{s_j}{n}\cdot\frac{w^j-w^{(n+1)j}}{1-w^j}\right)=s_0,$$

这就完成了证明.

36. (36.) 注意到

$$(E-A)\left(E+A+A^{n+1}+\cdots+A^{100}\right)=E-A^{101}=0,$$

故 A 没有实特征值, 现在对 $1\leqslant n\leqslant 100$, 我们证明 $A^n+A^{n+1}+\cdots+A^{100}$ 的逆矩阵是整数矩阵, 从而行列式只能是[54]±1. 注意到

$$\left(A^n+A^{n+1}+\cdots+A^{100}\right)^{-1}=\left(E+A+\cdots+A^{100-n}\right)^{-1}A^{-n}.$$

利用 $A^{101}=E$ 和形式幂级数法, 即 $\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{100-n}}=\frac{1-x}{1-x^{101-n}}$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开系数为 $\pm1,0$, 可以知道 $\left(E+A+\cdots+A^{100-n}\right)^{-1}$ 是 A 的整系数多项式, 因此我们证明了 $\left(E+A+\cdots+A^{100-n}\right)^{-1}$ 是整数矩阵, 证毕!

37. (37.) 注意到 $A+tE_n,B+tE_n$ 也满足题目条件, 因此我们取 $t\to0$, 此时 $A+tE_n,B+tE_n$ 可逆, 而行列式关于 t 连续, 因此我们不妨设 A,B 可逆.

注意到 $\det A=\det B,MB^{-1}=A^{-1}M$, 我们有

$$\begin{aligned}\det\left(A-MX\right)&=\det A\cdot\det\left(E_n-A^{-1}MX\right)\\&=\det A\cdot\det\left(E_n-MB^{-1}X\right)\overset{\text{命题}21.7}{=}\det\left(E_n-XMB^{-1}\right)\cdot\det B\\&=\det\left(B-XM\right),\end{aligned}$$

这就证明了(23.179).

38. (38.) f 非退化表明 f 度量矩阵可逆. 全迷向的充要条件是 f 反对称, 因为你只需要考虑

$$f\left(\alpha+\beta,\alpha+\beta\right)=0\Rightarrow f\left(\alpha,\alpha\right)+f\left(\alpha,\beta\right)+f\left(\beta,\alpha\right)+f\left(\beta,\beta\right)=0,\forall\alpha,\beta\in V,$$

这等价于

$$f\left(\alpha,\beta\right)=-f\left(\beta,\alpha\right),\forall\alpha,\beta\in V.$$

由反对称矩阵的合同标准型23.17, 我们不妨设 f 的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

于是 $\dim V$ 为偶数. 现在假设 f 对角线上有 n 个二阶块 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, 则 $e_2,e_4,\cdots,e_{2n}$ 张成的空间为 W. 这

[54]整数的倒数还是整数, 只能是 ±1.

是因为若 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{2n} c_i e_i, e_j\right)=0, j=2,4,\cdots,2n$, 则

$$f\left(\sum_{i=1}^{2n} c_i e_i, e_{2j}\right)=\sum_{i=1}^{2n} c_i f\left(e_i, e_{2j}\right)=c_{2j-1} f\left(e_{2j-1}, e_{2j}\right)=c_{2j-1} \Rightarrow c_{2j-1}=0, j=1,2,\cdots,n.$$

$\ker\varphi=W$ 是定义自明的, 故

$$\dim \operatorname{Im}\varphi=\dim V-\dim\ker\varphi=2n-n=n=\dim W^*,$$

这就证明了 φ 是满射.

39. (39.) 设 A 的 Jordan 块是 $J_{n_1}\left(\lambda_1\right), J_{n_2}\left(\lambda_s\right), \cdots, J_{n_s}\left(\lambda_s\right)$, 这里 $\lambda_i \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant s$. 于是由例题23.62知 A^k 的 Jordan 标准块是 $J_{n_1}\left(\lambda_1^k\right), J_{n_2}\left(\lambda_s^k\right), \cdots, J_{n_s}\left(\lambda_s^k\right)$. 由条件 $A^k \sim B^k, \forall k \geqslant N$, 可设 B 的 Jordan 块是

$$J_{n_1}\left(\mu_1\right), J_{n_2}\left(\mu_2\right), \cdots, J_{n_s}\left(\mu_s\right), \mu_i \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant s.$$

现在由抽屉原理, 对 $\lambda_j, 1 \leqslant j \leqslant s$, 存在某个 $1 \leqslant t \leqslant s$ 使得无穷多个素数 k 成立 $\lambda_j^k=\mu_t^k$. 因此[55]$\lambda_j=\mu_t$. 反过来对某个 μ_t, 也存在某个 λ_j 使得 $\lambda_j=\mu_t$.

现在对 A, B 的同一个特征值的同一个阶数的 Jordan 块, 如果 A, B 的这样的块个数不同, 其 k 次方的这个特征值的 k 次方对应的这个阶数的 Jordan 块在 k 取遍无穷个素数时也会有一个不同[56], 这就是矛盾! 因此我们证明了 $A \sim B$.

40. (40.)**Step 1** 若 $m=n+1$, 我们证明 A 的秩为 m, 这等价于证明 $\det A \neq 0$. 现在应用例题23.197有

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & 1 \\ 2^n & C_n^1 2^{n-1} & C_n^2 2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1)^n & C_n^1(m-1)^{n-1} & C_n^2(m-1)^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot V_m(1,2,\cdots,m) \\
&= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 2^n & C_n^1 2^{n-1} & C_n^2 2^{n-2} & \cdots & C_n^{n-1} 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1)^n & C_n^1(m-1)^{n-1} & C_n^2(m-1)^{n-2} & \cdots & C_n^{n-1}(m-1) \end{vmatrix} \cdot V_m(1,2,\cdots,m) \\
&= (-1)^{m+1} \prod_{k=1}^{m-1} C_n^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1)^n & (m-1)^{n-1} & (m-1)^{n-2} & \cdots & (m-1) \end{vmatrix} \cdot V_m(1,2,\cdots,m) \\
&= (-1)^{m+1} \prod_{k=1}^{m-1} k C_n^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1)^{n-1} & (m-1)^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot V_m(1,2,\cdots,m),
\end{aligned}$$

这里中间的矩阵可以交换列变成 Vandermonde 行列式的转置, 因此 A 秩 m.

Step 2 当 $m \geqslant n+2$, 注意到

$$f(x)=\begin{vmatrix} x^n & (x+1)^n & \cdots & (x+m-1)^n \\ 2^n & 3^n & \cdots & (m+1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m^n & (m+1)^n & \cdots & (2m-1)^n \end{vmatrix}$$

[55]取定一个 k_0 可得 λ_j, μ_k 相差一个 k_0 次单位根. 但当 k 遍历无穷个素数只能有这个 k_0 次单位根为 1.

[56]注意有可能相差某个单位根的特征值干扰, 因此我们要让 k 取遍素数.

是一个 n 次多项式且有 $f(j)=0, j=2,3,\cdots,m$, 故 $\det A=0$. 类似的, A 的所有大于等于 $n+2$ 阶子式都为 0. 由 **Step 1** 知 A 的 $n+1$ 阶顺序主子式非 0, 因此矩阵 A 的秩为 $n+1$.

41. (41.) 注意到满足题目条件的多项式平移不改变条件, 不妨设闭区间为 $I=[-2,2]$. 定义

$$M=\max_{x\in I}p(x)-\min_{x\in I}p(x),$$

以及

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}^{*}t_k=t_0+2(t_1+t_2+\cdots+t_{n-1})+t_n.$$

现在对任何 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in I$ 都有

42. (42.) 为计算行列式是否非 0, 视为 $\mathbb{Z}_2$ 上的矩阵, 我们有 $A=J-I$. 注意到由推论21.1知 $J=1_n1_n^T$ 有唯一非 0 特征值 $1_n^T1_n=n$. 因此 A 有特征值

$$n-1,\underbrace{-1,\cdots,-1}_{n-1\text{个}}.$$

现在因为 n 为奇数, 所以 $\det A=(n-1)(-1)^{n-1}=0$, 但这只能说明 A 秩为偶数, 并不能说明 A 不可逆. 注意到 1_n 是 $Ax=0$ 的一个非 0 解, 因此 A 不可逆. 又考虑 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式, 它和 A 有类似的结构, 其行列式为 $(n-2)(-1)^{n-2}\neq 0$. 因此我们证明了 A 的秩为 $n-1$.

43. (43.) 设 $B_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}$, 则有

$$B_{n+1}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{n+1}{n+2} & 2\\ \frac{2n+2}{n+2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{n+1}{n+2}a_n+\frac{2n+2}{n+2}b_n & 2a_n+b_n\\ \frac{n+1}{n+2}c_n+\frac{2n+2}{n+2}d_n & 2c_n+d_n\end{pmatrix}.$$

于是

$$c_1=d_1=1, c_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}c_n+\frac{2n+2}{n+2}d_n, d_{n+1}=2c_n+d_n, n\in\mathbb{N}.$$

只需证明 $c_n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{N}$, 然后由递推归纳显然有 $d_n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{N}$.

现在 $d_n=1+2\sum_{k=1}^{n-1}c_k, n\geqslant 2$, 于是

$$c_{n+1}=\frac{2n+2}{n+2}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}c_k\right)-\frac{3n+3}{n+2}c_n, n\in\mathbb{N}.$$

现在设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n,$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{n+2}x^n+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}c_kx^n-4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n}c_k\right)x^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}c_nx^n,$$

于是

$$\frac{f(x)-x}{x}=\frac{2(-x+x\ln(1-x)-\ln(1-x))}{(x-1)x^2}-1+\frac{4f(x)}{1-x}-\frac{4}{x^2}\int_0^x\frac{yf(y)}{1-y}\mathrm{d}y-3f(x)+\frac{3}{x^2}\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y.$$

两边去分母之后求导得微分方程

$$(x-1)\left(3x^3+2x^2-x\right)f'(x)-\left(-3x^3+5x^2+3x-1\right)f(x)=2x.$$

解得 $f(x)=-\frac{1+\frac{x-1}{\sqrt{-3x^2-2x+1}}}{2x}$. 为了证明 f 的 Taylor 展开系数为正整数, 我们只需证明 $\frac{1}{\sqrt{-3x^2-2x+1}}$ 的 Taylor 展开系数为递增奇数. 我们断言这个系数恰好为 $\left(1+x+x^2\right)^n$ 展开中 x^n 的系数.

引理 30.6

设 $b,c\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}_0$, 则 $\left(1+bx+cx^2\right)^n$ 的展开式中 x^n 的系数为 $\frac{1}{\sqrt{1-2bx+(b^2-4c)x^2}}$ 的 Taylor 展开中 x^n 的系数.

证明 一方面有

$$\left(1+bx+cx^2\right)^n=\sum_{k_1+k_2+k_3=n,k_1,k_2,k_3\geqslant 0}\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}b^{k_2}c^{k_3}x^{k_2+2k_3},$$

故 x^n 系数为

$$\begin{aligned}&\sum_{k_1+k_2+k_3=n,k_2+2k_3=n}\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}b^{k_2}c^{k_3}=\sum_{k_2+2k_3=n}\frac{n!}{k_2!k_3!^2}b^{k_2}c^{k_3}\\&=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{n!}{(n-2k)!k!^2}b^{n-2k}c^k=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}C_n^{2k}C_{2k}^kb^{n-2k}c^k\end{aligned}.$$

另外一方面有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2bx+(b^2-4c)x^2}}&=\frac{1}{1-bx}\left[1-\frac{4cx^2}{(1-bx)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\\&\overset{\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\text{ Taylor 展开}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}^k\frac{c^kx^{2k}}{(1-bx)^{2k+1}}\overset{\frac{1}{(1-x)^{2k+1}}\text{ Taylor 展开}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}^kc^kx^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}C_{2k+m}^{2k}b^mx^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{2k+m=n}^{\infty}C_{2k}^kC_n^{2k}b^mc^k\right)x^n,\end{aligned}$$

这就证明了引理.

回到原题证明, 在引理30.6中取 $b=c=1$ 得 $\frac{1}{\sqrt{-3x^2-2x+1}}$ 的 x^n 系数为 $\left(1+x+x^2\right)^n$ 展开中 x^n 的系数, 显然这是一个递增正整数, 此外由

$$\sum_{k_2+2k_3=n-1,k_2,k_3\geqslant 0}\frac{n!}{(k_3+1)!k_2!k_3!}=\sum_{k_2+2k_3=n+1,k_2,k_3\geqslant 0}\frac{n!}{(k_3-1)!k_2!k_3!}$$

知 x^{n-1},x^{n+1} 的系数应该相同. 假设 $\left(1+x+x^2\right)^n$ 展开中 x^n 的系数为奇数, 由

$$\left(1+x+x^2\right)^{n+1}=\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2\right)^n$$

知 $\left(1+x+x^2\right)^{n+1}$ 的 x^{n+1} 系数是两个相同整数[57]和奇数之和, 故也为奇数, 归纳初值容易验证, 这就证明了 $\left(1+x+x^2\right)^n$ 展开中 x^n 的系数为奇数, 这就完成了原题证明.

44. (44.) 由条件容易得

$$AB=\left(BA^2\right)^2,BA=\left(A^2B\right)^2.$$

然后

$$B^{-1}ABB=\left(B^{-1}BA^2B\right)^2=\left(A^2B\right)^2=BA,$$

故 $AB^2=B^2A$, 从而

$$AB^{-1}=AB^{2n}=A\left(B^2\right)^n=\left(B^2\right)^nA=B^{-1}A,$$

即 $AB=BA$.

45. (45.) 首先若 $F(A)\sim B,A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, 则存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 使得 $P^{-1}f(A)P=B$, 于是 $f\left(P^{-1}AP\right)=B$. 现在我们考虑标准型, 只需要

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&1\\0&\lambda_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_1&-\lambda_2\\\lambda_2&\lambda_1\end{pmatrix},\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

在 F 下有原像即可, 这里第三个对应一对复共轭特征值 $\lambda_1\pm\lambda_2i$.

[57] $\left(1+x+x^2\right)^n$ 的 x^{n-1},x^n,x^{n+1} 系数之和.

注意到 $x^3+tx+1=\lambda,\forall\lambda,t\in\mathbb{R}$ 都有实根, 我们可设为 $x_{\lambda,t}$, 于是

$$F\left(\begin{pmatrix}x_{\lambda_1,t}&0\\0&x_{\lambda_2,t}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$

当 $t\neq 0$ 时注意到对 $\lambda\in\mathbb{R},\lambda^2\neq-\frac{t}{3}$ 必有

$$F\left(\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda^3+t\lambda+1&t+3\lambda^2\\0&\lambda^3+t\lambda+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda^3+t\lambda+1&1\\0&\lambda^3+t\lambda+1\end{pmatrix}.$$

于是 $t>0$ 时有重特征值 μ 且 Jordan 块只有一个的 B, 相似某个矩阵使得其在 F 下有原像 $\begin{pmatrix}x_{\mu,t}&1\\0&x_{\mu,t}\end{pmatrix}$.

若 $t<0$, 有重特征值 μ 且 Jordan 块只有一个的 B, $\mu\neq\frac{2}{3}t\sqrt{-\frac{t}{3}}+1$ 时 $3x_{\mu,t}^2+t\neq 0$, 因此 B 相似某个矩阵使得其在 F 下有原像 $\begin{pmatrix}x_{\mu,t}&1\\0&x_{\mu,t}\end{pmatrix}$. $\mu=\frac{2}{3}t\sqrt{-\frac{t}{3}}+1$ 时, 取 $x_{\mu,t}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-t}$, 此时 $3x_{\mu,t}^2+t\neq 0$, 因此 B 相似某个矩阵使得其在 F 下有原像 $\begin{pmatrix}x_{\mu,t}&1\\0&x_{\mu,t}\end{pmatrix}$.

于是有重特征值 μ 且 Jordan 块只有一个的 B, 相似某个矩阵使得其在 F 下有原像 $\begin{pmatrix}x_{\mu,t}&1\\0&x_{\mu,t}\end{pmatrix}$.

当 $t=0$ 时, 取 $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, 若 F 下原像为 A, 此时 A 不能对角化, 因此特征值必然是二重实根 0 且 $A\sim\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 于是

$$F(A)\sim F\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

这就是一个矛盾! 因此 B 在 F 下没有原像.

若 $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的特征值为共轭复数 $\lambda,\bar{\lambda}$. 取 $x_{\lambda,t}\in\mathbb{C}$ 使得

$$x_{\lambda,t}^3+tx_{\lambda,t}+1=\lambda.$$

于是

$$\bar{x}_{\lambda,t}^3+t\bar{x}_{\lambda,t}+1=\bar{\lambda}.$$

考虑

$$A=\begin{pmatrix}\frac{x_{\lambda,t}+\bar{x}_{\lambda,t}}{2}&-\frac{x_{\lambda,t}-\bar{x}_{\lambda,t}}{2i}\\\frac{x_{\lambda,t}-\bar{x}_{\lambda,t}}{2i}&\frac{x_{\lambda,t}+\bar{x}_{\lambda,t}}{2}\end{pmatrix}.$$

现在 $F(A)$ 的特征值是 $\lambda,\bar{\lambda}$, 这就证明了 $F(A)\sim B$.

故 F 是满射的充要条件是 $t\neq 0$.

46. (46.) 设 A 极小多项式是

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_mx^m,1\leqslant m\leqslant n,a_n=1.$$

可取

$$B=A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_mA^{m-1}\neq 0.$$

容易发现 $AB=BA=0$.

47. (47.) 首先 Hermite 矩阵都可以对角化, AA^* 是半正定 Hermite 矩阵, 设其特征值为

$$\underbrace{\lambda_1}_{n_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2}_{n_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s}_{n_s\text{个}},\underbrace{0}_{n-\sum_{j=1}^{s}n_j\text{个}},\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_s>0.$$

利用 CD 和 DC 有完全一样的非 0 Jordan 23.20和 A^*A 也是半正定 Hermite 矩阵, 我们知道 A^*A 的特征值

也是

$$\underbrace{\lambda_1}_{n_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2}_{n_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s}_{n_s\text{个}},\underbrace{0}_{n-\sum\limits_{j=1}^{s}n_j\text{个}}.$$

现在利用 $(AA^*)^2=A^*A$ 知 A^*A 特征值是

$$\underbrace{\lambda_1^2}_{n_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2^2}_{n_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s^2}_{n_s\text{个}},\underbrace{0}_{n-\sum\limits_{j=1}^{s}n_j\text{个}}.$$

于是考虑最大特征值必有 $\lambda_1^2=\lambda_1$, 然后考虑第二大特征值必有 $\lambda_2^2=\lambda_2$. 依次下去可得 $\lambda_i=\lambda_i^2, i=1,2,\cdots,s$. 因此 AA^* 只有特征值 $0,1$, 所以极小多项式为 $x(x-1)$ 的因子. 现在

$$A^*A=(AA^*)^2=AA^*.$$

因为 A 是正规矩阵, 所以可不妨设 $A=\operatorname{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$. 现在利用 $(AA^*)^2=A^*A$ 知

$$|\mu_i|^2=|\mu_i|, i=1,2,\cdots,n,$$

这就证明了 A 的非 0 特征值模长为 1.

48. (48.) 本题涉及的结果也叫 Craig–Sakamoto 定理. 由例题23.37和题目等式, 在 x 的某个邻域我们有

$$|I_n-x(A+B)|=|I_n-xA|\cdot|I_n-xB|,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{30.113}$$

注意到(30.113)左右都是关于 x 的多项式, 因此(30.113)关于 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立.

不妨设 A 的全部非 0 特征值是 $a_1,a_2,\cdots,a_s$, B 的全部非 0 特征值是 $b_1,b_2,\cdots,b_t$. 然后不妨设

$$A=\operatorname{diag}\{A_1,0\},B=T\operatorname{diag}\{0,B_1\}T^{-1},A_1=\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_s\},B_1=\operatorname{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_t\},$$

这里 $T=\begin{pmatrix}T_1&T_2\\T_3&T_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵.

Case 1 若 $s+t=n$, 则

$$\begin{aligned}A+B&=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&T_2B_1\\0&T_4B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1^T&T_3^T\\T_2^T&T_4^T\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}T_2B_1T_2^T&T_2B_1T_4^T\\T_4B_1T_2^T&T_4B_1T_4^T\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_1+T_2B_1T_2^T&T_2B_1T_4^T\\T_4B_1T_2^T&T_4B_1T_4^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&T_2B_1\\0&T_4B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&0\\T_2^T&T_4^T\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}I_n&T_2\\0&T_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&0\\0&B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&0\\T_2^T&T_4^T\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

于是 $|A+B|=|A_1|\cdot|B_1|\cdot\left|T_4^TT_4\right|$. 由(30.113)知 $A+B$ 的非 0 特征值全体是

$$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_t.$$

因此

$$|A+B|=|A_1|\cdot|B_1|\Rightarrow\left|T_4^TT_4\right|=1=|I_t|=\left|T_2^TT_2+T_4^TT_4\right|.$$

又由命题23.6知 $T_2^TT_2=0$. 由命题21.8知 $T_2=0$, 于是

$$AB=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_2B_1T_2^T&T_2B_1T_4^T\\T_4B_1T_2^T&T_4B_1T_4^T\end{pmatrix}=0.$$

Case 2 当 $s+t<n$, 由矩阵秩不等式21.6知

$$r(A+B)\leqslant r\left(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right)\leqslant r(A)+r(B).$$

注意到实对称矩阵秩为非 0 特征值个数, 我们有

$$r\left(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right)=s+t.$$

设 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 的解空间一个标准正交基为 $\eta_i,i=1,2,\cdots,n-s-t$, 并将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\eta_i,i=1,2,\cdots,n$. 现在设

$$P=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(P_1,P_2),P_1\in\mathbb{R}^{n\times(n-s-t)},$$

则我们有

$$P^TAP=P^T(0,AP_2)=\begin{pmatrix}0&P_1^TAP_2\\0&P_2^TAP_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&P_2^TAP_2\end{pmatrix};$$
$$P^TBP=P^T(0,BP_2)=\begin{pmatrix}0&P_1^TBP_2\\0&P_2^TBP_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&P_2^TBP_2\end{pmatrix},$$

以及

$$P^T(A+B)P=\begin{pmatrix}0&0\\0&P_2^TAP_2+P_2^TBP_2\end{pmatrix}.$$

现在 $P_2^TAP_2,P_2^TBP_2$ 满足 **Case 1**, 于是由 **Case 1** 的结果得

$$0=P_2^TAP_2P_2^TBP_2=P_2^TABP_2\Rightarrow AB=0.$$

49. (49.) 不妨设内积为标准内积, $V=\mathbb{R}^n$, 则(23.181)等价于

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}x=0$$

有非 0 解, 即我们有

$$\operatorname{rank}\left((\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}\right)<n.$$

(23.182)等价于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_n^T\end{pmatrix}x=0$$

有非 0 解. 又矩阵和转置矩阵秩一样, 因此

$$\operatorname{rank}\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_n^T\end{pmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left((\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}\right)<n,$$

从而所需 β 存在.

50. (50.) 对 $k=0,1,2,\cdots,n$, 由二项式定理得

$$(x-a)^k=\sum_{j=0}^{k}C_k^j(-a)^{k-j}x^j=\begin{pmatrix}1 & x & \cdots & x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_k^0(-a)^k\\ C_k^1(-a)^{k-1}\\ \vdots\\ C_k^k(-a)^0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因此我们有过渡矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & x-a & \cdots & (x-a)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x & \cdots & x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & C_1^0(-a)^1 & C_2^0(-a)^2 & \cdots & C_n^0(-a)^n\\ 0 & 1 & C_2^1(-a)^1 & \cdots & C_n^1(-a)^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_n^2(-a)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

为了求逆矩阵, 实际上就是求 $\widetilde{A}$ 使得

$$\begin{pmatrix}1 & x & \cdots & x^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x-a & \cdots & (x-a)^n\end{pmatrix}\widetilde{A}.$$

于是我们应该是用

$$x^k=(x-a+a)^k=\sum_{j=0}^{k}C_k^ja^{k-j}(x-a)^j$$

来求表示矩阵, 因此完全类似的知道

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & C_1^0a^1 & C_2^0a^2 & \cdots & C_n^0a^n\\ 0 & 1 & C_2^1a^1 & \cdots & C_n^1a^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_n^2a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

为所求逆矩阵.

51. (51.) 注意到问题等价于 $\left(H-\frac{A}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+I$ 的解存在且唯一. 注意到逆矩阵是原矩阵的多项式21.11, 若 A 特征值为 λ, H 的特征值必为 $(1,+\infty)$ 的数字 x 且 $x-\frac{1}{x}=\lambda$. 现在 $x-\frac{\lambda}{2}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}>0$, 故 $H-\frac{A}{2}$ 正定. 由半正定矩阵开方存在且唯一23.5得 $H=\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}+I}$ 为唯一解.

52. (52.) 对 $m>n$, 有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_1\left(\frac{k}{m}\right)g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_1\left(\frac{k}{m}\right)g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_1\left(\frac{k}{m}\right)g_n\left(\frac{k}{m}\right)\\ \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_2\left(\frac{k}{m}\right)g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_2\left(\frac{k}{m}\right)g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_2\left(\frac{k}{m}\right)g_n\left(\frac{k}{m}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_n\left(\frac{k}{m}\right)g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_n\left(\frac{k}{m}\right)g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}f_n\left(\frac{k}{m}\right)g_n\left(\frac{k}{m}\right)\end{pmatrix}\\ =&\frac{1}{m}\begin{pmatrix}f_1\left(\frac{1}{m}\right) & f_1\left(\frac{2}{m}\right) & \cdots & f_1(1)\\ f_2\left(\frac{1}{m}\right) & f_2\left(\frac{2}{m}\right) & \cdots & f_2(1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_n\left(\frac{1}{m}\right) & f_n\left(\frac{2}{m}\right) & \cdots & f_n(1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}g_1\left(\frac{1}{m}\right) & g_2\left(\frac{1}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{1}{m}\right)\\ g_1\left(\frac{2}{m}\right) & g_2\left(\frac{2}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{2}{m}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_1(1) & g_2(1) & \cdots & g_n(1)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 Cauchy-Binet 公式得

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_1\left(\frac{k}{m}\right) g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_1\left(\frac{k}{m}\right) g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_1\left(\frac{k}{m}\right) g_n\left(\frac{k}{m}\right) \\
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_2\left(\frac{k}{m}\right) g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_2\left(\frac{k}{m}\right) g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_2\left(\frac{k}{m}\right) g_n\left(\frac{k}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n\left(\frac{k}{m}\right) g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n\left(\frac{k}{m}\right) g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n\left(\frac{k}{m}\right) g_n\left(\frac{k}{m}\right)
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{m^n} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant m}
\begin{vmatrix}
f_1\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_1\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_1\left(\frac{i_n}{m}\right) \\
f_2\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_2\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_2\left(\frac{i_n}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_n\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_n\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_n\left(\frac{i_n}{m}\right)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
g_1\left(\frac{i_1}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_1}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_1}{m}\right) \\
g_1\left(\frac{i_2}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_2}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_1\left(\frac{i_n}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_n}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_n}{m}\right)
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{m^n n!} \sum_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant m}
\begin{vmatrix}
f_1\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_1\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_1\left(\frac{i_n}{m}\right) \\
f_2\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_2\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_2\left(\frac{i_n}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_n\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_n\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_n\left(\frac{i_n}{m}\right)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
g_1\left(\frac{i_1}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_1}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_1}{m}\right) \\
g_1\left(\frac{i_2}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_2}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_1\left(\frac{i_n}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_n}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_n}{m}\right)
\end{vmatrix},
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自轮换对称性. 于是由定积分定义有

$$\begin{aligned}
&\det\left(\int_0^1 f_i g_j \mathrm{d}x\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \\
&= \lim_{m\to\infty}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_1\left(\frac{k}{m}\right) g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_1\left(\frac{k}{m}\right) g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_1\left(\frac{k}{m}\right) g_n\left(\frac{k}{m}\right) \\
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_2\left(\frac{k}{m}\right) g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_2\left(\frac{k}{m}\right) g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_2\left(\frac{k}{m}\right) g_n\left(\frac{k}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n\left(\frac{k}{m}\right) g_1\left(\frac{k}{m}\right) & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n\left(\frac{k}{m}\right) g_2\left(\frac{k}{m}\right) & \cdots & \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n\left(\frac{k}{m}\right) g_n\left(\frac{k}{m}\right)
\end{vmatrix} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^n n!} \sum_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant m}
\begin{vmatrix}
f_1\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_1\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_1\left(\frac{i_n}{m}\right) \\
f_2\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_2\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_2\left(\frac{i_n}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_n\left(\frac{i_1}{m}\right) & f_n\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & f_n\left(\frac{i_n}{m}\right)
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
g_1\left(\frac{i_1}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_1}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_1}{m}\right) \\
g_1\left(\frac{i_2}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_2}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_2}{m}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_1\left(\frac{i_n}{m}\right) & g_2\left(\frac{i_n}{m}\right) & \cdots & g_n\left(\frac{i_n}{m}\right)
\end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \left[\det\left(f_i\left(x_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \det\left(g_i\left(x_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right] \mathrm{d}V,
\end{aligned}$$

这就证明了(23.183).

53. (53.) 若 $AB=BA$, 则由 A,B 可同时酉相似对角化23.5知

$$|tI-xA-yB| = \prod_{i=1}^{n} (t-a_i x-b_i y), \tag{30.114}$$

这里 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 A,B 的特征值.

若 $|tI-xA-yB|$ 可以分解为 1 次式的积, 即(30.114)成立, 但此时 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 暂时不知道是否是 A,B 特征值. 我们考虑 $x=1,y=\lambda\in\mathbb{C}$, 就有 $A+\lambda B$ 的特征值是 $a_i+\lambda b_i,i=1,2,\cdots,n$. 特别的 $\lambda=0$, 就知道这里 $a_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 A 的特征值, 类似的可以知道 $b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 B 的特征值.

一方面, 由舒尔不等式21.7取等条件, 我们有

$$\mathrm{tr}\left(AA^*\right) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2, \mathrm{tr}\left(BB^*\right) = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left[(A+\lambda B)\left(A^*+\overline{\lambda}B^*\right)\right] &= \operatorname{tr}(AA^*)+|\lambda|^2\operatorname{tr}(BB^*)+\overline{\lambda}\operatorname{tr}(AB^*)+\lambda\operatorname{tr}(BA^*)\\ &= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+|\lambda|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 x+2\Re\left[\lambda\operatorname{tr}(AB^*)\right].\end{aligned}$$

另外一方面, 由舒尔不等式21.7, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left[(A+\lambda B)\left(A^*+\overline{\lambda}B^*\right)\right] &\geqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i+\lambda b_i|^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+|\lambda|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2+2\Re\left[\lambda a_i\overline{b_i}\right].\end{aligned}$$

于是

$$\Re\left[\lambda\left(\operatorname{tr}(AB^*)-\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}\right)\right]\geqslant 0,\forall\lambda\in\mathbb{C},$$

即 $\operatorname{tr}(AB^*)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$. 现在有

$$\operatorname{tr}\left[(A+\lambda B)\left(A^*+\overline{\lambda}B^*\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}|a_i+\lambda b_i|^2.$$

由舒尔不等式取等条件21.7, 我们知道对任何 $\lambda\in\mathbb{C}$ 都有 $(A+\lambda B)$ 是正规矩阵, 所以

$$(A+\lambda B)(A+\lambda B)^*=(A+\lambda B)^*(A+\lambda B),$$

即

$$\lambda(BA^*-A^*B)=\overline{\lambda}(B^*A-AB^*),\forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

即 $D=BA^*-A^*B$, 则 $D=\mu D^*,\forall|\mu|=1$, 因此 $D=0$. 现在 $BA^*=A^*B$, 由例题23.28知 A 是 A^* 的多项式, 故 $BA=AB$.

54. (54.) 把满足题目的所有矩阵构成的集合记为 S, 这是一个有限集. 注意到 S 对乘法封闭, 这是因为 S 可以看作交换了行列或者某行 (列) 乘 -1 那种初等矩阵相乘. 于是对 $A\in S$ 有 $A^k\in S,\forall k\in\mathbb{N}$. 因为 S 有限, 所以必然存在 $i,j\in\mathbb{N},1\leqslant j<i$ 使得

$$A^i=A^j\Rightarrow A^{i-j}=E,$$

这就证明了 A 的特征值是单位根.

55. (55.) 显然 $\{L|_X:L\in GL_V(X)\}$ 是对称群 S_{n+1} 的子群. 由 X 包含 V 的一个基知线性变换在 X 上取值被唯一确定, 所以 $GL_V(X)$ 是有限集. 下说明 $|GL_V(X)|$ 的最大值是 $|S_{n+1}|=(n+1)!$.

我们设 $X=\left\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\sum\limits_{j=1}^{n}-e_j\right\}$, 则所有置换矩阵 $L\in GL_V(X)$. 又对线性变换 L, 设

$$L(\{e_1,e_2,\cdots,e_n\})=\left\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\sum_{i=1}^{n}-e_i\right\}\setminus\{e_k\},\tag{30.115}$$

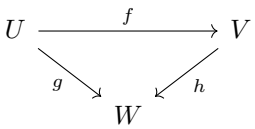
则

$$L\left(\sum_{i=1}^{n}-e_i\right)=\sum_{i\neq k}-e_i+\sum_{i=1}^{n}e_i=e_k.$$

于是所有满足(30.115)的线性变换 L 都在 $GL_V(X)$ 中, 因此 $|GL_V(X)|=|S_{n+1}|=(n+1)!$.

$$A$$

56. (56.) 考虑交换图



(a). 考虑

$$h' : \operatorname{Im} f \to W, f(v) \mapsto g(v). \tag{30.116}$$

显然 h' 线性. 由 $\ker f \subset \ker g$, 我们知道设 $f(v) = 0$ 则有

$$f(v) = 0 \Rightarrow h'(f(v)) = g(v) = 0,$$

故 h' 良定义. 在 $\operatorname{Im} f$ 补空间 K 上任意定义到 W 的线性映射 h'', 于是我们就构造了 $h \triangleq (h', h'')$ 使得 $g = h \circ f$. 注意到为了 $g = h \circ f$, $h|_{\operatorname{Im} f}$ 必须满足(30.116), 于是我们上述的构造是全部可能的构造, 故 h 唯一等价于 f 满射.

(b). 从上述构造可以知道 S 就是 $h \triangleq (h', h'')$, 其中 h'' 是任一 $\operatorname{Hom}(K, W)$ 的元素, 但是 S 并非线性空间. 注意到

$$T = \{(0, h_1'' - h_2'') : h_1'', h_2'' \in \operatorname{Hom}(K, W)\},$$

故

$$\dim T = \dim \operatorname{Hom}(K, W) = \dim W \cdot (\dim V - \dim \operatorname{Im} f) = n(m - t).$$

57. (57.) 首先

$$\{W_1 W_j, W_2 W_j, \cdots, W_r W_j\} = \{W_1, W_2, \cdots, W_r\}, j = 1, 2, \cdots, r. \tag{30.117}$$

(a). 考虑正定矩阵 $\sum_{i=1}^{r} W_i^* W_i = C^* C$, C 是 n 阶可逆复矩阵. 然后我们利用(30.117)有

$$W_j^* \left(\sum_{i=1}^{r} W_i^* W_i \right) W_j = \sum_{i=1}^{r} (W_i W_j)^* W_i W_j = \sum_{i=1}^{r} W_i^* W_i. \tag{30.118}$$

取 $P = C^{-1}$, 我们有

$$\left(P^{-1} W_j P\right)^* \left(P^{-1} W_j P\right) = \left(C^{-1}\right)^* W_j^* C^* C W_j C^{-1} \overset{(30.118)}{=} \left(C^{-1}\right)^* C^* C C^{-1} = E_n,$$

这就完成了证明.

(b). 考虑正定矩阵 $\sum_{i=1}^{r} W_i^T W_i = C^T C$, C 是 n 阶可逆实矩阵. 然后我们利用(30.117)有

$$W_j^T \left(\sum_{i=1}^{r} W_i^T W_i \right) W_j = \sum_{i=1}^{r} (W_i W_j)^T W_i W_j = \sum_{i=1}^{r} W_i^T W_i. \tag{30.119}$$

取 $P = C^{-1}$, 我们有

$$\left(P^{-1} W_j P\right)^T \left(P^{-1} W_j P\right) = \left(C^{-1}\right)^T W_j^T C^T C W_j C^{-1} \overset{(30.119)}{=} \left(C^{-1}\right)^T C^T C C^{-1} = E_n,$$

这就完成了证明.

58. (58.)

设 $x \in \operatorname{Im}(\varphi\psi - \psi\varphi)$, 则 $x = \varphi\psi y - \psi\varphi y, y \in V$. 于是

$$x = (\varphi - \psi)\psi y + (\varphi - \psi)\varphi y \in \operatorname{Im}(\varphi - \psi);$$

$$x = (\varphi + \psi)\psi y - (\varphi + \psi)\varphi y \in \operatorname{Im}(\varphi + \psi),$$

即 $x \in \operatorname{Im}(\varphi + \psi) \bigcap \operatorname{Im}(\varphi - \psi)$. 反之, 设 $x \in \operatorname{Im}(\varphi + \psi) \bigcap \operatorname{Im}(\varphi - \psi)$, 我们有

$$x = (\varphi + \psi) u = (\varphi - \psi) v, u, v \in V.$$

先来断言 $\begin{cases} \psi y + \varphi y = v \\ \psi y - \varphi y = u \end{cases}$ 有解. 事实上这等价线性方程组 $\begin{pmatrix} \psi + \varphi \\ \psi - \varphi \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ 有解. 我们考虑初等变换

$$\begin{pmatrix} \psi + \varphi & v \\ \psi - \varphi & u \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi + \varphi & v \\ 2\psi & u + v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varphi & \frac{v-u}{2} \\ 2\psi & u + v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varphi & \frac{v-u}{2} \\ \psi & \frac{u+v}{2} \end{pmatrix}.$$

利用 $\varphi(u-v)+\psi(u+v)=0$, 继续初等变换得

$$\begin{pmatrix}\varphi & \frac{v-u}{2}\\ \psi & \frac{u+v}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\varphi^2 & -\varphi\frac{v-u}{2}\\ \psi^2 & \psi\frac{u+v}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0\\ I_n & \psi\frac{u+v}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0\\ I_n & 0\end{pmatrix},$$

于是我们证明了线性方程组 $\begin{pmatrix}\psi+\varphi\\ \psi-\varphi\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}v\\ u\end{pmatrix}$ 有解. 现在容易验证 $x=\varphi\psi y-\psi\varphi y$, 从而 $x\in\operatorname{Im}(\varphi\psi-\psi\varphi)$, 故(23.184)成立.

59. (59.) 首先由 Ω 的乘法封闭性, 考虑

$$\det\left((AA)^m\right)=(\det A)^2\Rightarrow(\det A)^{2m}=(\det A)^2$$
$$\det\left(\left(AA^2\right)^m\right)=(\det A)^3\Rightarrow(\det A)^{3m}=(\det A)^{3'}$$

于是 $\det A\neq 0$ 时有 $(\det A)^{m-1}$ 同时是 2 次或者 3 次单位根, 即只能是 1.

对任何 $A,B\in\Omega$, 我们考虑 AB 的有理标准型, 即存在可逆矩阵 P 使得[58] $P^{-1}ABP=\begin{pmatrix}X & 0\\ 0 & Y\end{pmatrix}$, 其中 X 可逆, Y 幂零. 于是

$$P^{-1}BAP=P^{-1}(AB)^mP=\begin{pmatrix}X^m & 0\\ 0 & Y^m\end{pmatrix}.$$

现在

$$P^{-1}ABP=P^{-1}(BA)^mP=\begin{pmatrix}X^{m^2} & 0\\ 0 & Y^{m^2}\end{pmatrix}.$$

反复如此操作[59]可以得到 Y 的次方越来越高, 从而结合 Y 幂零得到 $Y=0$. 现在

$$P^{-1}ABP=\begin{pmatrix}X & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X^{m^2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},P^{-1}BAP=\begin{pmatrix}X^m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

即 $AB=BA$.

60. (60.) 注意到 $Ae_k=a_{n-k+1}e_{n-k+1},k=1,2,\cdots,n$, 于是当 n 为偶数有分解

$$\mathbb{C}^n=\bigoplus_{k=1}^{\frac{n}{2}}\operatorname{span}\{e_k,e_{n-k+1}\},$$

且对每个 $k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$, 都有 $\operatorname{span}\{e_k,e_{n-k+1}\}$ 是 A 的不变子空间.

$$A\begin{pmatrix}e_k & e_{n-k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_k & e_{n-k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a_k\\ a_{n-k+1} & 0\end{pmatrix},k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

Case 1 $a_ka_{n-k+1}\neq 0$, 则有相似

$$\begin{pmatrix}-\sqrt{a_ka_{n-k+1}} & \sqrt{a_ka_{n-k+1}}\\ a_{n-k+1} & a_{n-k+1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & a_k\\ a_{n-k+1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{a_ka_{n-k+1}} & \sqrt{a_ka_{n-k+1}}\\ a_{n-k+1} & a_{n-k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{a_ka_{n-k+1}} & 0\\ 0 & \sqrt{a_ka_{n-k+1}}\end{pmatrix}.$$

Case 2 若 $a_k=0,a_{n-k+1}\neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ a_{n-k+1} & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{n-k+1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ a_{n-k+1} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Case 3 若 $a_k\neq 0,a_{n-k+1}=0$, 则

$$\begin{pmatrix}a_k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & a_k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

[58] 注意 X 可能不存在, 此时是平凡的情况.

[59] $Y=Y^{m^2}=\left(Y^{m^2}\right)^{m^2}=\cdots$.

Case 4 若 $a_k = a_{n-k+1} = 0$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在将如上的二阶矩阵拼成分块对角矩阵即得过渡矩阵和 A 的 Jordan 标准型.

当 n 为奇数, 有分解

$$\mathbb{C}^n = \left(\bigoplus_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{span}\left\{e_k, e_{n-k+1}\right\} \right) \oplus \operatorname{span}\left\{ e_{\frac{n+1}{2}} \right\}.$$

于是还要讨论:

Case 5

$$\left(1\right)^{-1} \cdot \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right) \cdot \left(1\right) = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right).$$

于是将如上的二阶矩阵和一阶矩阵拼成分块对角矩阵即得过渡矩阵和 A 的 Jordan 标准型.

61. (61.)

(a). 取 $\eta_i \triangleq \begin{cases} e_i + e_{r+i}, & i = 1, 2, \cdots, s \\ e_i, & i = r+s+1, \cdots, n \end{cases}$ 和

$$W \triangleq \operatorname{span}\left\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s, \eta_{r+s+1}, \eta_{r+s+2}, \cdots, \eta_n\right\}.$$

容易验证(23.185)成立且 $\dim W = n - r$.

(b). 我们的目标是证明对任何 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-r$ 维子空间且满足(23.185)都有

$$U \triangleq \operatorname{span}\left\{e_{r+s+1}, e_{r+s+2}, \cdots, e_n\right\} \subset W. \tag{30.120}$$

设 W 的基为

$$\eta_j = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} & a_2^{(j)} & \cdots & a_m^{(j)} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \cdots, m.$$

在不妨设 $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$ 是最简行阶梯, 否则初等行变换即可[60]不妨把 $a_{r+1}^{(i)}, \cdots, a_{r+s}^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, m$ 视为前 s 个分量, 可写出矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{r+1}^{(1)} & \cdots & a_{r+s}^{(1)} & a_1^{(1)} & \cdots & a_r^{(1)} & \cdots \\ a_{r+1}^{(2)} & \cdots & a_{r+s}^{(2)} & a_1^{(2)} & \cdots & a_r^{(2)} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

注意看上述矩阵前 s 列, 只有前 s 行可能有非 0 元. 而后 $m-s$ 行的前 $r+s$ 列全为 0. 故 $\eta_i, i = s+1, \cdots, m$ 是 U 中的元. 而 $m = n - r$, 故 $\eta_i, i = s+1, \cdots, m$ 是 U 中的 $n-r-s$ 个无关向量, 从而(30.120)成立.

现在(30.120)成立, 这显然给出了(23.187).

62. (62.) 若 α, β 线性相关, 则存在 $k \in \mathbb{Q}$ 使得 $\beta = k\alpha$. 则由条件得

$$A\alpha = k\alpha, A^2\alpha = A\beta = -\gamma \Rightarrow A^3\alpha = -A\gamma = -\alpha + \beta = (k-1)\alpha \Rightarrow k^3\alpha = (k-1)\alpha,$$

即 $k^3 - k + 1 = 0$, 因此 k 不是有理数, 矛盾! 所以 α, β 线性无关.

若 α, β, γ 线性相关, 则存在 $a, b \in \mathbb{Q}$ 使得 $\gamma = a\alpha + b\beta$. 由题目条件得

$$A\gamma = \alpha - \beta = aA\alpha + bA\beta = a\beta - b\gamma = a\beta - b(a\alpha + b\beta) \Rightarrow 1 = -ba, -1 = a - b^2,$$

则 $-1 = a - \frac{1}{a^2}$, 这显然没有有理解, 故 α, β, γ 线性无关, 我们完成了证明.

[60]此时行变换得到的向量组秩不变且是变换之前的向量组的线性组合.

63. (63.) 不失一般性, 由于题目条件和要证在正交变换下不改变, 不妨设 $u=e_1$. 也可以理解为我们把 u 扩充为标准正交基, 然后考虑在这个基下的表示矩阵, 此时就有 u 的坐标恰为 e_1. 现在

$$P=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix},$$

因此 P 是正交矩阵, 从而 PQ 也是正交矩阵.

注意到实正交矩阵的特征值都在单位圆且复特征值两两共轭, 因此实正交矩阵行列式为 $(-1)^k$, k 是 -1 特征值的重数. 对 Q, 因为 1 不是特征值且复特征值有偶数个, 所以 $|Q|=(-1)^n$. 现在 PQ 若没有 1 特征值则也应该是 $|PQ|=(-1)^n$. 但是 $|P|=-1$, 这就是一个矛盾! 我们完成了证明.

64. (64.) 首先由例23.64我们知道 $X^2=A$ 一定有解. 注意到条件和结论在相似下不改变, 故不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{J_{r_1}\left(\lambda_1\right),J_{r_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{r_k}\left(\lambda_k\right)\right\},\lambda_i\neq 0,1\leqslant i\leqslant k.$$

必要性: 若和 A 乘法可交换的矩阵不只是 A 的多项式, 则由定理23.23知存在 $i\neq j$ 使得 $\lambda_i=\lambda_j$. 不妨设 $i=1,j=2$, 然后取可逆复矩阵 X_i 使得 $X_i^2=J_{r_i}\left(\lambda_i\right),3\leqslant i\leqslant k$. 再取

$$X_1\sim J_{r_1}\left(\sqrt{\lambda_1}\right),X_2\sim J_{r_2}\left(-\sqrt{\lambda_2}\right)$$

使得

$$X_1^2=J_{r_1}\left(\lambda_1\right),X_2^2=J_{r_2}\left(\lambda_2\right).$$

由命题21.5知齐次线性方程组 $X_1Y+YX_2=0$ 有非 0 解 Y, 从而有无穷多个解 Y. 取

$$X=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}X_1 & Y\\ 0 & X_2\end{pmatrix},X_3,\cdots,X_k\right\},$$

我们有

$$X^2=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}X_1^2 & X_1Y+YX_2\\ 0 & X_2^2\end{pmatrix},X_3^2,\cdots,X_k^2\right\}=A,$$

这就和解有限矛盾!, 因此我们证明了必要性!

充分性: 若和 A 乘法可交换的矩阵只有 A 的多项式, 则由定理23.23知 $\lambda_i\neq\lambda_j,\forall 1\leqslant i<j\leqslant k$. 现在设 X 对应分块得 $X=(X_{ij})$, 则由 $AX=X^3=XA$ 知

$$J_{r_i}\left(\lambda_i\right)X_{ij}=X_{ij}J_{r_j}\left(\lambda_j\right),1\leqslant i,j\leqslant k.$$

结合命题21.5和命题21.2知 $X_{ij}=0,\forall 1\leqslant i<j\leqslant k$ 且存在多项式 $p_i\in\mathbb{C}[\lambda]$ 使得

$$X_{ii}=p_i\left(J_{r_i}\left(\lambda_i\right)\right),1\leqslant i\leqslant k.$$

现在对每个 $1\leqslant i\leqslant k$ 都有 $X_{ii}\sim J_{r_i}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)$ 或者 $X_{ii}\sim J_{r_i}\left(-\sqrt{\lambda_i}\right)$, 不妨设前者有两个解 B_i,C_i. 现在存在可逆复矩阵 P_i 使得 $P_i^{-1}B_iP_i=C_i$, 从而

$$J_{r_i}\left(\lambda_i\right)=C_i^2=P_i^{-1}B_i^2P_i=P_i^{-1}J_{r_i}\left(\lambda_i\right)P_i\Rightarrow P_iJ_{r_i}\left(\lambda_i\right)=J_{r_i}\left(\lambda_i\right)P_i.$$

继续用命题21.2知 P_i 是 $J_{r_i}\left(\lambda_i\right)$ 的多项式, 于是

$$C_i=P_i^{-1}B_iP_i=P_i^{-1}P_iB_i=B_i,$$

从而 $X_{ii}^2=J_{r_i}\left(\lambda_i\right)$ 只有两个不同的解. 现在我们知道 $X^2=A$ 有且只有 2^k 个解, 这就证明了充分性.

65. (65.) 注意到对任何 $m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\operatorname{Im}\left(\varphi^m+\psi^m\right)\subset\operatorname{Im}\varphi^m+\operatorname{Im}\psi^m,$$

因此只需证明存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\dim\operatorname{Im}\left(\varphi^m+\psi^m\right)=\dim\left(\operatorname{Im}\varphi^m+\operatorname{Im}\psi^m\right).\tag{30.121}$$

这等价于作为矩阵有

$$r\left(\varphi^m+\psi^m\right)=r\left(\begin{pmatrix}\varphi^m & \psi^m\end{pmatrix}\right). \tag{30.122}$$

注意到矩阵的秩不随域扩张而改变, 因此不妨设在复数域上考虑. 设 k 足够大并用 φ^k,ψ^k 代替 φ,ψ 从而可不妨设 φ 的 0 特征值对应的 Jordan 块如果存在则是 1 阶的. 现在不妨设

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix},\psi=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix},$$

这里 C 可逆, A_4 和 C 有相同的阶数. 于是交换性给出

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ CA_3 & CA_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & A_2C\\ 0 & A_4C\end{pmatrix}\Rightarrow A_2=A_3=0,CA_4=A_4C.$$

于是要找一个 $m\in\mathbb{N}$ 使得(30.122)成立则只需找一个 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$r\left(\begin{pmatrix}A_1^m & 0\\ 0 & C^m+A_2^m\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & A_1^m & 0\\ 0 & C^m & 0 & A_2^m\end{pmatrix}\right). \tag{30.123}$$

对任何 $m\in\mathbb{N}$, 初等变换有

$$\begin{pmatrix}A_1^m & 0\\ 0 & C^m+A_2^m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_1^m & 0\\ 0 & I+\left(C^{-1}A_2\right)^m\end{pmatrix},$$

以及

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & A_1^m & 0\\ 0 & C^m & 0 & A_2^m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & A_1^m & 0\\ 0 & I & 0 & A_2^m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & A_1^m & 0\\ 0 & I & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & A_1^m & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\end{pmatrix}.$$

取 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\left(C^{-1}A_2\right)^m$ 没有特征值 -1, 则 $I+\left(C^{-1}A_2\right)^m$ 可逆, 这就得到了(30.123), 从而我们证明了(30.121).

66. (66.) 注意到

$$\begin{aligned}AA^T+A+A^T&=(A+E)\left(A^T+E\right)-E;\\ A^TA+A+A^T&=\left(A^T+E\right)(A+E)-E.\end{aligned}.$$

由定理23.20我们知道

$$\left(A^T+E\right)(A+E)-E,(A+E)\left(A^T+E\right)-E$$

有相同的特征值, 因此 AA^T+A+A^T 和 A^TA+A+A^T 有相同的特征值, 所以它们合同.

67. (67.) 注意到逆矩阵是原矩阵的多项式21.11, 我们知道(23.188)本质上是关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的线性方程组, 因此其存在性不随域扩张而改变, 故不妨设 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. 由于相似是同一个线性变换在不同基下的表示矩阵, 故不妨设

$$T=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\mu_1\right),J_{n_2}\left(\mu_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\mu_s\right)\right\}.$$

于是(23.188)变成

$$\sum_{k=1}^{n}a_kJ_{n_j}^{-1}\left(\mu_j-\lambda_k\right)=I_{n_j},j=1,2,\cdots,s.$$

由命题21.2可将上述方程组转化为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\mu_j-\lambda_k}=1,\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\left(\mu_j-\lambda_k\right)^i}=0,j=1,2,\cdots,s,i=2,3,\cdots,n_j.$$

设 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{z-\lambda_k}$, 方程组等价于

$$f\left(\mu_j\right)=1,f^{(i)}\left(\mu_j\right)=0,j=1,2,\cdots,s,i=1,2,\cdots,n_j-1. \tag{30.124}$$

这里合计 n 个条件, 于是由 Hermite 插值定理11.1, 我们知道存在 $n-1$ 次复多项式 p 使得

$$p^{(i)}\left(\mu_j\right)=\frac{d^i\left[(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)\right]}{dz^i}|_{z=\mu_j},j=1,2,\cdots,s,i=0,1,2,\cdots,n_i-1.$$

考虑 $f(z)=\frac{p(z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)}$ 即可得到 $a_k,k=1,2,\cdots,n$. 我们对每个 $j=1,2,\cdots,s$ 归纳证明(30.124). 固定 j, 当 $i=0$, 这是显然的, 假设结果对小于等于 $i-1$ 成立, 我们有

$$\begin{aligned}p^{(i)}(\mu_j)&=\sum_{k=0}^{i}C_i^k f^{(i-k)}(z)|_{z=\mu_j}\frac{d^k\left[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)\right]}{dz^k}|_{z=\mu_j}\\&=f(\mu_j)\frac{d^i\left[(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)\right]}{dz^i}|_{z=\mu_j}+f^{(i)}(\mu_j)(\mu_j-\lambda_1)(\mu_j-\lambda_2)\cdots(\mu_j-\lambda_n)\\&=p^{(i)}(\mu_j)+f^{(i)}(\mu_j)(\mu_j-\lambda_1)(\mu_j-\lambda_2)\cdots(\mu_j-\lambda_n),\end{aligned}$$

即得 $f^{(i)}(\mu_j)=0$, 这就证明了(14.19).

68. (68.) 若 $A^2B=A$, 由条件, 我们有

$$x\in\ker B\Rightarrow 0=A^2Bx=Ax\Rightarrow x\in\ker A\Rightarrow\ker B\subset\ker A.$$

由秩相等可得

$$\dim\ker B=\dim\ker A\Rightarrow\ker A=\ker B.$$

取 $\ker A$ 的一组基扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 则 A,B 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&A_1\\0&A_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&B_1\\0&B_2\end{pmatrix}.$$

注意到 $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$ 列满秩, 于是我们有

$$A^2B=A\Rightarrow\begin{pmatrix}0&A_1A_2B_2\\0&A_2^2B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&A_1\\0&A_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}A_2B_2=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\Rightarrow A_2B_2=E,$$

从而

$$B^2A=\begin{pmatrix}0&B_1B_2A_2\\0&B_2^2A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&B_1\\0&B_2\end{pmatrix}=B.$$

反过来当 $B^2A=B$, 我们仍有 $A^2B=A$, 这就完成了证明.

69. (69.)

(a). 显然 $\operatorname{rank}(M)>0$, 并且 $[\operatorname{tr}(M)]^2\leqslant 25$, $\frac{25}{5+2\sqrt{6}}<3$, 只需分别考虑 $\operatorname{rank}(M)=1,2$ 的情形, 此时我们将充分利用 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ 来估计对角线的和.

对于 $\operatorname{rank}(M)=1$:

由矩阵排列形状知此时必然有

$$|\operatorname{tr}(M)|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+|b_1|+|b_2|\leqslant\sqrt{3}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

两边平方即得.

对于 $\operatorname{rank}(M)=2$:

我们只需证明

$$|\operatorname{tr}(M)|\leqslant 2+\sqrt{6}.\tag{30.125}$$

事实上如果 M 的三阶顺序主子式的对角线是 a_1,a_2,a_3 的排列情形, 则由 Cauchy 不等式得

$$|\mathrm{tr}M|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+|b_i|+|b_j|\leqslant\sqrt{3}+2\leqslant 2+\sqrt{6},\ i,j\in\{1,2\}.$$

如果 M 的三阶顺序主子式的对角线是 a_1,a_2,a_3 中某个数出现了两次的情形, 则类似的由 Cauchy 不等式得

$$|\mathrm{tr}M|\leqslant 2|a_{i'}|+|a_{j'}|+|b_i|+|b_j|\leqslant\sqrt{5}+2\leqslant 2+\sqrt{6},\ i,j\in\{1,2\},i',j'\in\{1,2,3\}.$$

如果 M 的三阶顺序主子式的对角线是三个相同元，由轮换对称，只需考虑如下情况

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{30.126}$$

此时

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_1 + a_2 + a_3),$$

以及

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_1 - a_2a_3\right)(a_1 + a_2 + a_3).$$

注意基本不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca,$$

且等号成立的充要条件是 $a = b = c$.

显然如果(30.126)中某个矩阵的行列式为 0, 则只需考虑下述情况:

当 $a_1 = a_2$ 或者 $a_1 = a_3$, 则 $|a_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, 于是

$$\operatorname{tr}(M) \leqslant 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + 2 < 2 + \sqrt{6}.$$

当 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, 我们由

$$(-x - y)^2 + x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x| \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}}$$

知

$$\operatorname{tr}(M) \leqslant 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 2 = 2 + \sqrt{6},$$

即仍然有不等式(30.125)成立.

现在我们完成了不等式的证明.

(b). 奇数阶矩阵必有实特征值, 记对应的实特征值和特征向量为 λ, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$.

我们不妨设 $|x_1| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} |x_i| > 0$, 显然

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_1x_4 + b_2x_5 = \lambda x_1,$$

于是

$$|\lambda| \leqslant |a_1| + |a_2|\frac{|x_2|}{|x_1|} + |a_3|\frac{|x_3|}{|x_1|} + |b_1|\frac{|x_4|}{|x_1|} + |b_2|\frac{|x_5|}{|x_1|}.$$

由 cauchy 不等式得

$$|\lambda| \leqslant \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

70. (70.) 注意到

$$x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \overline{x^*Ax} = x^*Ax, \forall x \in \mathbb{C}^n \Rightarrow x^*(A^* - A)x = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

取 $x = e_i$, 则得 $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$. 取 $x = e_i + e_j$ 得

$$\overline{a_{ji}} - a_{ij} + \overline{a_{ij}} - a_{ji} = 0.$$

取 $x=e_i+\sqrt{-1}e_j$ 得

$$-\sqrt{-1}\left(\overline{a_{ji}}-a_{ij}\right)+\sqrt{-1}\left(\overline{a_{ij}}-a_{ji}\right)=0.$$

现在就得

$$\overline{a_{ij}}-a_{ji}=0,\forall i,j=1,2,\cdots,n,$$

即 $A=A^*$.

对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 取 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda I+A+A^*$ 是半正定矩阵, 我们有 $\varphi\left(\lambda I+A+A^*\right)=\lambda\varphi\left(I\right)+\varphi\left(A\right)+\varphi\left(A^*\right)$ 也是半正定矩阵. 故

$$\lambda\varphi\left(I\right)+\varphi\left(A\right)+\varphi\left(A^*\right)=\left[\lambda\varphi\left(I\right)+\varphi\left(A\right)+\varphi\left(A^*\right)\right]^*=\lambda\varphi\left(I\right)+\left[\varphi\left(A\right)\right]^*+\left[\varphi\left(A^*\right)\right]^*.$$

从而

$$\varphi\left(A\right)+\varphi\left(A^*\right)=\left[\varphi\left(A\right)\right]^*+\left[\varphi\left(A^*\right)\right]^*,\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{30.127}$$

用 $\sqrt{-1}A$ 替换 A 得

$$\sqrt{-1}\varphi\left(A\right)-\sqrt{-1}\varphi\left(A^*\right)=-\sqrt{-1}\left[\varphi\left(A\right)\right]^*+\sqrt{-1}\left[\varphi\left(A^*\right)\right]^*,\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n},$$

即

$$\varphi\left(A\right)-\varphi\left(A^*\right)=-\left[\varphi\left(A\right)\right]^*+\left[\varphi\left(A^*\right)\right]^*,\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{30.128}$$

(30.127)减(30.128)即得

$$\varphi\left(A^*\right)=\varphi^*\left(A\right),\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

71. (71.) 由加边行列式23.9.4得(23.190)等价于

$$\alpha^TB^*\alpha\neq0, \tag{30.129}$$

这里 $*$ 表示伴随. 方程组(23.189)可以改写为

$$\begin{cases}\alpha^Tx=0\\ x^TBx=0\end{cases}. \tag{30.130}$$

α 扩大倍数不影响结论, 故不妨设 α 是单位向量. 因为伴随矩阵是原矩阵的多项式21.11, 所以可以做正交变换并从而不妨设 $\alpha=e_1$. 现在设 B 去掉第一行第一列的矩阵为 $B',x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, 则(30.129)变为 $\det B'\neq0$. (30.130)变为 $\left(x'\right)^TB'x'=0$. 此时若(30.130)只有 0 解[61], 则 B' 必然正定或者负定, 从而(30.129)成立, 这就完成了证明.

72. (72.) 设 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, 则对 $g:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto PXP^T$, 我们有

$$g^{-1}\circ\varphi\circ g\left(X\right)=P^{-1}A\left(PXP^T\right)^TA^TP^{-T}=\left(P^{-1}AP\right)X^T\left(P^{-1}AP\right)^T,X\in\mathbb{C}^{n\times n}.$$

因此可以不妨设 A 为相似标准型.

当 A 可对角化, 不妨设 $A=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$, 则 $\varphi\left(E_{ij}\right)=\lambda_i\lambda_jE_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$, 因此 φ 可对角化.

当 A 不可对角化, 取 $P=\left\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right\}$ 是可逆矩阵并使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}\left(\lambda_1\right),J_{n_2}\left(\lambda_2\right),\cdots,J_{n_s}\left(\lambda_s\right)\right\},n_1>1.$$

断言 $\left\{\alpha_i\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_i^T:1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\right\}$ 线性无关.

设 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}c_{ij}\left(\alpha_i\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_i^T\right)=0$, 则记 $C=\left(c_{ij}\right),c_{ij}=0,1\leqslant j<i\leqslant n$, 我们有

$$PCP^T+PC^TP^T=P\left(C+C^T\right)P^T=0\Rightarrow C+C^T=0\Rightarrow C=0,$$

[61] 注意介值性.

这就证明了 $\left\{\alpha_i\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_i^T:1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\right\}$ 线性无关. 注意到

$$\varphi\left(\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_1\alpha_1^T\right)=\lambda_1^2\left(\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_1\alpha_1^T\right);$$

$$\varphi\left(\alpha_1\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_1^T\right)=\lambda_1\left(\alpha_1\alpha_{j-1}^T+\alpha_{j-1}\alpha_1^T\right)+\lambda_1^2\left(\alpha_1\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_1^T\right),2\leqslant j\leqslant n_1;$$

$$\varphi\left(\alpha_i\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_i^T\right)=\left(\alpha_{i-1}\alpha_{j-1}^T+\alpha_{j-1}\alpha_{i-1}^T\right)+\lambda_1\left(\alpha_{i-1}\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_{i-1}^T+\alpha_i\alpha_{j-1}^T+\alpha_{j-1}\alpha_i^T\right)+\lambda_1^2\left(\alpha_i\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_i^T\right),$$

这里最后一行 i,j 的范围是 $2\leqslant i\leqslant j\leqslant n_1$.

于是 $U=\operatorname{span}\left\{\alpha_i\alpha_j^T+\alpha_j\alpha_i^T:1\leqslant i\leqslant j\leqslant n_1\right\}$ 是 $\varphi-$ 不变子空间且 $\varphi|_U$ 在基

$$\left\{\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_1\alpha_1^T,\cdots,\alpha_1\alpha_{n_1}^T+\alpha_{n_1}\alpha_1^T,\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_2\alpha_2^T,\cdots,\alpha_2\alpha_{n_1}^T+\alpha_{n_1}\alpha_2^T,\cdots,\alpha_{n_1}\alpha_{n_1}^T+\alpha_{n_1}\alpha_{n_1}^T\right\}$$

下的矩阵为对角线为 λ_1^2 的上三角矩阵且非对角矩阵. 由命题23.1知 φ 不可对角化. 我们完成了证明.

73. (73.) 实对称矩阵的平方[62]一定半正定知 A^2+B^2 是半正定矩阵, 因此所有特征值非负. 而反对称矩阵的特征值是 0 或者纯虚数21.16知 C^2 特征值为 0 或者负数. 现在 C 特征值全为 0, 从而考虑正交相似标准型得 $C=0$. 现在 $A^2+B^2=0$ 得 $A^2=B^2=0$, 从而 $A=B=0$.

74. (74.) 由实正规矩阵的正交相似标准型23.25, 我们不妨设

$$A=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix}&&&\\&&\ddots&&\\&&&\begin{pmatrix}\cos\theta_s&-\sin\theta_s\\\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

或者

$$A=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix}&&&\\&\ddots&&\\&&\begin{pmatrix}\cos\theta_s&-\sin\theta_s\\\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

这里 $\theta_i\in[0,2\pi),i=1,2,\cdots,s$. 于是对应的取

$$B=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_1}{2}&-\sin\frac{\theta_1}{2}\\\sin\frac{\theta_1}{2}&\cos\frac{\theta_1}{2}\end{pmatrix}&&&\\&&\ddots&&\\&&&\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_s}{2}&-\sin\frac{\theta_s}{2}\\\sin\frac{\theta_s}{2}&\cos\frac{\theta_s}{2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

或者

$$B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_1}{2}&-\sin\frac{\theta_1}{2}\\\sin\frac{\theta_1}{2}&\cos\frac{\theta_1}{2}\end{pmatrix}&&&\\&\ddots&&\\&&\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_s}{2}&-\sin\frac{\theta_s}{2}\\\sin\frac{\theta_s}{2}&\cos\frac{\theta_s}{2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

直接验算就有 $B^2=A$.

笔记 这里构造的想法就是旋转, 即 $\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix}$ 表示旋转 θ_1. 那么旋转 $\frac{\theta_1}{2}$ 两次就是旋转 θ_1.

[62]特征值非负.

75. (75.) 设 $A=(a_{ij})$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}+2,i,j=1,2,\cdots,n. \tag{30.131}$$

因为 A 元素为 $0,1$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=3,i=1,2,\cdots,n\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=3,i=1,2,\cdots,n.$$

于是 $AJ=3J$, 从而 3 是 A 特征值.

注意到 $J=1_n1_n^T,1_n^T1_n=n$. 由推论21.1知 J 特征值为 $n,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1个}$. 于是 AA^T 特征值是 $1+2n,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1个}$.

继续由推论21.1知 A^TA 特征值和 AA^T 相同. 由命题21.15知

$$\frac{1_n^TA^TA1_n}{1_n^T1_n}=9\Rightarrow1+2n\geqslant9\Rightarrow n\geqslant4.$$

当 $n=4$, 由(30.131)的 $i=j$ 的情况知 A 每行有 3 个 1, 1 个 0, 的 $i\neq j$ 的情况知 A 每行的 0 位置不同. 显然这给出了 A 的每列有 3 个 1, 1 个 0 且每列的 0 位置不同, 从而 $A^TA=E_n+2J$.

当 $n>4$, 此时由(30.131)知矩阵 A 每行有 3 个 1, $n-3$ 个 0 且任意两行有且只有两个 1 为于同一列.

交换行列显然不应矩阵元素的摆放满足上述规律, 不妨设 A 的第一行为 $(1,1,1,0,\cdots,0)$. 然后继续不妨设 A 第二行为 $(0,1,1,1,0,\cdots,0)$. 容易知道 A 剩下的 $n-2$ 必有一行第一个元素非 0, 故不妨设 A 第三行为 $(1,0,1,1,0,\cdots,0)$. 此时后面每一行的前四个元素都会形如 $(1,1,0,1,0,\cdots,0)$, 从而只能有 $n=4$.

76. (76.) 注意到初等变换 $(AB,A)\to(0,A)$, 我们有

$$r\left((AB,A)\right)=r\left((0,A)\right)=r\left(A\right)=r\left(AB\right).$$

由线性方程组和系数矩阵秩的关系知 $ABX=A$ 有解 C.

考虑 $PAQQ^{-1}BP^{-1},Q^{-1}BP^{-1}PAQ$ 可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}E_r&0_{r\times(n-r)}\\0_{(m-r)\times r}&0_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix},B_1\in\mathbb{C}^{r\times r},B_3\in\mathbb{C}^{(n-r)\times r},$$

这里 B 的分块和 A 对应. 于是直接计算有

$$AB=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\0&0\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}B_1&0\\B_3&0\end{pmatrix}.$$

注意到 $(AB)^2=AB$ 得 $B_1^2=B_1,B_1B_2=B_2$. 于是

$$r=r\left(A\right)=r\left((B_1,B_2)\right)=r\left((B_1,B_1B_2)\right)=r\left((B_1,0)\right)=r\left(B_1\right).$$

现在 B_1 可逆且幂等可对角化知 $B_1=E_r$. 由分块矩阵初等变换和相似的关系21.5, 让 BA 第二行减去 B_2 倍第一行并让第一列加上 B_2 倍第二列得 $BA\sim\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$, 这就证明了 BA 是幂等矩阵.

77. (77.) 设可逆矩阵 T,S 使得

$$TAS=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

于是取[63] $P=ST$ 得

$$APA=T^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}S^{-1}STT^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}S^{-1}=A,$$

从而 $r\left(A\right)=r\left(A^2\right)$. 若 A 不可逆, 则考虑有理标准型得

$$A\sim\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix},$$

[63] 即 A 的一个广义逆.

这里 C 可逆. 由于题目在相似下不改变, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

对应分块的取可逆矩阵 $\begin{pmatrix}P_1&P_2\\P_3&P_4\end{pmatrix}$ 使得 P_1 不可逆. 这是可以做到的, 我们取法放到最后. 于是

$$r(C)>r(P_1)\geqslant r(CP_1C)=r\left(\begin{pmatrix}CP_1C&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1&P_2\\P_3&P_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

$$=r\left(\begin{pmatrix}C^2&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\left(C^2\right)=r(C),$$

这就是一个矛盾! 故 A 可逆.

来看取法, 设

$$P_1\in\mathbb{C}^{r\times r},P_2\in\mathbb{C}^{r\times(n-r)},P_3\in\mathbb{C}^{(n-r)\times r},P_4=E_{n-r}\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)},$$

则

$$\begin{vmatrix}P_1&P_2\\P_3&P_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}P_1-P_2P_3&0\\P_3&E_{n-r}\end{vmatrix}=|P_1-P_2P_3|.$$

取 $P_2P_3=E_r$ 且 P_1 有特征值 0 但没有特征值 1 即可完成构造.

78. (78.)

(a). 对任何 V 上的正交变换 T, 我们有

$$\left(T\circ\sigma\circ T^T\right)(\alpha)=\alpha-2(T\eta,\alpha)T\eta,\forall\alpha\in V.$$

于是可选取 T 使得 $T\eta=e_1$. 换言之, 也就是不妨设技巧: 我们把 η 扩充为一个标准正交基, 此时的坐标下 $\eta=e_1$, 从而可以不妨设 $\eta=e_1$.

现在直接计算可以得到表示矩阵

$$\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

显然这是正交矩阵.

(b). 显然, 行列式为 -1.

(c). 由定理23.25知实正交矩阵的实特征值代数重数和几何重数相等. 由于 $\dim V_{\lambda_0}=n-1$, 所以 ρ 有 $n-1$ 个特征值 1. 因为实矩阵的复特征值成对出现和实正交矩阵特征值模长为 1, 我们知道 ρ 的另外一个特征值为 -1. 现在 $V=V_1\oplus V_{-1}$, 所以在 V_1,V_{-1} 的标准正交基下 ρ 有表示矩阵

$$\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

因此我们证明了 ρ 是镜面反射.

79. (79.) 由定理23.20, 只需证明存在 n 阶矩阵 $B\neq0$ 使得 AB 幂零.

考虑等价标准型可不妨设 $A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},r>1$, 则取 r 阶非 0 幂零矩阵 C, 则 $B=\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}$ 为所求.

80. (80.) 设

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i,q(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i,F(x,y)=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant2n-2,i,j\in\mathbb{N}}c_{ij}x^iy^j.$$

代入得

$$0=F\left(p\left(t\right),q\left(t\right)\right)=\sum_{m=0}^{n(2n-2)}d_{m}t^{m}.$$

注意到 $d_m=0,m=0,1,2,\cdots,n\left(2n-2\right)$ 是关于 $\{c_{ij}\}$ 的齐次线性方程组. 注意到这是有 $n(2n-1)$ 个未知数的线性方程组, 合计有 $n(2n-2)+1$ 个方程, 于是未知数个数大于方程个数, 因此必然存在非 0 解, 这就证明了 F 存在性.

81. (81.)

注意

$$x^{T}\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}x=\begin{vmatrix}u_1\left(x\right)&u_2\left(x\right)\\u_3\left(x\right)&u_4\left(x\right)\end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x^{T}\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}x=u_1\left(x\right)u_4\left(x\right)-u_2\left(x\right)u_3\left(x\right)$$

$$\Leftrightarrow x^{T}\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}x=x^{T}\alpha\beta^{T}x-x^{T}\gamma\delta^{T}x,$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是四维列向量.

注意到

$$r\left(\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}\right)=3,r\left(\alpha\beta^{T}-\gamma\delta^{T}\right)\leqslant 2,$$

我们知道

$$\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}=\alpha\beta^{T}-\gamma\delta^{T}$$

无解.

如果存在 4 阶反对称矩阵 T 使得

$$A=\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}-T$$

是秩不超过 2 矩阵, 那么由定理23.9知 A 可以拆分为不超过两个秩 1 矩阵之和, 从而存在 $A=\alpha\beta^{T}-\gamma\delta^{T}$,

注意到 $x^TTx=0$, 此时就得到了对任何 4 维列向量都有(23.191). 这里 T 取法不唯一, 例如可取

$$T=\begin{pmatrix}2&0&2&4\\0&2&4&2\\2&4&2&0\\4&2&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-\frac{3}{2}&1-\sqrt{\frac{17}{2}}&\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{17}{2}}\\\frac{3}{2}&2&\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{17}{2}}&3-\sqrt{\frac{17}{2}}\\3+\sqrt{\frac{17}{2}}&\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{17}{2}}&2&\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{17}{2}}&1+\sqrt{\frac{17}{2}}&-\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}.$$

82. (82.) 显然如此定义的 V 是复数域上的线性空间. 由有理标准型, 我们不妨设

$$T=\operatorname{diag}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}_{\frac{n}{2}\text{个}}\right\}.$$

注意到

$$T\left(e_{2k}\right)=-e_{2k-1},k=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

以及 $\left\{e_{2k},-e_{2k-1}:k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\right\}$ 是 T 的列向量组, 因此 $\left\{e_{2k},-e_{2k-1}:k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\right\}$ 是 V 作为实数域上线性空间 V 的一组基, 从而

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\left(a_j+ib_j\right)e_{2j}=\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}a_je_{2j}+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}b_jT\left(e_{2j}\right)=0\Leftrightarrow a_j=b_j=0,j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

以及

$$V=\left\{\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\left(a_j+ib_j\right)e_{2j}:a_j,b_j\in\mathbb{R},j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\right\},$$

因此我们证明了 $e_2,e_4,\cdots,e_n$ 是 V 作为复数域上的线性空间的一组基, 从而维数为 $\frac{n}{2}$.

83. (83.) 由 $A-E$ 幂零可知 A 特征值全为 1.

我们先来证明对任何 $k,n\in\mathbb{N}$, 都存在实系数多项式 f 使得

$$\frac{d^j\left(f\left(x^k\right)-x\right)}{dx^j}|_{x=1}=0,j=0,1,2,\cdots,n-1.\tag{30.132}$$

待定实系数多项式

$$f\left(x\right)=a_0+a_1\left(x-1\right)+\cdots+a_{n-1}\left(x-1\right)^{n-1},$$

于是

$$f\left(x^k\right)-x=a_0+a_1\left(x^k-1\right)+\cdots+a_{n-1}\left(x^k-1\right)^{n-1}-x.$$

现在

$$f\left(1\right)-1=0\Rightarrow a_0=1.$$

对 $j\in\mathbb{N}$, 显然 1 是 $\left(x^k-1\right)^j$ 的 j 重根, 即

$$\frac{d^i\left(\left(x^k-1\right)^j\right)}{dx^i}|_{x=1}=0,i=0,1,2,\cdots,j-1,\frac{d^j\left(\left(x^k-1\right)^j\right)}{dx^j}|_{x=1}\neq0.$$

所以

$$\frac{d\left(f\left(x^k\right)-x\right)}{dx}|_{x=1}=0\Rightarrow a_1\left(k\cdot1^{k-1}\right)-1=0\Rightarrow a_1=\frac{1}{k},$$

$$\frac{d^2\left(f\left(x^k\right)-x\right)}{dx^2}|_{x=1}=0\Rightarrow a_1\frac{d^2\left(\left(x^k-1\right)\right)}{dx^2}|_{x=1}+a_2\frac{d^2\left(\left(x^k-1\right)^2\right)}{dx^2}|_{x=1}=0\Rightarrow a_2\text{被唯一确定},$$

依次下去可得 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 被唯一确定. 因此我们证明了存在不超过 $n-1$ 次的实系数多项式 f 使得(30.132)成立.

现在考虑 Taylor 公式并由(30.132)得

$$f\left(x^k\right)-x=c_0\left(x-1\right)^n+c_1\left(x-1\right)^{n+1}+\cdots,$$

即

$$f\left(J_s^k\left(1\right)\right)=J_s\left(1\right),\forall s=1,2,\cdots,n,$$

这里 $J_s\left(1\right)$ 是 s 阶特征值 1 对应的 Jordan 块. 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}J_{n_1}\left(1\right)&&&\\&J_{n_2}\left(1\right)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{n_s}\left(1\right)\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1s}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{ss}\end{pmatrix},B_{ii}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i},i=1,2,\cdots,s,$$

于是由 $A^kB=BA^k$ 得

$$J_{n_i}^k\left(1\right)B_{ij}=B_{ij}J_{n_j}^k\left(1\right)\Rightarrow f\left(J_{n_i}^k\left(1\right)\right)B_{ij}=B_{ij}f\left(J_{n_j}^k\left(1\right)\right)\Rightarrow J_{n_i}\left(1\right)B_{ij}=B_{ij}J_{n_j}\left(1\right),$$

即 $AB=BA$.

84. (84.) 不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1E_{n_1},\lambda_2E_{n_2},\cdots,\lambda_sE_{n_s}\right\},$$

这里 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,s$ 是互不相同的非 0 实数. 对应分块 $B=\left(B_{ij}\right)$, 由 $AB=BA$ 得

$$\lambda_iE_{n_i}B_{ij}=B_{ij}\lambda_jE_{n_j},i,j=1,2,\cdots,s,$$

即 $B_{ij}=0,i\neq j$. 现在由 B 反对称得 $B_{ii},i=1,2,\cdots,s$ 反对称. 又

$$A=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1E_{n_1}+B_{11},\lambda_2E_{n_2}+B_{22},\cdots,\lambda_sE_{n_s}+B_{ss}\right\}$$

得

$$\det A=\prod_{i=1}^s\det\left(\lambda_iE_{n_i}+B_{ii}\right).$$

由命题21.16知反对称矩阵的特征值为 0 或者纯虚数, 所以 $\lambda_iE_{n_i}+B_{ii}$ 实特征值只能有 λ_i, 因此不可能有 0 特征值, 因此我们证明了 $A+B$ 可逆.

85. (85.) 我们来证明

$$\operatorname{Im}A=\left(\ker A\right)^{\perp}.\tag{30.133}$$

首先由 $A^T=AP$ 得 $\operatorname{Im}A^T\subset\operatorname{Im}A$. 注意到 $\dim\operatorname{Im}A^T=\dim\operatorname{Im}A$, 我们有 $\operatorname{Im}A^T=\operatorname{Im}A$. 而

$$x\in\left(\operatorname{Im}A^T\right)^{\perp}\Leftrightarrow\left(x,A^Ty\right)=0,\forall y\Leftrightarrow\left(Ax,y\right)=0,\forall y\Leftrightarrow Ax=0\Leftrightarrow x\in\ker A,$$

即

$$\left(\operatorname{Im}A^T\right)^{\perp}=\ker A\Rightarrow\operatorname{Im}A^T=\left(\ker A\right)^{\perp},$$

这就证明了(30.133).

现在由(30.133)得 $\mathbb{R}^n=\operatorname{Im}A\oplus\ker A$, 然后可分别取 $\operatorname{Im}A,\ker A$ 的标准正交基, 在这组基下 A 有表示矩阵 $\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$, 这里 B 是可逆矩阵, 这就完成了证明.

86. (86.) 注意到对任何 $x\in V$, 我们有

$$\left|\left|Tx\right|\right|^2=\left(Tx,T^2x\right)=\left(T^*Tx,Tx\right)\leqslant\left|\left|T^*Tx\right|\right|\cdot\left|\left|Tx\right|\right|\leqslant\left|\left|T^*\right|\right|\cdot\left|\left|Tx\right|\right|\cdot\left|\left|Tx\right|\right|=\left|\left|Tx\right|\right|^2,$$

即由 Cauchy 不等式取等条件得 T^*Tx,Tx 线性相关. 若 $Tx\neq0$, 设 $T^*Tx=cTx,c\geqslant0$, 则

$$\left|\left|Tx\right|\right|^2=\left(T^*Tx,Tx\right)=c\left|\left|Tx\right|\right|^2\Rightarrow c=1,$$

这就证明了 $T^*Tx=Tx,\forall x\in V$, 即 $T=T^*T$ 是自伴的.

87. (87.) 显然题目结论在合同变换下不变, 所以不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{1,-E_s,0\right\},0\in\mathbb{R}^{(n-s-1)\times(n-s-1)}.$$

设

$$u=\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right),v=\left(v_1,v_2,\cdots,v_n\right),$$

则

$$f\left(u,v\right)=u_1v_1-u_2v_2-\cdots-u_sv_s. \tag{30.134}$$

于是

$$f\left(u,u\right)>0\Rightarrow u_1^2>u_2^2+\cdots+u_s^2.$$

不妨设 $v_1^2-v_2^2-\cdots-v_s^2>0$, 否则(23.192)显然成立.

不妨设 $u_1v_1\geqslant 0$, 否则用 $-v$ 代替 v, 现在由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}u_1^2v_1^2&=\left[\left(\sqrt{u_1^2-u_2^2-\cdots-u_s^2}\right)^2+u_2^2+\cdots+u_s^2\right]\left[\left(\sqrt{v_1^2-v_2^2-\cdots-v_s^2}\right)^2+v_2^2+\cdots+v_s^2\right]\\&\geqslant\left(\sqrt{u_1^2-u_2^2-\cdots-u_s^2}\sqrt{v_1^2-v_2^2-\cdots-v_s^2}+u_2v_2+\cdots+u_sv_s\right)^2.\end{aligned}$$

则

$$u_1v_1-u_2v_2-\cdots-u_sv_s\geqslant\sqrt{u_1^2-u_2^2-\cdots-u_s^2}\sqrt{v_1^2-v_2^2-\cdots-v_s^2},$$

两边平方即可得(23.192)成立.

为考虑取等条件, 不妨设(30.134)仍然成立. 于是[64]

$$f\left(w,v\right)=f\left(w,ru\right),\forall w\in V\Leftrightarrow f\left(w,v-ru\right)=0,\forall w\in V\Leftrightarrow v_i=ru_i,i=1,2,\cdots,s.$$

容易验证 $v_i=ru_i,i=1,2,\cdots,s$ 时也确实有(23.192)的等号成立.

反之, 设(23.192)的等号成立. 刚才的放缩取等充要条件是 Cauchy 不等式等号成立, 则

$$\sqrt{v_1^2-v_2^2-\cdots-v_s^2}=\lambda\sqrt{u_1^2-u_2^2-\cdots-u_s^2},v_i=\lambda u_i,i=2,3,\cdots,n.$$

这可得 $\lambda\geqslant 0,v_1=\pm\lambda u_1$, 于是由 $v_1u_1\geqslant 0$ 知 $v_1=\lambda u_1$. 因此我们知道(23.192)成立的充要条件是存在实数 λ 使得 $v=\lambda u$, 这就完成了证明.

88. (88.) 对 $q\in V$, 我们有

$$q\left(x,y\right)=\left(x,y\right)\begin{pmatrix}c_0&\frac{c_1}{2}\\\frac{c_1}{2}&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

于是我们可以把 q 和矩阵 $\begin{pmatrix}c_0&\frac{c_1}{2}\\\frac{c_1}{2}&c_2\end{pmatrix}$ 等同起来. 设 q 对应的矩阵为 A, 则对 $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 有

$$q\left(ax+by,cx+dy\right)=\left(x,y\right)M^TAM\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

换言之我们记 $S\subset\mathbb{C}^{2\times 2}$ 为对称矩阵全体, 则只需要考虑

$$\widetilde{\varphi_M}:S\to S,A\mapsto M^TAM.$$

设 $P\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 是可逆的, 考虑 $\psi_P:S\to S,A\mapsto P^{-T}AP^{-1}$, 则

$$\psi_P^{-1}\circ\widetilde{\varphi_M}\circ\psi_P\left(A\right)=\left(P^{-1}MP\right)^TA\left(P^{-1}MP\right),$$

[64]这里的原因是 $x^TAy=0,\forall x\Rightarrow Ay=0$.

即可以不妨设 M 为相似标准型, 即要么对角矩阵, 要么一个 Jordan 块. 直接计算有

$$\widetilde{\varphi_M}(E_{11}) = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{\varphi_M}(E_{12}+E_{21}) = \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{\varphi_M}(E_{22}) = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

故 $\widetilde{\varphi_M}$ 在基 $\{E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & ad+bc & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix}$. 当 $b=c=0$, 表示矩阵为 $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & ad & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$, 从而有特征值 $ad = \det M$ 并且当 M 可对角化的时候 φ_M 也可对角化.

而 $\widetilde{\varphi\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}$ 的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ \mu & \mu^2 & 0 \\ 1 & 2\mu & \mu^2 \end{pmatrix}$, 从而有特征值 $\mu^2 = \det M$. 当 $\mu \neq 0$, 表示矩阵属于特征值 μ^2 的特征向量全体为 $\left\{ k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \right\}$, 此时对应二次型为 $\left\{ky^2 : k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}$.

当 $\mu = 0$, 表示矩阵属于特征值 μ^2 的特征向量全体为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : k_1, k_2 \in \mathbb{C}\text{但不全为}0 \right\},$$

此时对应二次型为

$$\left\{2k_2xy + k_1y^2 : k_1, k_2 \in \mathbb{C}\text{但不全为}0\right\}.$$

因为没有三个无关特征向量, 所以 M 不可对角化的时候 φ_M 也不可对角化.

89. (89.) 设可逆矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $C^T\left(A+A^T\right)C = E_n$, 要证不等式等价于两边乘以 $(\det C)^2 > 0$ 还成立, 因此可以不妨设 $A + A^T = E$.

现在 $\left(A - \frac{1}{2}E_n\right)^T = A^T - \frac{1}{2}E_n = \frac{1}{2}E_n - A$, 即 $A - \frac{1}{2}E_n$ 是实反对称矩阵. 由实反对称矩阵特征值为 0 或者纯虚数21.16我们有 A 的特征值形如 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm ai, a \neq 0$, 注意到复特征值成对出现且有

$$\left(\frac{1}{2}+ai\right)\left(\frac{1}{2}-ai\right) = \frac{1}{4}+a^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

我们由行列式为特征值的积得

$$\det(2A) = 2^n \det A \geqslant 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

若等号成立, 则 $A - \frac{1}{2}E_n$ 特征值全为 0. 考虑实正规矩阵的正交相似标准型23.25得 $A = \frac{1}{2}E_n = A^T$ 而矛盾! 我们完成了证明.

90. (90.) 因为非 0 正交向量组线性无关, 我们有

$$r\left(\begin{pmatrix} \gamma^T \\ \beta^T \\ \alpha^T \end{pmatrix}\right) = 3, r\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}\right) = 3.$$

注意到

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta^T \\ \gamma^T \\ \alpha^T \end{pmatrix},$$

于是由秩不等式21.6得

$$3 \geqslant r(A) \geqslant r\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\right) + r\left(\begin{pmatrix}\beta^T \\ \gamma^T \\ \alpha^T\end{pmatrix}\right) - 3 = 3,$$

即 $r(A) = 3$.

把 α, β, γ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 X, 利用 $A\alpha = |\alpha|^2 \gamma, A\beta = |\beta|^2 \alpha, A\gamma = |\gamma|^2 \beta$, 我们有 A 在基 X 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}M & B \\ 0 & C\end{pmatrix}, \text{其中} M = \begin{pmatrix}0 & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\gamma|^2 \\ |\alpha|^2 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

注意到 M 的特征多项式是 $\lambda^3 - |\alpha|^2 |\beta|^2 |\gamma|^2$, 从而 M 有三个不同的特征值, 从而 M 可对角化. 又因为 $r(M) = 3$, 我们有

$$\begin{pmatrix}M & B \\ 0 & C\end{pmatrix} \xrightarrow{-M^{-1}B\text{倍第一列加到第二列}} \begin{pmatrix}M & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix} \Rightarrow r(M) + r(C) = 3 \Rightarrow C = 0.$$

运用分块矩阵相似和初等变换的关系21.5得

$$\begin{pmatrix}M & B \\ 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-M^{-1}B\text{倍第一列加到第二列}} \begin{pmatrix}M & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{M^{-1}B\text{倍第二行加到第一行}} \begin{pmatrix}M & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

即 $A = \begin{pmatrix}M & B \\ 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}M & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 因此 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 但在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

91. (91.) 如果 n 为奇数, 因为幂等矩阵可对角化, 我们有

$$\mathbb{C}^{n\times n} = V_1^{\psi} \oplus V_{-1}^{\psi} = V_1^{\varphi} \oplus V_{-1}^{\varphi},$$

这里

$$V_i^{\psi}, V_i^{\varphi} \text{分别是} \psi, \varphi \text{属于特征值} i \text{的特征子空间}, i = 1, -1.$$

因为 n 是奇数, 可取

$$\dim V_i^{\psi} > \frac{n}{2}, \dim V_j^{\varphi} > \frac{n}{2}, i, j \in \{1, -1\},$$

从而

$$\dim V_i^{\psi} + \dim V_j^{\varphi} > n \Rightarrow V_i^{\psi} \bigcap V_j^{\varphi} \neq \{0\}.$$

于是 $V_i^{\psi} \bigcap V_j^{\varphi}$ 中任一个非 0 向量都是 ψ, φ 的公共特征向量.

如果 n 为偶数且 φ, ψ 有一个是单位矩阵, 则取另外一个矩阵的一个特征向量张成的空间就是公共一维不变子空间.

若如果 n 为偶数且 φ, ψ 都不是单位矩阵, 见例题23.127, 本题是特殊情况.

92. (92.)

Case 1

当 $\alpha = 2$, 则当 $A = I_n$, 则只存在 $\alpha_m = 2$ 使得(23.194)成立. 当 $A \neq I_n$, 则 $x^2 - 2x + 1$ 是 A 的极小多项式, 于是(23.194)成立等价于

$$x^2 - 2x + 1 | x^{2m} - \alpha_m x^m + 1. \tag{30.135}$$

这等价于

$$1^{2m} - \alpha_m \cdot 1^m + 1 = 0, 2m1^{2m-1} - m\alpha_m \cdot 1^{m-1} + 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_m = 2,$$

这就证明了存在唯一的 $\alpha_m \in [-2, 2]$ 使得(23.194)成立.

Case 2

当 $\alpha=-2$, 类似 **Case 1** 的情况.

Case 3

当 $\alpha\in(-2,2)$, 则 $x^2-\alpha x+1=0$ 无重根且根为

$$x_1=\frac{\alpha+i\sqrt{4-\alpha^2}}{2},x_2=\frac{\alpha-i\sqrt{4-\alpha^2}}{2},x_1x_2=1,x_1+x_2=\alpha.$$

实矩阵复特征值必须成对出现, 因此(23.194)成立等价于(30.135)成立.

注意到

$$x_1^{2m}-\alpha_m x_1^m+1=0\Leftrightarrow\alpha_m=x_1^m+x_1^{-m}=x_1^m+x_2^m.$$

因为 $|x_1|=|x_2|=1$, 设 $x_1=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi)$, 我们由欧拉公式有

$$x_1^m+x_2^m=e^{mi\theta}+e^{-mi\theta}=2\cos(m\theta),$$

即 $|\alpha_m|\leqslant 2$. 又

$$x_2^{2m}-\alpha_m x_2^m+1=\overline{x_1^{2m}-\alpha_m x_1^m+1}=0,$$

现在我们证明了(30.135)成立从而(23.194)成立.

93. (93.) 考虑

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}.$$

注意到 μ 是 A 的特征值, 于是对列由圆盘定理23.40得 $|\mu|\leqslant 1$ 或者

$$|\mu+a_1|\leqslant\sum_{j=2}^{n}|a_j|\Rightarrow|\mu|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_j|,$$

于是(23.195)得证.

对行由圆盘定理23.40得 $|\mu|\leqslant|a_n|$, 或者

$$|\mu+a_1|\leqslant 1\Rightarrow|\mu|\leqslant 1+|a_1|,$$

或者

$$|\mu|\leqslant 1+|a_j|,j\in\{2,\cdots,n-1\}.$$

于是(23.196)得证.

94. (94.) 由定理23.17, 存在可逆 $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$D^TAD=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},D^TCD=\begin{pmatrix}\Lambda_1&0\\0&\Lambda_2\end{pmatrix},\Lambda_1\in\mathbb{R}^{r\times r},$$

这里 Λ_1,Λ_2 是对角矩阵. 从而可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}\Lambda_1&0\\0&\Lambda_2\end{pmatrix}.$$

对应分块 $B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}$ 得

$$ABC=\begin{pmatrix}B_1\Lambda_1&B_2\Lambda_2\\0&0\end{pmatrix}.$$

注意到对称性给出 $B_2\Lambda_2=0$. 注意到 B_1,Λ_1 半正定, $B_1\Lambda_1$ 对称.

当 B_1 正定, 则

$$B_1=D_2^TD_2,D_2\in\mathbb{R}^{r\times r}\text{可逆}.$$

于是

$$B_1\Lambda_1 \sim D_2\Lambda_1 D_2^T \cong \Lambda_1,$$

即 $B_1\Lambda_1$ 半正定.

当 B_1 半正定, 则 $B_1+\lambda E$ 对 $\lambda>0$ 正定. 由于 $(B_1+\lambda E)\Lambda_1$ 对称, 故类似刚才的操作可得 $(B_1+\lambda E)\Lambda_1$ 半正定. 令 $\lambda\to 0^+$ 得 $B_1\Lambda_1$ 半正定, 从而 ABC 半正定! 我们完成了证明.

95. (95.) 读者容易验证 T_1, T_2 确实是线性变换.

由带余除法, 我们有 $p_i, r_i\in\mathbb{F}[x]$ 使得 $\deg r_i\leqslant n-1$, 以及

$$x^i f = p_i g + r_i, i=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{30.136}$$

注意到 f,g 首系数为 1, 对比两侧最高次系数可以知道 p_i 是首 1 的 i 次多项式, 由定义可以看到 $\{p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}\}$ 在基 $\left\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\right\}$ 下的矩阵 C 是对角线全为 1 的上三角矩阵. 因此 $\det C=1$ 且 $\{p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}\}$ 线性无关. 将(30.136)改写为

$$p_i g = x^i f - r_i, i=0,1,2,\cdots,n-1,$$

从而

$$T_1\left(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\right)=(r_0,r_1,\cdots,r_{n-1})=-T_2\left(p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}\right)=-T_2\left(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\right)C.$$

于是我们有

$$\det T_1=\det T_2\cdot\det(-C)=(-1)^n\det T_2.$$

96. (96.) 由定理23.36和幂等表明

$$\mathbb{C}^{n\times n}=\ker B_i\oplus\ker(I-B_i), i=1,2,\cdots,k,$$

即

$$r(I-B_i)+r(B_i)=n, i=1,2,\cdots,k.$$

注意到恒等式

$$I-A=(I-B_1)B_2B_3\cdots B_k+(I-B_2)B_3\cdots B_k+\cdots+(I-B_{k-1})B_k+I-B_k,$$

我们由基本秩不等式21.6有

$$\begin{aligned} r(I-A)&\leqslant r(I-B_1)+r(I-B_2)+\cdots+r(I-B_{k-1})+r(I-B_k)\\ &=kn-r(B_1)-r(B_2)-\cdots-r(B_k)\leqslant kn-kr(A)=k(n-r(A)). \end{aligned}$$

97. (97.) 注意到

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}=J_n(a).$$

因为转置矩阵有相同的极小多项式, 我们知道 $\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$ 极小多项式和特征多项式都是 $(\lambda-a)^n$.

由定理23.23知原矩阵的不变子空间恰好为 $n+1$ 个.

98. (98.) 对每个 $i=1,2,\cdots,m$, 因为 A_i 是秩 1 矩阵, 所以存在 $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{C}^n$, 使得 $A_i=\alpha_i\beta_i^\star$, 因此

$$||A_i||^2=\sup_{||z||_{\mathbb{C}^n}=1} z^\star A_i^\star A_i z=\sup_{||z||_{\mathbb{C}^n}=1} z^\star\beta_i\alpha_i^\star\alpha_i\beta_i^\star z=||\alpha_i||_{\mathbb{C}^n}^2\lambda_{\max}(\beta_i\beta_i^\star),$$

因为 CD 和 DC 有完全一样的非 0 特征值, 因此 $||A_i||^2=||\alpha_i||_{\mathbb{C}^n}^2||\beta_i||_{\mathbb{C}^n}^2$.

现在

$$\begin{aligned}
|I_n+A_1+A_2+\cdots+A_m| &= \left|I_n+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}\beta_1^\star\\ \beta_2^\star\\ \vdots\\ \beta_m^\star\end{pmatrix}\right| \\
&= \left|I_n-(-\alpha_1,-\alpha_2,\cdots,-\alpha_m)\begin{pmatrix}\beta_1^\star\\ \beta_2^\star\\ \vdots\\ \beta_m^\star\end{pmatrix}\right| \\
&= \left|I_m-\begin{pmatrix}\beta_1^\star\\ \beta_2^\star\\ \vdots\\ \beta_m^\star\end{pmatrix}(-\alpha_1,-\alpha_2,\cdots,-\alpha_m)\right| \\
&= \left|I_m+\begin{pmatrix}\beta_1^\star\\ \beta_2^\star\\ \vdots\\ \beta_m^\star\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\right|.
\end{aligned}$$

注意对每一组 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m, 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant m, k=1,2,\cdots,m$, 由哈达马不等式

$$\left|\det\left(\begin{pmatrix}\beta_{i_1}^\star\\ \beta_{i_2}^\star\\ \vdots\\ \beta_{i_k}^\star\end{pmatrix}(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k})\right)\right|\leqslant\prod_{\ell=1}^{k}\left(||\beta_{i_\ell}||_{\mathbb{C}^n}\cdot||\alpha_{j_\ell}||_{\mathbb{C}^n}\right),$$

利用矩阵和的行列式公式23.25, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|I_m+\begin{pmatrix}\beta_1^\star\\ \beta_2^\star\\ \vdots\\ \beta_m^\star\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\right| \\
&=|I_m|+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\\ 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}}\left|\begin{pmatrix}\beta_{i_1}^\star\\ \beta_{i_2}^\star\\ \vdots\\ \beta_{i_k}^\star\end{pmatrix}(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_k})\,\hat{I}_m\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right|,
\end{aligned}$$

这里 $\hat{I}_m\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$ 表示 I_m 划去 $i_1,i_2\cdots i_k$ 行和 $j_1,j_2\cdots,j_k$ 列得到的矩阵, 读者可以自行计算发现

$$\det\left(\hat{I}_m\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right)=\begin{cases}1, & i_\ell=j_\ell,\ell=1,2,\cdots,k\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\det\left(I_m+\begin{pmatrix}\beta_1^\star\\ \beta_2^\star\\ \vdots\\ \beta_m^\star\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\right)\right|\\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m}\left|\det\left(\begin{pmatrix}\beta_{i_1}^\star\\ \beta_{i_2}^\star\\ \vdots\\ \beta_{i_k}^\star\end{pmatrix}(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k})\right)\right|\\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m,}\prod_{\ell=1}^{k}\left(||\beta_{i_\ell}||_{\mathbb{C}^n}\cdot||\alpha_{i_\ell}||_{\mathbb{C}^n}\right)\\
&=\prod_{i=1}^{m}\left(1+||\beta_i||_{\mathbb{C}^n}\cdot||\alpha_i||_{\mathbb{C}^n}\right),
\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$\left|\det\left(I_n+A_1+A_2+\cdots+A_m\right)\right|\leqslant\prod_{i=1}^{m}\left(1+||A_i||\right).$$

我们完成了证明.

99. (99.) 由 $|a_m|>\sum\limits_{i=0}^{m-1}|a_i|$, 我们知道

$$|a_mz^m|>\left|-a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_0\right|,\forall|z|=1,$$

从而由儒歇定理知 f 在 $|z|<1$ 有 m 个零点[65]. 现在由 $f(A)=0$ 知 A 的特征值全在单位圆内, 因此结合

$$|z|<1\Rightarrow|2+z|>2-|z|>1$$

知 $A^2,2I_n+A$ 不可能有相同特征值, 因此由命题21.5知 $2X+AX=XA^2$ 在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 只有 0 解.

100. (100.) 注意到

$$\begin{aligned}
AB^3&=A^2BC+2A=B^3C+2A\\
&=ABC^2+2C+2A=AB^3+2C+2A,
\end{aligned}$$

我们有 $C=-A$.

又注意到

$$\begin{aligned}
B^6-4B^3+4I_n&=\left(B^3-2I_n\right)^2=(ABC)^2=(ABA)^2\\
&=(ABC)^2=(ABA)^2=ABA^2BA=AB^4A=A^6=B^6,
\end{aligned}$$

我们有

$$B^3=I_n\Rightarrow A^6=B^6=I_n.$$

101. (101.)

引理 30.7

设 $S,A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定的, 则

$$\lambda_i\left(S^TAS\right)\geqslant\lambda_1^2(S)\,\lambda_i(A),i=1,2,\cdots,n,\tag{30.137}$$

这里 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 表示对应矩阵特征值.

♡

[65]和 $a_mz^m=0$ 在 $|z|<1$ 零点个数相同.

证明 由 Courant-Fischer 的 Hermite 特征值极大极小原理21.9, 对每个 $i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$\begin{aligned}\lambda_i\left(S^TAS\right)&=\max_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=n-i+1}\min_{x\in V\setminus\{0\}}\frac{x^T\left(S^TAS\right)x}{x^Tx}\\&\overset{y=Sx}{=}\max_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=n-i+1}\min_{y\in V\setminus\{0\}}\frac{y^TAy}{y^TS^{-T}S^{-1}y}\\&\overset{\text{瑞利商21.15}}{\geqslant}\lambda_1^2(S)\max_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=n-i+1}\min_{y\in V\setminus\{0\}}\frac{y^TAy}{y^Ty}\\&=\lambda_1^2(S)\lambda_i(A),\end{aligned}$$

这就证明了(30.137).

回到原题, 由引理30.7我们知道

$$\lambda_i\left(\left(E_n+H^T\right)A^TA\left(E_n+H\right)\right)\geqslant\lambda_i\left(A^TA\right),i=1,2,\cdots,n.$$

不失一般性, 由正定矩阵正交相似对角化, 可以假设

$$A^TA=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\},\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

取正交矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$P\left(E_n+H^T\right)A^TA\left(E_n+H\right)P^T$$

也为对角矩阵且特征值大小对应 A^TA 大小排列. 于是

$$P\left(E_n+H^T\right)A^TA\left(E_n+H\right)P^T-A^TA$$

正定, 因此

$$\left(E_n+H^T\right)A^TA\left(E_n+H\right)-P^TA^TAP$$

正定, 这就完成了证明.

102. (102.) 首先, 首 1 实系数三次多项式根 f 都在单位圆周上且必有实根.

f 有单位根 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, 则 $\frac{1}{z}$ 也是 f 的根. 则

$$f(x)=(x\pm1)\left(x^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)x+1\right).\tag{30.138}$$

若 f 只有实根, 则有

$$f(x)=(x+1)^2(x-1),(x+1)^3,(x-1)^3,(x-1)^2(x+1),$$

此时分别对应着(30.138)中的 $z=\pm1$.

当 $f(x)=(x+1)\left(x^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)x+1\right)$, 我们有

$$g(x)=3(x-1)\left(x^2+\frac{4-\left(z+\frac{1}{z}\right)}{3}x+1\right).$$

当 $f(x)=(x-1)\left(x^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)x+1\right)$, 我们有

$$g(x)=3(x+1)\left(x^2-\frac{4+\left(z+\frac{1}{z}\right)}{3}x+1\right).$$

由 $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ 容易证明

$$\left\{z+\frac{1}{z}:|z|=1\right\}=[-2,2],$$

以及对 $t\in[-2,2]$, 我们有 $\left|\frac{4\pm t}{3}\right|\leqslant2$, 故我们证明了 g 的根都在单位圆周上.

103. (103.) 题目条件告诉我们 $A^2+B^2-2AB-BA=0$, 于是有

$$\begin{aligned}&\left(A-\frac{\sqrt5+3}{2}B\right)\left(A+\frac{\sqrt5-3}{2}B\right)=A^2+B^2-\frac{\sqrt5+3}{2}BA+\frac{\sqrt5-3}{2}AB\\&=2AB+BA-\frac{\sqrt5+3}{2}BA+\frac{\sqrt5-3}{2}AB=\frac{\sqrt5+1}{2}(AB-BA).\end{aligned}$$

因此[66]

$$\det(AB-BA)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^n\det\left(A-\frac{3}{2}B-\frac{\sqrt{5}}{2}B\right)\cdot\det\left(A-\frac{3}{2}B+\frac{\sqrt{5}}{2}B\right).$$

注意到 $\det(AB-BA)\in\mathbb{Q}$ 以及

$$\det\left(A-\frac{3}{2}B-\frac{\sqrt{5}}{2}B\right)\cdot\det\left(A-\frac{3}{2}B+\frac{\sqrt{5}}{2}B\right)\in\mathbb{Q},$$

我们有 $\det(AB-BA)=0$.

104. (104.) 当 $p=2m,m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\det(A^p+B^p)&=\det\left(\prod_{k=0}^{2m-1}\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m}i}B\right)\right)=\prod_{k=0}^{2m-1}\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m}i}B\right)\\&=\prod_{k=0}^{m-1}\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m}i}B\right)\det\left(A-e^{\frac{\pi+2(2m-1-k)\pi}{2m}i}B\right)\\&=\prod_{k=0}^{m-1}\left[\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m}i}B\right)\overline{\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m}i}B\right)}\right]\\&=\prod_{k=0}^{m-1}\left|\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m}i}B\right)\right|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

当 $p=2m-1\geqslant 3,m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\det(A^p+B^p)&=\det\left(\prod_{k=0}^{2m-2}\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m-1}i}B\right)\right)=\prod_{k=0}^{2m-2}\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m-1}i}B\right)\\&=\det\left(A-e^{\frac{\pi+2(m-1)\pi}{2m-1}i}B\right)\cdot\prod_{k=0}^{m-2}\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m-1}i}B\right)\det\left(A-e^{\frac{\pi+2(2m-2-k)\pi}{2m-1}i}B\right)\\&=\det(A+B)\cdot\prod_{k=0}^{m-2}\left[\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m-1}i}B\right)\overline{\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m-1}i}B\right)}\right]\\&=\det(A+B)\cdot\prod_{k=0}^{m-2}\left|\det\left(A-e^{\frac{\pi+2k\pi}{2m-1}i}B\right)\right|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

105. (105.) 首先由

$$||A(x)-A(0)||=||x-0||$$

得 A 保长度. 于是由

$$(x,y)=\frac{1}{2}\left(||x||^2+||y||^2-||x-y||^2\right)$$

得

$$(A(x),A(y))=(x,y),\forall x,y\in V.$$

现在对 $x,y\in V,a,b\in\mathbb{R}$ 就有

$$(A(ax+by)-aA(x)-bA(y),A(z))=(ax+by-ax-by,z)=0,\forall z\in V.$$

由 A 满射得

$$A(ax+by)=aA(x)+bA(y),$$

故 A 是线性变换.

106. (106.) 不妨设 $V=\mathbb{P}^n$, $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 V' 的一组基, f 度量矩阵是 F, $n\times m$ 矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,

[66]可以验证类似共轭复数的性质.

$\alpha=(A,\xi)c,\ c\in\mathbb{P}^{m+1}$, 则

$$f(x,\alpha)=0,\forall x\in V'\Leftrightarrow a_j^TF\alpha=0,\forall j=1,2\cdots,m\Leftrightarrow A^TF(A,\xi)c=0.$$

又 $A^TF(A,\xi)$ 是 $m\times m+1$ 矩阵，因此线性方程组 $A^TF(A,\xi)c=0$ 必有非 0 解, 我们完成了证明.

107. (107.) 注意到 A 可能的特征值只有 $0,\pm1$ 且可对角化, 我们设

$$Av_i=\lambda_iv_i,\lambda_i\in\{0,1,-1\},v_i\in\mathbb{R}^n,||v_i||=1,i=1,2,\cdots,n,$$

这里 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 线性无关.

当 $\lambda_i=0$, 我们有

$$A^2v_i=A^TAv_i=0.$$

当 $\lambda_i=\pm1$, 我们有

$$v_i^T\left(A^TA-I\right)v_i=\lambda_i^2v_i^Tv_i-v_i^Tv_i=0.$$

由例题23.2和 A^TA-I 半负定得

$$\left(A^TA-I\right)v_i=0\Rightarrow A^TAv_i=v_i.$$

又 $A^2v_i=v_i$, 于是我们有 $A^TA=A^2$, 因此由例题21.18得 $A^T=A$.

108. (108.) 若有 $a\neq0$, 使得 $Aa=\lambda a$, 则有

$$a^\star A^\star Aa=|\lambda|^2a^\star a\leqslant\lambda_1^2a^\star a\leqslant a^\star a.$$

因此若 $\lambda_1=1$, A 的全体复特征值在单位闭圆内, 此时显然有[67]$|E_n-A|\geqslant0$. 下设 $0\leqslant\lambda_1<1$, 考虑 A 的极分解[68]$A=OS$，O 是实正交矩阵,S 是实半正定矩阵. 对任意正交矩阵, 我们有

$$|E_n-A|=|E_n-OS|=\left|E_n-T^{-1}OTT^{-1}ST\right|.$$

因此无妨设 $S=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 注意到

$$|E_n-OS|\geqslant|E_n-S|\Leftrightarrow\left|(E_n-OS)(E_n-S)^{-1}\right|\geqslant1.$$

若有 $a\neq0$, 使得 $(E_n-OS)(E_n-S)^{-1}a=\lambda a$, 整理得[69]$\left((E_n-S)^{-1}-\lambda E_n\right)a=OS(E_n-S)^{-1}a$. 为了估计特征值 λ, 类似一开始的操作[70]我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\left|\frac{1}{1-\lambda_i}-\lambda\right|^2|a_i|^2&=|\left((E_n-S)^{-1}-\lambda E_n\right)a|^2\\&=|OS(E_n-S)^{-1}a|^2=\left|S(E_n-S)^{-1}a\right|^2\\&=\sum_{i=1}^n\left|\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\right|^2|a_i|^2=\sum_{i=1}^n\left|\frac{1}{1-\lambda_i}-1\right|^2|a_i|^2.\end{aligned}$$

这意味着必有某个 i, 使得 $\left|\lambda-\frac{1}{1-\lambda_i}\right|\leqslant\left|1-\frac{1}{1-\lambda_i}\right|$. 因此, 作图或者直接验证就有不等式

$$\Re(\lambda)\geqslant\frac{1}{1-\lambda_i}\geqslant1.$$

此时显然有

$$\left|(E_n-OS)(E_n-S)^{-1}\right|\geqslant1,$$

我们完成了证明.

109. (109.) 不妨设 $A=\mathrm{diag}\{E_p,-E_{n-p}\}$. 注意到

$$\mathbb{R}^n=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}\oplus\mathrm{span}\{e_{p+1},e_{p+2},\cdots,e_n\}.$$

[67]分别考虑实复特征值, 复特征值必成对出现.

[68]定理23.6.

[69]想法即正交矩阵暴露出来方便抵消.

[70]或者两边取模.

设 $V\subset W$ 是 $n-p+1$ 维子空间. 则

$$\dim\left(V\bigcap\mathrm{span}\left\{e_1,e_2,\cdots,e_p\right\}\right)=n-p+1+p-\dim\left(V+\mathrm{span}\left\{e_1,e_2,\cdots,e_p\right\}\right)\geqslant 1,$$

于是存在

$$\alpha\in V\bigcap\mathrm{span}\left\{e_1,e_2,\cdots,e_p\right\}\neq 0,$$

此时 $\alpha^TA\alpha>0$ 就是一个矛盾! 故 W 没有 $n-p+1$ 维子空间. 类似的考虑和 $\mathrm{span}\left\{e_{p+1},e_{p+2},\cdots,e_n\right\}$ 的交知 W 没有 $p+1$ 维子空间, 这就完成了证明.

110. (110.) 由条件等式得 $AB^T-A^TB=cE_n$, 于是

$$cn=\mathrm{tr}\left(AB^T-A^TB\right)=\mathrm{tr}\left(BA^T-A^TB\right)=0\Rightarrow c=0.$$

111. (111.) 因为(23.197), 我们知道存在不全为 0 的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^k\Re z_iA_i+\sqrt{-1}\sum_{i=1}^k\Im z_iA_i\right)\left(\alpha+\sqrt{-1}\beta\right)=0.$$

于是

$$\sum_{i=1}^k\Re z_iA_i\alpha-\sum_{i=1}^k\Im z_iA_i\beta=0,\sum_{i=1}^k\Re z_iA_i\beta+\sum_{i=1}^k\Im z_iA_i\alpha=0.$$

现在就有

$$\sum_{i=1}^k\Re z_i\beta^TA_i\alpha=\sum_{i=1}^k\Im z_i\beta^TA_i\beta\geqslant 0,\sum_{i=1}^k\Re z_i\alpha^TA_i\beta=-\sum_{i=1}^k\Im z_i\alpha^TA_i\alpha\leqslant 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^k\Re z_i\alpha^TA_i\beta=\sum_{i=1}^k\Re z_i\beta^TA_i\alpha=0.$$

从而

$$\sum_{i=1}^k\Im z_i\alpha^TA_i\alpha=\sum_{i=1}^k\Im z_i\beta^TA_i\beta=0.$$

由 A_i 半正定性得

$$\Im z_i>0,i=1,2,\cdots,k\Rightarrow\alpha^TA_i\alpha=\beta^TA_i\beta=0,i=1,2,\cdots,k.$$

由例题23.2得

$$A_i\alpha=A_i\beta=0,i=1,2,\cdots,k.$$

因此对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in\mathbb{R}$ 都有 $\sum\limits_{i=1}^kx_iA_i$ 有非 0 解, 因此我们证明了(23.198).

112. (112.) 考虑可逆矩阵群的阶数

$$\left|\mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Z}_3\right)\right|=\left(3^2-1\right)\left(3^2-3\right)=48.$$

满足条件同余的矩阵 A 等价于其阶为 50 的因子. 拉格朗日定理告诉我们 A 的阶只能是 $50,48$ 的公因子, 即阶只能为 2 或者 1.

对 $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$, 我们需要

$$a^2,d^2\equiv 1\left(\mathrm{mod}3\right),$$

这只能有 $a,d=1,2$, 即 4 个.

对 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 我们需要

$$a^2+bc,bc+d^2\equiv 1\left(\mathrm{mod}3\right),ab+bd,ac+cd\equiv 0\left(\mathrm{mod}3\right).$$

因为 b,c 不全为 0, 所以至少有一个是可逆的, 因此同余方程简化为

$$a^2+bc\equiv 1\,(\mathrm{mod}3)\,,a+d\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)\,.$$

于是 $a=d=0$ 时有 $b=1,c=1$ 或者 $b=2,c=2$. $a=2,d=1$ 时有 $b=0,c=1,2$ 或者 $b=1,2,c=0$. $a=1,d=2$ 时对称的也有 4 种.

现在我们一共有 $4+2+4+4=14$ 种 A 的可能.

113. (113.) 当 $m\geqslant 9$, 取[71]

$$\xi_k=e_{k^2-k+1}\in\mathbb{R}^{90},k=1,2,\cdots,90.$$

我们有包含这 9 个向量的最小不变子空间的一组基是

$$\left\{e_{k^2-k+1},Ae_{k^2-k+1},\cdots,A^{2k-1}e_{k^2-k+1}:k=1,2,3,\cdots,9\right\},$$

即不存在 A 的非平凡不变子空间包含这 9 个向量.

对 $m\leqslant 8$ 个向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_8\in\mathbb{R}^{90}$, 我们由例题23.22知包含 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_8$ 的最小 $A-$ 不变子空间的一个基形如

$$\xi_{i_1},A\xi_{i_1},A^2\xi_{i_1},\cdots,A^{r_{i_1}-1}\xi_{i_1},\xi_{i_2},A\xi_{i_2},A^2\xi_{i_2},\cdots,A^{r_{i_2}-1}\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_k},A\xi_{i_k},A^2\xi_{i_k},\cdots,A^{r_{i_k}-1}\xi_{i_k}.$$

显然 A 在在这组基下的矩阵是不超过 8 个的友块, 这和 A 的有理标准型除去次序唯一矛盾! 因此我们证明了 $m=9$ 为所求.

114. (114.) 注意到

$$U\triangleq\left(\mathrm{span}\left\{v,w\right\}\right)^{\perp},\dim U=8,$$

我们有 $Q|_U=I$. 又 Q 是正交变换, 所以选 U 的一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8$ 扩充为 V 的一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8,\alpha_9,\alpha_{10}$. 在这组基下, 我们有矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}I_8&Q_1\\0&Q_2\end{pmatrix}.$$

因为 Q 是正交的, 所以行向量都是单位向量, 因此 $Q_1=0,Q_2$ 是正交矩阵.

我们在来断言 Q_2 没有实特征值, 这等价于 $Q|_{\mathrm{span}\{v,w\}}$ 没有实特征值. 事实上不妨设 $(v,v)\,,(w,w)=1$, 则我们有

$$Q\left(v\right)=v-2\left(v,w\right)w-2\left(v-2\left(v,w\right)w,v\right)v=-v-2\left(v,w\right)w+4\left|\left(w,v\right)\right|^2v;$$

$$Q\left(w\right)=w-2\left(w,w\right)w-2\left(w-2\left(w,w\right)w,v\right)v=-w+2\left(w,v\right)v,$$

即 $Q|_{\mathrm{span}\{v,w\}}$ 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1+4\left|\left(w,v\right)\right|^2&2\left(w,v\right)\\-2\left(w,v\right)&-1\end{pmatrix},$$

其特征多项式是

$$\lambda^2+\left(2-4\left|\left(w,v\right)\right|^2\right)\lambda+1.$$

现在

$$c\triangleq 2-4\left|\left(w,v\right)\right|^2\in\left(-2,2\right),$$

于是 $\lambda^2+c\lambda+1$ 只有两个共轭复根, 因此 Q_2 没有实特征值.

现在对满足条件的 P, 对应分块得

$$P=\begin{pmatrix}P_1&P_2\\P_3&P_4\end{pmatrix}.$$

[71]其实就是取 C_k 的第一列.

于是由 $P\circ Q=Q\circ P$ 和 Q 没有特征值 1 得

$$\begin{pmatrix}P_1 & P_2\\ Q_2P_3 & Q_2P_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2Q_2\\ P_3 & P_4Q_2\end{pmatrix}\Rightarrow P_2=P_3=0,P_4Q_2=Q_2P_4.$$

再由 Q_2 在 $\mathbb{C}$ 上有两个互不相同特征值且可以对角化, 因此全部可能的 P_4 提供的维数是 2, 全部 P_1 提供的维数是 $8^2=64$. 故所求 P 的维数是 66.

115. (115.) 设 $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, 记

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{100}\end{pmatrix},\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{100}\end{pmatrix}.$$

直接计算得

$$a_{ij}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=\begin{cases}\frac{(x_j-y_j)^2-f^2(\mathbf{x},\mathbf{y})}{f^3(\mathbf{x},\mathbf{y})}, & i=j\\ \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{f^3(\mathbf{x},\mathbf{y})}, & i\neq j\end{cases}.$$

注意到

$$f^2\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=\begin{pmatrix}x_1-y_1 & x_2-y_2 & \cdots & x_{100}-y_{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-y_1\\ x_2-y_2\\ \vdots\\ x_{100}-y_{100}\end{pmatrix}$$

以及

$$\begin{aligned}A\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)&=\frac{1}{f^3\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}\begin{pmatrix}\left(x_1-y_1\right)^2-f^2 & \left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right) & \cdots & \left(x_1-y_1\right)\left(x_{100}-y_{100}\right)\\ \left(x_2-y_2\right)\left(x_1-y_1\right) & \left(x_2-y_2\right)^2-f^2 & \cdots & \left(x_2-y_2\right)\left(x_{100}-y_{100}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(x_{100}-y_{100}\right)\left(x_1-y_1\right) & \left(x_{100}-y_{100}\right)\left(x_2-y_2\right) & \cdots & \left(x_{100}-y_{100}\right)^2-f^2\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{f^3\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}\left[\begin{pmatrix}x_1-y_1\\ x_2-y_2\\ \vdots\\ x_{100}-y_{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-y_1 & x_2-y_2 & \cdots & x_{100}-y_{100}\end{pmatrix}-f^2I_{100}\right]\\ &=-\frac{1}{f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}\left[I_{100}-\frac{1}{f^2}\begin{pmatrix}x_1-y_1\\ x_2-y_2\\ \vdots\\ x_{100}-y_{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-y_1 & x_2-y_2 & \cdots & x_{100}-y_{100}\end{pmatrix}\right],\end{aligned}$$

利用定理23.20和非幂零的秩 1 矩阵可对角化我们知道

$$A\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\sim-\frac{1}{f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}\operatorname{diag}\left\{0,\underbrace{1,1\cdots,1}_{99\text{个}}\right\}.$$

116. (116.) 答案见如何评价 2023 年 8 月 THUSSAT 学科能力综合测试（TACA）？ - Fiddie 的回答 - 知乎.

117. (117.) 我们先考虑 $e^{J_n(\lambda)}=I_n$ 的解.

显然, 命题21.2中的计算要求的多项式 f 可扩充到 e^z, 于是我们有

$$e^{J_n(\lambda)}=\begin{pmatrix} e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & \cdots & \frac{e^{\lambda}}{(n-1)!} \\ & e^{\lambda} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{e^{\lambda}}{1!} \\ & & & e^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

这就告诉我们 $n=1$ 且 $\lambda=0,\pm 2\pi i,\pm 4\pi i,\pm 6\pi i$.

因为显然[72]只需要考虑 A 在复数域的相似标准型有多少个, 不妨设 A 为 Jordan 标准型, 此时 A 必然为对角矩阵且对角元形如 $\lambda=0,\pm 2\pi i,\pm 4\pi i,\pm 6\pi i$. 因为实矩阵复特征值必须成对出现, 所以我们设 A 特征值是

$$\lambda_1,\overline{\lambda_1},\lambda_2,\overline{\lambda_2},\cdots,\lambda_{10},\overline{\lambda_{10}},\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{10}\geqslant 0.$$

现在把 13 个空排成一列, 任取三个空依次插入 a,b,c 使得 a 前面填 $6\pi i$, a,b 之间填 $4\pi i$, b,c 之间填 $2\pi i$, c 之后填 0, 这合计有 $C_{13}^3=286$ 种填法.

118. (118.) 由有理标准型知 n 为偶数且可不妨设

$$A=\operatorname{diag}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}_{\frac{n}{2}\text{个}}\right\},B=(B_{ij}),B_{ii}\in\mathbb{R}^{2\times 2},i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

现在由可交换得

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}B_{ij}=B_{ij}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},i,j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

因此我们有

$$B_{ij}=\begin{pmatrix}s_{ij}&-t_{ij}\\t_{ij}&s_{ij}\end{pmatrix},i,j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

考虑

$$\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^{2\times 2},a+bi\mapsto\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}.$$

容易看到 φ 是一个嵌入[73]且成立

$$\varphi^T(z)=\varphi(\overline{z}),\forall z\in\mathbb{C}.$$

现在考虑

$$\Phi:\mathbb{C}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}\to\mathbb{R}^{n\times n},(z_{ij})\mapsto(\varphi(z_{ij})).$$

容易验证

$$\Phi(CD)=\Phi(C)\Phi(D),\forall C,D\in\mathbb{C}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}.$$

现在对任何 $C\in\mathbb{C}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}$, 容易看到

$$\Phi(C^*)=\Phi^T(C).$$

[72]对于共轭复特征值 $a\pm bi$, 我们在复数域上有

$$\begin{pmatrix}a+bi&0\\0&a-bi\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}.$$

[73]作为域.

于是对酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}$ 我们有

$$\begin{aligned}\det\left(\Phi\left(U^*CU\right)\right)&=\det\left(\Phi\left(U^*\right)\Phi\left(C\right)\Phi\left(U\right)\right)=\det\left(\Phi^T\left(U\right)\Phi\left(U\right)\right)\det\left(\Phi\left(C\right)\right)\\&=\det\left(\Phi\left(U^*\right)\Phi\left(U\right)\right)\det\left(\Phi\left(C\right)\right)=\det\left(\Phi\left(U^*U\right)\right)\det\left(\Phi\left(C\right)\right)\\&=\det\left(\Phi\left(I_n\right)\right)\det\left(\Phi\left(C\right)\right)=\det\left(\Phi\left(C\right)\right).\end{aligned}$$

现在任何复矩阵都可以酉相似上三角化, 即命题23.2, 我们直接取 $C=B$ 并计算特征值发现

$$\det\Phi\left(b\right)=\left|\det B\right|^2\geqslant 0,$$

这就完成了证明.

119. (119.) 显然 A 是实对称的, 因此 A 可相似对角化. 所以只需要计算 A 的所有特征值即可.

矩阵 A 特征多项式为

$$p_n\left(\lambda\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0&0\\-1&\lambda&\ddots&0\\0&\ddots&\lambda&-1\\0&0&-1&\lambda\end{pmatrix}.$$

由三对角行列式, 即定理23.48得

$$p_1\left(\lambda\right)=\lambda-1,p_2\left(\lambda\right)=\lambda^2-\lambda-1,p_n\left(\lambda\right)=\lambda p_{n-1}\left(\lambda\right)-p_{n-2}\left(\lambda\right),n=3,4,\cdots.$$

考虑

$$x^2-\lambda x+1=0\Rightarrow x_1=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2},x_2=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}.$$

Case 1 当

$$\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\Leftrightarrow\lambda=\pm2\Rightarrow x_1=x_2=\pm1,$$

我们有

$$p_n\left(2\right)=1,p_n\left(-2\right)=\left(1+2n\right)\left(-1\right)^n,n=1,2,\cdots.$$

因此 $\lambda=\pm2$ 不是特征根.

Case 2 当 $\lambda\neq\pm2$, 我们有

$$p_n\left(\lambda\right)=\frac{x_2^{n+1}-x_1^{n+1}-x_2^n+x_1^n}{x_2-x_1},n=1,2,\cdots.$$

故

$$\begin{aligned}&p_n\left(\lambda\right)=0\Leftrightarrow\left(1-x_2\right)x_2^n=\left(1-x_1\right)x_1^n,x_2\neq x_1\\&\Leftrightarrow\left(1-x_2\right)x_2^n=\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\frac{1}{x_2^n},x_2\neq x_1\\&\Leftrightarrow x_2^{2n+1}=-1,x_2\neq-1,\end{aligned}$$

现在就能看出矩阵特征值为

$$\lambda=x_1+x_2=\frac{1}{x_2}+x_2=e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n+1}}+e^{-\frac{(2k-1)\pi i}{2n+1}}=2\cos\left(\frac{\left(2k-1\right)\pi}{2n+1}\right),k=1,2,\cdots,n.$$

现在 A 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix}2\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)&&&\\&2\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)&&\\&&\ddots&\\&&&2\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right)\end{pmatrix}.$$

120. (120.) 显然 A 是实对称的, 因此 A 可相似对角化. 所以只需要计算 A 的所有特征值即可. 容易看到

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & 1 & & \end{pmatrix}.$$

注意到 A 的特征多项式为

$$p_{2n-1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & & & -1 & -1 \\ & \ddots & -1 & \iddots & \\ & \iddots & \lambda-1 & & \\ -1 & \iddots & & \ddots & \\ -1 & & & & \lambda \end{vmatrix}, p_{2n}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & & & & -1 & -1 \\ & \ddots & & \iddots & -1 & \\ & & \lambda-1 & -1 & & \\ & \iddots & \iddots & \ddots & & \\ -1 & -1 & & & \ddots & \\ -1 & & & & & \lambda \end{vmatrix}.$$

对每个 p_n, 按最后一列展开并对得到的 $(1,n)$ 元对应的代数余子式的最后一行展开得

$$p_n(\lambda) = \lambda p_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n p_{n-2}(\lambda), n = 3, 4, \cdots.$$

注意到

$$p_1(\lambda) = \lambda - 1, p_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

于是我们知道 A 的特征值和数学类线性代数习题119.的矩阵特征值完全一致.

现在 A 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) & & & \\ & 2\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right) \end{pmatrix}.$$

121. (121.) 充分性显然. 下证必要性.

不失一般性, 假设

$$\beta = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

否则把 β 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的正交基, 并在新的基下求表示矩阵即可.

因为 $\alpha^T\beta > 0$, 我们有 $a_1 a > 0$. 现在可取

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a} & \frac{a_2}{a} & \cdots & \frac{a_n}{a} \\ \frac{a_2}{a} & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n}{a} & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 $c > 0$ 充分大, 利用分块矩阵合同和初等变换的关系21.4, 我们有

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a} & \frac{a_2}{a} & \cdots & \frac{a_n}{a} \\ \frac{a_2}{a} & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n}{a} & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a} & \beta \\ \beta^T & cE_n \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a} & \beta^T \\ \beta & cE_n - \frac{a}{a_1}\beta\beta^T \end{pmatrix}$$

正定, 这就完成了证明.

122. (122.) 因为 $A^2=0$, 所以 A 的 Jordan 标准型是有若干 2 阶块和 1 阶块组成. 因为 2 阶块越多 A 秩越大. 由于 n 为奇数, 因此最多有 $\frac{n-1}{2}$ 个 2 阶 Jordan 块, 所以 $r(A)\leqslant\frac{n-1}{2}$.

现在

$$r(AB-BA)\leqslant r(AB)+r(BA)\leqslant 2r(A)\leqslant n-1<n,$$

这就证明了 $AB-BA$ 不可逆.

123. (123.)$V=\ker f\bigcup\ker g$, 由覆盖定理23.24知 $\ker f,\ker g$ 必有一个为 V, 但这个方法对有限域是不行的.

实际上应该设 $x,y\in V\setminus\{0\}$ 使得 $f(x),g(y)\neq 0$, 然后由条件必有

$$g(x)=f(y)=0.$$

现在

$$0=f(x+y)g(x+y)=f(x)g(y)\neq 0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 f,g 必有一个为 0.

124. (124.) **Step 1**

由命题21.5知道

$$\det\left(\lambda E-A\overline{A}\right)=\det\left(\lambda E-\overline{A}A\right).$$

上式后者可以看成把 $A\overline{A}$ 所有元素取共轭得到的特征多项式, 它应当是原本的特征多项式的系数取共轭, 因此我们证明了 $A\overline{A}$ 有实系数特征多项式.

Step 2

考虑 A 的元素到 $A\overline{A}$ 的特征多项式的判别式的映射 T, 我们知道这个判别式可以由多项式和其导数的结式算得, 因此这个映射[74]是实解析映射. 注意到当 $A=\operatorname{diag}\{1,2,\cdots,n\}$, 我们知道 $T(A)\neq 0$, 于是 T 不能在任何一个开集上恒为 0, 从而任何一个开集都有 A 使得 $T(A)\neq 0$. 注意到结式不为 0 等价于特征多项式无重根, 因此我们证明了存在一个稠子集 $S\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得对任何 $A\in S$ 都有 $A\overline{A}$ 有 n 个互不相同的特征值.

Step 3

设 $A\in S,\lambda\in\mathbb{R}$ 是 $A\overline{A}$ 特征值, $v\in\mathbb{C}^n$ 是对应特征向量且对应 λ 的特征子空间重数为 1. 我们有

$$A\overline{A}A\overline{v}=A\overline{\lambda v}=\lambda A\overline{v},$$

即 $A\overline{v}=rv,r\in\mathbb{C}$, 从而

$$\lambda\overline{v}=\overline{\lambda v}=\overline{A\overline{A}v}=\overline{A}A\overline{v}=r\overline{A}v=r\overline{A\overline{v}}=|r|^2\overline{v},$$

因此我们有

$$\lambda=|r|^2\geqslant 0.$$

Step 4

对 $A\in S$, 因为 $A\overline{A}$ 共轭复特征值成对出现和实特征值非负, 我们自然得到(23.199)成立. 稠密性给出(23.199)对一切 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 成立.

125. (125.)

对考虑 $f'+kf=0,f\in V$, 解微分方程得

$$f(x)=Ce^{-kx}.$$

现在

$$f(x+1)=2f(x)\Rightarrow Ce^{-kx-k}=2Ce^{-kx}\Rightarrow C=0\text{或者}k=-\ln 2.$$

因此当 $k\neq-\ln 2$ 时 L 是单射.

现在对 $g\in V$, f 是 $y'+ky=g$ 的解, 则由 $g(x+1)=2g(x)$ 得 $\frac{f(x+1)}{2}$ 也是 $y'+ky=g$ 的解. 现在为了

[74] A 元素可以分为实部和虚部.

$f(x+1)=2f(x)$, 只需要 $f(1)=2f(0)$, 然后由解的存在唯一性定理即得解 $f\in V$.

解微分方程 $y'+ky=g$ 通解为

$$f(x)=e^{-kx}\left(\int_0^x e^{kt}g(t)\,\mathrm{d}t+C\right),$$

于是为了 $f\in V$, 我们需要

$$f(0)=C, f(1)=e^{-k}\int_0^1 e^t g(t)\,\mathrm{d}t+Ce^{-k}\Rightarrow e^{-k}\int_0^1 e^t g(t)\,\mathrm{d}t+Ce^{-k}=2C,$$

而当 $k\neq-\ln 2$ 时的确存在这样的 C.

至此我们证明了当且仅当 $k\neq-\ln 2$ 时 L 为双射.

126. (126.) 回忆数学类线性代数习题78.中关于镜面反射的知识点, 于是我们要构造的 τ_i 应该是 $\mathbb{Q}$ 上的矩阵且是镜面反射.

对矩阵阶数做归纳, 当 $n=1$ 的时候,

$$(1)=(-1)\cdot(-1),(-1)=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1),$$

这就是一个构造.

假设对 $n-1$ 时命题成立, 当 n 时. 若 σ 没有特征值 1, 由数学类线性代数习题63., 我们可以取一个有理数域的镜面反射 Q, 然后 σQ 有特征值 1. 于是我们不妨设 σ 有特征值 1. 考虑其属于特征值 1 的特征向量 $\alpha\in\mathbb{Q}^n$, 我们有

$$\mathbb{Q}^n=\operatorname{span}\{\alpha\}\oplus(\operatorname{span}\{\alpha\})^{\perp},$$

这里求正交补可以视为解线性方程组, 所以不用担心不是 $\mathbb{R}$ 上喔. 于是 σ 在新的基下形如

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&\sigma'\end{pmatrix},\sigma'\in\mathbb{Q}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

于是由归纳假设, 存在镜面反射 $\tau_1',\tau_2',\cdots,\tau_k'\in\mathbb{Q}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得

$$\sigma'=\tau_1'\cdot\tau_2'\cdot\cdots\cdot\tau_k'.$$

取

$$\tau_j=\begin{pmatrix}1&0\\0&\tau_j'\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^{n\times n},j=1,2,\cdots,k,$$

就有

$$\sigma=\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_k,\dim\ker(\tau_i-I)=n-1,i=1,2,\cdots,k.$$

127. (127.) 对 $\sigma|_W:W\to\sigma(W)$ 用维数公式得(23.200).

对 $\sigma|_{\sigma^{-1}(W)}:\sigma^{-1}(W)\to W$ 用维数公式得

$$\dim\sigma^{-1}(W)=\dim\left(\ker\sigma\bigcap\sigma^{-1}(W)\right)+\dim\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(W)\right)\right).$$

结合 $\sigma\left(\sigma^{-1}(W)\right)\subset W$ 这就证明了(23.201)的右边. 又

$$\begin{aligned}\dim\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(W)\right)\right)&=\dim\left(W\bigcap\mathrm{Im}\sigma\right)\\&=\dim W+\dim\mathrm{Im}\sigma-\dim(W+\mathrm{Im}\sigma)\\&\geqslant\dim W+\dim\mathrm{Im}\sigma-\dim V\\&=\dim W-\dim\ker\sigma\\&=\dim W-\dim\left(\ker\sigma\bigcap\sigma^{-1}(W)\right),\end{aligned}$$

这就证明了了(23.201)的左边.

128. (128.) 对 $t\in\operatorname{End}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k\right)$, 我们考虑线性映射

$$L_t((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=(t(\alpha_1),t(\alpha_2),\cdots,t(\alpha_n)),\forall(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{m\times n}.$$

对任何 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{m\times n},i,j=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$L_t\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)E_{ij}\right)=L_t\left(\left(0,0,\cdots,\underbrace{\alpha_i}_{第j列},\cdots,0\right)\right)$$

$$=\left(0,0,\cdots,\underbrace{t(\alpha_i)}_{第j列},\cdots,0\right)=L\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right)E_{ij}.$$

结合 L_t 线性显然得 $L_t\in W$.

考虑线性映射

$$T:\operatorname{End}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k\right)\to W,t\mapsto L_t.$$

若 $L_t=0$, 则

$$0=L_t\left((\alpha,0,\cdots,0)\right)=\left(t(\alpha),0,\cdots,0\right),\forall\alpha\in\mathbb{R}^m\Rightarrow t=0.$$

即 T 是单射.

对 $L\in W$, 定义线性映射

$$t:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k:\alpha\mapsto L\left((\alpha,0,0,\cdots,0)\right)e_1.$$

对任何 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有

$$L_t\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right)=\left(L\left((\alpha_1,0,0,\cdots,0)\right)e_1,L\left((\alpha_2,0,0,\cdots,0)\right)e_1,\cdots,L\left((\alpha_n,0,0,\cdots,0)\right)e_1\right)$$

$$=\left(L\left((\alpha_1,0,0,\cdots,0)E_{11}\right)e_1,\cdots,L\left(\left(\left(0,\cdots,\underbrace{\alpha_j}_{第j列},\cdots,0\right)E_{j1}\right)e_1,\cdots,L\left(\left(\left(0,0,\cdots,\underbrace{\alpha_n}_{第n列}\right)E_{n1}\right)e_1\right)\right.\right.$$

$$=\left(L\left((\alpha_1,0,0,\cdots,0)\right)E_{11}e_1,\cdots,L\left(\left(\left(0,\cdots,\underbrace{\alpha_j}_{第j列},\cdots,0\right)\right)E_{j1}e_1,\cdots,L\left(\left(\left(0,0,\cdots,\underbrace{\alpha_n}_{第n列}\right)\right)E_{n1}e_1\right)\right.\right.$$

$$=\left(L\left((\alpha_1,0,0,\cdots,0)\right)e_1,\cdots,L\left(\left(\left(0,\cdots,\underbrace{\alpha_j}_{第j列},\cdots,0\right)\right)e_j,\cdots,L\left(\left(\left(0,0,\cdots,\underbrace{\alpha_n}_{第n列}\right)\right)e_n\right)\right.\right.$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(0,\cdots,L\left(\left(\left(0,\cdots,\underbrace{\alpha_j}_{第j列},\cdots,0\right)\right)e_j,\cdots,0\right)\right.$$

$$=\sum_{j=1}^{n}L\left(\left(\left(0,\cdots,\underbrace{\alpha_j}_{第j列},\cdots,0\right)\right)E_{jj}=\sum_{j=1}^{n}L\left((\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)E_{jj}\right)\right.$$

$$=\sum_{j=1}^{n}L\left((0,\cdots,\alpha_j,\cdots,0)\right)=L\left((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right),$$

即 $L=L_t$, 故 T 是满射.

综上所述,

$$\dim T=\dim\operatorname{End}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k\right)=mk.$$

129. (129.) 设

$$B\alpha=\lambda\alpha,\alpha\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\lambda\in\mathbb{C},$$

则

$$0=\sum_{j=0}^{m-1}A^jB^j\alpha=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\lambda^jA^j\right)\alpha,$$

即 α 是 $\sum\limits_{j=0}^{m-1}\lambda^j A^j$ 特征向量. 于是存在 m 次单位根 μ 是 A 的特征值使得 $\sum\limits_{j=0}^{m-1}\lambda^j\mu^j=0$. 显然 $\lambda\mu\neq 1$, 于是

$$0=\sum_{j=0}^{m-1}\lambda^j\mu^j=\frac{1-(\lambda\mu)^m}{1-\lambda\mu}=\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda\mu}\Rightarrow\lambda^m=1,$$

这就证明了证明 B 特征值都是 m 次单位根.

130. (130.) 注意到

$$\left(C+A^{-1}\right)(A+B)=E_n,$$

于是

$$(A+B)C+E_n+BA^{-1}=(A+B)\left(C+A^{-1}\right)=E_n,$$

即

$$(A+B)C=-BA^{-1}=C(A+B),$$

这就完成了证明.

131. (131.) 考虑 φ 的极小多项式

$$m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k},$$

这里 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为互不相同的首一不可约多项式. 于是 φ 有有理标准型

$$\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_k\end{pmatrix},$$

其中每个 A_i 对应的极小多项式恰为 $p_i^{r_i}$, 其对应的 $\varphi-$ 不变子空间为 W_i, 因此我们证明了所求.

132. (132.) 注意到

$$r\left(\begin{pmatrix}A&B\end{pmatrix}\right)=\dim\left(\mathrm{Im}A+\mathrm{Im}B\right).$$

于是不等式(23.202)等价于

$$\dim\left(\mathrm{Im}A\right)+\dim\left(\mathrm{Im}B\right)\geqslant\dim\left(\mathrm{Im}A+\mathrm{Im}B\right)+\dim\left(\mathrm{Im}\left(AB\right)\right).$$

现在

$$\dim\left(\mathrm{Im}A\right)+\dim\left(\mathrm{Im}B\right)=\dim\left(\mathrm{Im}A\bigcap\mathrm{Im}B\right)+\dim\left(\mathrm{Im}\left(AB\right)\right),$$

于是不等式(23.202)要成立, 只需验证

$$\mathrm{Im}AB\subset\mathrm{Im}A\bigcap\mathrm{Im}B.$$

对 $ABx\in\mathrm{Im}AB$, 我们有

$$ABx=A\left(Bx\right)\in\mathrm{Im}A,ABx=B\left(Ax\right)\in\mathrm{Im}B,$$

这就证明了不等式(23.202).

133. (133.) 取

$$a_{ij}=e^{\frac{2\pi(i-1)(j-1)}{n}\sqrt{-1}},i,j=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$\begin{aligned}\left(A^*A\right)_{(i,j)}&=\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ki}}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}e^{\left[\frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n}-\frac{2\pi(k-1)(i-1)}{n}\right]\sqrt{-1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2\pi(k-1)(j-i)\sqrt{-1}}{n}}\overset{\text{等比求和}}{=}\begin{cases}n,&i=j\\0,&i\neq j\end{cases}.\end{aligned}$$

于是

$$A^*A = nI_n \Rightarrow |\det A|^2 = n^n \Rightarrow |\det A| = n^{\frac{n}{2}}.$$

设

$$\det A = n^{\frac{n}{2}} e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi),$$

考虑 $e^{-i\frac{\theta}{n}} A$ 为所求.

134. (134.)

因为可对角化矩阵稠密23.41, 所以我们只需证明在 $\mathbb{C}$ 上可对角化实二阶矩阵 A, 有 $f(A) = f(I)$.

Case 1 若 A 有非实特征值, 则考虑对角化得存在 $\lambda > 0, \theta \in (0, \pi)$ 和可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 使得

$$P^{-1}AP = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

于是

$$f(A) = f\left(P\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P^{-1}\right) = \cdots = f\left(P\lambda^{\frac{1}{2^n}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2^n} & -\sin\frac{\theta}{2^n} \\ \sin\frac{\theta}{2^n} & \cos\frac{\theta}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} f\left(P\lambda^{\frac{1}{2^n}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2^n} & -\sin\frac{\theta}{2^n} \\ \sin\frac{\theta}{2^n} & \cos\frac{\theta}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1}\right) = f\left(PIP^{-1}\right) = f(I).$$

Case 2

设可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 > 0,$$

则

$$f(A) = f\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}\right) = f\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} P^{-1}\right)$$
$$= \cdots = \lim_{n\to\infty} f\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2^n}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2^n}} \end{pmatrix} P^{-1}\right) = f\left(PIP^{-1}\right) = f(I).$$

Case 3

对一般的在 $\mathbb{R}$ 上可对角化矩阵 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, 我们利用 **Case 2** 的情况得

$$f(A) = f\left(A^2\right) = \lim_{t\to 0^+} f\left(A^2 + tE\right) = \lim_{t\to 0^+} f(I) = f(I).$$

现在我们证明了 f 是常值函数.

135. (135.) 利用秩和维数的关系我们有

$$\begin{aligned} & n = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 \\ \Leftrightarrow\ & n = n - \dim\ker A = n - \dim V_1 + n - \dim V_2 \\ \Leftrightarrow\ & n = n - \dim\left(V_1 \bigcap V_2\right) = 2n - \dim V_1 - \dim V_2 \\ \Leftrightarrow\ & \dim V_1 + \dim V_2 = n, \dim\left(V_1 \bigcap V_2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbb{P}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2. \end{aligned}$$

136. (136.) 设 m 是 X 的极小多项式, 题目条件意味着 $m|f^2, m|g^2$.

设

$$m = (x-a)^{r_1}(x-b)^{r_2}(x-c)^{r_3}, 1 \leqslant r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 3,$$

目标是找不全为 0 的 λ_1, λ_2 使得 $m|(\lambda_1 f + \lambda_2 g)$.

$m|f^2, m|g^2$ 给出了无论如何取 λ_1, λ_2 都有 $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ 有 m 全部零点 (不计重数).

如果 m 没有三重零点, 注意到 m 至多只有一个二重零点, 不妨设为 a. 显然存在不全为 0 的 λ_1, λ_2 使得

$$\lambda_1 f'(a) + \lambda_2 g'(a) = 0,$$

这就证明了 $m | (\lambda_1 f + \lambda_2 g)$.

如果 m 有三重零点, 不妨设为 a, 那么 f, g 必然以 a 为至少二阶零点. 又存在不全为 0 的 λ_1, λ_2 使得

$$\lambda_1 f''(a) + \lambda_2 g''(a) = 0,$$

这就证明了 $m | (\lambda_1 f + \lambda_2 g)$.

现在多项式 $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ 里面带入 X 我们就完成了证明.

137. (137.) 注意到加减数量矩阵不影响本题证明, 不失一般性可不妨设 M 半正定, 从而 A, C 也是半正定的.

对

$$z = \begin{pmatrix} sx \\ ty \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, s, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^{n-r},$$

我们有

$$0 \leqslant z^T M z = x^T A x \cdot s^2 + y^T C y \cdot t^2 + 2st \cdot x^T B y, \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

特别的, 取从属于 λ_2 的 M 的单位特征向量 $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, 我们有

$$\lambda_2 = z_0^T M z_0 = x_0^T A x_0 + y_0^T C y_0 + 2 x_0^T B y_0, \tag{30.139}$$

于是

$$\lambda_2 \leqslant \left(1 + s^2\right) x_0^T A x_0 + \left(1 + t^2\right) y_0^T C y_0 + 2\left(1 + st\right) x_0^T B y_0.$$

当 $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$, 取

$$s = \sqrt{\frac{y_0^T y_0}{x_0^T x_0}}, t = -\sqrt{\frac{x_0^T x_0}{y_0^T y_0}},$$

我们有

$$\lambda_2 \leqslant \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0} + \frac{y_0^T C y_0}{y_0^T y_0} \leqslant \mu_1 + \mu_2,$$

这里最后一个等号来自瑞丽商21.15.

当 x_0, y_0 有一个为 0, 从(30.139)和瑞丽商21.15显然仍然有 $\lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$, 这就完成了证明.

138. (138.) 首先

$$A \in \bigcap_{P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})} P T_n P^{-1} \Leftrightarrow \text{和}A\text{相似的矩阵一定是上三角矩阵.}$$

熟知 $A \sim A^T$, 即命题21.4, 所以上述交中的矩阵 A 只能是对角矩阵. 如果这个矩阵 A 对角线有两个元素不同, 不妨设为左上角两个元素. 由初等变换和相似的关系21.3我们有

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda - \mu & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda - \mu & \mu \end{pmatrix},$$

这个相似显然可以扩充到整个矩阵. 于是我们知道 A 只能是数量矩阵, 于是所求所有矩阵只能是数量矩阵.

139. (139.) 设 $Hv = \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, 我们有

$$H(Ev) = EHv - 2Ev = (\lambda - 2)(Ev), HFv = 2Fv + FHv = (\lambda + 2) Fv.$$

反复迭代得

$$H\left(E^k v\right) = (\lambda - 2k)\left(E^k v\right), H\left(F^k v\right) = (\lambda + 2k)\left(F^k v\right), k = 0, 1, 2, \cdots.$$

因为矩阵特征值个数有限, 所以存在非负整数 N 使得

$$F^N v \neq 0, F^{N+1} v = 0.$$

注意到

$$H\left(F^N v\right)=(\lambda+2N)\left(F^N v\right),$$

即 $F^N v$ 也是属于 H 特征值 $\lambda+2N$ 的特征向量, 故成立

$$H\left(E^k F^N v\right)=(\lambda+2N-2k)\left(E^k F^N v\right), k=0,1,2,\cdots.$$

因为矩阵特征值个数有限, 所以存在非负整数 m 使得

$$E^m F^N v\neq 0, E^{m+1}F^N v=0.$$

设

$$v_0\triangleq F^N v, v_k\triangleq E^k v_0, k=0,1,2,\cdots,$$

则

$$Hv_k=(\lambda+2N-2k)v_k, k=0,1,2,\cdots,m.$$

下归纳证明

$$Fv_k=-k(\lambda+2N-k+1)v_{k-1}, k=1,2,\cdots.$$

当 $k=1$, 有

$$Fv_1=FEv_0=EFv_0-Hv_0=0-(\lambda+2N)v_0=-(\lambda+2N)v_0.$$

假设对 k 成立, 当 $k+1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}Fv_{k+1}&=FEv_k=EFv_k-Hv_k=E\left(-k(\lambda+2N-k+1)v_{k-1}\right)-(\lambda+2N-2k)v_k\\&=-k(\lambda+2N-k+1)v_k-(\lambda+2N-2k)v_k\\&=-(k+1)(\lambda+2N-k)v_k,\end{aligned}$$

即由数学归纳法得证. 现在代入 $k=m+1$ 并利用 $v_{m+1}=0, v_m\neq 0$ 得

$$0=Fv_{m+1}=-(m+1)(\lambda+2N-m)v_m\Rightarrow\lambda=m-2N.$$

显然 $v_0,v_1,\cdots,v_m$ 是 H 属于特征值 $m,m-2,\cdots,-m$ 的特征向量, 于是是线性无关的. 以他们为基, 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基, 在这个基下 H,E,F 分别有表示矩阵

$$\begin{pmatrix}\widetilde{H_1}&\widetilde{H_2}\\0&\widetilde{H_3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\widetilde{E_1}&\widetilde{E_2}\\0&\widetilde{E_3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\widetilde{F_1}&\widetilde{F_2}\\0&\widetilde{F_3}\end{pmatrix},$$

这里 $\widetilde{H_1}$ 是主对角元为整数的对角矩阵.
直接计算矩阵乘法显然有

$$\widetilde{E_3}\widetilde{F_3}-\widetilde{F_3}\widetilde{E_3}=\widetilde{H_3},\widetilde{E_3}\widetilde{H_3}-\widetilde{H_3}\widetilde{E_3}=2\widetilde{E_3},\widetilde{H_3}\widetilde{F_3}-\widetilde{F_3}\widetilde{H_3}=2\widetilde{F_3}.$$

于是利用归纳法我们知道 $\widetilde{H_3}$ 的特征值也全为整数, 因此我们证明了 H 特征值全为整数.

140. (140.) 容易证明

$$\mathbb{R}^n=\operatorname{Span}\{\mathbf{1}_n\}\oplus V.$$

ρ_τ 可自然扩充定义到 $\mathbb{R}^n$ 且 $\rho_\tau|_{\operatorname{Span}\{\mathbf{1}_n\}}$ 是恒等变换, 故

$$\operatorname{tr}(\rho_\tau)=\operatorname{tr}_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau)-1.$$

注意到 ρ_τ 在 $\mathbb{R}^n$ 是一个置换, 因此其表示矩阵是一个置换矩阵. 故 $\operatorname{tr}_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau)$ 是 τ 不动点个数, 注意如果有 $n-1$ 个不动点就会有 n 个不动点. 于是我们证明了

$$\{\operatorname{tr}(\rho_\tau):\tau\in S_n\}=\{-1,0,1,\cdots,n-3,n-1\}.$$

Method 1 定义

$$X_i(\tau) \triangleq \begin{cases} 1, & \tau(i)=i \\ 0, & \text{否则} \end{cases}, i=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau) = \sum_{\tau\in S_n}\sum_{i=1}^n X_i(\tau) = \sum_{i=1}^n \sum_{\tau\in S_n} X_i(\tau) = \sum_{i=1}^n |S_{n-1}| = n\cdot(n-1)! = n!,$$

以及

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{tr}^2_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau) = \sum_{\tau\in S_n}\left(\sum_{i=1}^n X_i(\tau)\right)^2 \\
&= \sum_{\tau\in S_n}\sum_{i=1}^n X_i^2(\tau) + 2\sum_{\tau\in S_n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i(\tau)X_j(\tau) \\
&= \sum_{\tau\in S_n}\sum_{i=1}^n X_i(\tau) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sum_{\tau\in S_n} X_i(\tau)X_j(\tau) \\
&= n! + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |S_{n-2}| = n! + n(n-1)(n-2)! \\
&= 2n!.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau\in S_n}\left[\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau)-1\right]^2 &= \sum_{\tau\in S_n}\mathrm{tr}^2_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau) - 2\sum_{\tau\in S_n}\mathrm{tr}_{\mathbb{R}^n}(\rho_\tau) + \sum_{\tau\in S_n} 1 \\
&= 2n! - 2n! + |S_n| = n!.
\end{aligned}$$

Method 2 注意到 S_n 在 V 的表示是不可约的实表示, 记 $\chi(\tau) \triangleq \mathrm{tr}(\rho_\tau)$, 然后我们有

$$\chi(\tau) = \chi\left(\tau^{-1}\right), 1 = \langle\chi,\chi\rangle = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\tau\in S_n}\chi(\tau)\chi\left(\tau^{-1}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in S_n}|\mathrm{tr}(\rho_\tau)|^2,$$

即

$$\sum_{\tau\in S_n}|\mathrm{tr}(\rho_\tau)|^2 = n!.$$

141. (141.) 首先当 A,B 正定, 这个结果是显然的, 即取可逆矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A=C^TC$, 然后

$$AB = C^TCB \sim C^{-T}C^TCBC^T = CBC^T.$$

因为 CBC^T 实对称, 所以可对角化, 从而 AB 可对角化.

由半正定矩阵正交相似对角化可不妨设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^T & B_4 \end{pmatrix}, A_1, B_1 \in \mathbb{R}^{r\times r},$$

这里 A_1 可逆.

注意到 B_1 半正定, 于是继续把 B_1 对角化可以不妨设

$$A = \begin{pmatrix} A' & A_0^T & 0 \\ A_0 & A'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B' & 0 & X^T \\ 0 & 0 & Y^T \\ X & Y & B_4 \end{pmatrix}, A', B' \in \mathbb{R}^{s\times s},$$

这里

$$\begin{pmatrix} A' & A_0^T \\ A_0 & A'' \end{pmatrix}, B'$$

都是正定矩阵. 由半正定矩阵对角线为 0 则所在行列全为 023.5得

$$A=\begin{pmatrix}A' & A_0^T & 0\\ A_0 & A'' & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B' & 0 & X^T\\ 0 & 0 & 0\\ X & 0 & B_4\end{pmatrix},A',B'\in\mathbb{R}^{s\times s},$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix}A'B' & 0 & A'X^T\\ A_0B' & 0 & A_0X^T\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由相似和分块矩阵初等变换的关系21.5, 我们考虑如下初等变换

$$\begin{pmatrix}A'B' & 0 & A'X^T\\ A_0B' & 0 & A_0X^T\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一列右乘}-\left(B'\right)^{-1}X^T\text{加到第三列}}\begin{pmatrix}A'B' & 0 & 0\\ A_0B' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行左乘}\left(B'\right)^{-1}X^T\text{加到第一行}}\begin{pmatrix}A'B' & 0 & 0\\ A_0B' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行左乘}-A_0\left(A'\right)^{-1}\text{加到第二行}}\begin{pmatrix}A'B' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二列右乘}A_0\left(A'\right)^{-1}\text{加到第一列}}\begin{pmatrix}A'B' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由 A',B' 是正定矩阵得 $A'B'$ 可以相似对角化, 从而

$$\begin{pmatrix}A'B' & 0 & A'X^T\\ A_0B' & 0 & A_0X^T\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A'B' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可相似对角化.

142. (142.)

由可逆性知道 $\det M(\lambda),\det N(\lambda)$ 都是非 0 常数. 注意到

$$\det\left[M(\lambda)(\lambda A_1-A_2)N(\lambda)\right]=\det(\lambda B_1-B_2),$$

于是我们有

$$\det(A_1)=\lim_{\lambda\to\infty}\det\left(A_1-\frac{1}{\lambda}A_2\right)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\det\left(B_1-\frac{1}{\lambda}B_2\right)}{\det M(\lambda)\cdot\det N(\lambda)}=\frac{\det(B_1)}{\det M(\lambda)\cdot\det N(\lambda)}\neq 0,$$

即 A_1 可逆.

现在

$$B_1^{-1}M(\lambda)A_1\left(\lambda I_n-A_1^{-1}A_2\right)N(\lambda)=\lambda I_n-B_1^{-1}B_2,$$

即 $A_1^{-1}A_2\sim B_1^{-1}B_2$. 由例题21.13, 我们有可逆 n 阶矩阵 P,Q 使得 $PA_iQ=B_i,i=1,2$, 于是我们就有

$$PA(\lambda)Q=B(\lambda).$$

143. (143.)

(a). $n=1$ 显然, 不妨设 $n\geqslant 2$. 注意到

$$\begin{pmatrix} \frac{n+2}{2n+2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2n+2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2n+2} & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{n+2}{2n+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} = I_n.$$

于是由圆盘定理23.40, 对 A 的特征值 λ, 我们有下述不等式之一成立:

$$\left|\lambda^{-1}-\frac{n+2}{2n+2}\right|\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+2}=\frac{n+2}{2n+2}, \left|\lambda^{-1}-1\right|\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

因为 A 实对称, 所以 $\lambda\in\mathbb{R}$, 从而

$$0<\lambda^{-1}\leqslant \frac{n+2}{n+1}\leqslant 2, 0<\lambda^{-1}\leqslant 2$$

之一成立, 故 $\lambda\geqslant \frac{1}{2}$. 显然 A 不能有 n 重特征值 $\frac{1}{2}$, 否则 A 是数量矩阵而矛盾!, 即 $\lambda_n>\frac{1}{2}$.
注意到

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n+2}{2n+2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2n+2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2n+2} & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{n+2}{2n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}} = \begin{cases} \frac{2(n-2)+\frac{2(n+2)}{n+1}}{n} & n\text{为奇数} \\ \frac{2(n-1)}{n}, & n\text{为偶数} \end{cases}.$$

由瑞丽商21.15得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{-1}\geqslant \lim_{n\to\infty}\begin{cases} \frac{2(n-2)+\frac{2(n+2)}{n+1}}{n} & n\text{为奇数} \\ \frac{2(n-1)}{n}, & n\text{为偶数} \end{cases}=2,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{-1}=2\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\frac{1}{2}.$$

注意到

$$\frac{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1\\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2\\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 4 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n-1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}=1,$$

由瑞丽商21.15得 $\lambda_n\leqslant 1$.

144. (144.)

(a). 由 $V=V_i\oplus V_i^{\perp},i=1,2$, 我们有

$$v_i=\sigma_{3-i}\left(v_i\right)+v_i-\sigma_{3-i}\left(v_i\right),\sigma_{3-i}\left(v_i\right)\in V_{3-i},v_i-\sigma_{3-i}\left(v_i\right)\in V_{3-i}^{\perp},$$

这就完成了证明.

(b). 因为 $\mathrm{Im}\sigma_2=V_2$, 所以 V_2 确实是 $\sigma_2\sigma_1$ 不变子空间. 现在分别取 V_2 和 $V_2^{\perp}$ 一组标准正交基, 合在一起构成 V 的一组标准正交基, 在这组基下

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\sigma_1=\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix},A\in\mathbb{R}^{r\times r}.$$

注意到正交投影对应幂等对称矩阵, 因此 A 实对称且 $A-A^2=BB^T$ 是半正定的, 所以 A 特征值都是实数且在 $[0,1]$ 之间. 又 $\sigma_2\sigma_1=\begin{pmatrix}A & B\\0 & 0\end{pmatrix}$ 知 $\sigma_2\sigma_1|_{V_2}$ 的特征值都是 A 的特征值.

设 $v\in V_2\setminus\{0\}$ 使得 $\sigma_2\sigma_1v=v$. 设

$$v=\alpha+\beta,\alpha\in V_1,\beta\in V_1^{\perp},$$

我们由第一问得 $\alpha-\sigma_2\alpha\in V_2^{\perp}$, 于是

$$\begin{aligned}&(\alpha-\sigma_2\alpha,v)=0\Rightarrow(\alpha-v,\alpha+\beta)=0\\&\Rightarrow(-\beta,\alpha+\beta)=0\Rightarrow(\beta,\beta)=0\Rightarrow\beta=0\\&\Rightarrow v=\alpha\in V_1\overset{V_1\bigcap V_2=\{0\}}{\Rightarrow}v=0,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了对 $\sigma_2\sigma_1|_{V_2}$ 任何一个特征值 λ 都有 $0\leqslant\lambda<1$.

145. (145.) 取 A 的 r 行行向量的极大无关组, 对称得到 r 列列向量组的极大无关组, 然后考虑交叉部分, 我们证明这个 r 阶主子式可逆. 事实上只考虑这 r 个行向量构成的矩阵 B, 其秩为 r, 所有列向量可被交叉处的 r 个列向量线性表出, 因此这个矩阵 B 的列向量组的秩就是交叉处列向量组的秩, 这恰好为 r, 即交叉部分是非 0 主子式.

146. (146.) 设 $Bv=\lambda v,v\neq 0,\lambda\in\mathbb{R}$, 然后

$$v^T\left(A^2B+BA^2\right)v=v^TA^2Bv+v^TBA^2v=2\lambda v^TA^2v>0.$$

因为 A^2 半正定, 所以 $v^TA^2v\geqslant 0$, 于是得到 $\lambda>0$, 因此 B 特征值都是正数, 从而正定.

147. (147.)

(a). 考虑 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的 Gram 矩阵 A, 由定理21.12知 A 是正定的.

设 $\beta_j=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{kj}\alpha_k,j=1,2,\cdots,n.$ 记 $B=(b_{ij})$ 则

$$(\alpha_i,\beta_j)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_k)\,b_{kj}=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,n\Leftrightarrow AB=E_n,$$

于是 $B=A^{-1}$ 显然存在且唯一.

(b). 注意到

$$(\alpha,\alpha_i)\geqslant 0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}k_j\,(\alpha_j,\alpha_i)\geqslant 0,$$

设 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 我们有 $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ 每个分量都是非负数, 现在来证明 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{y}$ 每个分量为非负数.

由例题23.83这是显然的.

148. (148.) 设 $a=1,b\neq 0$, 考虑

$$\varphi\left(x^k\right)=(x+b)^k,k=0,1,2,\cdots,n.$$

注意到 φ 在基 $\left\{1,x,x^2,\cdots,x^n\right\}$ 下是对角线为 1 的上三角矩阵且非对角矩阵, 因此 $\varphi-I$ 是不为 0 的幂零矩阵, 所以不可对角化.

设 $a\neq 1$, 注意到

$$\varphi\left(\left(ax+b+\frac{b}{a-1}\right)^k\right)=a^k\left(x+\frac{b}{a-1}\right)^k,k=0,1,2,\cdots,n.$$

于是在基

$$\left\{1,x+\frac{b}{a-1},\left(x+\frac{b}{a-1}\right)^2,\cdots,\left(x+\frac{b}{a-1}\right)^n\right\}$$

下 φ 的表示矩阵为对角矩阵 $\operatorname{diag}\left\{1,a,a^2,\cdots,a^n\right\}$.

设 $a=1,b=0$, 此时恒等算子当然可对角化.

这就完成了证明.

149. (149.) 设 A 的极小多项式为 m, 特征多项式为 p. 设 $A_k\in S(A),k=1,2,\cdots$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\widetilde{A}.$$

注意到

$$m\left(\widetilde{A}\right)=\lim_{k\to\infty}m\left(A_k\right)=0.$$

因此 $\widetilde{A}$ 极小多项式也无重根. 又 p 的系数是矩阵的连续函数, 所以 $\widetilde{A}$ 的特征多项式也是 p. 因此 $\widetilde{A}$ 和 A 有相同的特征值且可对角化!, 故 $\widetilde{A}\in S(A)$.

反之, 如果 $S(A)$ 是闭的, 设 A 的有理标准型有一个大于 1 阶的友块 B, 即

$$A\sim\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix},B\in\mathbb{R}^{s\times s},C\in\mathbb{R}^{(n-s)\times(n-s)}.$$

现在 B 的极小多项式必然形如 $(x-\lambda)^s,\left(x^2+ax+b\right)^{\frac{s}{2}}$ 中的一个, 这里 $\lambda,a,b\in\mathbb{R}$.

对于 $(x-\lambda)^s$, 我们有

$$A\sim\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}J_s(\lambda)&0\\0&C\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&\frac{1}{n}&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&\frac{1}{n}\\&&&\lambda\end{pmatrix}&0\\0&C\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&\frac{1}{n}&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&\frac{1}{n}\\&&&\lambda\end{pmatrix}&0\\0&C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&0\\&&&\lambda\end{pmatrix}&0\\0&C\end{pmatrix}\notin S(A).$$

对于 $\left(x^2+ax+b\right)^{\frac{s}{2}}, s\geqslant 4$, 由广义 Jordan 标准型23.45, 我们有

$$A\sim\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-b&&&&&\\1&-a&&&&&\\&\frac{1}{n}&0&-b&&&\\&&1&-a&&&\\&&&\frac{1}{n}&\ddots&&\\&&&&&0&-b\\&&&&&1&-a\end{pmatrix}&\\&C\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-b&&&&&\\1&-a&&&&&\\&\frac{1}{n}&0&-b&&&\\&&1&-a&&&\\&&&\frac{1}{n}&\ddots&&\\&&&&&0&-b\\&&&&&1&-a\end{pmatrix}&\\&C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-b&&&&&\\1&-a&&&&&\\&0&0&-b&&&\\&&1&-a&&&\\&&&0&\ddots&&\\&&&&&0&-b\\&&&&&1&-a\end{pmatrix}&\\&C\end{pmatrix}\notin S(A).$$

故 A 大于 1 阶的友块 B 一定有特征多项式 x^2+ax+b, 即 A 在 $\mathbb{C}$ 可对角化!, 这就完成了证明.

150. (150.) 注意到

$$AB-BA=B-A.$$

由例题23.6知 A,B 可同时相似上三角化. 不妨设 A,B 都是上三角矩阵, 因此 $A-B$ 对角线全为 0, 故是幂零矩阵. 现在我们知道

$$(A-B)^n=0.$$

151. (151.) **Method 1**

当 $n=1$ 是显然的, 假设命题对 $n-1$ 成立, 当 n 时设

$$H=\begin{pmatrix}H_{n-1}&\alpha\\\beta^T&a\end{pmatrix},H_{n-1}\in\mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

注意到由归纳假设知存在对角元全为 ± 1 的对角矩阵 $J_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ 使得

$$\det\left(H_{n-1}+J_{n-1}\right) \neq 0.$$

于是我们考虑

$$J=\begin{pmatrix} J_{n-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c \in \{-1,1\},$$

此时有

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta^T\left(H_{n-1}+J_{n-1}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix}(H+J)=\begin{pmatrix} H_{n-1}+J_{n-1} & \alpha \\ 0 & a+c-\beta^T\left(H_{n-1}+J_{n-1}\right)^{-1}\alpha \end{pmatrix}.$$

于是取

$$c \neq \beta^T\left(H_{n-1}+J_{n-1}\right)^{-1}\alpha - a \in \{-1,1\}$$

即知

$$\det(H+J) \neq 0.$$

Method 2

考虑 n 次多项式

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\det\left(H+\operatorname{diag}\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\right\}\right)$$

的项 $x_1x_2\cdots x_n$. 于是我们知道在组合零点定理23.45中取

$$S_i=\{-1,1\}, i=1,2,\cdots,n$$

就有 $s_i \in S_i, i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$f\left(s_1,s_2,\cdots,s_n\right)=\det(H+J) \neq 0.$$

152. (152.)

(a). 不失一般性, 由实对称矩阵可以正交相似对角化, 我们可以假设 A 是对角矩阵

$$A=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}.$$

然后设

$$v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, ||v||=1,$$

我们有

$$\langle Av,v\rangle=\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 \geqslant \lambda\cdot\sum_{i=1}^n v_i^2=\lambda.$$

显然上述不等式当且仅当 λ 对应的某个 v_i 取 1, 其余分量取 0, 也即当且仅当 v 落在 A 属于特征值 λ 的特征子空间.

现在我们知道 $\lambda=\min\limits_{||v||=1,v\in\mathbb{R}^n}\langle Av,v\rangle$ 是 A 的最小特征值.

(b). 设

$$v_i \triangleq \max\left\{u_i,0\right\}, w_i \triangleq \max\left\{-u_i,0\right\}, i=1,2,\cdots,n.$$

然后让

$$v \triangleq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in C, w \triangleq \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in C,$$

我们有

$$u = v - w, \langle v, w \rangle = 0.$$

(c). 设 $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 是 A 属于特征值 λ 的单位特征向量, 由第 2 问, 存在 $v, w \in C$ 满足

$$u = v - w, \langle v, w \rangle = 0.$$

现在

$$v^T Av + w^T Aw - w^T Av - v^T Aw = \left(v^T - w^T\right) A \left(v - w\right) = \lambda \left(v^T - w^T\right) \left(v - w\right) = \lambda v^T v + \lambda w^T w,$$

于是由第 1 问得

$$w^T Av + v^T Aw = v^T Av - \lambda v^T v + w^T Aw - \lambda w^T w \geqslant 0.$$

设

$$v \triangleq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in C, w \triangleq \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in C,$$

我们有

$$w^T Av + v^T Aw = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_i v_j = 2 \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{ij} w_i v_j \geqslant 0.$$

因为

$$a_{ij} < 0, \forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \langle v, w \rangle = 0,$$

我们只能有

$$w_i v_j = 0, \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

注意到 w, v 不能都是 0 向量, 不妨设 $v_1 \neq 0$. 现在

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0 \Rightarrow w = 0,$$

从而

$$-Av = -Au = -\lambda u = -\lambda v \notin C,$$

即 $\lambda > 0$, 这就证明了 A 是正定矩阵.

153. (153.) 设

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

取其对应的友矩阵

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

考虑线性变换

$$T:V\to V,h\mapsto [x\cdot h(x)]\bmod (p(x)),$$

这里 V 是不超过 $n-1$ 次实系数多项式构成的线性空间. 显然 T 在基

$$\mathcal{B}=\left\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\right\}$$

下的表示矩阵就是 A 以及

$$f(T):V\to V,h\mapsto [f(x)\cdot h(x)]\bmod (p(x)).$$

注意到 $f(T)(g)$ 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标即

$$f(A)\begin{pmatrix} g_0\\ g_1\\ \vdots\\ g_{n-1}\end{pmatrix},$$

这也是 r 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标.

同理得 $g(T)(f)$ 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标为

$$g(B)\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ \vdots\\ f_{n-1}\end{pmatrix},$$

这也是 r 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标.

154. (154.) 考虑

$$f(z)\triangleq\sum_{i=1}^{n}b_ie^{a_iz},$$

则题目条件等价于

$$f^{(j)}(0)=j!,j=0,1,2,\cdots,m-1.$$

考虑

$$p(z)\triangleq\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_kz^{n-k},$$

则利用

$$p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)(e^{a_iz})=p(a_i)e^{a_iz}=0,i=1,2,\cdots,n$$

得

$$p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)(f(z))=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_kf^{(n-k)}(z)=0.$$

现在若 $m>2n$, 则对 $0\leqslant i\leqslant m-1-n$, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_k\frac{(i+n-k)!}{i!}=\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_kf^{(n-k+i)}(0)=0,$$

即 n 次首 1 多项式

$$g(x)=(-1)^n\sigma_n+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sigma_k(x+n-k)(x+n-k-1)\cdots(x+1)$$

有 $m-n$ 个零点 i, 这就和 $m\geqslant 2n+1$ 矛盾!, 现在我们得到了 $m\leqslant 2n$.

155. (155.)

(a). 设 $\mathrm{rk}_+(A)=q,\mathrm{rk}_+(B)=q'$, 则存在非负矩阵

$$U\in\mathbb{R}^{m\times q},V\in\mathbb{R}^{q\times n},U'\in\mathbb{R}^{m\times q'},V'\in\mathbb{R}^{q'\times n}$$

使得

$$A=UV,B=U'V'.$$

现在我们有

$$A+B=(U,U')\begin{pmatrix}V\\V'\end{pmatrix},(U,U')\in\mathbb{R}^{m\times(q+q')},\begin{pmatrix}V\\V'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(q+q')\times n},$$

即

$$\mathrm{rk}_+(A+B)\leqslant q+q'=\mathrm{rk}_+(A)+\mathrm{rk}_+(B).$$

(b). 设 $\mathrm{rk}_+(A)=q,\mathrm{rk}_+(B)=q'$, 则存在非负矩阵

$$U\in\mathbb{R}^{m\times q},V\in\mathbb{R}^{q\times p},U'\in\mathbb{R}^{p\times q'},V'\in\mathbb{R}^{q'\times n}$$

使得

$$A=UV,B=U'V'.$$

于是我们有

$$AB=(UVU')V'=U(VU'V'),UVU'\in\mathbb{R}^{m\times q'},VU'V'\in\mathbb{R}^{q\times n},$$

即

$$\mathrm{rk}_+(AB)\leqslant\min\{q,q'\}=\min\{\mathrm{rk}_+(A),\mathrm{rk}_+(B)\}.$$

(c). 考虑非负矩阵分解

$$M=AB,M=(m_{ij}),A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times r},B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{r\times n}.$$

记

$$S_i\triangleq\{1\leqslant k\leqslant r:a_{ik}>0\},i=1,2,\cdots,n.$$

如果有 $1\leqslant i<j\leqslant r$ 使得 $S=S_i=S_j$, 那么由

$$\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{r}a_{jk}b_{kj}=0,$$

我们知道

$$b_{ki}=b_{kj}=0,\forall k\in S.$$

由 $\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}\neq0$, 我们知道存在 $k\in S$ 使得 $b_{kj}>0$, 这就是一个矛盾!.
现在 $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ 是 $\{1,2,\cdots,r\}$ 互不相同的子集, 因此

$$n\leqslant2^r\Rightarrow r\geqslant\frac{\ln n}{\ln 2},$$

即

$$\mathrm{rk}_+(M)\geqslant\frac{\ln n}{\ln 2}.$$

156. (156.) 由奇异值分解23.4得正交矩阵 $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 使得

$$A=P\mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0\}Q^T.$$

于是设正交矩阵 $Q^TP=(p_{ij})$, 我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}\,(A)|^2&=\left|\mathrm{tr}\left(Q^TP\mathrm{diag}\left\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0\right\}\right)\right|^2\\&=\left(\sum_{i=1}^r p_{ii}\sigma_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^r p_{ii}^2\cdot\sum_{i=1}^r\sigma_i^2\leqslant r\cdot\sum_{i=1}^r\sigma_i^2\\&=r\,(A)\cdot\mathrm{tr}\left(A^TA\right),\end{aligned}$$

这就证明了不等式. 显然等号成立的充要条件是

$$p_{ii}=\pm1\text{且符号相同},\sigma_i=\sigma,i=1,2,\cdots,r.$$

于是

$$Q^TP=\begin{pmatrix}\pm I_r&0\\0&P_{n-r}\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{aligned}A&=P\mathrm{diag}\left\{\sigma,\sigma,\cdots,\sigma,0,\cdots,0\right\}Q^T\\&=P\mathrm{diag}\left\{\sigma,\sigma,\cdots,\sigma,0,\cdots,0\right\}Q^TPP^T\\&=P\begin{pmatrix}\pm\sigma I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^T,\end{aligned}$$

即等号成立充要条件是 A 实对称且非 0 特征值, 一致.

157. (157.) 显然只需证明 $\det A>0$, 其余顺序主子式是类似的. 由数学类线性代数习题156., 我们知道 A 可逆, 即 $\det A\neq0$.

考虑

$$A=(a_{ij}),f\,(x)\triangleq\det\left[\begin{pmatrix}xa_{11}&&&\\&xa_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&xa_{nn}\end{pmatrix}+(1-x)\,A\right],x\in[0,1],$$

则矩阵

$$\begin{pmatrix}xa_{11}&&&\\&xa_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&xa_{nn}\end{pmatrix}+(1-x)\,A$$

仍然有条件中叙述的性质, 因此

$$f\,(x)\neq0,\forall x\in[0,1],f\,(1)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0,$$

这就证明了

$$f\,(0)=\det A>0.$$

158. (158.) 首先对实半正定矩阵 A,B, 利用实半正定矩阵23.5可以开方, 我们有

$$\begin{pmatrix}I+A&\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\\\sqrt{B}\cdot\sqrt{A}&I+B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A-\sqrt{A}\sqrt{B}\,(I+B)^{-1}\sqrt{B}\sqrt{A}&0\\\sqrt{B}\cdot\sqrt{A}&I+B\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} I+A & \sqrt{A}\cdot\sqrt{B} \\ \sqrt{B}\cdot\sqrt{A} & I+B \end{pmatrix} &= \det(I+B)\cdot\det\left(I+A-\sqrt{A}\sqrt{B}(I+B)^{-1}\sqrt{B}\sqrt{A}\right) \\ &= \det(I+B)\cdot\det\left(I+A-\sqrt{A}B(I+B)^{-1}\sqrt{A}\right) \\ &= \det(I+B)\cdot\det\left(I+A-\sqrt{A}(I+B)(I+B)^{-1}\sqrt{A}+\sqrt{A}(I+B)^{-1}\sqrt{A}\right) \\ &= \det(I+B)\cdot\det\left(I+\sqrt{A}(I+B)^{-1}\sqrt{A}\right) \\ &\overset{\text{命题21.7}}{=} \det(I+B)\cdot\det\left(I+(I+B)^{-1}A\right) \\ &= \det(I+B+A).\end{aligned}$$

利用 Fischer 不等式21.14，我们有

$$\det(I+B+A)\leqslant\det(I+A)\cdot\det(I+B).$$

现在对一般的 $m\geqslant 3$, 我们假设

$$\det\left(I+\sum_{k=1}^{m-1}A_k\right)\leqslant\prod_{k=1}^{m-1}(I+A_k),$$

然后

$$\det\left(I+\sum_{k=1}^{m}A_k\right)\leqslant\det\left(I+\sum_{k=1}^{m-1}A_k\right)\cdot\det(I+A_m)\leqslant\prod_{k=1}^{m}(I+A_k),$$

于是我们完成了证明.

159. (159.) 我们约定 $C_j^i=0, j<i$ 或者 $i<0$.

考虑[75]

$$P\triangleq\begin{pmatrix} C_0^0 & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}.$$

我们将证明

$$\left(P^{-1}AP\right)_{ij}=\begin{cases}\frac{(-1)^{i-1}}{i}C_{n-i}^{j-i}, & 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ 0, & 1\leqslant j<i\leqslant n\end{cases},$$

这等价于

$$\sum_{k=n-i+1}^{n}\frac{1}{i}C_{k-1}^{j-1}=\sum_{k=1}^{n}C_{i-1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n-k}^{j-k}, i,j=1,2,\cdots n. \tag{30.140}$$

一方面

$$\sum_{k=n-i+1}^{n}\frac{1}{i}C_{k-1}^{j-1}=\sum_{k=n-i+1}^{n}\frac{1}{i}\left(C_k^j-C_{k-1}^j\right)=\frac{C_n^j-C_{n-i}^j}{i}.$$

[75]对 $i,j=1,2,\cdots,n$, 利用经典恒等式

$$C_n^kC_k^m=C_n^mC_{n-m}^{k-m}=C_n^mC_{n-m}^{n-k},$$

注意到恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-j}C_{i-1}^{k-1}C_{k-1}^{j-1}=\sum_{k=j}^{i}(-1)^{k-j}C_{i-1}^{j-1}C_{i-j}^{i-k}=\delta_{ij},$$

于是我们有

$$\left(P^{-1}\right)_{ij}=(-1)^{i-j}C_{i-1}^{j-1}.$$

另外一方面

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}C_{n-k}^{j-k}\right)x^j=\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{n}C_{n-k}^{j-k}x^j\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}x^k\left(\sum_{j=k}^{n}C_{n-k}^{j-k}x^{j-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}x^k\left(\sum_{j=0}^{n-k}C_{n-k}^{j}x^{j}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}x^k\left(1+x\right)^{n-k}=\left(1+x\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left[C_i^k\left(-1\right)^{k-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k\right]\\
&=\left(1+x\right)^n\left\{1-\sum_{k=0}^{i}\left[C_i^k\left(-1\right)^{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k\right]\right\}=\left(1+x\right)^n-\left(1+x\right)^{n-i}.
\end{aligned}$$

对比 x^j 的系数得

$$\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}C_{n-k}^{j-k}=C_n^j-C_{n-i}^j.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}C_i^k\left(-1\right)^{k-1}C_{n-k}^{j-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{k}C_{i-1}^{k-1}\left(-1\right)^{k-1}C_{n-k}^{j-k},$$

我们就证明了(30.140).

现在我们知道 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵, 因此 A 的全部特征值为 $\frac{(-1)^{k-1}}{k},k=1,2,\cdots,n.$

160. (160.) 考虑线性变换 $\delta\triangleq\frac{\sigma}{2}$. 注意到 δ 有在 $\mathbb{C}$ 上无重根的零化多项式 x^n-1, 我们知道 δ 的极小多项式在 $\mathbb{C}$ 上无重根. 因此 δ 可相似对角化, 我们不妨设

$$\delta=\operatorname{diag}\left\{E_s,\Lambda\right\},\Lambda\in\mathbb{C}^{(n-s)\times(n-s)}\text{是不含1的对角矩阵.}$$

注意到 Λ 的对角元 λ 满足

$$\lambda^n=1\Rightarrow\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^n=\frac{\lambda-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}=\frac{\lambda-\lambda}{1-\lambda}=0,$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tr}\left(\delta^k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(s+\operatorname{tr}\left(\Lambda^k\right)\right)=ns+\operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^{n}\Lambda^k\right)=n\dim W,$$

这里 W 是 δ 属于特征值 1 的特征子空间, 因为 δ 可对角化, 所以 1 的代数重数和几何重数相等. 这就证明了

$$\dim W=\frac{\operatorname{tr}\left(\sigma\right)}{2n}+\frac{\operatorname{tr}\left(\sigma^2\right)}{2^2n}+\cdots+\frac{\operatorname{tr}\left(\sigma^n\right)}{2^nn}.$$

此题同注[中科院 2006 考研真题] 设 f 是有限维线性空间 V 上的线性变换, 且 f^n 为 V 上恒等变换, 这里 n 是某个正整数. 设

$$W=\left\{\alpha\in V:f\left(\alpha\right)=\alpha\right\},$$

证明 W 是 V 子空间并求

$$\operatorname{tr}\left(\frac{f+f^2+\cdots+f^n}{n}\right).$$

161. (161.) 首先

$$\dim V=\frac{n\left(n+1\right)}{2},\dim U=\frac{n\left(n-1\right)}{2}.$$

注意到

$$\dim V=\dim\ker\varphi_A|_V+\dim\operatorname{Im}\varphi_A|_V,$$

于是 $\varphi_A|_V$ 为满射等价于

$$\dim\ker\varphi_A|_V=\frac{n\left(n+1\right)}{2}-\frac{n\left(n-1\right)}{2}=n.$$

注意到 A 可以正交相似对角化, 于是可不妨设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{n_s}\end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}\text{且互不相同}, i=1,2,\cdots,s, \sum_{i=1}^{s} n_i = n.$$

对应分块 $X=(X_{ij})$, 于是

$$X \in \ker \varphi_A|_V \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_i X_{ij}=\lambda_j X_{ij} & ,i,j=1,2,\cdots,s \\ X_{ij}=X_{ji}^T\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}X_{ij}=0, & i\neq j \\ X_{ii}^T=X_{ii}, & i=1,2,\cdots,s\end{cases}.$$

现在

$$\dim \ker \varphi_A|_V = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i\left(n_i+1\right)}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i+n_i}{2} = n,$$

这里等号成立充要条件是 $n_i=1, i=1,2,\cdots,s$, 这恰好是 A 的特征多项式没有重根.

162. (162.) 设

$$A \triangleq I_n + \frac{(\beta-\alpha)\alpha^T}{\alpha^T\alpha} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

我们有

$$A\alpha = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\alpha^T}{\alpha^T\alpha}\alpha = \beta,$$

以及对满足 $\alpha^T\gamma=0$ 的 $\gamma\in\mathbb{R}^n$ 有

$$A\gamma = \gamma + \frac{(\beta-\alpha)\alpha^T}{\alpha^T\alpha}\gamma = \gamma.$$

这就完成了证明.

163. (163.) 对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 做相似不改变题目结果可不妨设 $A=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_s\}$ 是 Jordan 标准型, 这里 J_i 是 A 属于同一特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵.

注意到

$$\sqrt[m]{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

这里 $\sqrt[m]{1+z}$ 表示在 x 轴取正实值那一支. 于是对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 考虑

$$B_i \triangleq \lambda_i^{\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\left(J_i-\lambda_i I\right)^k}{\lambda_i^k},$$

这里 $\lambda_i^{\frac{1}{m}}$ 表示任意取定一个 λ_i 的 m 次方根. 因为 $J_i-\lambda_i I$ 是幂零的, 所以上述求和是有限和, 因此也存在 $f_i\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $B_i=f_i(J_i)$. 于是由命题23.10得

$$B_i^m = \lambda_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\left(J_i-\lambda_i I\right)^k}{\lambda_i^k}\right)^m = \lambda_i \left(\sqrt[m]{I+\frac{J_i-\lambda_i I}{\lambda_i}}\right)^m = J_i.$$

现在对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 由中国剩余定理23.1得 $f\in\mathbb{C}[x]$ 使得

$$f \equiv f_i \left(\operatorname{mod}\left(\lambda-\lambda_i\right)^n\right), i=1,2,\cdots,s.$$

现在有

$$\begin{aligned} f^m(A) &= \operatorname{diag}\left\{f^m\left(J_1\right), f^m\left(J_2\right), \cdots, f^m\left(J_s\right)\right\} \\ &= \operatorname{diag}\left\{f_1^m\left(J_1\right), f_2^m\left(J_2\right), \cdots, f_s^m\left(J_s\right)\right\} \\ &= \operatorname{diag}\left\{J_1, J_2, \cdots, J_s\right\} = A. \end{aligned}$$

164. (164.)

(a). 平凡.

(b). 首先利用 $\sigma^m = I$ 得

$$\sigma\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^i(u)\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^{i+1}(u) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\sigma^{i+1}(u) + \sigma(u) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^i(u),$$

即 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^i(u) \in W$.

对 $v \in V_\sigma$, 利用 $\sigma^T = \sigma^{-1}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(u - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^i(u), v\right) &= (u,v) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sigma^i(u), v\right)\\ &= (u,v) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(u, \left(\sigma^T\right)^i v\right) = (u,v) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(u, \left(\sigma^{-1}\right)^i v\right)\\ &= (u,v) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(u,v) = (u,v) - (u,v) = 0,\end{aligned}$$

因此 u 在 V_σ 正交投影为 $\overline{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^i(u)$.

(c). 显然所证等式不随域扩张而改变, 在复数域上同数学线性代数习题160.即可证明.

165. (165.) 首先有

$$\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 CD, DC 有相同的非 0 特征值23.20, 我们有

$$\operatorname{tr}\left[\left(\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*\right)^\gamma\right] = \operatorname{tr}\left[\left(\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^\gamma\right].$$

考虑半正定矩阵

$$X \triangleq \begin{pmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{pmatrix}, Y \triangleq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}^* X \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ -B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{pmatrix},$$

设

$$\lambda_1(\cdot) \geqslant \lambda_2(\cdot) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\cdot)$$

表示矩阵的所有特征值. 由例题21.11, 我们有

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\lambda_i(X) + \lambda_i(Y)\right] \geqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(X+Y), k = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $k = n$ 时等号成立. 于是由 Karamata 不等式12.8和不等式12.6, 我们有

$$2^{\gamma-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i^\gamma(Y) + \lambda_i^\gamma(X)\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i(X) + \lambda_i(Y)\right]^\gamma \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i^\gamma(X+Y)\right],$$

即

$$\frac{\operatorname{tr}(Y^\gamma) + \operatorname{tr}(X^\gamma)}{2} \geqslant \operatorname{tr}\left(\left(\frac{X+Y}{2}\right)^\gamma\right).$$

现在我们有

$$\operatorname{tr}\left((A+B)^\gamma\right) = \operatorname{tr}(X^\gamma) = \frac{\operatorname{tr}(Y^\gamma) + \operatorname{tr}(X^\gamma)}{2} \geqslant \operatorname{tr}\left(\left(\frac{X+Y}{2}\right)^\gamma\right) = \operatorname{tr}(A^\gamma) + \operatorname{tr}(B^\gamma),$$

这就完成了证明.

166. (166.)

(a). ad_A 显然线性, 注意到

$$(AB-BA)X-X(AB-BA)=A(BX-XB)-(BX-XB)A-B(AX-XA)+(AX-XA)B,$$

直接计算验证.

(b). 直接计算验证得表示矩阵

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(c). 注意到

$$\mathrm{ad}_{\lambda A+\mu B}=\lambda\mathrm{ad}_A+\mu\mathrm{ad}_B,$$

我们知道是双线性的. 利用迹的交换性, 显然 $(\cdot,\cdot)$ 是对称的.

设正交矩阵 $T\in\mathbb{R}^{3\times3}$, 然后定义正交变换

$$H:V\to V,X\mapsto T^TXT.$$

然后我们有

$$H^{-1}\circ\mathrm{ad}_{T^TAT}\circ H=\mathrm{ad}_A,$$

即对 A 做正交相似, 对应的 ad_A 也相似, 从而 ad_A 特征值不改变.

因为实反对称矩阵是实正规矩阵且特征值为 0 或者纯虚数, 我们知道要么 $A=0$, 要么 A 正交相似[76]

$$\begin{pmatrix}0&a&0\\-a&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},a>0.$$

对于前者, ad_A 的特征值全为 0. 对于后者, 由第二问算出来的表示矩阵知 ad_A 的特征值为 $0,\pm ai$.

因此

$$(A,A)=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\left(\mathrm{ad}_A\right)^2\right)=\begin{cases}0,&A=0\\a^2,&A\neq0\end{cases},$$

即 $(\cdot,\cdot)$ 正定. 现在我们知道 $(\cdot,\cdot)$ 为一个内积.

167. (167.) 注意到

$$\mathrm{tr}\left(E_{ij}^TE_{kl}\right)=\mathrm{tr}\left(E_{ji}E_{kl}\right)=\delta_{ik}\delta_{jl},$$

即 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 是 V 的正交基. 现在计算 U_A 在基 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 下的表示矩阵[77]得

$$I_n\otimes A+A^T\otimes I_n.$$

于是 U_A 是正交变换等价于 $I_n\otimes A+A^T\otimes I_n$ 是正交矩阵.

注意到 $I_n\otimes A+A^T\otimes I_n$ 也是

$$\varphi:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AX+XA$$

的表示矩阵. 因为正交矩阵在 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 所以 φ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化. 由例题23.17知 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化且 φ 的特征值为

$$\lambda_i+\lambda_j,i,j=1,2,\cdots,n,$$

这里 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$ 是 A 的全部特征值.

[76] 见正规矩阵正交相似标准型23.25.

[77] 见例题23.12.

$I_n \otimes A + A^T \otimes I_n$ 是正交矩阵意味着特征值的只能落在单位圆周上, 因此

$$2\left|\lambda_i\right| = \left|\lambda_i + \lambda_i\right| = 1, i = 1, 2, \cdots, n.$$

又实矩阵的复特征值成对出现, 所以

$$\left|\lambda_i + \overline{\lambda_i}\right| = \left|2\Re\left(\lambda_i\right)\right| = 1, i = 1, 2, \cdots, n.$$

即 A 的特征值实部和模长都为 $\frac{1}{2}$, 因此

$$\lambda_i = \pm\frac{1}{2}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

又 A 的特征值不能同时有 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, 否则 0 是 φ 特征值. 因此 $A = \pm\frac{1}{2}I_n$.

代入 $A = \pm\frac{1}{2}I_n$ 发现的确有 U_A 是正交变换, 于是这就是使得 U_A 是正交变换的全部 A, 我们完成了证明.

168. (168.) 注意 $A^2 = 2I$. 在基

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

下, 我们可以计算得 A 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&-1&0\\
0&1&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&-1
\end{pmatrix}.$$

此时特征多项式为 $\left(\lambda^2 - 2\right)^4$, 极小多项式为 $\lambda^2 - 2$. 因此 A 可对角化且特征值为

$$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}.$$

对应特征值 $\sqrt{2}$ 的四个特征向量为

$$\begin{aligned}
&\left(1+\sqrt{2}\right)E_{11} + i\,E_{11};\\
&E_{12} + \sqrt{2}\,E_{21} + i\,E_{12};\\
&\sqrt{2}\,E_{12} + E_{21} + i\,E_{21};\\
&\left(1+\sqrt{2}\right)E_{22} + i\,E_{22}.
\end{aligned}$$

对应特征值 $-\sqrt{2}$ 的四个特征向量为

$$\begin{aligned}
&\left(1-\sqrt{2}\right)E_{11} + i\,E_{11};\\
&E_{12} - \sqrt{2}\,E_{21} + i\,E_{12};\\
&-\sqrt{2}\,E_{12} + E_{21} + i\,E_{21};\\
&\left(1-\sqrt{2}\right)E_{22} + i\,E_{22}.
\end{aligned}$$

169. (169.) 考虑 f 对应的友矩阵为

$$\begin{pmatrix}
&&&-6\\
1&&&-2\\
&1&&0\\
&&\ddots&\vdots\\
&&1&0
\end{pmatrix}.$$

然后对 f 的每一个特征值 λ, 使用圆盘定理23.40得 λ 必然满足下面方程的一个

$$|\lambda-0|\leqslant 6, |\lambda-0|\leqslant |-2|+|1|, |\lambda-0|\leqslant |1|+|0|,$$

即 $|\lambda|\leqslant 6!$, 因此 A 的特征值不超过 6, 从而必然可逆.

170. (170.) 把 A 视为 $\mathbb{Z}_3$ 的矩阵, 我们有

$$a_{ii}=i^3+2i, a_{ij}=\begin{cases}1, & i<j\\ 2, & i>j\end{cases}.$$

记 $n=2025$, 由例题23.207, 我们有

$$\det A=2\prod_{i=1}^{n}\left(i^3+2i-1\right)-\prod_{i=1}^{n}\left(i^3+2i-2\right).$$

注意到在 mod3 意义下, 我们有

$$i^3+2i=i^3-i=(i+1)\,i\,(i-1),$$

即用连续 3 个正整数之积被 3 整除得

$$3|\left(i^3+2i\right), i=1,2,\cdots.$$

现在在 mod3 意义下我们有

$$\begin{aligned}&\left[2\prod_{i=1}^{n}\left(i^3+2i-1\right)-\prod_{i=1}^{n}\left(i^3+2i-2\right)\right]\\ =&\left[2\prod_{i=1}^{n}(3-1)-\prod_{i=1}^{n}(3-2)\right]=2^{n+1}-1.\end{aligned}$$

设 $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$, 我们有

$$2^{n+1}-1=2^{2k}-1=4^k-1=3\cdot\sum_{j=0}^{k-1}4^j,$$

因此 $3|\det A$.

171. (171.) 不失一般性, 同时交换行列式使得 M 位于左上角. 于是

$$A=\begin{pmatrix}M & B\\ B^T & C\end{pmatrix}, B\in\mathbb{F}^{r\times(n-r)}, C\in\mathbb{F}^{(n-r)\times(n-r)}.$$

考虑初等变换

$$\begin{pmatrix}M & B\\ B^T & C\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}M & B\\ 0 & C-B^TM^{-1}B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & C-B^TM^{-1}B\end{pmatrix},\tag{30.141}$$

我们知道

$$r(A)=r(M)\Leftrightarrow C-B^TM^{-1}B=0.$$

我们写

$$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}), C=(c_{ij}),$$

然后我们结合题目条件和类似(30.206)初等变换得

$$0=\begin{vmatrix}M & \beta_i\\ \beta_i^T & c_{ii}\end{vmatrix}=|M|\cdot\left|c_{ii}-\beta_i^TM^{-1}\beta_i\right|, i=1,2,\cdots,n-r.$$

现在就有

$$c_{ii}-\beta_i^TM^{-1}\beta_i=0, i=1,2,\cdots,n-r.$$

对 $1 \leqslant i < j \leqslant n-r$, 继续利用题目条件和类似(30.206)初等变换我们有

$$\begin{aligned}
0 = \begin{vmatrix} M & \beta_i & \beta_j \\ \beta_i^T & c_{ii} & c_{ij} \\ \beta_j^T & c_{ij} & c_{jj} \end{vmatrix} &= |M| \cdot \left| \begin{pmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ij} & c_{jj} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_i^T \\ \beta_j^T \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} \beta_i & \beta_j \end{pmatrix} \right| \\
&= |M| \cdot \left| \begin{pmatrix} c_{ii} - \beta_i^T M^{-1} \beta_i & c_{ij} - \beta_i^T M^{-1} \beta_j \\ c_{ij} - \beta_j^T M^{-1} \beta_i & c_{jj} - \beta_j^T M^{-1} \beta_j \end{pmatrix} \right| \\
&= |M| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 & c_{ij} - \beta_i^T M^{-1} \beta_j \\ c_{ij} - \beta_j^T M^{-1} \beta_i & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |M| \cdot \left| c_{ij} - \beta_i^T M^{-1} \beta_j \right|^2,
\end{aligned}$$

即

$$c_{ij} - \beta_i^T M^{-1} \beta_j = c_{ij} - \beta_j^T M^{-1} \beta_i = 0.$$

现在我们证明了 $C - B^T M^{-1} B = 0$, 因此就完成了证明.

172. (172.) 注意到

$$\mathbb{R}^{n \times n} = S \oplus T,$$

这里 S 是实对称矩阵构成的线性空间, T 是实反对称矩阵构成的线性空间. 考虑双线性型

$$f(A, B) \triangleq \operatorname{tr}(AB).$$

设 $A \in S, B \in T$, 我们有

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}\left(B^T A^T\right) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(AB) \Rightarrow f(A, B) = 0,$$

于是只需要考虑 $f|_S, f|_T$ 的正负惯性指数.

对 $A \in S$, 若

$$f(A, A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right) = \operatorname{tr}\left(A^T A\right) \geqslant 0,$$

由例题21.17得等号成立条件等价于 $A = 0$, 于是显然 $f|_S$ 正定.

对 $A \in T$, 若

$$f(A, A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right) = -\operatorname{tr}\left(A^T A\right) \leqslant 0,$$

由例题21.17得等号成立条件等价于 $A = 0$, 于是显然 $f|_T$ 负定.

现在我们知道 A 的正惯性指数为 $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$, 负惯性指数为 $\dim T = \frac{n(n-1)}{2}$.

173. (173.) 注意到

$$A^R = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & \end{pmatrix} A^T,$$

我们有

$$A^2 = A \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & \end{pmatrix} A^T.$$

于是 A^2 是实对称矩阵, 从而对 A 的特征值 λ, 我们有 $\lambda^2 \in \mathbb{R}$, 这就证明了 A 的特征值为实数或者纯虚数.

174. (174.) 因为 U_k 是复正规矩阵且特征值模长为 1, 所以设 $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵使得

$$U^k = V^* \begin{pmatrix} e^{ik\theta_1} & & & \\ & e^{ik\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{ik\theta_n} \end{pmatrix} V, \theta_i \in [0, 2\pi), i = 1, 2, \cdots, n, k \in \mathbb{N}.$$

于是若 $\lim\limits_{k\to+\infty} U^k$ 存在, 只能有

$$\lim_{k\to+\infty} U^k = V^* \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty} e^{ik\theta_1} & & & \\ & \lim\limits_{k\to+\infty} e^{ik\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lim\limits_{k\to+\infty} e^{ik\theta_n} \end{pmatrix} V\text{存在.}$$

现在我们知道当且仅当 $\theta_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 时极限存在, 即 $U = I_n$ 时极限存在. 现在我们有

$$\lim_{k\to+\infty} U^k = I_n.$$

175. (175.) 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 标准内积, 我们定义 $\mathbb{C}^n$ 新内积为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \triangleq \int_{S^1} \langle \varphi(s)\mathbf{x}, \varphi(s)\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^n} \mathrm{d}s, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

对任何 $t \in S^1$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t)\mathbf{x}, \varphi(t)\mathbf{y}\rangle &= \int_{S^1} \langle \varphi(s)\varphi(t)\mathbf{x}, \varphi(s)\varphi(t)\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^n} \mathrm{d}s \\ &= \int_{S^1} \langle \varphi(st)\mathbf{x}, \varphi(st)\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^n} \mathrm{d}s \\ &\overset{\text{旋转不变性}}{=} \int_{S^1} \langle \varphi(s)\mathbf{x}, \varphi(s)\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^n} \mathrm{d}s \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle. \end{aligned}$$

于是在新内积下 $\varphi(s)$ 是两两可交换的酉算子, 因此可以同时酉相似对角化23.5, 即存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$\varphi(z) = U \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & & & \\ & \lambda_2(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n(z) \end{pmatrix} U^{-1},$$

这里对每一个 $j = 1, 2, \cdots, n$ 有 $\lambda_j(z)$ 是 $S^1 \to S^1$ 的连续群同态. 我们只需再证明如下引理

引理 30.8

若 $\lambda : S^1 \to S^1$ 是连续群同态, 证明: 存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\lambda(z) = z^k, \forall z \in S^1.$$

♡

证明 先来证明存在[78] $g \in C(\mathbb{R})$ 使得

$$\lambda\left(e^{2\pi it}\right) = e^{2\pi i g(t)}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{30.142}$$

由 $\lambda\left(e^{2\pi it}\right)$ 一致连续性, 我们知存在 $\delta > 0$ 使得

$$\left|\lambda\left(e^{2\pi is}\right) - \lambda\left(e^{2\pi it}\right)\right| < 1.$$

[78] 如果你会代数拓扑的话, g 可以视为在复叠映射 $\pi : t \mapsto e^{2\pi it}$ 下 λ 的提升.

取 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 满足

$$|t_i-t_{i-1}|<\delta, i=1,2,\cdots,n.$$

然后归纳定义 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$. 设 $g(0)=0$ 并假设 g 在 $[t_0,t_k]$ 已定义好且连续且满足

$$\lambda\left(e^{2\pi it}\right)=e^{2\pi ig(t)}, t\in[0,t_k].$$

考虑幅角主值函数

$$\arg:\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\leqslant 0\}\to(-\pi,\pi),$$

然后定义

$$g(t)=g(t_k)+\frac{1}{2\pi}\arg\left(\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}\right), t\in(t_k,t_{k+1}].$$

注意到

$$\left|\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}-1\right|=\left|\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)-\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}\right|<1, t\in[t_k,t_{k+1}],$$

我们有

$$\arg\left(\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \forall t\in[t_k,t_{k+1}].$$

现在我们知道 $g\in C[t_0,t_{k+1}]$ 且对 $t\in[t_k,t_{k+1}]$ 有

$$e^{2\pi ig(t)}=e^{2\pi i\left[g(t_k)+\frac{1}{2\pi}\arg\left(\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}\right)\right]}=e^{2\pi ig(t_k)}\cdot e^{i\arg\left(\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}\right)}$$

$$=\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)\cdot\frac{\lambda\left(e^{2\pi it}\right)}{\lambda\left(e^{2\pi it_k}\right)}=\lambda\left(e^{2\pi it}\right).$$

依次下去得 $g\in C[0,1]$ 且对 $t\in[0,1]$ 有(30.142)成立. 对 g 周期 1 延拓即得(30.142)对 $t\in\mathbb{R}$ 成立且 $g\in C(\mathbb{R})$.

现在对 $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, 我们有

$$e^{2\pi ig(t_1+t_2)}=\lambda\left(e^{2\pi i(t_1+t_2)}\right)=\lambda\left(e^{2\pi it_1}\right)\lambda\left(e^{2\pi it_2}\right)=e^{2\pi i[g(t_1)+g(t_2)]}.$$

于是我们有

$$g(t_1+t_2)-g(t_1)-g(t_2)\in\mathbb{Z}.$$

连续性表明存在唯一的 $k\in\mathbb{N}$ 使得

$$g(t_1+t_2)-g(t_1)-g(t_2)=k, \forall t_1,t_2\in\mathbb{R}.$$

由 $g(t)+k$ 满足 Cauchy 方程以及命题12.8得

$$g(t)=[g(1)+k]t-k.$$

注意 $g(0)=-k\in\mathbb{Z}$, 从而由

$$1=\lambda(1)=e^{2\pi ig(1)}\Rightarrow g(1)\in\mathbb{Z}$$

得 $g(1)+k\in\mathbb{Z}$. 于是我们有

$$\lambda(z)=z^{g(1)+k}, z\in S^1.$$

由引理30.8即得(23.203).

176. (176.) 不妨设 A 为实对角矩阵, 即

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}, \lambda_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n.$$

现在再设 $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$, 我们有原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\geqslant\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2}-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2. \tag{30.143}$$

不妨设 λ_1 是 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$ 的最大值, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2v_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2}+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2.$$

于是打开上述右边括号知原不等式等价于

$$\lambda_1^2+2n\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2+4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\geqslant0.$$

上述关于 λ_i 的二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2\\2&2n&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&\cdots&2n\end{pmatrix}.$$

由例题23.207知特征多项式是

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&\cdots&-2\\-2&\lambda-2n&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2&-2&\cdots&\lambda-2n\end{pmatrix}\\&=(\lambda+1)(\lambda-2n+2)^{n-1}-2(\lambda-2n+2)^{n-1}-2(\lambda+1)(n-1)(\lambda-2n+2)^{n-2}\\&=(\lambda-2n+2)^{n-2}[(\lambda+1)(\lambda-2n+2)-2(\lambda-2n+2)-2(n-1)(\lambda+1)]\\&=(\lambda-2n+2)^{n-2}\lambda(\lambda-4n+3),\end{aligned}$$

现在矩阵特征值是

$$0,4n-3,\underbrace{2n-2,2n-2,\cdots,2n-2}_{n-2\text{个}},$$

于是矩阵半正定, 从而得到了不等式(30.143).

177. (177.) 这就是例题23.113的特例.

178. (178.) 设 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则对 $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ 用行列式的 Laplace 定理展开计算得

$$\det(\alpha_1,\cdots,v,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}v_i,$$

这恰好是 $e_j^TA^*v$.

现在我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\det\left(\alpha_1,\cdots,B\alpha_j,\cdots,\alpha_n\right)=\sum_{j=1}^{n}e_j^TA^*B\alpha_j=\operatorname{tr}\left(A^*BA\right)$$
$$=\operatorname{tr}\left(BAA^*\right)=\operatorname{tr}\left(B\cdot\det A\right)=\operatorname{tr}\left(B\right)\cdot\det A.$$

179. (179.) 首先我们知道交换行或者列是对矩阵左或右乘了一个正交矩阵, 因此如此变换得到的矩阵还是正交矩阵.

因此可以不妨设

$$i_t=j_t=t,t=1,2,\cdots,k.$$

于是我们假设

$$A_1\triangleq A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}.$$

注意到

$$AA^T=\begin{pmatrix}A_1A_1^T+A_2A_2^T&A_1A_3^T+A_2A_4^T\\A_3A_1^T+A_4A_2^T&A_3A_3^T+A_4A_4^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_k&0\\0&I_{n-k}\end{pmatrix}.$$

注意到

$$A\begin{pmatrix}A_1^T&0\\A_2^T&I_{n-k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^T&0\\A_2^T&I_{n-k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_1^T+A_2A_2^T&A_2\\A_3A_1^T+A_4A_2^T&A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_k&A_2\\0&A_4\end{pmatrix},$$

我们有

$$\det A\cdot\det A_1=\det A_4\Rightarrow\det A_1=\frac{1}{|A|}\cdot\left|A_4\right|,$$

这就完成了证明.

180. (180.) 设

$$\det X=fg,f,g\in\mathbb{F}\left[x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nn}\right],$$

这里 f,g 都非常多项式.

对 $j\geqslant 2$, 因为行列式定义为 $\pm$ 不同行不同列的元素积的和, 我们有

$$\det X=h_1x_{11}+h_2x_{1j}+h_3,$$

这里 h_1,h_2,h_3 是不含有 x_{11},x_{1j} 的多项式, 于是我们知道若 x_{11} 出现在 f 中, $x_{1j},j\geqslant 2$ 出现在 g 中, 则 fg 会有 $x_{11}x_{1j}$ 这种项而矛盾!, 因此 $x_{1j},1\leqslant j\leqslant n$ 必然同时落在 f 或者 g 中且在另外一个多项式中没有.

现在上述讨论本质上用到了行列式定义为 $\pm$ 不同行不同列的元素积的和, 所以对每个 j 讨论 $x_{1j},x_{ij},i\geqslant 2$ 我们知道 f,g 必有一个含有所有变元, 而另外一个不含有任何变元, 至此我们证明了 $\det X$ 不可约.

181. (181.) 记 $m_i,i=1,2,\cdots,m$ 是 A_i 的极小多项式. 由 $g\left(A_i\right)$ 可逆得 m_i,g 互素, 从而 $m_1m_2\cdots m_m$ 也与 g 互素.

现在由裴蜀等式得 $h,k\in\mathbb{K}\left[x\right]$ 使得

$$g\left(x\right)h\left(x\right)+\left(m_1m_2\cdots m_m\right)\left(x\right)k\left(x\right)=1.$$

于是

$$g\left(A_i\right)h\left(A_i\right)=g\left(A_i\right)h\left(A_i\right)+\left(m_1m_2\cdots m_m\right)\left(A_i\right)k\left(A_i\right)=I,$$

即

$$h\left(A_i\right)=g^{-1}\left(A_i\right),i=1,2,\cdots,m,$$

这就完成了证明.

182. (182.) 注意到

$$I_n=P^TP=\left(AQA^{-1}\right)^TAQA^{-1}=A^{-T}Q^TA^2QA^{-1},$$

我们有 $QA^2=A^2Q$, 即设 $Q=(q_{ij})$ 就有

$$q_{ij}\lambda_j^2=q_{ij}\lambda_i^2, i,j=1,2,\cdots,n\Rightarrow q_{ij}=0, i\neq j.$$

现在因为 Q 是对角矩阵, 所以我们有

$$P=AQA^{-1}=AA^{-1}Q=Q.$$

183. (183.)

(a). 对 $1,x,x^2$ 做斯密特正交化得

$$p_0=1, p_1=x-\frac{1}{2}, p_2=x^2-x+\frac{1}{6}.$$

(b). 对 $m\in\mathbb{N}$, 我们知道 $p_0,p_1,\cdots,p_m,p_{m+1}$ 是不超过 $m+1$ 次多项式空间的正交向量, 从而是基. 因此 $m+1$ 次多项式 xp 可以被写成

$$xp_m=\sum_{k=0}^{m+1}c_kp_k.$$

计算得

$$(xp_m,p_j)=\sum_{k=0}^{m+1}c_k\left(p_k,p_j\right)=c_j\left(p_j,p_j\right), j=0,1,2,\cdots,m+1.$$

而 $\operatorname{span}\{p_0,p_1,\cdots,p_{m-1}\}$ 张成不超过 $m-1$ 次的多项式空间, 因此对任何不超过 $m-1$ 次的多项式 p 都有 $(p_m,p)=0$. 现在

$$(xp_m,p_j)=(p_m,xp_j)=0, j=0,1,2,\cdots,m-2,$$

即 $c_j=0, j=0,1,2,\cdots,m-2$, 我们完成了证明.

184. (184.) 我们只需证明存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $g(B)\sim A$, 这是因为

$$P^{-1}g(B)P=g\left(P^{-1}BP\right), \forall P\in\mathbb{C}^{n\times n}\text{是可逆矩阵.}$$

于是设

$$A\sim\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}(\lambda_1),J_{n_2}(\lambda_2),\cdots,J_{n_s}(\lambda_s)\right\},$$

我们的想法是构造

$$B\triangleq\operatorname{diag}\left\{J_{n_1}(\mu_1),J_{n_2}(\mu_2),\cdots,J_{n_s}(\mu_s)\right\},$$

这里

$$g(\mu_i)=\lambda_i, i=1,2,\cdots,s.$$

若某个 $g'(\mu_i)=0$, 则由题目最大公因式条件得

$$f(g(\mu_i))=f(\lambda_i)\neq0,$$

这是一个矛盾!, 因此 $g'(\mu_i)\neq0$.

现在对每一个 $i=1,2,\cdots,s$, 由21.2我们知道

$$g\left(J_{n_i}(\mu_i)\right)=\begin{pmatrix}g(\mu_i) & \frac{g'(\mu_i)}{1!} & \cdots & \frac{g^{(n_i-1)}(\mu_i)}{(n-1)!}\\ & g(\mu_i) & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \frac{g'(\mu_i)}{1!}\\ & & & g(\mu_i)\end{pmatrix}.$$

直接计算得

$$r\left(\lambda_iI_{n_i}-g\left(J_{n_i}(\mu_i)\right)\right)=n_i-1,$$

因此

$$g\left(J_{n_i}(\mu_i)\right)\sim J_{n_i}(\lambda_i), i=1,2,\cdots,s\Rightarrow g(B)\sim A.$$

我们完成了证明.

185. (185.) 设 $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ 是矩阵 A 的特征值, 然后 λ_1^m 是 $\left(A^T\right)^m = A^k$ 的特征值. 然后存在 $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda_1^m = \lambda_2^k$. 对 λ_2 如此操作就得

$$\lambda_1^{m^2} = \lambda_2^{mk} = \lambda_3^{k^2}.$$

反复操作下去得

$$\lambda_1^{m^{j-1}} = \lambda_j^{k^{j-1}}, j = 1, 2, \cdots.$$

因为特征值个数是有限的, 所以存在 $t, p \in \mathbb{N}$ 使得 $\lambda_t = \lambda_{t+p}$. 因此

$$\lambda_1^{m^{j-1}} = \lambda_t^{k^{t-1}} = \lambda_t^{k^{t+p-1}} \Rightarrow \lambda_t = 0 \text{或者} \lambda_t^{k^{t+p-1}-k^{t-1}} = 1.$$

对于前者, 我们有 $\lambda_1 = 0$. 对于后者, 我们有

$$\left(\lambda_1^{m^{j-1}}\right)^{k^{t+p-1}-k^{t-1}} = 1,$$

即 λ_1 是单位根. 因此由 λ_1 的任意性我们知道 A 的所有特征值是 0 或者单位根.

186. (186.) 对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 将 A 的第 i 行和 $n-i+1$ 行对换, 同时第 i 列和 $n-i+1$ 列对换, 此时得到的矩阵 B 和 A 合同. 而题目条件就等价于 B 的全部顺序主子式为正, 因此是正定的, 因此我们完成了证明.

187. (187.) 当 $\lambda \neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
|\lambda I_n - A| &= \left|\lambda I_n - \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} - J_n^T(0)\right| \\
&= \left|\lambda I_n - J_n^T(0)\right| \cdot \left|I_n - \left(\lambda I_n - J_n^T(0)\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right| \\
&\overset{\text{降阶公式}21.7}{=} \left|\lambda I_n - J_n^T(0)\right| \cdot \left(1 - \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\left(\lambda I_n - J_n^T(0)\right)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda^n \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{J_n^T(0)}{\lambda}\right)^k\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda^n \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^k}(n-k)\right) = \lambda^n \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{\lambda^{k+1}}\right) \\
&= \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\lambda^{n-k-1} = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n}k\lambda^{k-1}.
\end{aligned}$$

由连续性知对 $\lambda = 0$ 也成立, 这就完成了计算.

188. (188.)

(a). 首先

$$I = (A+B)(A+B)^{-1} = (A+B)\left(A^{-1}+B^{-1}\right) = 2I + BA^{-1} + AB^{-1},$$

即

$$BA^{-1} + AB^{-1} = -I.$$

现在

$$BA^{-1}B+A=-B,B+AB^{-1}A=-A,$$

我们有

$$\frac{|B|^2}{|A|}=\left|BA^{-1}B\right|=(-1)^n|A+B|=\left|AB^{-1}A\right|=\frac{|A|^2}{|B|}.$$

现在

$$|A|\cdot|B|=\frac{|B|^2}{|A|}\cdot\frac{|A|^2}{|B|}=\left[(-1)^n|A+B|\right]^2=|A+B|^2.$$

(b). 从上一问的计算我们可以看到

$$\frac{|B|^2}{|A|}=\frac{|A|^2}{|B|}\Rightarrow|A|^3=|B|^3\Rightarrow|A|=|B|.$$

(c). 不一定成立, 例如可取

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}e^{\frac{2\pi}{3}i}&0\\0&e^{\frac{2\pi}{3}i}\end{pmatrix}.$$

注意到

$$|A|=1,|B|=e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

这就是一个反例!.

189. (189.) 设 $\varphi\in\mathfrak{g}$, 选一组 V 的基使得

$$\varphi=\begin{pmatrix}J_{\lambda_1}&&&\\&J_{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&J_{\lambda_s}\end{pmatrix},$$

这里 J_{λ_i} 特征值只有 λ_i. 在这组基下存在对应分块的可逆矩阵 $A=(A_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^TA\mathbf{y},\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V.$$

于是

$$\varphi\in\mathfrak{g}\Rightarrow\mathbf{y}^TA\varphi\mathbf{x}+\mathbf{y}^T\varphi^TA\mathbf{x}=0,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V\Rightarrow A\varphi+\varphi^TA=0$$
$$\Rightarrow A_{ij}J_{\lambda_j}=-J_{\lambda_i}^TA_{ij}\overset{\text{命题}21.5}{\Rightarrow}A_{ij}=0,\forall\lambda_i+\lambda_j\neq0.$$

现在

$$\ker(\varphi-\lambda_iI)^{n_i}=\left\{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\X_i\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n:X_i\in\mathbb{C}^{n_i}\right\}.$$

又

$$\left(\ker(\varphi-\lambda_iI)^{n_i},\ker(\varphi-\lambda_jI)^{n_j}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&\cdots&X_i^T&\cdots&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\X_j\\\vdots\\0\end{pmatrix}=0,\forall X_i\in\mathbb{C}^{n_i},X_j\in\mathbb{C}^{n_j}$$
$$\Leftrightarrow X_i^TA_{ij}X_j=0,\forall X_i\in\mathbb{C}^{n_i},X_j\in\mathbb{C}^{n_j}\Leftrightarrow A_{ij}=0\Leftrightarrow\lambda_i+\lambda_j\neq0,$$

这就完成了证明.

190. (190.) 我们先证明设 $A, B, A-B$ 是 n 阶正定矩阵, 则 $B^{-1}-A^{-1}$ 也是 n 阶正定矩阵, 事实上注意到

$$B^{-1}-A^{-1} \cong I_n - B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}} \sim I_n - BA^{-1}.$$

设 n 阶可逆矩阵 C 使得 $A=C^*C$, 则

$$I_n - BA^{-1} = (A-B)C^{-1}C^{-*} \sim C^{-*}(A-B)C^{-1} \cong A-B.$$

因此 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定.

然后我们断言

$$B-A=\int_0^\infty \left[\left(sI+e^A\right)^{-1}-\left(sI+e^B\right)^{-1}\right]\mathrm{d}s. \tag{30.144}$$

设可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}BP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=\Lambda.$$

现在

$$\begin{aligned}
&P^{-1}\cdot\int_0^\infty \left[(1+s)^{-1}I-\left(sI+e^B\right)^{-1}\right]\mathrm{d}s\cdot P\\
&=\int_0^\infty \left[(1+s)^{-1}I-\left(sI+P^{-1}e^BP\right)^{-1}\right]\mathrm{d}s\\
&=\int_0^\infty \left[(1+s)^{-1}I-\left(sI+e^\Lambda\right)^{-1}\right]\mathrm{d}s\\
&=\int_0^\infty \begin{pmatrix}
\frac{1}{1+s}-\frac{1}{s+e^{\lambda_1}} & & & \\
& \frac{1}{1+s}-\frac{1}{s+e^{\lambda_2}} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \frac{1}{1+s}-\frac{1}{s+e^{\lambda_n}}
\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\
&=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=\Lambda=P^{-1}BP,
\end{aligned}$$

即

$$B=\int_0^\infty \left[(1+s)^{-1}I-\left(sI+e^B\right)^{-1}\right]\mathrm{d}s,$$

从而(30.144)成立.

最后由(30.144)得

$$\mathbf{x}^*(B-A)\mathbf{x}=\int_0^\infty \mathbf{x}^*\left[\left(sI+e^A\right)^{-1}-\left(sI+e^B\right)^{-1}\right]\mathbf{x}\mathrm{d}s\geqslant 0,$$

且等号成立条件是 $\mathbf{x}=0$, 因此我们知道 $B-A$ 正定.

191. (191.)

(a). 考虑 V 的一组基为

$$e_k\triangleq(\delta_{0,d-1-k},\delta_{1,d-1-k},\cdots,\delta_{d-1,d-1-k},x_d,x_{d+1},\cdots),k=0,1,2,\cdots,d-1,$$

这里 $x_d,x_{d+1}\cdots$ 由递推定义. 然后我们有

$$T(e_k)=e_{k+1},k=0,1,\cdots,d-2,T(e_{d-1})=-\sum_{j=0}^{d-1}a_je_j,$$

即在基 $\{e_0,e_1,\cdots,e_{d-1}\}$ 下 T 有表示矩阵

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\
1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\
0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{d-1}
\end{pmatrix}.$$

注意到这是一个友矩阵, 因此 T 的特征多项式就是 $\Delta(t)$, 有理标准型就是上面的矩阵, 不变因子就是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{d-1个},\Delta(t).$$

(b). 因为 $\Delta(t)$ 无重根, 所以 T 可对角化, 此时考虑

$$v(\lambda_i)=\begin{pmatrix}1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots\end{pmatrix},i=1,2,\cdots,d.$$

直接验证就有

$$\lambda_i^{n+d}=\lambda_i^n\left(-\sum_{j=0}^{d-1}a_j\lambda_i^j\right)=-\sum_{j=0}^{d-1}a_j\lambda_i^{n+j},i=1,2,\cdots,d,$$

以及

$$T(v(\lambda_i))=\begin{pmatrix}\lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots\end{pmatrix}=\lambda_i v(\lambda_i),i=1,2,\cdots,d.$$

因此 $v(\lambda_i)$ 就是全部特征向量且构成 V 的一组基.

现在对任何 $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\cdots)\in V$, 我们知道它可表示为

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{d}c_i v(\lambda_i),$$

即

$$x_j=\sum_{i=1}^{d}c_i\lambda_i^j,j=0,1,2,\cdots.$$

于是取 $j=0,1,2,\cdots,d-1$ 得

$$\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_{d-1}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{d-1} & \lambda_2^{d-1} & \cdots & \lambda_d^{d-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_{d-1}\end{pmatrix}.$$

这就求出了 V 中元素通项.

192. (192.) 由条件得

$$A\alpha\neq 0,\forall\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\},$$

即 A 可逆. 显然亚正定矩阵做一个合同也亚正定.

当 $B=I$, 对 $\alpha\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 我们有

$$(A\alpha)^T\left(I-A^{-1}\right)(A\alpha)=((A-I)\alpha)^T((A-I)\alpha)+\alpha^T(A-I)\alpha>0,$$

即 $I-A^{-1}$ 亚正定.

对一般的 B, 注意到 B 正定, 我们知道正定矩阵存在正定平方根23.5, 于是

$$B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}-I\cong B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}-I\right)B^{\frac{1}{2}}=A-B,$$

即 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}-I$ 亚正定.

现在利用刚才证明的结果得

$$B^{-1}-A^{-1}\cong B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-1}-A^{-1}\right)B^{\frac{1}{2}}=I-B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}},$$

即 $B^{-1}-A^{-1}$ 亚正定.

193. (193.)

(a). 实际上无需条件 $AP=B,BQ=A$ 也能找到对应的 K. 不失一般性, 考虑

$$P=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ Q_3 & Q_4\end{pmatrix},Q_1\in\mathbb{F}^{r\times r}.$$

取 $K=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -I_{n-r}\end{pmatrix}$, 我们有

$$P+(PQ-I_n)K=\begin{pmatrix}I_r & Q_2\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$$

是可逆矩阵.

(b). 取上一问的 K, 然后考虑 $M\triangleq P+(PQ-I_n)K$, 我们就有

$$AM=AP+(APQ-A)K=B+(BQ-A)K=B.$$

194. (194.) 由数学类线性代数习题62.中取 $\alpha=\alpha_1,\beta=-\alpha_2,\gamma=\alpha_3$ 得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

若 $\alpha_4\in\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 设

$$\alpha_4=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3, a,b,c\in\mathbb{Q}.$$

则

$$\begin{aligned}\varphi^2\alpha_4=\varphi\alpha_5&=b\alpha_1+(b+c)\alpha_2+(a+c)\alpha_3=\alpha_3+\alpha_4\\&=a\alpha_1+b\alpha_2+(c+1)\alpha_3,\end{aligned}$$

对比系数得

$$a=b,b=b+c,a+c=c+1\Rightarrow\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2,$$

这就是一个矛盾!. 因此我们证明了 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 就是 V 的基. 现在于是

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}0&0&1&a\\1&0&1&b\\0&1&0&c\\0&0&0&d\end{pmatrix}.$$

注意到

$$\varphi^2\alpha_4=\varphi\alpha_5=\alpha_3+\alpha_4,$$

考虑

$$\begin{pmatrix}0&0&1&a\\1&0&1&b\\0&1&0&c\\0&0&0&d\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}*&*&*&0\\*&*&*&0\\*&*&*&1\\*&*&*&1\end{pmatrix},$$

我们有

$$c+ad=0,a+c+bd=0,b+cd=1,d^2=1,$$

这就是两组解

$$(a,b,c,d)=(-1,0,1,1),(a,b,c,d)=(1,2,1,-1).$$

现在我们知道 $\det\varphi=\pm1$.

195. (195.) 不妨设 A 为 Jordan 标准型, 我们下面的分块都是对应分块.

由秩条件知 A 的 0 特征值对应的 Jordan 块都是 1 阶的, 所以

$$A=\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix},C\text{是可逆复矩阵},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}.$$

由

$$A^kB=BA^k\Leftrightarrow\begin{pmatrix}C^kB_1&C^kB_2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1C^k&0\\B_3C^k&0\end{pmatrix},$$

知

$$B=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_4\end{pmatrix}, C^kB_1=B_1C^k.$$

现在设

$$C=\begin{pmatrix}J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_s}\end{pmatrix}, B_1=(B_{ij}),$$

这里 J_{λ_i} 是属于特征值 λ_i 的所有 Jordan 块构成的分块对角矩阵,λ_i 互不相同.
我们有

$$C^kB_1=B_1C^k\Leftrightarrow J_{\lambda_i}^kB_{ij}=B_{ij}J_{\lambda_j}^k,\forall i,j.$$

由命题21.5和模长条件给出的 $\lambda_i^k\neq\lambda_j^k,\forall i\neq j$ 知 $C^kB_1=B_1C^k$ 等价于

$$B_{ij}=0,\forall i\neq j, B_{ii}J_{\lambda_i}^k=J_{\lambda_i}^kB_{ii},\forall i.$$

现在由数学类线性代数习题83.得

$$B_{ii}\left(\frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}\right)^k=\left(\frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}\right)^kB_{ii}\Rightarrow B_{ii}\left(\frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}\right)=\left(\frac{J_{\lambda_i}}{\lambda_i}\right)B_{ii}\Rightarrow B_{ii}J_{\lambda_i}=J_{\lambda_i}B_{ii},$$

即我们有 $CB_1=B_1C$, 从而 $AB=BA$ 成立.

196. (196.) 注意到 $x^2+2x+5=0$ 没有实根, 所以 x^2+2x+5 就是 A 的极小多项式. 因为 A 总是相似于一个有理标准型, 其有理块对应的极小多项式只能是 x^2+2x+5, 因此 A 相似若干二阶块构成的分块对角矩阵, 即 n 为偶数.
当 $n\geqslant 4$, 此时 A 的极小多项式不等于特征多项式, 由定理23.23我们知道 A 有无穷个不变子空间.

197. (197.)

(a). 置换矩阵是对单位矩阵做交换行列得到的矩阵, 而交换行列对应乘上初等矩阵, 这个初等矩阵是正交矩阵. 我们知道正交矩阵的积也是正交矩阵, 所以置换矩阵是正交矩阵.

(b). 我们写

$$\sum_{A\in S}V(\mathbf{x}+A\mathbf{y})=\sum_{\sigma\in S_n}V\left(x_1+y_{\sigma(1)},x_2+y_{\sigma(2)},\cdots,x_n+y_{\sigma(n)}\right).$$

现在固定 $\mathbf{y}$, 视为 $\mathbf{x}$ 的多项式, 上述多项式是反对称的[79], 于是互素的不可约多项式 $x_j-x_i, 1\leqslant 1<i<j\leqslant n$ 都是其因子.
又上述多项式次数为 $\frac{n(n-1)}{2}$, 于是我们知道

$$\sum_{A\in S}V(\mathbf{x}+A\mathbf{y})=c(\mathbf{y})\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

考虑上述两侧多项式 $x_n^{n-1}x_{n-1}^{n-2}\cdots x_2^1$ 的系数得

$$c(\mathbf{y})=\sum_{A\in S}1=n!,$$

即

$$\sum_{A\in S}V(\mathbf{x}+A\mathbf{y})=n!V(\mathbf{x}).$$

(c). 注意到置换矩阵等价于若干做交换行列的那种初等矩阵的积, 因此置换矩阵的积还是置换矩阵.
又注意到置换矩阵对应置换群 S_n 中一个置换. 而 S_n 中置换分解成不相交轮换的积之后取逆会发现是同型置换, 因此 S_n 中置换和其逆是共轭的.

[79]行列式交换两列改变符号, $\mathbf{y}$ 部分再从求和里选一个相差这个对换的置换来对应即可.

现在存在 $X \in S$ 使得

$$XBA^{-1}X^{-1} = AB^{-1}.$$

再取

$$Y \triangleq A^{-1}X^{-1}B,$$

我们直接计算检查就有

$$XAY = B, XBY = A.$$

198. (198.) 设 $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是实正交矩阵使得

$$T^TAT = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

再设正交矩阵 $T^TBT = (b_{ij})$, 利用正交矩阵的列向量组是单位向量组, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}\left(T^TAT \cdot T^TBT\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{ii} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \operatorname{tr}(A).\end{aligned}$$

我们完成了证明.

199. (199.) 若 σ 有实特征值 λ, 则取属于特征值 λ 的一个特征向量生成的 1 维空间就是不变子空间.

若 σ 没有实特征值. 考虑复特征值 $\lambda + \mu i, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$, 则取属于特征值 $\lambda + \mu i$ 的一个特征向量 $\alpha + \beta i$. 考虑 α, β 生成的线性空间, 注意到

$$\sigma(\alpha + \beta i) = (\lambda + \mu i)(\alpha + \beta i) \Rightarrow \begin{cases}\sigma\alpha = \lambda\alpha - \mu\beta \\ \sigma\beta = \lambda\beta + \mu\alpha\end{cases},$$

即这个空间是 σ 不变子空间.

注意到 $\beta \neq 0$, 否则 α 是 σ 属于特征值 λ 的特征向量. 于是若 $\alpha = k\beta, k \in \mathbb{R}$, 我们有

$$k\sigma\beta = (\lambda k - \mu)\beta.$$

于是 $k = 0$, 否则 β 有实特征值 $\frac{\lambda k-\mu}{k}$. 现在我们知道

$$-\mu\beta = 0 \Rightarrow \mu = 0,$$

这就是一个矛盾!, 因此 α, β 线性无关. 我们就构造了一个 σ 二维不变子空间.

200. (200.) 设 V 是求导算子的不变子空间, 则取 $p \in V \setminus \{0\}$, 我们有

$$\sigma^{\deg p}(p) \in V \Rightarrow 1 \in V.$$

对 k 维不变子空间 V, 设 $p \in V$ 是次数最大的多项式, 我们有次数不同, 从而线性无关多项式

$$p, p', p'', \cdots, p^{(\deg p)}. \tag{30.145}$$

因此我们知道 $k \geqslant \deg p + 1$. 又不超过 $\deg p$ 次的多项式空间维数为 $\deg p + 1$, 所以 $k \leqslant \deg p + 1$, 这就给出了 $k = \deg p + 1$.

由(30.145)生成的空间包含于 $1, x, x^2, \cdots, x^{k-1}$ 生成的空间得 V 可由 $1, x, x^2, \cdots, x^{k-1}$ 生成.

201. (201.) 记

$$A^2 = (a_{ij}), u = (u_i), v = (v_i).$$

记

$$t^* \triangleq \min\left\{\frac{u_i}{v_i} : 1 \leqslant i \leqslant n\right\}, u_{i'} = t^*v_{i'}.$$

取 $\tau \triangleq u - t^*v = (\tau_i)$, 我们知道 τ 的元素都是非负的且 $\tau_{i'} = 0$. 我们计算得

$$A\tau = Au - t^*Av = v - t^*u \Rightarrow A^2\tau = Av - t^*Au = u - t^*v = \tau.$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i'j}\tau_j = \tau_{i'} = 0.$$

因为

$$a_{i'j>0}, \tau_j \geqslant 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

我们有

$$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_n = 0 \Rightarrow u = t^* v.$$

又

$$v = Au = t^* Av = t^* u = (t^*)^2 v \Rightarrow t^* = 1,$$

这就证明了 $u = v$.

202. (202.) 定义

$$[X, Y] \triangleq XY - YX.$$

取 $Q \triangleq e^{-\frac{1}{2}P} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 我们有

$$[B, P] = 2(A - B), [P, A - B] = 0, [P, [B, P]] = 0.$$

由 Bak–Campbell–Hausdorff 公式23.33得

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}P} B e^{\frac{1}{2}P} &= B + \left[-\frac{1}{2}P, B\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}P, \left[-\frac{1}{2}P, B\right]\right] + \cdots \\ &= B + \left[-\frac{1}{2}P, B\right] = B + \frac{1}{2}[B, P] = A. \end{aligned}$$

现在我们知道

$$AQ = Ae^{-\frac{1}{2}P} = e^{-\frac{1}{2}P} B = QB.$$

203. (203.) 注意到

$$|A + kB|, \left|(A + kB)^{-1}\right| = \frac{1}{|A + kB|} \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2024.$$

我们有

$$|A + kB|^2 = 1, k = 0, 1, 2, \cdots, 2024.$$

于是不超过 2024 次多项式 $|A + \lambda B|^2$ 有 2025 个根, 因此

$$|A + \lambda B|^2 \equiv 1.$$

现在

$$|A + 2025B| = \pm 1,$$

即 $A + 2025B$ 可逆且

$$(A + 2025B)^{-1} = \frac{(A + 2025B)^*}{|A + 2025B|} = \pm (A + 2025B)^* \in \mathbb{Z}^{1012\times 1012}.$$

我们完成了证明.

204. (204.) 必要性:

设可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $P^T AP, P^T BP$ 都是对角矩阵, 那么

$$A^{-1}B \sim P^{-1}A^{-1}P^{-T}P^T BP = \left(P^T AP\right)^{-1} \cdot P^T BP.$$

于是我们证明了 $A^{-1}B$ 相似对角矩阵.

充分性:

设可逆矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}A^{-1}BP=\Lambda\triangleq\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}.$$

设

$$P=\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{pmatrix},v_i\in\mathbb{R}^n,i=1,2,\cdots,n,$$

我们对任何 $i,j=1,2,\cdots,n$ 都有

$$\lambda_iv_i^TAv_j=\left(A^{-1}Bv_i\right)^TAv_j=v_i^TBv_j=v_i^TAA^{-1}Bv_j=\lambda_jv_i^TAv_j.$$

于是当 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 必有 $v_i^TAv_j=0$.

对于 $A^{-1}B$ 同一特征值对应的特征子空间, 我们可以取一个基同样使得[80]$v_i^TAv_j=0$, 不妨把 P 的列向量组改成这些列向量.

现在

$$P^TAP=\operatorname{diag}\left\{v_1^TAv_1,v_2^TAv_2,\cdots,v_n^TAv_n\right\}.$$

又

$$\begin{aligned}P^TBP&=P^TAA^{-1}B\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{pmatrix}=P^T\begin{pmatrix}\lambda_1Av_1 & \lambda_2Av_2 & \cdots & \lambda_nAv_n\end{pmatrix}\\&=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1v_1^TAv_1,\lambda_2v_2^TAv_2,\cdots,\lambda_nv_n^TAv_n\right\},\end{aligned}$$

这就证明了 A,B 可以同时合同对角化.

205. (205.) 由

$$\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_k&0\\0&E_{n-k}\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_\ell&0\\0&E_{n-\ell}\end{pmatrix},$$

得

$$B_{11}A_{12}+B_{12}A_{22}=0,A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=E_{n-\ell}.$$

设 $\mathbf{x}\in\ker A_{12}$, 我们有

$$B_{12}\left(A_{22}\mathbf{x}\right)=B_{11}A_{12}\mathbf{x}+B_{12}A_{22}\mathbf{x}=0\Rightarrow A_{22}\mathbf{x}\in\ker B_{12},$$

于是可定义线性映射

$$f:\ker A_{12}\to\ker B_{12},\mathbf{x}\to A_{22}\mathbf{x}.$$

注意到

$$\mathbf{x}\in\ker f\Rightarrow A_{22}\mathbf{x}=\mathbf{0},A_{12}\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow A\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{x}\end{pmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0},$$

即 f 是单射.

现在对 $\mathbf{y}\in\ker B_{12}$, 取 $\mathbf{x}=B_{22}\mathbf{y}\in\mathbb{F}^{n-k}$, 我们有

$$A_{12}\mathbf{x}=-A_{11}B_{12}\mathbf{y}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}\in\ker A_{12}$$

且

$$f\left(\mathbf{x}\right)=A_{22}\mathbf{x}=A_{22}B_{22}\mathbf{y}=\mathbf{y}-A_{21}B_{12}\mathbf{y}=\mathbf{y},$$

即 f 是满射.

现在我们证明了 $\ker A_{12}\cong\ker B_{12}$.

206. (206.) 只需证明 A^* 的对角元素都相等.

[80]见丘维声高等代数创新教材下册 422 页定理 3.

由伴随矩阵和原矩阵的秩关系21.12, 我们知道当 $r(A)<n-1$ 时 $A^*=0$, 即

$$\det A_k=0, k=1,2,\cdots,n.$$

由条件得

$$\mathbf{1}_n^T A=A\mathbf{1}_n=0,$$

即 A 不可逆, 从而只需考虑 $r(A)=n-1$ 时, 此时 $r(A^*)=1$.
注意到 $AA^*=0, \dim\ker A=1$, 我们知道 A^* 的列向量都形如 $c\mathbf{1}_n, c\in\mathbb{C}$. 结合 A 对称, 所以 A^* 对称. 于是 A^* 所有元素都相等, 从而

$$\det A_k, k=1,2,\cdots,n$$

相等.

207. (207.) 因为反对称矩阵特征值为 0 或者纯虚数21.16, 我们知道可逆实对称矩阵 A^2 的特征值为负数, 即负定. 因此设 $A^2=-C^TC, C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是可逆的.
现在

$$|A|=\left|-A^T\right|=(-1)^n|A|\Rightarrow n\text{为偶数},$$

以及

$$\left|A^2-B\right|=\left|C^TC+B\right|=|C|^2\cdot\left|E+C^{-T}BC^{-1}\right|.$$

注意到 $C^{-T}BC^{-1}$ 反对称, 我们设特征值为

$$0,0,\cdots,0,\pm a_1i,\pm a_2i,\cdots,\pm a_si, a_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, j=1,2,\cdots,s,$$

从而

$$\left|A^2-B\right|=|C|^2\cdot\prod_{j=1}^{s}\left(1+a_j^2\right)\geqslant|C|^2=|A|^2>0.$$

208. (208.) 设 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 使得 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. 现在

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i, i=1,2,\cdots,n.$$

设

$$|x_i|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|>0,$$

于是

$$|\lambda|\cdot|x_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j|\leqslant|x_i|\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leqslant n\cdot|x_i|\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|.$$

现在我们就证明了

$$|\lambda|\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|.$$

209. (209.) 充分性:
若存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{pmatrix}, P^{-1}B=\begin{pmatrix}B_1\\0\end{pmatrix}, A_{11}\in\mathbb{F}^{k\times k}, B_1\in\mathbb{F}^{k\times m},$$

且满足

$$r\left(\begin{pmatrix}B_1&A_{11}B&A_{11}^2B&\cdots&A_{11}^{n-1}B\end{pmatrix}\right)=k.$$

直接计算得

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$r\left(\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}\right) = k.$$

必要性:

若

$$r\left(\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}\right) = k,$$

则 V 是 $B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B$ 的列向量组张成的线性空间. 这就是包含 B 值域的最小 $A-$ 不变子空间. 注意到 $\dim V = k$, 取 V 的基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k$, 扩充为全空间一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$. 在这组基下, A 的表示矩阵形如 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$.

设 $\mathbb{F}^m$ 的基为 $\epsilon_1', \epsilon_2', \cdots, \epsilon_m'$, $\mathbb{F}^n$ 的基为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$, 我们有矩阵表示

$$B\left(\epsilon_1', \epsilon_2', \cdots, \epsilon_m'\right) = \left(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\right) B.$$

考虑可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得

$$\left(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\right) = \left(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\right) P.$$

于是

$$B\left(\epsilon_1', \epsilon_2', \cdots, \epsilon_m'\right) = \left(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\right) P^{-1}B.$$

因为 V 本身就包含了 B 列向量组全体, 所以 η_i 前 k 个就足以线性表出所有 $B\epsilon_j'$, 所以 $P^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 于是我们完成了证明.

210. (210.) 对 $f \in \mathbb{C}[x]$, 我们知道

$$f(M) = \begin{pmatrix} f(A) & f'(A) \\ 0 & f(A) \end{pmatrix}.$$

所以 f 是 M 零化多项式等价于

$$f(A) = 0, f'(A) = 0,$$

即

$$m \mid (f, f'). \tag{30.146}$$

为了求出(30.146)成立的次数最低的 f, 我们知道(30.146)等价于 λ_j 至少是 f 的 $k_j + 1$ 次根, 即次数最小的满足(30.146)的多项式是

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i+1}.$$

211. (211.) 对一切 $m \in \mathbb{N}$, 注意到

$$\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^m \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^m \Rightarrow \operatorname{tr}\left((A+B)^m\right) = \operatorname{tr}\left(A^m\right) + \operatorname{tr}\left(B^m\right).$$

由数学类线性代数习题48.得 $AB = 0$.

212. (212.)

(1): 对 $M \in \mathbb{Z}^{2\times 2}, \det M = 1$, 记 $t \triangleq \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{Z}$. 我们可写出 M 特征多项式并用哈密顿凯莱定理得

$$M^2 = tM - I \Rightarrow M^4 = t^2M^2 + I - 2tM = \left(t^3 - 2t\right)M - \left(t^2 - 1\right)I.$$

记

$$a \triangleq \operatorname{tr}(A), b \triangleq \operatorname{tr}(B), c \triangleq \operatorname{tr}(C).$$

代入 $A^4+B^4=C^4$ 得

$$\left(a^3-2a\right)A+\left(b^3-2b\right)B-\left(c^3-2c\right)C=\left(a^2+b^2-c^2-1\right)I.$$

两边取 tr 得

$$a^4+b^4-c^4=4\left(a^2+b^2-c^2\right)-2. \tag{30.147}$$

熟知完全平方数模 4 同余 0 或者 1, 而上式右边模 4 同余 2. 所以上式左边只能是 a^2,b^2 模 4 同余 1, c^2 模 4 同余 0, 即 a,b 为奇数, c 为偶数.

注意奇数 4 次方模 8 同余 1, 偶数 4 次方模 8 同余 0, 所以式(30.147)模 8 左边得 2. 又 a^2,b^2 模 8 同余 1, 于是式(30.147)右边可以写做 $4\left(2-4k^2\right)-2$. 现在就需要

$$8\left|\left(4\left(2-4k^2\right)-4\right),\right.$$

即 $2\left|\left(\left(2-4k^2\right)-1\right)\right.$, 这显然不可能!, 至此我们证明了不存在 $A,B,C\in\mathbb{Z}^{2\times2}$ 使得

$$\det A=\det B=\det C=1, A^4+B^4=C^4.$$

(2): 随便取一个满足题目条件的迹为 1 的矩阵 A, 然后取 $B=I-A$ 和 C 是满足题目条件的迹为 0 的矩阵, 则

$$\det B=\det(I-A)=1-\operatorname{tr}(A)+\det A=1,$$

以及

$$A^2+B^2=2A^2-2A+I=2(A-I)-2A+I=-I=C^2.$$

213. (213.) 设 A 全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,s_1,s_2,\cdots,s_n$ 分别是对应 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的初等对称多项式和幂和. 下面归纳证明

$$-\frac{\operatorname{tr}(A_k)}{k}=(-1)^k\sigma_k, k=1,2,\cdots,n. \tag{30.148}$$

以及

$$A_{k+1}=A^{k+1}-\sigma_1A^k+\cdots+(-1)^k\sigma_kA, k=1,2,\cdots,n. \tag{30.149}$$

以及当 $k=1$ 显然(30.148)和(30.149)成立, 下设小于等于 k 时(30.148)和(30.149)都成立.

当 $k+1$ 时我们由牛顿公式23.3有

$$-\frac{\operatorname{tr}(A_{k+1})}{k+1}=-\frac{1}{k+1}\left(s_{k+1}-s_k\sigma_1+\cdots+(-1)^k s_1\sigma_k\right)=(-1)^{k+1}\sigma_{k+1}, k=1,2,\cdots,n-1.$$

然后有

$$A_{k+2}=A^{k+2}-\sigma_1A^{k+1}+\cdots+(-1)^{k+1}\sigma_{k+1}A.$$

由数学归纳法得证(30.148)和(30.149).

设 A 特征多项式为 f, 现在哈密顿凯莱定理告诉我们

$$A_{n+1}=A^{n+1}-\sigma_1A^n+\cdots+(-1)^n\sigma_nA=A\cdot f(A)=0,$$

这就完成了证明.

214. (214.) 注意条件得

$$0=(A+B)^2=A^2+B^2+AB-(AB)^T=A^2+B^2.$$

因为实对称矩阵可以正交相似对角化, 不妨设

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}, B=(b_{ij}).$$

若某个 $\lambda_i \neq 0$, 则

$$AB = 0 \Rightarrow \lambda_i b_{ij} = 0, j = 1, 2, \cdots, n \Rightarrow b_{ij} = 0, j = 1, 2, \cdots, n.$$

现在有

$$0 = \left(A^2 + B^2\right)_{ii} = \lambda_i^2 + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{ki} = \lambda_i^2 - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2 = \lambda_i^2,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了 $A = 0$, 从而 $BB^T = -B^2 = 0$. 于是由命题21.8得 $B = 0$, 从而 $A+B = 0$.

215. (215.) 首先

$$\left(BB^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{jk} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} \frac{1}{ij} = \frac{\min\{i,j\}}{ij} = a_{ij}.$$

于是由瑞丽商21.15得

$$\rho(A) = \rho\left(BB^T\right) = \max_{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}=1} ||B\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}^2.$$

取

$$B = (b_{ij}), b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}, & 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n \\ 0, & 1 \leqslant i < j \leqslant n \end{cases}.$$

现在对 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 由 Hardy 不等式18.73, 我们有

$$||B\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{m=1}^{n} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k \right|^2 \leqslant 4 \sum_{m=1}^{n} |x_m|^2 = 4 ||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}^2,$$

并且当 $n \to +\infty$ 时 4 不可改进. 于是我们知道

$$4 \geqslant \rho(A) = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{||B\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}^2}{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}^2} \geqslant \frac{\left|\left|B\mathbf{x}_0^{(n)}\right|\right|_{\mathbb{R}^n}^2}{\left|\left|\mathbf{x}_0^{(n)}\right|\right|_{\mathbb{R}^n}^2} \to 4, n \to \infty,$$

这里 $\mathbf{x}_0^{(n)}$ 是我们上面 Hardy 不等式最佳常数证明中构造的逼近取等数列. 现在我们证明了

$$\lim_{n \to \infty} \rho(A) = 4.$$

216. (216.) 不失一般性, 不妨设

$$B = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

再设 $A = \{a_{ij}\}$, 然后

$$AB^m = B^m A \Leftrightarrow \lambda_j^m a_{ij} = \lambda_i^m a_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

若 λ_i, λ_j 只有一个为 0, 则 $a_{ij} = 0$, 从而 $\lambda_i a_{ij} = a_{ij} \lambda_j$. 若 λ_i, λ_j 都为 0, 从而 $\lambda_i a_{ij} = a_{ij} \lambda_j$. 若 λ_i, λ_j 都不为 0, 则要么 $a_{ij} = 0$, 要么 $\lambda_i^m = \lambda_j^m$, 从而由非负性得 $\lambda_i = \lambda_j$. 此时仍有 $\lambda_i a_{ij} = a_{ij} \lambda_j$.
现在我们证明了 $AB = BA$.

217. (217.) 当 $W = \{\mathbf{0}\}$ 显然. 下面假设 W 非平凡. 以 W 为基, 扩充为 V 的基. 在这组基下 σ 有表示矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A \in \mathbb{C}^{k \times k}, 1 \leqslant k < n.$$

取 λ_0 是 C 的特征值, 显然也是 σ 的特征值. 然后取

$$\alpha \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n-k} \setminus \{\mathbf{0}\}, (C - \lambda_0 I)\mathbf{y} = 0.$$

现在我们有 $\alpha \notin W$ 以及

$$(\sigma - \lambda_0 I)(\alpha) = \begin{pmatrix} B\mathbf{y} \\ (C - \lambda_0 I)\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in W.$$

218. (218.) 注意到任何 n 元多项式都可表示为 n 元齐次多项式的线性组合, 我们转而证明如下更强的结果.

引理 30.9

数域 $\mathbb{F}$ 上的任一个 n 元齐 m 次多项式都是一次齐次多项式的 m 次方的线性组合.

证明 设 A 是 n 元齐 m 次多项式组成的线性空间, 一次齐次多项式的 m 次方张成的线性空间记为 B. 显然 $B \subset A$.

当 $n=2$, $\dim A$ 相当于把 m 个球放到 2 个不同的允许空的盒子的方法总数, 因此 $\dim A = m+1$. 取

$$(x+jy)^m \in B, j=0,1,2,\cdots,m.$$

设

$$\sum_{j=0}^{m} t_j (x+jy)^m = 0, t_j \in \mathbb{F}, j=0,1,2,\cdots,m.$$

取 $x=0$ 并看为 y 的一元多项式得

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_m = 0.$$

现在 $t_0 x^m = 0$ 得 $t_0 = 0$, 因此我们证明了刚才构造的多项式序列线性无关, 从而 $\dim B = m+1$. 至此我们证明了 $B = A$.

当 $n > 2$, 我们归纳证明 $A \subset B$.

当 $m=1$, 命题显然成立, 假设命题对小于等于 $m-1$ 都成立, 在 m 时我们来证明 B 包含全体

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \in A, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = m, \alpha_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n.$$

不妨设 $\alpha_n > 0$, 此时 $\prod\limits_{j=1}^{n-1} x_j^{\alpha_j}$ 次数严格低于 m 次的齐次多项式, 所以由归纳假设知存在

$$p \in \mathbb{N}, t_j \in \mathbb{F}, \phi_j \in (\mathbb{F}^n)^*, j=1,2,\cdots,p$$

使得

$$\prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{p} t_k \phi_j^{m-\alpha_n}, j=1,2,\cdots,p.$$

对 $\phi_j^{m-\alpha_n} x_n^{\alpha_n}$ 用 $n=2$ 的结果, 我们知存在

$$p' \in \mathbb{N}, t_k' \in \mathbb{F}, \varphi_k \in \left(\mathbb{F}^2\right)^*, k=1,2,\cdots,p'$$

使得

$$\phi_j^{m-\alpha_n} x_n^{\alpha_n} = \sum_{k=1}^{p'} t_k' \varphi_k^m (\phi_j, x_n), j=1,2,\cdots,p'.$$

现在就有

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p'} t_k t_k' \varphi_k^m (\phi_j, x_n) \in B,$$

从而 $A \subset B$. 因此我们知道 $A = B$.

现在由引理30.9就完成了证明.

219. (219.) 首先对 $i=1,2,\cdots,m$, 取 $f_i \in V^*$ 使得[81]

$$\ker f_i = W_i, f_i(\alpha_i) = 1.$$

取 $E \triangleq \{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$, 由定理23.34和 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i = \{\mathbf{0}\}$, 我们有 $\operatorname{span} E = V^*$.

然后我们将证明对偶映射 $T^*: V^* \to V^*$ 是 E 上的置换. 对 $i=1,2,\cdots,m$, 存在 $j \in \{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$T(\alpha_i + W_i) \subset \alpha_j + W_j.$$

[81] 即泛函延拓定理, 有限维的情况当然也是平凡的.

我们设 $\mathbf{x}\in W_i$, 此时有

$$T^*\left(f_j\right)\left(\alpha_i+\mathbf{x}\right)=f_j\left(T\left(\alpha_i+\mathbf{x}\right)\right)\in f_j\left(\alpha_j+W_j\right)=\{1\},$$

即

$$T^*\left(f_j\right)\left(\alpha_i+\mathbf{x}\right)=1=f_i\left(\alpha_i+\mathbf{x}\right).$$

因为 $V=\operatorname{span}\{\alpha_i+W_i\}$, 我们有 $T^*\left(f_j\right)=f_i$, 从而 $E\subset T^*\left(E\right)$. 有限集合满射一定单射得 $T^*\left(E\right)=E$, 即 T^* 是 E 上一个置换.

现在 T^* 在基 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 下为置换矩阵, 因此

$$\det T=\det T^*=\pm1.$$

220. (220.)

221. (221.) 依次让第 $j=n,n-1,\cdots,2$ 列减去第 $n-1,n-2,\cdots,1$ 列得

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\x&1&2&\cdots&n-1\\x&x&1&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x&x&x&\cdots&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x&1-x&1&\cdots&1\\x&0&1-x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x&0&0&\cdots&1-x\end{pmatrix}.$$

按最后一行展开并利用

$$\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1-x&1&\cdots&1&1\\0&1-x&\ddots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1-x&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&x&\cdots&x&x\\0&0&\ddots&x&x\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&x\\0&0&\cdots&0&x\end{pmatrix}=x^{n-1}$$

得

$$\det A_n=(-1)^{n-1}x^{n-1}+(1-x)\det A_{n-1}.$$

求解递推得通项

$$\det A_n=(-1)^{n-1}\left(x^n-(x-1)^n\right).$$

222. (222.) 不妨设 $Q=\begin{pmatrix}I_m\\0\end{pmatrix}$, 否则可以做一个正交变换即可, 则设

$$A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_2^T&A_4\end{pmatrix},A_1\in\mathbb{R}^{m\times m}.$$

于是由 A 正定知 A_1 正定, 所以

$$\left(Q^TAQ\right)^{-1}=A_1^{-1}.$$

另外一方面注意到有分块矩阵的初等变换 (对应合同)

$$\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_2^T&A_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_1&A_2\\0&A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix},$$

因此 $A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2$ 正定, 于是有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_2^T&A_4\end{pmatrix}^{-1}&=\begin{pmatrix}I_m&-A_1^{-1}A_2\\0&I_{n-m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&0\\-A_2^TA_1^{-1}&I_{n-m}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_1^{-1}+A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_2^TA_1^{-1}&*\\*&*\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此

$$Q^TA^{-1}Q=A_1^{-1}+A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_2^TA_1^{-1},$$

所以

$$Q^TA^{-1}Q-\left(Q^TAQ\right)^{-1}=A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_2^TA_1^{-1}\cong A_2\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_2^T.$$

由对任何 $x\in\mathbb{R}^n$, 利用 $\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}$ 是正定的, 我们有

$$x^TA_2\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_2^Tx=\left(A_2^Tx\right)^T\left(A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_2^Tx\geqslant 0,$$

因此我们证明了 $Q^TA^{-1}Q-\left(Q^TAQ\right)^{-1}$ 是半正定矩阵.

223. (223.) 我们直接计算得

$$\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^n a_i+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \sum\limits_{i=1}^n a_i+b & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ \sum\limits_{i=1}^n a_i+b & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^n a_i+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n a_i+b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n a_i+b\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i+b\right).$$

Case 1 若 $b=0$, 则方程组等价于

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

因为 $\sum\limits_{i=1}^n a_i\neq 0$, 则不妨设 $a_1\neq 0$, 其他情况类似讨论, 则方程组基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-a_3\\ 0\\ a_1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\eta_{n-1}=\begin{pmatrix}-a_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ a_1\end{pmatrix}.$$

Case 2 若 $b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$, 此时显然 $\mathbf{1}_n$ 是一个解. 初等变换得

$$\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b, \end{pmatrix}$$

即系数矩阵秩为 $n-1$. 因此所求基础解系为 $\mathbf{1}_n$.

Case 3 若 $b\neq 0,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$, 此时系数矩阵可逆, 因此线性方程组只有 0 解.

224. (224.) 若 S 是无限集, 则存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\in S$. 因此我们设 a 是 A 的非零特征值, 则由 $A\sim\lambda_i A$ 得 $\lambda_i a$ 也是 A 特征值. 至此 A 有无穷多个互不相同特征值 $\lambda_i a,i=1,2,\cdots$, 这就是一个矛盾!. 因此 S 是有限集.

225. (225.) 我们设

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\lambda\in\mathbb{C},A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x},$$

则

$$2x_1+x_2=\lambda x_1,x_{k+1}=(\lambda-2k)\,x_k-x_{k-1},k=2,3,\cdots,n-1.$$

若 $x_1=0$ 递推可得 $\mathbf{x}=0$, 这就是一个矛盾!

现在若 A 有一个超过 2 维的特征子空间 V, 则, 则考虑维数公式得

$$T:V\to\mathbb{C},\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\mapsto x_1$$

必有非零核, 这就和 A 所有特征向量第一个分量不能为 0 矛盾!.

现在 A 实对称, 因此 A 可对角化, 从而 A 有 n 个不同实特征值, 不妨设

$$A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},B=\{b_{ij}\},$$

我们有

$$\lambda_i b_{ij}=b_{ij}\lambda_j\Rightarrow b_{ij}=0,\forall i\neq j,$$

即 B 是对角矩阵. 因此我们证明了 B 可相似对角化. 显然任何对角矩阵都与 A 可交换, 因此 $\dim C[A]=n$.

226. (226.) 设正交矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$PAP^T=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=\Lambda,\lambda_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n.$$

设

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\triangleq\frac{P\mathbf{1}_n}{\sqrt{n}},$$

则 $\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$.

然后

$$S\left(A^k\right)\geqslant\frac{S^k\left(A\right)}{n^{k-1}}\Leftrightarrow\frac{\mathbf{1}_n^TP^T\Lambda^kP\mathbf{1}_n}{n}\geqslant\left(\frac{\mathbf{1}_n^TP^T\Lambda P\mathbf{1}_n}{n}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[k]{\mathbf{x}^T\Lambda^k\mathbf{x}}\geqslant\mathbf{x}^T\Lambda\mathbf{x}\Leftrightarrow\sqrt[k]{\sum_{i=1}^n\lambda_i^kx_i^2}\geqslant\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2.$$

因为 $\sqrt[k]{x}$ 是上凸函数且 $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=1$, 所以由加权 Jensen 不等式直接得

$$\sqrt[k]{\sum_{i=1}^n\lambda_i^kx_i^2}\geqslant\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2.$$

227. (227.) 注意到

$$\begin{aligned}\dim\left(\ker\sigma\bigcap\mathrm{Im}\delta\right)&=\dim\ker\sigma+\dim\mathrm{Im}\delta-\dim\left(\ker\sigma+\mathrm{Im}\delta\right)\\&\geqslant\dim\ker\sigma+\dim\mathrm{Im}\delta-n\\&=n-\mathrm{rank}\sigma+\mathrm{rank}\delta-n\\&\geqslant1,\end{aligned}$$

即存在非 $\mathbf{0}$ 的 $\mathbf{x}\in\ker\sigma\bigcap\mathrm{Im}\delta$. 现在容易由 $\tau\delta=0$ 看到

$$\tau\mathbf{x}=0,\sigma\mathbf{x}=0.$$

228. (228.) 用 $\frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}$ 代替 A 可以不妨设 $|A|=1$.

对可逆矩阵 A, 由数学类线性代数习题34., 我们可以作第三类初等变换把 A 变成

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&|A|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=I_n.$$

现在我们只需要对第三类初等矩阵验证即可.

当 $n=2$, 注意到

$$\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1},a\neq0.$$

转置得 $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$ 的分解, 因此我们知道 $n=2$ 时要证结论成立.

当 $n\geqslant3$, 取 $k\neq i,j$, 我们有

$$I+aE_{ij}=\left(I+aE_{ik}\right)\left(I+E_{kj}\right)\left(I+aE_{ik}\right)^{-1}\left(I+E_{kj}\right)^{-1},$$

因此我们知道 $n\geqslant3$ 时要证结论成立. $n=1$ 显然, 于是我们得证.

229. (229.) 在 $\mathbb{Z}_{2027}$ 上, 我们 $A-2J=E$, 从而在 $\mathbb{R}$ 上 $|A-2J|\neq0$, 即 $A-2J$ 可逆. 现在由定理21.6得

$$n=\mathrm{rank}\left(A-2J\right)\leqslant\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}\left(2J\right)=\mathrm{rank}A+1,$$

即 $\operatorname{rank}A=n$ 或者 $\operatorname{rank}A=n-1$.

注

事实上, 在 $\mathbb{Z}_{2027}$ 上, $A=2J+E$. 此时可直接计算得 $\det A=1+2n$, 因此当

$$n\neq 2027k+1013, k\in\mathbb{N}_0$$

时, $\det A$ 不能被 2027 整除, 所以 A 一定秩为 n.

230. (230.) 对于 $C,D\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, 直接验证有恒等式

$$\det(C+D)=\det C+\det D+\operatorname{tr}\left(C^*D\right),$$

这里 $*$ 表伴随.

于是题目条件告诉我们

$$\operatorname{tr}\left(A^*B_i\right)=0, i=1,2,3,4.$$

考虑

$$f:\mathbb{C}^{2\times 2}\to\mathbb{C}, B\mapsto\operatorname{tr}\left(A^*B\right),$$

即

$$B_i\in\ker f, i=1,2,3,4.$$

注意到

$$A\neq 0\Rightarrow f\left(\overline{(A^*)^T}\right)=\operatorname{tr}\left(A^*\overline{(A^*)^T}\right)\neq 0,$$

这里 $\operatorname{tr}\left(A^*\overline{(A^*)^T}\right)$ 是 A^* 所有元素模的平方和. 于是我们有

$$\dim\ker f=4-\dim\operatorname{Im}f=3,$$

即 B_1,B_2,B_3,B_4 只能线性相关.

231. (231.)

232. (232.) 考虑复内积空间, 实的更简单. 首先固定 $w\in V$, 考虑线性函数 $\eta(\cdot,w),\xi(\cdot,w)$, 由定理23.34得 $c(w)\in\mathbb{C}$ 使得

$$\eta(v,w)=c(w)\xi(v,w),\forall v\in V.$$

对任何 $w,v\in V$, 我们有

$$c(v)\xi(w,v)=\eta(w,v)=\overline{\eta(v,w)}=\overline{c(w)}\cdot\overline{\xi(v,w)}=\overline{c(w)}\cdot\xi(w,v),$$

即

$$\xi(w,v)\neq 0\Rightarrow c(v)=\overline{c(w)}.$$

现在

$$\eta(v,w)=a\xi(v,w),\forall\xi(v,w)\neq 0.$$

由条件上述等式可扩充到

$$\eta(v,w)=a\xi(v,w),\forall v,w\in V.$$

取 $v=w\neq 0$ 并利用正定性可得 $a>0$, 这就完成了证明.

233. (233.)

(a). 形式上考虑 $(1+x)^{\frac{1}{3}}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}C_{\frac{1}{3}}^{i}x^i$ 代入 A 并利用 $A^3=0$ 得

$$B=(I+A)^{\frac{1}{3}}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{\frac{1}{3}}^{i}A^i=I+\frac{1}{3}A-\frac{1}{9}A^2.$$

于是我们可以定义 $B\triangleq I+\frac{1}{3}A-\frac{1}{9}A^2$ 然后验证得 $B^3=I+A$.

(b). 可以猜测

$$B \triangleq e^{\frac{1}{2023}\left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} A^i\right)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

为所求.

事实上,

$$B^{2023} = e^{\left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} A^i\right)} = e^{\ln(I+A)} = A,$$

这里用到了命题23.10.

234. (234.) 由圆盘定理23.40得存在 $1 \leqslant i_0, j_0 \leqslant n$ 使得

$$|\lambda| - |a_{i_0 i_0}| \leqslant |\lambda - a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0 j}|;$$

$$|\lambda| - |a_{j_0 j_0}| \leqslant |\lambda - a_{j_0 j_0}| \leqslant \sum_{i\neq j_0} |a_{i j_0}|,$$

于是

$$|\lambda| \leqslant \min\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right\}.$$

235. (235.) 设

$$s \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{pmatrix},$$

则 $A = I_n + ss^T$. 于是由降阶公式21.7得

$$\det A = \det\left(I_n + ss^T\right) = \det\left(1 + s^T s\right) = 1 + n.$$

236. (236.) 我们将证明

$$\det A_1 = 1, \det A_{n+1} = -\left(\det A_n\right)^2, n = 1, 2, \cdots.$$

首先 $\det A = 1$ 是显然的. 对矩阵 A 做置换相似也不改变行列式.

设 $E_1, E_2, \cdots, E_{2^n-1}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的非空子集的一个排序, 考虑 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的非空子集排序

$$E_1, E_2, \cdots, E_{2^n-1}, \{n+1\}, E_1 \bigcup \{n+1\}, E_2 \bigcup \{n+1\}, \cdots, E_{2^n-1} \bigcup \{n+1\}.$$

现在

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & 0 & A_n \\ 0^T & 1 & \mathbf{1}_{2^n-1}^T \\ A_n & \mathbf{1}_{2^n-1} & J \end{pmatrix}.$$

作不改变行列式的初等变换

$$\begin{pmatrix} A_n & 0 & A_n \\ 0^T & 1 & \mathbf{1}_{2^n-1}^T \\ A_n & \mathbf{1}_{2^n-1} & J \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_n & 0 & A_n \\ 0^T & 1 & \mathbf{1}_{2^n-1}^T \\ A_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_n & 0 & A_n \\ 0^T & 1 & 0^T \\ A_n & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此

$$\det(A_{n+1}) = \det\begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & O \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} A_n & O \\ A_n & A_n \end{pmatrix} = -\left(\det A_n\right)^2,$$

这就证明了

$$\det A_1 = 1, \det A_n = -1, n \geqslant 2.$$

237. (237.) 利用 tr 的交换性我们得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\left(A^2-A\right)^*\left(A^2-A\right)\right)&=\operatorname{tr}\left(\left(A^{2*}-A^*\right)\left(A^2-A\right)\right)\\&=\operatorname{tr}\left(A^{2*}A^2-A^{2*}A-A^*A^2+A^*A\right)\\&=\operatorname{tr}\left(A^{2*}A^2-A^{2*}A-A^*A^2+AA^*\right)\\&=\operatorname{tr}\left(A^*A^2A^*-A^{2*}A\right)=\operatorname{tr}\left(AA^{2*}-A^{2*}A\right)=0,\end{aligned}$$

因此由例题21.17我们有 $A^2=A$.

238. (238.) 不妨设 Q 为对角矩阵, 则设 $\eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ 的分量取值 ±1 且两种情况概率相等. 我们有

$$\mathbb{E}\left(\eta_i\right)=0, i=1,2,\cdots,n.$$

现在对 $G=\left(g_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 我们有

$$\mathbb{E}\left(\eta^TG\eta\right)=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\mathbb{E}\left(\eta_i\eta_j\right)=\sum_{i=1}^n g_{ii}\mathbb{E}\left(1\right)+\sum_{i=1}^n g_{ij}\mathbb{E}\left(\eta_i\right)\mathbb{E}\left(\eta_j\right)=\operatorname{tr}\left(G\right).$$

现在我们有

$$\mathbb{E}\left(\eta^TP\eta\right)=\operatorname{tr}\left(P\right)\geqslant 0,$$

于是存在[82]$\eta_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\eta_0^TP\eta_0\geqslant 0$, 此时还有

$$\eta_0^TQ\eta_0=\operatorname{tr}\left(Q\right)<0.$$

因此我们完成了证明.

239. (239.)

引理 30.10 (The lossless S-lemma)

设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实对称的且存在 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x}_0^TA\mathbf{x}_0>0$.

若

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}\geqslant 0\Rightarrow\mathbf{x}^TB\mathbf{x}\geqslant 0.$$

则存在 $c\geqslant 0$ 使得 $B-cA$ 半正定.

显然这个引理有一个等价的说法:

设 $P_0,P_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的, 则若

$$\mathbf{x}^TP_1\mathbf{x}\leqslant 0\Rightarrow\mathbf{x}^TP_0\mathbf{x}\leqslant 0,$$

必存在 $\lambda\geqslant 0$ 使得 $P_0\leqslant\lambda P_1$. ♡

证明

证明见.

回到原题: 由引理30.10得 $a,b\geqslant 0$ 成立

$$B-aA,A-bB\geqslant 0.$$

因为 A 不能半正定, 所以 $b>0$. 若 $a=0$, 则 B 半正定, 此时由例题23.2得

$$Q_B=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}^TB\mathbf{x}=0\right\}=\ker B=Q_A.$$

[82] 如果你不喜欢概率语言, 实际上你可以证明

$$\sum_{\eta\in\{-1,1\}^n}\eta^TG\eta=2^n\operatorname{tr}\left(G\right)$$

来导出同样的结果.

注意到 $Q_A^\circ \neq \emptyset$, 于是线性空间 $\ker B$ 包含一个非空开集, 所以 $\ker B = \mathbb{R}^n$. 因此 A 半正定, 这和特征值条件矛盾!, 因此 $a > 0$.

注意到

$$(1-ab)A = A - bB + b(B - aA).$$

观察上式右边是半正定矩阵, 因此结合 A 不定可得 $1-ab=0$, 从而 $B = aA$, 即 $\rho \triangleq a$ 为所求.

240. (240.) 对 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 定义线性函数

$$\phi_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \langle \sigma\mathbf{y}, \sigma\mathbf{x} \rangle .$$

注意到

$$\mathbf{y} \in \ker \phi_{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \langle \sigma\mathbf{y}, \sigma\mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \sigma\mathbf{y} \in [\sigma(\operatorname{Span}\{\mathbf{x}\})]^\perp ,$$

于是由条件集合包含关系得

$$[\operatorname{Span}\{\mathbf{x}\}]^\perp \subset \ker \phi_{\mathbf{x}}.$$

又线性函数 $\mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ 的核恰好为 $[\operatorname{Span}\{\mathbf{x}\}]^\perp$. 现在由定理23.34得 $\lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ 成立

$$\langle \sigma\mathbf{y}, \sigma\mathbf{x} \rangle = \lambda(\mathbf{x}) \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle , \forall \mathbf{y} \in V.$$

交换 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 得

$$\langle \sigma\mathbf{x}, \sigma\mathbf{y} \rangle = \lambda(\mathbf{y}) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle , \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

现在对非 $\mathbf{0}$ 的 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, 当 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ 得

$$\lambda(\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}).$$

当 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ 得

$$\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{y}).$$

从而存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\langle \sigma^T \sigma\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \sigma\mathbf{y}, \sigma\mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle , \forall \mathbf{y}, \mathbf{x} \in V.$$

因此我们得到了 $\sigma^T\sigma = \lambda I$.

241. (241.) 注意到

$$A\left(A^3 + A^2B - AB^2 - B^3\right) = (A^3 + A^2B - AB^2 - B^3)(-B).$$

又 $A, -B$ 没有公共特征值. 所以由命题21.5 得

$$A^3 + A^2B - AB^2 - B^3 = 0.$$

再变形得

$$A\left(A^2 - B^2\right) = \left(A^2 - B^2\right)(-B),$$

所以继续由命题21.5 得 $A^2 = B^2$.

再变形得

$$A(A-B) = (A-B)(-B),$$

所以继续由命题21.5 得 $A = B$.

242. (242.) 若 σ, τ 线性相关, 则存在不全为 0 的数 a, b 使得 $a\sigma + b\tau = 0$. 此时显然有 $\ker\sigma$ 是 $\ker\tau$ 子集或 $\ker\tau$ 是 $\ker\sigma$ 子集.

反之, 不妨设 $\ker\sigma \subset \ker\tau$, 我们来证明 σ, τ 线性相关. 当另外一个包含关系成立时是类似的.

考虑线性映射

$$S : \operatorname{Im}\sigma \to V, \sigma(u) \mapsto \tau(u).$$

$\ker\sigma\subset\ker\tau$ 给出线性映射是良定义的. 由条件 $\tau(u),\sigma(u)$ 共线得数字 $c(w)$ 使得

$$S(w)=c(w)w,\forall w\in\mathrm{Im}\sigma.$$

当 $\dim\mathrm{Im}\sigma\geqslant 2$, 对线性无关的 $w_1,w_2\in\mathrm{Im}\sigma$, 我们有

$$S(w_1+w_2)=c(w_1)w_1+c(w_2)w_2=c(w_1+w_2)(w_1+w_2),$$

即

$$c(w_1+w_2)=c(w_1)=c(w_2).$$

现在容易知道当 $w\neq 0,w\in\mathrm{Im}\sigma$ 不为 0 时 $c(w)=c$ 为常数. 现在我们就有

$$\tau(u)=c\sigma(u),\forall u\in V,$$

即 σ,τ 线性相关.

当 $\dim\mathrm{Im}\sigma=0$ 或者 $\dim\mathrm{Im}\tau=0$, 显然 σ,τ 线性相关. 当 $\dim\mathrm{Im}\sigma=1$, 则 $\dim\ker\sigma=n-1$, 从而 $\dim\ker\tau=n$ 或者 $\dim\ker\tau=n-1$. 对于前者显然 σ,τ 线性相关. 对于后者我们有 $\ker\sigma=\ker\tau$. 条件可得数 $\lambda(u)\neq 0$ 使得

$$\sigma(u)=\lambda(u)\tau(u),\forall u\in V.$$

现在 $\mathrm{Im}\sigma=\mathrm{Im}\tau$.

现在考虑秩 1 矩阵可以写成 $\alpha\beta^T$ 知存在

$$w\in V\setminus\{0\},\lambda_1(u),\lambda_2(u)\in V^*$$

使得

$$\sigma(u)=\lambda_1(u)w,\tau(u)=\lambda_2(u)w,\forall u\in W.$$

由定理23.34知 $\ker\lambda_1=\ker\lambda_2$ 得 c 使得 $\lambda_1=c\lambda_2$, 这就证明了 σ,τ 线性相关. 从而我们完成了证明.

243. (243.) 由

$$\begin{pmatrix}I-A^TA & A^T\\ A & -I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & A^T\\ 0 & -I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$$

得

$$\det\begin{pmatrix}I-A^TA & A^T\\ A & -I\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}=(-1)^n.$$

由

$$\begin{pmatrix}I-A^TA & I-A^TB\\ I-B^TA & I-B^TB\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I-A^TA & I-A^TB\\ A^TA-B^TA & A^TB-B^TB\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}I-A^TA & A^T(A-B)\\ (A^T-B^T)A & (A^T-B^T)(B-A)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & A^T-B^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I-A^TA & A^T\\ A & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & A-B\end{pmatrix}$$

得

$$\det\begin{pmatrix}I-A^TA & I-A^TB\\ I-B^TA & I-B^TB\end{pmatrix}=(-1)^n\det(A-B)^2.$$

244. (244.) 当 $\left|E-A^TA\right|=0$ 或者 $\left|E-B^TB\right|=0$ 时要证不等式是显然的, 因此我们只需假设 $E-A^TA,E-B^TB$ 正定.

由非数学线性代数习题19., 我们有

$$\left(E-AA^T\right)^{-1}=E+A\left(E-A^TA\right)^{-1}A^T;$$
$$\left(E-A^TA\right)^{-1}=E+A^T\left(E-AA^T\right)^{-1}A,$$

我们有

$$\left(E-A^TB\right)^T\left(E-A^TA\right)^{-1}\left(E-A^TB\right)=E-B^TB+(A-B)^T\left(E-AA^T\right)^{-1}(A-B).$$

利用例题23.9得

$$\det\left(E-A^TB\right)^2\det\left(E-A^TA\right)^{-1}\geqslant\det\left(E-B^TB\right)+\det(A-B)^2\det\left(E-AA^T\right)^{-1}.$$

利用命题21.7得

$$\det\left(E-A^TB\right)^2\geqslant\det(A-B)^2+\det\left(E-A^TA\right)\det\left(E-B^TB\right).$$

245. (245.) 此题是 2026 浙大高代, 有些莫名其妙.

注意到

$$0=\mathrm{tr}\,(BC-CB)=10\mathrm{tr}\,(A-B)\Rightarrow\mathrm{tr}\,(A)=\mathrm{tr}\,(B),$$

得证.

我们尽可能多的导出结果.

记 $N\triangleq A-B$, 我们证明 N 幂零.

首先

$$\mathrm{tr}\,(BC-CB)=10\mathrm{tr}\,(N)=0.$$

若 $\mathrm{tr}\left(N^k\right)=0$, 则

$$10\mathrm{tr}\left(N^{k+1}\right)=\mathrm{tr}\left(N^kBC-N^kCB\right)=\mathrm{tr}\left(N^kBC-CN^kB\right)=0.$$

即归纳可得

$$\mathrm{tr}\left(N^k\right)=0,k=1,2,\cdots.$$

考虑 N 特征值的幂和为 0, 由牛顿公式23.3知 N 特征值的初等对称多项式为 0, 从而特征值都是 $\lambda^n=0$ 的根, 因此 N 特征值都是 0, 即 N 幂零.

246. (246.) 我们证明更强的, 即对有正定虚部的对称 $Z\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 成立 $C+DZ$ 是可逆的.

取

$$P\triangleq A+BZ,Q\triangleq C+DZ.$$

由条件我们知道

$$A^TC-C^TA=0;$$
$$A^TD-C^TB=E_n;$$
$$B^TC-D^TA=-E_n;$$
$$B^TD-D^TB=0.$$

现在

$$P^T\cdot\overline{Q}-Q^T\cdot\overline{P}=(A^TC-C^TA)+(A^TD-C^TB)\overline{Z}+Z^T(B^TC-D^TA)+Z^T(B^TD-D^TB)\overline{Z}.$$
$$=\overline{Z}-Z^T=\overline{Z}-Z=-2i\cdot\Im(Z).$$

设 $Q\mathbf{x}=\mathbf{0},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$\overline{Q}\mathbf{x}=\overline{Q\overline{\mathbf{x}}}=\overline{Q\mathbf{x}}=\mathbf{0},$$

以及

$$\mathbf{0}=\mathbf{x}^TP^T\cdot\overline{Q}\mathbf{x}-\mathbf{x}^TQ^T\cdot\overline{P}\mathbf{x}=-2i\cdot\mathbf{x}^T\Im(Z)\,\mathbf{x}.$$

由 $\Im(Z)$ 正定得 $\mathbf{x}=0$, 因此特别的 $Q=C+DZ$ 可逆.

247. (247.) 定义

$$p(\lambda)\triangleq\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1, q(\lambda)\triangleq\lambda^4+2\lambda^2+3.$$

显然 $p,q>0$.

设

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_i+\prod_{i=1}^{n}b_i, a_i, b_i\geqslant 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}(a_i+b_i)&\geqslant(a_{n+1}+b_{n+1})\left(\prod_{i=1}^{n}a_i+\prod_{i=1}^{n}b_i\right)\\&\geqslant\prod_{i=1}^{n+1}a_i+\prod_{i=1}^{n+1}b_i,\end{aligned}$$

因此由数学归纳法得

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_i+\prod_{i=1}^{n}b_i, \forall n\in\mathbb{N}, a_i, b_i\geqslant 0.$$

现在设 m_a, m_b, m_c 为 a,b,c 的代数重数, 我们有

$$\det A=\prod_{\xi\in\{a,b,c\}}p(\xi)^{m_\xi}, \det B=\prod_{\xi\in\{a,b,c\}}q(\xi)^{m_\xi}, \det(A+B)=\prod_{\xi\in\{a,b,c\}}(p+q)(\xi)^{m_\xi}.$$

容易看到

$$|A+B|\geqslant|A|+|B|.$$

248. (248.) 对

$$\mathbf{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n), z_i\geqslant 0, z_i\in\mathbb{Q},$$

设 $p\in\mathbb{N}$ 使得

$$pz_i\in\mathbb{Z}, i=1,2,\cdots,n.$$

现在

$$p^2\mathbf{z}A\mathbf{z}^T=(p\mathbf{z})A(p\mathbf{z})^T>0\Rightarrow\mathbf{z}A\mathbf{z}^T>0.$$

由有理数稠密性得对

$$\mathbf{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n), z_i\geqslant 0$$

成立 $\mathbf{z}A\mathbf{z}^T\geqslant 0$.

假如等号成立, 设非负的非 $\mathbf{0}$ 向量 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T=0$. 不妨设 $\mathbf{x}$ 的元素都是正的, 否则考虑子矩阵即可.

对一切 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 取 $\epsilon>0$ 充分小使得 $\mathbf{x}\pm\epsilon\mathbf{y}$ 是非负向量, 从而

$$0\leqslant(\mathbf{x}\pm\epsilon\mathbf{y})A(\mathbf{x}\pm\epsilon\mathbf{y})^T=\pm\epsilon\left(\mathbf{y}A\mathbf{x}^T+\mathbf{x}A\mathbf{y}^T\right)+\epsilon^2\mathbf{y}A\mathbf{y}^T.$$

故两边同时除以 ϵ 并让 $\epsilon\to 0^+$ 得

$$0\leqslant\pm\left(\mathbf{y}A\mathbf{x}^T+\mathbf{x}A\mathbf{y}^T\right)\Rightarrow\mathbf{y}A\mathbf{x}^T+\mathbf{x}A\mathbf{y}^T=0.$$

现在由

$$\mathbf{y}\left(A+A^T\right)\mathbf{x}^T=\mathbf{y}A\mathbf{x}^T+\mathbf{x}A\mathbf{y}^T=0, \forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$$

得

$$\left(A+A^T\right)\mathbf{x}^T=0.$$

Method 1 考虑

$$\mathbb{R}_+^n \triangleq \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n\right\}.$$

注意到 $\mathbb{Q}^n \bigcap \ker\left(A + A^T\right)$ 是拓扑空间 $\ker\left(A + A^T\right)$ 稠密子集, 因此相对 $\ker\left(A + A^T\right)$ 的非空开集 $\mathbb{R}_+^n \bigcap \ker\left(A + A^T\right)$ 必然包含

$$\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^n \bigcap \ker\left(A + A^T\right).$$

此时就有

$$\mathbf{z}\left(A + A^T\right)\mathbf{z}^T = \mathbf{0} \Rightarrow 2\mathbf{z}A\mathbf{z}^T = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}A\mathbf{z}^T = \mathbf{0},$$

这和第一问矛盾!, 因此我们证明了等号不成立.

Method 2 设

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), 0 < \delta < \min\left\{\min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i, 2\right\}$$

现在对任何 $\eta \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, 由狄利克雷逼近定理9.15得

$$p_i \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

使得

$$1 \leqslant q \leqslant \frac{1}{\eta^n}, \left|x_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqslant \frac{\eta^n}{q} \leqslant \frac{\eta}{q}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

注意到

$$\frac{p_i}{q} \geqslant x_i - \frac{\eta}{q} \geqslant \delta - \eta \geqslant \frac{\delta}{2} > 0, i = 1, 2, \cdots, n,$$

因此

$$p_i \geqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n.$$

现在取

$$\mathbf{p} \triangleq \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \mathbf{z} \triangleq q\mathbf{x} - \mathbf{p},$$

以及半正定矩阵 $A + A^T$ 的最大特征值为 $C \geqslant 0$. 现在我们结合瑞丽商21.15有

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\text{条件和矩阵是整数矩阵}}{\leqslant} \mathbf{p}\left(A + A^T\right)\mathbf{p}^T = (q\mathbf{x} - \mathbf{y})\left(A + A^T\right)(q\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \\ &= \mathbf{y}\left(A + A^T\right)\mathbf{y}^T \leqslant C\mathbf{y}\mathbf{y}^T \leqslant Cn\eta^2, \end{aligned}$$

即当 $\eta \to 0^+$ 时矛盾!, 现在我们就证明了等号不成立.

249. (249.) 注意到

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

都是幂零矩阵. 因此 Jordan 标准型的分布唯一被矩阵幂次的秩决定, 即命题21.3.

注意到

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2,$$

因此两个矩阵相似等价于 $r(A) = r(B)$.

250. (250.) 由条件和超过二阶的友矩阵的 a_{11} 元为 0 知 A 的最简有理标准型不能出现二阶块. 因此 A 可相似对角化.

若 A 有两个不同特征值 λ_1, λ_2, 则 A 可相似[83]一个分块对角矩阵, 其中一个块是 $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ 对应友矩阵, 这就是矛盾!

现在我们知道 $A = aE, a \neq 0$.

[83] 即此时对应另外一套有理标准型, 我们称之为非最简的.

251. (251.) 对 $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 我们有

$$\operatorname{tr}\left(X^TAY\right)=\operatorname{tr}\left(Y^TAX\right)\Leftrightarrow\operatorname{tr}\left(Y^T\left(A^T-A\right)X\right)=0.$$

于是当 A 对称则 ρ 对称.

反之当 ρ 对称, 取 $Y=E,X=A-A^T$ 并利用例题21.17得 $A^T=A$.

现在若 A 正定, 设

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix},x_i\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

我们有

$$\rho\left(X,X\right)=\sum_{j=1}^{n}x_j^TAx_j\geqslant 0,$$

且等号成立条件是

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0.$$

于是我们知道 ρ 正定.

反之若 ρ 正定, 则取

$$x_1=x,x_2=\cdots=x_n=0,$$

我们有

$$\rho\left(X,X\right)=x^TAx,$$

因此 A 正定. 我们完成了证明.

252. (252.) 记 $n=8$, 我们对 $n=2^k,k\in\mathbb{N}$ 构造.

首先 A^TA 是半正定矩阵, 而半正定矩阵小于等于对角线的积, 即例题21.10得

$$\left|\det\left(A\right)\right|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)\leqslant n^n\Rightarrow\det\left(A\right)\leqslant n^{\frac{n}{2}}.$$

我们构造

$$H_1\triangleq\begin{pmatrix}1\end{pmatrix},\cdots,H_{2^k}\triangleq\begin{pmatrix}H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}}\\ H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\otimes H_{2^{k-1}},k=1,2,\cdots.$$

由克罗内克积行列式性质23.18得

$$\left|H_1\right|=1,\left|H_{2^k}\right|=\left(\left|H_{2^{k-1}}\right|\right)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}^{2^{k-1}}=2^{2^{k-1}}\cdot\left(\left|H_{2^{k-1}}\right|\right)^2,k=1,2,\cdots.$$

于是我们有

$$\left|H_n\right|=2^{k\cdot 2^{k-1}}=n^{\frac{n}{2}},n=2^k.$$

特别的, 当 $n=8$ 得最大值为 4096.

253. (253.) 注意到

$$A^3-B^3=BA-AB$$

左边是对称矩阵, 右边是反对称矩阵, 所以

$$A^3-B^3=BA-AB=0.$$

A,B 可交换且可相似对角化, 所以由命题23.5知 A,B 可以同时正交相似对角化. 我们不妨设 A,B 都是对角矩阵. 现在由 $A^3=B^3$ 即得 $A=B$.

254. (254.) 设

$$d_{ij}\triangleq-d_{ji},1\leqslant j<i\leqslant n,d_{ii}\triangleq 0,1\leqslant i\leqslant n,$$

此时

$$d_{ij}d_{k\ell}-d_{ik}d_{j\ell}+d_{i\ell}d_{jk}=0,\forall 1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n.$$

如果所有 $d_{ij}=0$, 取两个行向量为 0 向量即可.

若

$$d_{pq}\neq 0,1\leqslant p<q\leqslant n,$$

定义

$$a_{1k}\triangleq\frac{d_{pk}}{d_{pq}},a_{2k}\triangleq d_{qk},k=1,2,\cdots,n.$$

现在我们有

$$\begin{vmatrix}a_{1i}&a_{1j}\\a_{2i}&a_{2j}\end{vmatrix}=a_{1i}a_{2j}-a_{1j}a_{2i}=\frac{d_{pi}}{d_{pq}}d_{qj}-\left(\frac{d_{pj}}{d_{pq}}d_{qi}\right)$$
$$=\frac{1}{d_{pq}}\left(d_{pi}d_{qj}-d_{pj}d_{qi}\right)=\frac{1}{d_{pq}}\left(d_{pq}d_{ij}\right)=d_{ij},$$

因此我们完成了构造.

注[*] 事实上考虑

$$w=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}d_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j.$$

题目等式相当于 $w\wedge w=0$. 要证等式相当于把 $w=\alpha\wedge\beta$, 这里 α,β 是两个一形式, 这是微分几何里熟知的结果.

255. (255.) 记

$$Q\left(\mathbf{x}\right)\triangleq\left\langle\varphi\left(\mathbf{x}\right),\mathbf{x}\right\rangle.$$

由极化恒等式得

$$\left\langle\varphi\left(\mathbf{x}\right),\mathbf{y}\right\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^kQ\left(\mathbf{x}+i^k\mathbf{y}\right)=0,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V,$$

即 $\varphi=0$, 因此满足题目要求的 φ 不存在.

256. (256.) 我们的目标是找一个可逆的 $U\in\left(\mathbb{R}\left[x\right]\right)^{n\times n}$ 使得

$$AU=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

这等价于对 A 做初等列变换.

对 $r,s\in\mathbb{R}\left[x\right]$, 由裴蜀定理得 $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ 使得 $pr+qs=(r,s)$. 于是

$$\begin{pmatrix}r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&-\frac{s}{(r,s)}\\q&\frac{r}{(r,s)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(r,s)&0\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}p&-\frac{s}{(r,s)}\\q&\frac{r}{(r,s)}\end{pmatrix}=1.\tag{30.150}$$

因此我们可以反复做初等列变换得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{只动前两列}} \begin{pmatrix} (a_{11},a_{12}) & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换2,3列}} \begin{pmatrix} (a_{11},a_{12}) & a_{13} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{只动前两列}} \begin{pmatrix} (a_{11},a_{12},a_{13}) & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} (a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

这里只动前两列对应的初等矩阵可以在(30.150)构造的二阶可逆矩阵基础上在右下角补一个单位矩阵使得成为 n 阶可逆矩阵.

现在由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} U^{-1}$$

得 U^{-1} 第一行就是 A 第一行, 把 U^{-1} 第二行乘以 $\det U$ 即得构造.

257. (257.) 我们写出二次型的矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{2n} & -1+\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{2n}-1 \\ -1+\frac{1}{2n} & \frac{3}{2}+\frac{1}{2n} & -1+\frac{1}{2n} & \ddots & \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2n} & -1+\frac{1}{2n} & \frac{3}{2}+\frac{1}{2n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{3}{2}+\frac{1}{2n} & -1+\frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2n}-1 & \frac{1}{2n} & \cdots & -1+\frac{1}{2n} & \frac{3}{2}+\frac{1}{2n} \end{pmatrix}.$$

矩阵 M 是一个循环矩阵. 记 $w \triangleq e^{\frac{2\pi i}{n}}$,

$$p(x) \triangleq \frac{3}{2} - x - x^{n-1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{3}{2} - x - x^{n-1} + \frac{1}{2n}\frac{1-x^n}{1-x}.$$

由循环矩阵的性质23.15得以 $1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}$ 对应的 Vandermonde 的矩阵为过渡矩阵可以把 M 相似成对角矩阵

$$\operatorname{diag}\left\{p(1), p(w), \cdots, p\left(w^{n-1}\right)\right\}.$$

计算得 $p(1)=0$, 以及对 $j=1,2,\cdots,n-1$ 得

$$\begin{aligned} p\left(w^j\right) &= \frac{3}{2} - w^j - w^{(n-1)j} + \frac{1}{2n}\frac{1-w^{nj}}{1-w^j} \\ &= \frac{3}{2} - w^j - w^{-j} = \frac{3}{2} - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right). \end{aligned}$$

要让二次型半正定, 等价于

$$p\left(w^j\right) \geqslant 0, j = 0, 1, \cdots, n-1,$$

当 $n \geqslant 2$, 这也等价于

$$\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \leqslant \frac{3}{4}, j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

注意这些值先减后增且对称, 因此也等价于

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\leqslant\frac{3}{4}\Leftrightarrow 2\leqslant n\leqslant\frac{2\pi}{\arccos\frac{3}{4}}\approx 8.69,$$

于是所求全部 n 为 $1\leqslant n\leqslant 8$.

258. (258.) 注意到 A^{-1} 是 A 的多项式, 即命题21.11, 且由哈密顿凯莱定理得 A 的多项式一定可以被 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 线性表出. 于是存在 $c_i\in\mathbb{C},i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$A^{-t}=\sum_{i=1}^{n}c_iA^{i-1}\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{n}c_iA^{t+i},$$

这就容易得到 $AB=BA$.

259. (259.) 注意到

$$A=(1-c)\,I+c\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T,\mathbf{1}_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n,$$

于是 CD,DC 有完全一样的非 0 特征值得 A 的特征值为

$$1-c+cn,\underbrace{1-c,1-c,\cdots,1-c}_{n-1个}.$$

因为 A 实对称, 于是当且仅当 $0<c<1$ 时 A 正定.

260. (260.) 对 $A|_{\mathrm{Im}B}$ 用秩-零化度定理我们可以得

$$\begin{aligned}r\left(B\right)&=\dim\mathrm{Im}B=\dim\ker A|_{\mathrm{Im}B}+\dim\mathrm{Im}A|_{\mathrm{Im}B}\\&=\dim\left(\ker A\bigcap\mathrm{Im}B\right)+\dim\mathrm{Im}\left(AB\right)\\&\leqslant\dim\ker A+r\left(AB\right)=n-r\left(A\right)+r\left(AB\right),\end{aligned}$$

这就得证不等式且等号成立当且仅当

$$\dim\left(\ker A\bigcap\mathrm{Im}B\right)=\dim\ker A.$$

而上述维数关系也等价于 $\ker A\subset\mathrm{Im}B$.

261. (261.) 考虑反对称矩阵合同标准型得

$$A\cong\begin{pmatrix}0&&&&&&&&&\\&0&&&&&&&&\\&&\ddots&&&&&&&\\&&&0&&&&&&\\&&&&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&&&&&\\&&&&&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&&&&\\&&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&&\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&\\&&&&&&&&\end{pmatrix}.$$

因此 $r(A)$ 是偶数.

对于第二个断言, 由实正规矩阵正交相似标准型23.25, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&A_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\-B_2^T&B_4\end{pmatrix},$$

这里是对应分块且 $A_4, B_4 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是偶数阶可逆反对称, 于是

$$\begin{aligned}|\lambda E - AB| &= \begin{vmatrix} \lambda E & 0 \\ A_4 B_2^T & \lambda E - A_4 B_4 \end{vmatrix} = \lambda^{2026-m} |\lambda E - A_4 B_4| \\ &= |A_4| \cdot \lambda^{2026-m} \cdot \left|\lambda A_4^{-1} - B_4\right|.\end{aligned}$$

我们把 $\lambda A_4^{-1} - B_4$ 看成 $\mathbb{R}[\lambda]$ 的分式域上的反对称矩阵. 众所周知反对称矩阵合同标准型对域特征不为 2 上的反对称矩阵都成立, 因此得某个分式域上的可逆矩阵 $P(\lambda)$ 使得

$$\lambda A_4^{-1} - B_4 = P^T(\lambda) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} P(\lambda),$$

这里对角线不能有 0 是因为显然作为多项式有 $\left|\lambda A_4^{-1} - B_4\right| \neq 0$. 于是

$$\left|\lambda A_4^{-1} - B_4\right| = |P(\lambda)|^2.$$

设

$$|P(\lambda)| = \frac{r(\lambda)}{s(\lambda)}, (r,s) = 1, r, s \in \mathbb{R}[\lambda],$$

我们有

$$s^2(\lambda)\left|\lambda A_4^{-1} - B_4\right| = r^2(\lambda).$$

现在

$$s|r^2, (s,r) = 1 \Rightarrow s|r,$$

我们有 $\left|\lambda A_4^{-1} - B_4\right|$ 是某个多项式的平方, 因此我们证明了 AB 的任一特征值都是偶数重根.

262. (262.) 我们对空间个数 m 归纳证明本题. 当 $m = 1$ 这是显然的, 假设对 m 时命题成立.

Case 1 若 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i$ 包含一个 $n-1$ 维子空间.

考虑维数得 $W \triangleq \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i$ 也是一个 $n-1$ 维子空间. 若 W 不是 W_{m+1} 的子空间, 那么存在 $w \in W$ 使得 $w \notin W_{m+1}$. 考虑维数得

$$W_i = \left(W_i \bigcap W_{m+1}\right) \oplus \operatorname{span}\{w\}, i = 1, 2, \cdots, m,$$

即

$$W_i \subset W_{m+1} \oplus \operatorname{span}\{w\}, i = 1, 2, \cdots, m+1, \dim\left(W_{m+1} \oplus \operatorname{span}\{w\}\right) = n+1,$$

这就得证. 若 W 是 W_{m+1} 的子空间, 则 $W \subset W_i, i = 1, 2, \cdots, m+1$, 这也得证.

Case 2 若 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} W_i$ 被包含于一个 $n+1$ 维子空间.

考虑 $U \triangleq W_1 + W_2 + \cdots + W_m$, 则显然 $\dim U = n+1$. 如果 $W_{m+1} \subset U$, 则

$$W_i \subset U, i = 1, 2, \cdots, m+1,$$

这已经得证. 如果 W_{m+1} 不是 U 子空间, 可取 $w \in W_{m+1}$ 使得 $w \notin U$. 现在考虑维数得

$$W_{m+1} = \left(W_{m+1} \bigcap W_i\right) \oplus \operatorname{span}\{w\}, i = 1, 2, \cdots, m.$$

断言

$$W_{m+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{m+1} W_i\right) \oplus \operatorname{span}\{w\}, i = 1, 2, \cdots, m. \tag{30.151}$$

设

$$x=w_i+a_iw,w_i\in W_i\bigcap W_{m+1},a_i是数字,i=1,2,\cdots,m,$$

则

$$(a_j-a_i)w=w_i-w_j\in U\Rightarrow a_j=a_i\Rightarrow w_i=w_j,$$

因此我们证明了(30.151).

于是

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^{m+1}W_j\right)=n-1,\bigcap_{j=1}^{m+1}W_j\subset W_i,i=1,2,\cdots,m+1,$$

这也得证.

综上所述, 由数学归纳法得对一切 $1\leqslant m\leqslant n$ 都成立, 我们完成了证明.

263. (263.) 考虑

$$W^{\perp}\triangleq\{v\in V:F(v,w)=0,\forall w\in W\}.$$

为了计算 $W^{\perp}$ 的维数, 设 W 的基为

$$w_1,w_2,\cdots,w_s.$$

考虑 F 对应的度量矩阵为 A 以及

$$B\triangleq\begin{pmatrix}w_1&w_2&\cdots&w_s\end{pmatrix}.$$

注意 F 非退化给出 A 可逆, 从而 $r(AB)=s$, 于是关于 v 的线性方程组 $v^TAB=0$ 解空间维数为

$$\dim W^{\perp}=2025-s=2025-\dim W.$$

注意换

$$F|_{W\times W}=0\Rightarrow W\subset W^{\perp},$$

于是

$$\dim W\leqslant 2025-\dim W\Rightarrow\dim W\leqslant\left\lfloor\frac{2025}{2}\right\rfloor=1012.$$

接下来考虑度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0_{1012\times1012}&E_{1012}&0\\E_{1012}&0_{1012\times1012}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

的二次型, 此时

$$W=\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_{1012}\}$$

为所求.

264. (264.) 首先由于实反对称矩阵特征值只有 0 或者纯虚数, 即命题21.16和

$$AB=I_n-(I_n-AB),CD=I_n-(I_n-CD)$$

知 AB,CD 是可逆的, 从而 A,B,C,D 都可逆.

注意到

$$\begin{aligned}AD+B^TC^T&=ABB^{-1}D+B^TD^{-T}D^TC^T\\&=(I_n-(I_n-AB))B^{-1}D+\left(B^{-1}D\right)^{-T}(CD)^T\\&=(I_n-(I_n-AB))B^{-1}D+\left(B^{-1}D\right)^{-T}(I_n+I_n-CD).\end{aligned}$$

设 $u\in\ker\left(AD+B^TC^T\right)$, 然后

$$u^T\left(B^{-1}D\right)^T\left(AD+B^TC^T\right)u=0,$$

即

$$\begin{aligned}0 &= u^T\left(B^{-1}D\right)^T\left(I_n-\left(I_n-AB\right)\right)B^{-1}Du\\&\quad+u^T\left(B^{-1}D\right)^T\left(B^{-1}D\right)^{-T}\left(I_n+I_n-CD\right)u\\&=\left|\left|B^{-1}Du\right|\right|^2+\left|\left|u\right|\right|^2,\end{aligned}$$

即 $u=0$. 于是我们证明了 $AD+B^TC^T$ 可逆.

265. (265.) 显然反对称双线性函数成立

$$[u,u]=0,\forall u\in V.$$

(a). 于是容易看到 n 为偶数, 自然 $n\neq 1$.

(b). 注意由条件显然有 $\beta'\in V$ 使得 $[\alpha,\beta']\neq 0$. 于是取 $\beta=\frac{\beta'}{[\alpha,\beta']}\in V$ 就有

$$[\alpha,\beta]=\left[\alpha,\frac{\beta'}{[\alpha,\beta']}\right]=\frac{[\alpha,\beta']}{[\alpha,\beta']}=1.$$

(c). 显然 K 是 V 的子空间. 对 $v\in V$, 我们有分解

$$v=\underbrace{[v,\beta]\,\alpha-[v,\alpha]\,\beta}_{\in K}+\underbrace{v-\left([v,\beta]\,\alpha-[v,\alpha]\,\beta\right)}_{\in K^\perp}.$$

若 $a\alpha+b\beta\in K^\perp\bigcap K$, 我们有

$$[a\alpha+b\beta,\alpha]=b=0,[a\alpha+b\beta,\beta]=a=0.$$

因此我们证明了 $V=K\oplus K^\perp$.

(d). 注意到条件即 $[\cdot,\cdot]$ 是 V 上非退化反对称双线性函数, 其度量矩阵是可逆反对称矩阵. 因此由实反对称矩阵的合同标准型23.17得存在 V 的一组基 $\epsilon_{\pm1},\epsilon_{\pm2},\cdots,\epsilon_{\pm k}$ 成立

$$[\epsilon_i,\epsilon_{-i}]=1,i=1,2,\cdots,k;$$

$$[\epsilon_i,\epsilon_j]=0,\forall i,j\in\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm k\},i+j\neq 0,$$

这里即对应度量

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\-1&0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&0&\cdots&-1&0\end{pmatrix}.$$

因此也有 n 为偶数.

266. (266.) 首先容易证明

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\leqslant\frac{n}{\ln 2},n=1,2,\cdots.$$

设 A 特征多项式为

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n.$$

然后由韦达定理和 f 特征值绝对值不超过 1 得

$$|a_k|\leqslant C_n^k,k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

于是由哈密顿凯莱定理得

$$||A^n|| = \left|\left|-\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k\right|\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot \left|\left|A^k\right|\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot ||A||^k = (1+||A||)^n - ||A||^n .$$

现在

$$||A^n|| \leqslant \min\left\{(1+||A||)^n - ||A||^n, ||A||^n\right\}.$$

当 $||A|| \leqslant \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}$, 我们有

$$||A^n|| \leqslant ||A||^n \leqslant \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1} ||A||^{n-1} \leqslant \frac{n}{\ln 2} ||A||^{n-1}.$$

当 $||A|| > \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}$, 我们有

$$||A^n|| \leqslant ||A||^{n-1} \frac{(1+||A||)^n - ||A||^n}{||A||^{n-1}} \leqslant ||A||^{n-1} \frac{\left(1+\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)^n - \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)^n}{\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)^{n-1}} = \frac{||A||^{n-1}}{2^{\frac{1}{n}}-1} \leqslant \frac{n}{\ln 2} ||A||^{n-1},$$

这里用到了 $\frac{(1+r)^n - r^n}{r^{n-1}}$ 在 $\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}, +\infty\right)$ 递减.

267. (267.) 首先

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{i^2+j^2} > 0,$$

于是 A 显然有一个正特征值. 记

$$S = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

在 S 上有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{i^2+j^2} x_i x_j = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \frac{\left(1-e^{-\left(i^2+j^2\right)s}\right) x_i x_j}{s^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}s$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-i^2 s} x_i\right)^2}{s^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}s \leqslant 0.$$

且等号成立等价于

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i^2} = 0, t = e^{-s} \in (0,1),$$

即 $x_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

现在我们知道二次型在 S 上是负定的, 因此考虑二次型在 S 上的度量矩阵 B, 我们选一个基使得二次型在原空间的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & \alpha^T \\ \alpha & B \end{pmatrix}.$$

现在由 Cauchy 交错定理21.10得[84] A 有一个正特征值和 $n-1$ 个负特征值, 从而得证 $\det A>0$ 的充要条件是 n 为奇数.

268. (268.) 不妨设 $a_m^2+b_m^2\neq 0$, 记

$$c_k\triangleq\begin{cases}\frac{a_k-ib_k}{2}, & k=1,2,\cdots,m\\ a_0, & k=0\\ \frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}, & k=-1,-2,\cdots,-m\end{cases},$$

则

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}+b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right)\\&=a_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikx}+\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}\\&=\sum_{k=-m}^{m}c_ke^{ikx}.\end{aligned}$$

考虑

$$p(z)\triangleq\sum_{k=-m}^{m}c_kz^{k+m}\in\mathbb{C}[z],$$

我们有

$$\overline{p\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}=\sum_{k=-m}^{m}\overline{c_k}\left(\frac{1}{z}\right)^{k+m}=\sum_{k=-m}^{m}c_{-k}\left(\frac{1}{z}\right)^{k+m}=\sum_{k=-m}^{m}c_kz^{k-m}=\frac{1}{z^{2m}}p(z).$$

于是若 $\alpha\neq 0$ 是 p 的根则 $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ 也是 p 的根. 若 $\alpha=0$ 是 p 的根则 $a_m=b_m=0$ 而矛盾!.

现在若 $\alpha=e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}$ 是 p 的根, 则 θ 是 f 的根, 因为 f 非负, 我们知道 θ 是 f 极小值点, 从而也是 f 的二重根, 自然也是 p 的二重根. 假设 p 的所有根为

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\frac{1}{\overline{\alpha_1}},\frac{1}{\overline{\alpha_2}},\cdots,\frac{1}{\overline{\alpha_s}},\beta_1,\beta_1,\beta_2,\beta_2,\cdots,\beta_{m-s},\beta_{m-s},$$

这里

$$|\alpha_i|<1,i=1,2,\cdots,s,|\beta_i|=1,i=1,2,\cdots,m-s.$$

于是我们有

$$p(z)=c_m\prod_{j=1}^{s}(z-\alpha_j)\left(z-\frac{1}{\overline{\alpha_j}}\right)\prod_{j=1}^{m-s}(z-\beta_j)^2.$$

现在取

$$q(z)\triangleq\left(\sqrt{c_m\cdot\prod_{j=1}^{s}\frac{1}{\overline{\alpha_j}}}\right)\cdot\prod_{j=1}^{s}(z-\alpha_j)\prod_{j=1}^{m-s}(z-\beta_j)=\sum_{j=0}^{m}q_jz^j\in\mathbb{C}[z],$$

[84] 合同不改变正负特征值个数.

我们有

$$\begin{aligned}
\left|q\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 &= \left|\left|c_m\right| \cdot \prod_{j=1}^{s}\left|\frac{1}{\alpha_j}\right| \cdot \prod_{j=1}^{s}\left|e^{i\theta}-\alpha_j\right|^2 \prod_{j=1}^{m-s}\left|e^{i\theta}-\beta_j\right|^2\right| \\
&= \left|\left|c_m\right| \cdot \prod_{j=1}^{s}\left|\frac{1}{\alpha_j}\right| \cdot \prod_{j=1}^{s}\left(e^{i\theta}-\alpha_j\right)\left(e^{-i\theta}-\overline{\alpha_j}\right) \prod_{j=1}^{m-s}\left|e^{i\theta}-\beta_j\right|^2\right| \\
&= \left|\left|c_m\right| \cdot e^{-is\theta} \cdot \prod_{j=1}^{s}\left|\frac{1}{\alpha_j}\right| \cdot \prod_{j=1}^{s}\overline{\alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^{s}\left(e^{i\theta}-\alpha_j\right)\left(\frac{1}{\overline{\alpha_j}}-e^{i\theta}\right) \prod_{j=1}^{m-s}\left|e^{i\theta}-\beta_j\right|^2\right| \\
&= \left|c_m\right| \prod_{j=1}^{s}\left(\left|e^{i\theta}-\alpha_j\right| \cdot \left|e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{\alpha_j}}\right|\right) \prod_{j=1}^{m-s}\left|e^{i\theta}-\beta_j\right|^2 \\
&= \left|p\left(e^{i\theta}\right)\right| = \left|e^{im\theta} f(\theta)\right| = |f(\theta)| = f(\theta).
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{m} q_j e^{ji\theta}\right|^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\int_0^{2\pi} q_j\overline{q_k}e^{(j-k)i\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{m}\int_0^{2\pi}\left|q_j\right|^2\mathrm{d}\theta = \sum_{j=0}^{m}\left|q_j\right|^2,
\end{aligned}$$

即由 Cauchy 不等式得

$$f(\theta) = \left|\sum_{j=0}^{m} q_j e^{ji\theta}\right|^2 \leqslant (m+1)\sum_{j=0}^{m}\left|q_j\right|^2 = (m+1)\,a_0.$$

269. (269.) 注意在原点邻域内

$$z \mapsto (I_n - zA_1)^{-1} + (I_n - zA_2)^{-1} + \cdots + (I_n - zA_n)^{-1}$$

是全纯映射. 若在原点某去心邻域

$$\left|\left|(I_n - zA_1)^{-1} + (I_n - zA_2)^{-1} + \cdots + (I_n - zA_p)^{-1}\right|\right| < p\,||I_n||$$

恒成立, 则由全纯映射最大模定理[85]得在原点某邻域有

$$\left|\left|(I_n - zA_1)^{-1} + (I_n - zA_2)^{-1} + \cdots + (I_n - zA_p)^{-1}\right|\right| = p\,||I_n||,$$

于是这就矛盾!. 因此我们证明了对任何 $x>0$, 存在 $z\in\mathbb{C}$ 使得

$$0<|z|<x, \left|\left|(I_n - zA_1)^{-1} + (I_n - zA_2)^{-1} + \cdots + (I_n - zA_p)^{-1}\right|\right| \geqslant p\,||I_n||.$$

270. (270.) 不妨设 $G\neq\{I\}$. **Step 1**

首先对 G 中的 A, 若 A 的特征值全为 1 但 A 不等于 I. A 的 Jordan 标准型必有超过 2 阶的块, 这个块的 k 次方不为单位矩阵, 从而

$$\lim_{k\to\infty}\left|\left|A^k - I\right|\right| = +\infty,$$

这就和 $\left|\left|A^k - I\right|\right| < a$ 矛盾!.

我们的想法是证明 G 中的矩阵特征值全体 S 是有限的, 从而记

$$\delta \triangleq \min\{|\lambda - 1| : \lambda \in S\setminus\{1\}\} > 0.$$

[85]你可以参考任何一本多复变函数论, 例如涂振汉, 多元复分析.

对 $A\in G\setminus\{I\}$, 取 A 特征值 $\lambda\neq 1$ 以及对应的单位特征向量 $\mathbf{z}$ 成立

$$||A-I_n||\geqslant||(A-I_n)\mathbf{z}||_{\mathbb{C}^n}=|\lambda-1|\geqslant\delta.$$

现在对不相同的 $A,B\in G$, 我们有

$$||A-B||\geqslant\frac{\left|\left|I-A^{-1}B\right|\right|}{||A^{-1}||}\geqslant\frac{\delta}{a+1}>0.$$

因此 G 是列紧的离散集, 从而 G 是有限集.

Step 2

我们来证明 G 中的矩阵特征值全体 S 是有限的. 对 $A\in G$, 相似 **Step 1**, 设 A 有特征值 λ, 则

$$\left|\lambda^k-1\right|\leqslant\left|\left|A^k-I\right|\right|<a,\forall k\in\mathbb{Z}.$$

让 $k\to\infty$ 得 $|\lambda|=1$.

若 λ 不是单位根, 则可写

$$\lambda=e^{2\pi i\theta},\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

由 $\{k\theta:k\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 稠密[86]得 $\left\{\lambda^k:k\in\mathbb{Z}\right\}$ 在单位圆周稠密. 所以取 $\lambda^{k_i}\to-1$ 得

$$2=\lim_{i\to\infty}\left|\lambda^{k_i}-1\right|\leqslant a<2,$$

这就是一个矛盾!. 因此我们有 λ 是 $m\in\mathbb{N}$ 次单位根且 $\left\{\lambda^k,k\in\mathbb{Z}\right\}$ 会遍历所有 m 次单位根. 注意以 1 为心, 半径为 a 的闭圆要包含所有 m 次单位根, 则 m 为奇数, 否则 -1 将落在这个圆内. 然后对奇数 m, 离 1 最远的 m 次单位根为 $e^{\pm i\pi\left(1-\frac{1}{m}\right)}$, 因此

$$a\geqslant\left|1-e^{\pm i\pi\left(1-\frac{1}{m}\right)}\right|=2\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Rightarrow m\leqslant\frac{\pi}{2\arccos\frac{a}{2}},$$

这就证明了 S 是有限集. 我们得证.

271. (271.) 待定 $D\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 然后做初等变换

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\overset{\text{只对前}r\text{行, 列做变换}}{\to}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k&0\\0&0\end{pmatrix}&B'\\C'&D\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\B_1'&B_2'\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&C_1'\\0&C_2'\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}D_1'&D_2'\\D_3'&D_4'\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\E_{r-k}&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&E_{r-k}\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}D_1''&D_2''\\D_3''&D_4''\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

于是可取

$$\begin{pmatrix}D_1''&D_2''\\D_3''&D_4''\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}0&0\\0&E_{n-2r+k}\end{pmatrix}$$

使得 $P=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ 是可逆的. 现在直接验证得

$$\begin{pmatrix}A&0\\C&0\end{pmatrix}P=P\begin{pmatrix}A&B\\0&0\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}A&0\\C&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A&B\\0&0\end{pmatrix}$.

272. (272.) 由命题23.16知一切迹 0 矩阵都可以相似为对角线全为 0 的矩阵. 因此我们不妨设 A 对角线全为 0.

[86] 见命题9.9.

取 $d_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$ 使得 $f(d_i), i=1,2,\cdots,n$ 互不相同. 然后记

$$D \triangleq \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}.$$

记 $A=L-U$, 这里 L 是对角线全为 0 的下三角矩阵, U 是对角线全为 0 的上三角矩阵.
注意到

$$L+f(D), U+f(D), f(D)$$

都是有相同的 n 个不同特征值的矩阵, 因此相似, 所以存在可逆的 $S,T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$L+f(D)=S^{-1}f(D)S, U+f(D)=T^{-1}f(D)T.$$

取可逆矩阵

$$A \triangleq S^{-1}T, B \triangleq T^{-1}DS,$$

我们有

$$f(AB)-f(BA)=S^{-1}f(D)S-T^{-1}f(D)T=L-U=A.$$

因此我们完成了证明.

273. (273.) 我们不妨设 A 是 Jordan 标准型, 即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix},$$

这里 $A_i \in \mathbb{C}^{s_i\times s_i}$ 是对角线为 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ 的上三角矩阵且 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,t$ 互不相同.
现在取

$$B \triangleq \begin{pmatrix} \operatorname{diag}\{\lambda_1-1, \lambda_1-2, \cdots, \lambda_1-s_1\} & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{diag}\{\lambda_t-1, \lambda_t-2, \cdots, \lambda_t-s_t\} \end{pmatrix}.$$

又 $A-B$ 是分块上三角矩阵且每个块对角线元素互不相同, 从而每个块可对角化, 因此 $C \triangleq A-B$ 可对角化, 我们完成了证明.

274. (274.) 设

$$\operatorname{Im}C=\operatorname{span}\{\alpha\}, \alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\},$$

我们只需证明 $A^2\alpha=0$.
由 $A^2=CA-AC$ 可得 $U \triangleq \operatorname{span}\{\alpha, A\alpha\}$ 是 A 的不变子空间. 相似例题23.6的证明我们知道 A^2 是幂零矩阵, 从而 A 也是幂零矩阵, 因此 $(A|_U)^2=0$, 于是我们有 $A^2C=0$.

275. (275.) 考虑

$$U \triangleq \operatorname{span}\left\{P\alpha : P \in \mathbb{R}^{n\times n}\text{是置换矩阵}\right\}.$$

由 α 和元素全为 1 的列向量线性无关得 α 必有两个分量 $\alpha_i \neq \alpha_j$. 于是交换两个分量做差得

$$(\alpha_i-\alpha_j)(e_i-e_j) \in U \Rightarrow e_i-e_j \in U.$$

现在我们可以任意交换 α 分量的位置使得 α 两个不同分量位于第 p,q 个位置, 从而 $e_p-e_q \in U$.
记

$$V \triangleq \operatorname{span}\{e_p-e_q : 1 \leqslant p,q \leqslant n\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\right\},$$

我们有 $V \subset U$.
若 α 所有元素和为 0, 则

$$U \subset V \Rightarrow U=V \Rightarrow \dim U=n-1,$$

即所求向量组的秩为 $n-1$.

若 α 所有元素和不为 0, 则 V 是 U 的真子空间, 因此 $\dim U=n$, 即所求向量组的秩为 n.

276. (276.) 设记 $C\triangleq A-B$, 由半正定矩阵存在半正定平方根, 即定理23.5, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(A^2\right)&=\operatorname{tr}\left((B+C)^2\right)=\operatorname{tr}\left(B^2\right)+\operatorname{tr}\left(C^2\right)+2\operatorname{tr}\left(BC\right)\\&=\operatorname{tr}\left(B^2\right)+\operatorname{tr}\left(C^2\right)+2\operatorname{tr}\left(B^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}\right)\geqslant\operatorname{tr}\left(B^2\right),\end{aligned}$$

这里用到了半正定矩阵的迹之和非负.

277. (277.) 对 $A\in W$, 考虑

$$l_A:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n},X\mapsto AX-XA.$$

由定理23.21得 l_A 可对角化. 由条件得 W 是 l_A- 不变子空间. 由引理23.1得 $l_A|_W$ 也可对角化.

设非零矩阵 $X\in W$ 以及非零复数 λ 使得 $l_AX=\lambda X$. 类似例题23.6的证明, 经典的牛顿公式技巧得 X 幂零. 结合 X 可对角化得 $X=0$ 而矛盾!, 所以 $l_A|_W$ 只有 0 特征值, 可对角化给出 $l_A|_W=0$. 现在由 A 任意性可得 W 中矩阵两两可交换. 由命题23.4可得 W 中矩阵可以同时相似对角化.

278. (278.) 首先若

$$AB^m-B^mA=m\mu B^m,m\in\mathbb{N},$$

我们有

$$\begin{aligned}&AB^{m+1}-B^{m+1}A-\mu B^{m+1}=AB^{m+1}-B^m\left(BA+\mu B\right)\\&=AB^{m+1}-B^mAB=\left(AB^m-B^mA\right)B=m\mu B^{m+1},\end{aligned}$$

即

$$AB^{m+1}-B^{m+1}A=\mu\left(m+1\right)B^{m+1}.$$

因此数学归纳法可得

$$AB^m-B^mA=m\mu B^m,\forall m\in\mathbb{N}.$$

我们把上面式子改写为

$$AB^m=B^m\left(A+m\mu I\right),\forall m\in\mathbb{N}.$$

现在设 $\mathbf{x}$ 是 A 属于任一特征值 λ 的特征向量且 $B^k\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 我们有

$$A\left(B^m\mathbf{x}\right)=B^m\left(A+m\mu I\right)\mathbf{x}=\left(\lambda+m\mu\right)B^m\mathbf{x},\forall m\in\mathbb{N}.$$

因为

$$B^m\mathbf{x}\neq\mathbf{0},m=0,1,2,\cdots,k,$$

我们有

$$\lambda+m\mu,m=0,1,2,\cdots,k$$

是 A 的 $k+1$ 个不同特征值, 矛盾!. 因此

$$\ker\left(A-\lambda I\right)\subset\ker B^k,\forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

现在结合不同特征子空间的和是直和就有

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\left(n-\operatorname{rank}\left(\lambda E-A\right)\right)=\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim\ker\left(\lambda E-A\right)\\&\leqslant\dim\ker\left(B^k\right)=n-\operatorname{rank}\left(B^k\right),\end{aligned}$$

我们完成了证明.

279. (279.) 由 Jordan 标准型, 不妨设

$$A=\begin{pmatrix}0_{(n-2s)\times(n-2s)} & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}, A_i=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s.$$

对应分块 $B=(B_{ij})$, 我们由 $AB+BA=E$ 可得

$$0B_{11}+B_{11}0=E_{n-2s},$$

即 $n=2s$. 因此我们证明了 $\dim V$ 为偶数且 $s=\frac{n}{2}$.
设 $\mathbf{x}\in A^{-1}(0)$, 则

$$\mathbf{x}=AB\mathbf{x}+BA\mathbf{x}=A(B\mathbf{x}),B(B\mathbf{x})=0,$$

即

$$A^{-1}(0)\subset A\left(B^{-1}(0)\right).$$

反之设

$$A\mathbf{x}\in A\left(B^{-1}(0)\right),\mathbf{x}\in B^{-1}(0),$$

我们有 $A(A\mathbf{x})=0$, 即

$$A\left(B^{-1}(0)\right)\subset A^{-1}(0).$$

于是我们有

$$A\left(B^{-1}(0)\right)=A^{-1}(0).$$

对 $\mathbf{x}\in V$, 我们有

$$\mathbf{x}=(AB+BA)\mathbf{x}=\underbrace{AB\mathbf{x}}_{\in A^{-1}(0)}+\underbrace{BA\mathbf{x}}_{\in B^{-1}(0)}.$$

设 $\mathbf{x}\in A^{-1}(0)\bigcap B^{-1}(0)$, 我们有

$$\mathbf{x}=AB\mathbf{x}+BA\mathbf{x}=\mathbf{0},$$

从而我们有

$$V=A^{-1}(0)\oplus B^{-1}(0).$$

280. (280.) 首先取 $\mathbf{y}\triangleq X^{-1}\mathbf{x}$ 可知等号成立. 然后对任何 $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$, 因为

$$\mathbf{x}^*X^{-1}\mathbf{x}-(2\Re(\mathbf{x}^*\mathbf{y})-\mathbf{y}^*X\mathbf{y})=\left(\mathbf{y}-X^{-1}\mathbf{x}\right)^*X\left(\mathbf{y}-X^{-1}\mathbf{x}\right)\geqslant 0,$$

于是我们证明了

$$\mathbf{x}^*X^{-1}\mathbf{x}=\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n}(2\Re(\mathbf{x}^*\mathbf{y})-\mathbf{y}^*X\mathbf{y}).$$

281. (281.) 由数学类线性代数习题280., 对 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k A_i\right)^{-1}\mathbf{x}&=\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n}\left(2\Re(\mathbf{x}^*\mathbf{y})-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\mathbf{y}^*A_i\mathbf{y}\right)\\&=\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k(2\Re(\mathbf{x}^*\mathbf{y})-\mathbf{y}^*A_i\mathbf{y})\right]\\&\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n}(2\Re(\mathbf{x}^*\mathbf{y})-\mathbf{y}^*A_i\mathbf{y})\\&=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\mathbf{x}^*A_i^{-1}\mathbf{x}=\mathbf{x}^*\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k A_i^{-1}\right)\mathbf{x},\end{aligned}$$

这就证明

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}-\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{-1}$$

是半正定 Hermite 矩阵.

282. (282.) 显然 $\sum\limits_{i=1}^{k}A_i,\sum\limits_{i=1}^{k}A_i^{-1}$ 都是正定矩阵, 所以由引理21.1可得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k}A_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{k}A_i^{-1}\right)$ 的特征值为正. 由数学类线性代数习题281.得

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}-\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{-1}$$

半正定. 由正定矩阵存在正定平方根, 即定理23.5 得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}-k^2\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}\\=&\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}-k^2I\end{aligned}$$

半正定. 因此矩阵

$$\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

的特征值都大于等于 k^2.

现在我们由

$$\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)^{\frac{1}{2}}\sim\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}\right)$$

得

$$\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^{-1}\right)$$

的特征值都大于等于 k^2.

283. (283.) 首先回忆定理23.19给出了有限个正定矩阵的 Hadamard 积也正定, 有限个半正定矩阵的 Hadamard 积也半正定.

考虑同时的初等变换[87]

$$\begin{pmatrix}A^{-1}&E\\E&A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A^{-1}&E\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{pmatrix}A^{-1}&E\\E&A\end{pmatrix}$ 半正定. 于是我们知道

$$\begin{pmatrix}A^{-1}&E\\E&A\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}A&E\\E&A^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}\circ A&E\\E&A\circ A^{-1}\end{pmatrix}$$

也是半正定矩阵, 所以考虑同时的初等变换[88]

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}A^{-1}\circ A&E\\E&A\circ A^{-1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A^{-1}\circ A&E\\0&A\circ A^{-1}-\left(A^{-1}\circ A\right)^{-1}\end{pmatrix}\\\to&\begin{pmatrix}A^{-1}\circ A&0\\0&A\circ A^{-1}-\left(A^{-1}\circ A\right)^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

[87] 由定理21.4可得这也是合同变换.

[88] 由定理21.4可得这也是合同变换.

得

$$\begin{pmatrix} A^{-1}\circ A & 0 \\ 0 & A\circ A^{-1}-\left(A^{-1}\circ A\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

是半正定矩阵, 因此 $A\circ A^{-1}-\left(A^{-1}\circ A\right)^{-1}$ 是半正定矩阵, 从而 $A\circ A^{-1}$ 的特征值[89]λ 满足

$$\lambda-\lambda^{-1}\geqslant 0\Rightarrow \lambda\geqslant 1,$$

这就证明了 $A\circ A^{-1}-I$ 是半正定矩阵.

当 A,B 对角线都为 1, 我们有 $A^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}$ 的行平方和都为 1, 于是由 Cauchy 不等式得 $A^{\frac{1}{2}}\circ B^{\frac{1}{2}}$ 的每行元素绝对值之和小于等于 1. 由圆盘定理23.40得 $A^{\frac{1}{2}}\circ B^{\frac{1}{2}}=(c_{ij})$ 的每个特征值 $\lambda>0$ 满足

$$|\lambda-c_{ii}|\leqslant\sum_{j\neq i}|c_{ij}|,$$

从而 $\lambda\leqslant 1$, 因此我们有 $I-A^{\frac{1}{2}}\circ B^{\frac{1}{2}}$ 半正定.

284. (284.) **Method 1** 得到一个更强的恒等式.

首先初等变换得

$$\begin{pmatrix} I-BC & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I-BC & 0 & 0\\ B & B & 0\\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I-BC & 0 & 0\\ B^2C & B & 0\\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} I & B & 0\\ BC & B & 0\\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ BC & B-BCB & 0\\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & B\left(I-C\right)B & 0\\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} &r\left(I-BC\right)+r\left(B\right)+r\left(C\right)=n+r\left(C\right)+r\left(B\left(I-C\right)B\right)\\ &\leqslant n+r\left(C\right)+r\left(I-C\right)=2n, \end{aligned}$$

这里最后一个等号来自 C 是幂等矩阵.

Method 2 最简单的方法.

我们有

$$r\left(I-BC\right)\leqslant r\left(I-C\right)+r\left(C\left(I-B\right)\right)\leqslant r\left(I-C\right)+r\left(I-B\right)=2n-r\left(B\right)-r\left(C\right),$$

这就得证.

285. (285.) 因为与所有矩阵可交换的矩阵是数量矩阵即命题21.6, 我们知存在 $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 使得

$$A^m=aI,A^n=bI.$$

裴蜀等式得 $u,v\in\mathbb{Z}$ 使得 $um+vn=1$, 于是

$$A=A^{um+vn}=\left(A^m\right)^u\left(A^n\right)^v=a^ub^vI,$$

因此

$$AB=BA,\forall B\in\mathbb{R}^{p\times p}.$$

286. (286.)

(a). 由条件得 $I-A^TA$ 半正定. 对 A 的不动点 $\mathbf{x}$, 我们有

$$\mathbf{x}^T\left(I-A^TA\right)\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{x}-\left(A\mathbf{x}\right)^T\left(A\mathbf{x}\right)=0.$$

由例题23.2我们得

$$\left(I-A^TA\right)\mathbf{x}=\mathbf{0},$$

[89]这里用到了 A^{-1} 是 A 的多项式.

即 $A^T\mathbf{x}=\mathbf{x}$, 得证.

(b). 直接计算得 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 是 A 不动点但不是 A^T 不动点以及 A 的奇异值为 $\sqrt{2},0$.

(c). 对 A 的不动点 $\mathbf{x}$, 我们有

$$\begin{aligned}0&=\mathbf{x}^T\left(A-I\right)^T\left(A-I\right)\mathbf{x}\\&=\mathbf{x}^T\left(A^TA-A^T-A+I\right)\mathbf{x}\\&=\mathbf{x}^T\left(AA^T-A^T-A+I\right)\mathbf{x}\\&=\mathbf{x}^T\left(A-I\right)\left(A-I\right)^T\mathbf{x}\\&=\left\|\left(A-I\right)^T\mathbf{x}\right\|^2,\end{aligned}$$

即

$$\left(A-I\right)^T\mathbf{x}=0\Rightarrow A^T\mathbf{x}=\mathbf{x},$$

这就得证.

287. (287.)

(a). 若 $[X,Y]=0$, 和

$$e^{x+y}=e^xe^y=e^ye^x$$

的级数证明完全一样容易得到

$$e^{X+Y}=e^Xe^Y=e^Ye^X$$

(b). 若

$$[X,[X,Y]]=[Y,[X,Y]]=0,$$

由定理23.33, 即 Baker–Campbell–Hausdorf 公式得

$$e^{tX}Ye^{-tX}=Y+t\left[X,Y\right],\forall t\in\mathbb{R}.$$

考虑矩阵值函数

$$F\left(t\right)\triangleq e^{tX}e^{tY},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}\left(t\right)&=Xe^{tX}e^{tY}+e^{tX}Ye^{tY}\\&=Xe^{tX}e^{tY}+\left(Y+t\left[X,Y\right]\right)e^{tX}e^{tY}\\&=\left(X+Y+t\left[X,Y\right]\right)F\left(t\right).\end{aligned}$$

引理 30.11

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 连续可微, 当 $f'\left(t\right)f\left(t\right)=f\left(t\right)f'\left(t\right)$, 我们有 $\frac{de^{f(t)}}{dt}=e^{f(t)}f'\left(t\right)$. ♡

证明 由乘积求导法则, 对任何 $k\in\mathbb{N}$, 我们都有

$$\frac{df^k\left(t\right)}{dt^k}=\sum_{j=0}^{k-1}\underbrace{f\left(t\right)\times\cdots f\left(t\right)}_{j个}\times f'\left(t\right)\times\underbrace{f\left(t\right)\times\cdots f\left(t\right)}_{k-1-j个}=f^{k-1}\left(t\right)f'\left(t\right).$$

于是

$$\frac{de^{f(t)}}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\left(\frac{f^k(t)}{k!}\right)}{dt}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{k-1}\left(t\right)f'\left(t\right)}{(k-1)!}=e^{f(t)}f'\left(t\right),$$

这就完成了证明.

由引理30.11和

$$[[X,Y],X+Y+t[X,Y]]=0,\forall t\in\mathbb{R},\frac{d\left(X+Y+t[X,Y]\right)}{dt}=[X,Y],$$

注意到

$$\frac{d}{dt}\left[F(t)e^{-\int_0^t(X+Y+s[X,Y])\mathrm{d}s}\right]=0.$$

于是我们有

$$F(t)e^{-\int_0^t(X+Y+s[X,Y])\mathrm{d}s}=F(0)=I,\forall t\in\mathbb{R}.$$

因此我们证明了

$$e^Xe^Y=F(1)=e^{\int_0^1(X+Y+s[X,Y])\mathrm{d}s}=e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

288. (288.) 若 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ 使得 $\phi(\mathbf{x}_0)=0$. 考虑

$$A\triangleq(\operatorname{span}\{\mathbf{x}_0\})^{\perp}.$$

对任何 $\mathbf{x}\in A$, 有

$$\phi(\mathbf{x})=\phi\left(\left(\frac{\mathbf{x}_0\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}_0|^2}\right)\times\mathbf{x}_0\right)=\phi\left(\frac{\mathbf{x}_0\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}_0|^2}\right)\times\phi(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}.$$

对任何 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, 若 $\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0\neq\mathbf{0}$, 则有

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})&=\phi\left((\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0)\times\left(\frac{\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0|^2}\right)\right)\\&=\phi(\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0)\times\phi\left(\frac{\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0|^2}\right)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

若 $\mathbf{x}\times\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$, 则取 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}_0$. 再取 $\mathbf{v}\in A\setminus\{\mathbf{0}\}$, 我们有

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})&=\phi\left(\mathbf{v}\times\left(\frac{\lambda\mathbf{x}_0\times\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\right)\\&=\phi(\mathbf{v})\times\phi\left(\frac{\lambda\mathbf{x}_0\times\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

现在我们知道 $\phi\equiv\mathbf{0}$ 而矛盾!, 即我们证明了

$$\phi(\mathbf{x})=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

现在对 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$, 我们有

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}\parallel\mathbf{y}\Leftrightarrow\phi(\mathbf{x})\parallel\phi(\mathbf{y}).$$

若 $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$, 则存在 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$ 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{y}\times\mathbf{z}$, 从而

$$\phi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{y})\times\phi(\mathbf{z})\Rightarrow\phi(\mathbf{x})\perp\phi(\mathbf{y}).$$

因此

$$|\phi(\mathbf{x}\times\mathbf{y})|=|\phi(\mathbf{x})\times\phi(\mathbf{y})|=|\phi(\mathbf{x})||\phi(\mathbf{y})|.$$

现在设 e_1,e_2,e_3 是 $\mathbb{R}^3$ 标准正交基, 则

$$\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)$$

相互正交且利用

$$e_1\times e_2=e_3,e_2\times e_3=e_1,e_3\times e_1=e_2$$

得

$$|\phi(e_3)|=|\phi(e_2)||\phi(e_1)|,|\phi(e_2)|=|\phi(e_1)||\phi(e_3)|,|\phi(e_3)|=|\phi(e_1)||\phi(e_2)|.$$

注意到

$$|\phi(e_i)| > 0, i = 1, 2, 3,$$

解上述方程得

$$|\phi(e_i)| = 1, i = 1, 2, 3,$$

即 ϕ 把 $\mathbb{R}^3$ 标准正交基映为标准正交基.
现在不妨设

$$\phi(e_i) = e_i, i = 1, 2, 3,$$

否则我们给 ϕ 复合一个正交变换即, 下证 ϕ 是恒等变换而得证. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的正交投影

$$p_i(\mathbf{x}) \triangleq (e_i \times \mathbf{x}) \times e_i = \mathbf{x} - x_i e_i, i = 1, 2, 3,$$

这里

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3.$$

ϕ 的保外积性直接给出

$$\phi \circ p_i = p_i \circ \phi, i = 1, 2, 3.$$

我们设

$$\phi(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) e_1 + f_2(\mathbf{x}) e_2 + f_3(\mathbf{x}) e_3.$$

现在对任何 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, 我们有

$$\phi(x_3 e_3) = \phi(p_2(p_1(\mathbf{x}))) = p_2(p_1(\phi(\mathbf{x}))) = f_3(\mathbf{x}) e_3,$$

即 f_3 只依赖 x_3. 同理可得 f_i 只依赖 $x_i, i = 1, 2, 3$. 因此我们有

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i) e_i, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

对任何 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, 我们可以写

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3,$$

从而

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \phi(\mathbf{y}) \times \phi(\mathbf{z}) \\ &= -\phi(\mathbf{z}) \times \phi(\mathbf{y}) = -\phi(\mathbf{z} \times \mathbf{y}) \\ &= -\phi(-\mathbf{x}),\end{aligned}$$

即 ϕ 是奇函数, 从而 $f_i, i = 1, 2, 3$ 也是奇函数.
对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned}f_1(x) e_1 &= \phi(x e_1) = \phi((x e_2) \times e_3) \\ &= \phi(x e_2) \times \phi(e_3) = (f_2(x) e_2) \times e_3 \\ &= f_2(x) e_1,\end{aligned}$$

即 $f_1 = f_2$. 类似可以得到奇函数

$$f \triangleq f_1 = f_2 = f_3.$$

注意到

$$(x e_1 + y e_2 - (x + y) e_3) \perp (e_1 + e_2 - e_3), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

即

$$(f(x) e_1 + f(y) e_2 - f(x + y) e_3) \perp (f(1) e_1 + f(1) e_2 + f(1) e_3), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

现在我们由 $f(1)=1$ 知道

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

现在对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned}f\left(x^2\right)e_3&=\phi\left(x^2e_3\right)=\phi\left((xe_1)\times(xe_2)\right)\\&=\phi(xe_1)\times\phi(xe_2)=(f(x)e_1)\times(f(x)e_2)\\&=f(x)f(x)(e_1\times e_2)=f^2(x)e_3,\end{aligned}$$

即

$$f\left(x^2\right)=f^2(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)\geqslant 0,\forall x\geqslant 0.$$

因此 f 在 $[0,+\infty)$ 有下界. 现在由 f 满足 Cauchy 方程并由定理12.5得

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

我们完成了证明.

289. (289.) 注意到

$$\dim V=(n+1)(m+1).$$

不妨设 $n\leqslant m$, 则我们直接来构造 V 的一个基使得 T 在这个基下为 Jordan 标准型.

考虑

$$p_r\triangleq x^{n-r}y^{m-r}(x-y)^r,r=0,1,2,\cdots,n.$$

然后按 $r=0,1,2,\cdots,n$ 顺序排列

$$C_r:T^{n+m-2r}p_r,T^{n+m-2r-1}p_r,\cdots,Tp_r,p_r,$$

这里一共有

$$\sum_{r=0}^{n}(n+m-2r+1)=(n+1)(m+1)$$

个多项式. 考虑 $u=x+y,v=x-y$, 此时

$$p_r=\frac{(u+v)^{n-r}(u-v)^{m-r}v^r}{2^{m+n-2r}},Tp=2\frac{\partial p}{\partial u},\forall p\in V.$$

考虑 u 最高次数可得

$$T^{n+m-2r+1}p_r=0,T^{n+m-2r}p_r\neq 0,r=0,1,2,\cdots,n.$$

于是显然 T 作用 C_r 对应一个 Jordan 块 $J_{n+m-2r+1}(0)$, 我们接下来只需证明 $\bigcup_{r=0}^{s}C_r$ 是线性无关的.

当 $0\leqslant j\leqslant n+m-2r,0\leqslant r\leqslant n$, 注意到 T^jp_r 最高次项为 $u^{n+m-2r-j}v^r$, 这是互不相同的, 因此 $\bigcup_{r=0}^{s}C_r$ 是线性无关的. 于是我们证明了 T 在这个基下表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}J_{n+m+1}(0)&&&\\&J_{n+m-1}(0)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{m-n+1}(0)\end{pmatrix}.$$

因此一般情况 T 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix}J_{n+m+1}(0)&&&\\&J_{n+m-1}(0)&&\\&&\ddots&\\&&&J_{|m-n|+1}(0)\end{pmatrix}.$$

290. (290.) 考虑

$$l_B : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, X \mapsto XB - BX,$$

我们有

$$l_B(XY) = l_B(X)Y + Xl_B(Y), \forall X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

于是在上式代入 $X = A, Y = A^{n-1}$ 后归纳容易证明

$$l_B\left(A^k\right) = kA^{k-1}C, \forall k \in \mathbb{N},$$

从而

$$l_B(f(A)) = f'(A)C, \forall f \in \mathbb{C}[x].$$

继续计算得

$$\begin{aligned} l_B^2(f(A)) &= l_B(f'(A)C) = l_B(f'(A))C + f'(A)l_B(C) \\ &= l_B(f'(A))C = f''(A)C^2. \end{aligned}$$

依次下去可得

$$l_B^n(f(A)) = f^{(k)}(A)C^k, \forall k \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{C}[x].$$

特别的, 取 $f = m_A$ 得

$$(\deg m_A)!C^{\deg m_A} = l_B^{\deg m_A}(0) = 0 \Rightarrow C^{\deg m_A} = 0.$$

同理可得 $C^{\deg m_B} = 0$.

若 $C^{n-1} \neq 0$, 此时只能有 $C \sim J_n(0)$, 因此由和 Jordan 块可交换的矩阵一定是其多项式, 即命题21.2得

$$A = p(C), B = q(C), p, q \in \mathbb{C}[x].$$

于是 $C = AB - BA = 0$, 这就是一个矛盾!, 因此 $C^{n-1} = 0$, 这就证明了 $C^N = 0$.

291. (291.) 考虑线性变换

$$T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, X \mapsto B^T XB.$$

则在基 $E_{11}, E_{21}, \cdots, E_{n1}, E_{12}, \cdots, E_{nn}$ 下 T 有表示矩阵 $B^T \otimes B^T$. 改写原矩阵方程为

$$(I - T)(X) = W.$$

当 $\rho(B) < 1$, 由克罗内克积的性质23.18得 $\rho(T) = \rho^2(B) < 1$. 故矩阵方程存在唯一解

$$X = (I - T)^{-1}(W) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(W) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(B^T\right)^k WB^k.$$

直接观察显然 X 正定.

现在若原矩阵有正定解 X, 则设

$$B\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \lambda \in \mathbb{C},$$

我们有

$$\mathbf{z}^* W\mathbf{z} = \mathbf{z}^* X\mathbf{z} - \mathbf{z}^* B^T XB\mathbf{z} = \mathbf{z}^* X\mathbf{z} - |\lambda|^2 \mathbf{z}^* X\mathbf{z} > 0,$$

即 $|\lambda| < 1$. 现在我们知道 $\rho(B) < 1$. 因此我们完成了证明.

292. (292.) 由罗尔定理 $f^{(p-1)}(x)$ 有 $n - p + 1$ 个不同实根. 于是存在 $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n - p + 1$ 使得

$$f^{(p-1)}(x) = \frac{n!c_n}{(n-p+1)!} \prod_{i=1}^{n-p+1} (x - x_i), x \in \mathbb{R}.$$

我们取对数求导得

$$\begin{aligned}\left(\ln f^{(p-1)}\right)' &= \frac{f^{(p+1)}(x)}{f^{(p-1)}(x)} - \left(\frac{f^{(p)}(x)}{f^{(p-1)}(x)}\right)^2 \\ &= -\sum_{i=1}^{n-p+1} \frac{1}{(x-x_i)^2}.\end{aligned}$$

代入 $x=0$, 因为

$$f^{(p)}(0) = p!c_p = 0, f^{(p\pm1)}(0) = (p\pm1)!c_{p\pm1} \neq 0,$$

所以我们有

$$x_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n-p+1$$

以及

$$\frac{(p+1)!c_{p+1}}{(p-1)!c_{p-1}} = \frac{f^{(p+1)}(0)}{f^{(p-1)}(0)} = -\sum_{i=1}^{n-p+1} \frac{1}{x_i^2} < 0,$$

即 $c_{p-1}c_{p+1} < 0$.

293. (293.) 同时交换行列可以不妨设

$$U = \begin{pmatrix} V & A \\ B & C \end{pmatrix}, A \in \mathbb{C}^{p\times(n-q)}, B \in \mathbb{C}^{(n-p)\times q}, C \in \mathbb{C}^{(n-p)(n-q)}.$$

直接计算有

$$I = U^*U = \begin{pmatrix} V & A \\ B & C \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} V & A \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^*V + B^*B & V^*A + B^*C \\ A^*V + C^*B & A^*A + C^*C \end{pmatrix}.$$

注意到 $B^*B = I_q - V^*V$ 是半正定的, 所以 V^*V 特征值小于等于 1. 由命题21.8得

$$\operatorname{rank}(I_q - V^*V) = \operatorname{rank}(B^*B) = \operatorname{rank}(B) \leqslant n-p < q,$$

即 $I_q - V^*V$ 有 0 特征值, 从而 V^*V 有特征值 1, 因此 $||V|| = 1$.

294. (294.) 注意到 AB, BA 有相同的迹和行列式, 所以对 2 阶矩阵而言, 它们有相同的特征多项式, 从而存在 a, b 为实数使得

$$(AB)^2 - aAB + bI = 0, (BA)^2 - aBA + bI = 0.$$

因为 A, B 元素都是正数, 所以 $a > 0$, 从而

$$a = \operatorname{tr}(AB) > 0.$$

结合 $(AB)^2 = (BA)^2$ 做差得

$$a(AB - BA) = 0 \Rightarrow AB = BA,$$

我们完成了证明.

295. (295.) 我们将证明

$$\operatorname{Im}(A^n + B^n) = \operatorname{Im}(A^n) \oplus \operatorname{Im}(B^n). \tag{30.152}$$

首先

$$A^n|_{\operatorname{Im}A^n} : \operatorname{Im}A^n \to \operatorname{Im}A^n$$

是线性同构. 这是因为例题21.8, 从而 $r(A^n) = r\left(A^{2n}\right)$ 给出

$$A^n\mathbf{x} \in \ker A^n \Rightarrow A^{2n}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

而有限维线性空间上的线性变换单射等价满射.

设 $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}A^n \bigcap \operatorname{Im}B^n$, 则

$$A^n|_{\operatorname{Im}A^n}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

这就证明了(30.152)右边确实为直和.

显然有

$$\operatorname{Im}\left(A^n+B^n\right)\subset\operatorname{Im}\left(A^n\right)\oplus\operatorname{Im}\left(B^n\right).$$

对 $\mathbf{v}\in\operatorname{Im}\left(A^n\right)$, 取 $\mathbf{w}\in\operatorname{Im}\left(A^n\right)$ 使得 $\mathbf{v}=A^n\mathbf{w}$. 显然有 $B^n\mathbf{w}=\mathbf{0}$, 从而

$$\mathbf{v}=\left(A^n+B^n\right)\mathbf{w}\in\operatorname{Im}\left(A^n+B^n\right),$$

即

$$\operatorname{Im}\left(A^n\right)\subset\operatorname{Im}\left(A^n+B^n\right).$$

类似可得

$$\operatorname{Im}\left(B^n\right)\subset\operatorname{Im}\left(A^n+B^n\right).$$

我们证明了(30.152). 现在利用(30.152)就有

$$\begin{aligned}r\left(A^n+B^n\right)&=\dim\operatorname{Im}\left(A^n+B^n\right)\\&=\dim\operatorname{Im}\left(A^n\right)+\dim\operatorname{Im}\left(B^n\right)=r\left(A^n\right)+r\left(B^n\right).\end{aligned}$$

296. (296.) 设 $f\in\ker L$, 则 $f''=f$, 解得

$$f\left(x\right)=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

现在

$$f\left(x+1\right)=ef\left(x\right)\Leftrightarrow c_1e^{x+1}+c_2e^{-x-1}=c_1e^{x+1}+c_2e^{-x+1}\Leftrightarrow c_2=0,$$

即 $f\left(x\right)=c_1e^x$, 因此 $\dim\ker L=1$.

我们将证明

$$T:V/L\left(V\right)\to\ker L,[f]\mapsto\left(\int_0^1e^{-x}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)e^x$$

是线性同构.

显然 T 线性. 设 $[f]=[0]$, 我们有 $g\in V$ 使得 $f=g''-g$, 于是利用

$$g\left(1\right)=eg\left(0\right),g'\left(1\right)=eg'\left(0\right)$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^1e^{-x}f\left(x\right)\mathrm{d}x&=\int_0^1e^{-x}\left(g''\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[e^{-x}\left(g\left(x\right)+g'\left(x\right)\right)\right]'\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

即 $T\left([f]\right)=0$, 因此 T 是良定义映射. 此外可以看到 $V\neq L\left(V\right)$, 这是因为 $e^x\in V$ 但 $T\left([e^x]\right)\neq0$.

若 $T\left([f]\right)=0$, 考虑微分方程

$$g''\left(x\right)-g\left(x\right)=f\left(x\right)$$

的解 g, 适当选取 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ 可使得 $\widetilde{g}\triangleq g+c_1e^x+c_2e^{-x}$ 满足 $\widetilde{g}\left(0\right)=\frac{\widetilde{g}(1)}{e}$ 且 $\widetilde{g}$ 也是解. 利用

$$0=\int_0^1e^{-x}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1e^{-x}\left(\widetilde{g}''\left(x\right)-\widetilde{g}\left(x\right)\right)\mathrm{d}x,$$

我们计算得 $\widetilde{g}'\left(0\right)=\frac{\widetilde{g}'(1)}{e}$. 注意到 $\frac{1}{e}\widetilde{g}\left(x+1\right)$ 也是解且和 $\widetilde{g}$ 在 0 有相同初值条件, 因此解的唯一性定理给出

$$\widetilde{g}\left(x+1\right)=e\widetilde{g}\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R},$$

即 $\widetilde{g}\in V$, 从而 $[f]=[0]$. 因此我们有 T 是单射. 因为 $\dim\ker L=1$, 所以 T 就是线性同构, 从而 $\dim V/L\left(V\right)=1$.

297. (297.)

(a). 由覆盖定理23.24, 我们有

$$\beta \in \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \alpha_i \rangle = 0\} \right),$$

即

$$\langle \beta, \alpha_i \rangle \neq 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant m.$$

(b). 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$, 设

$$\alpha_i = c_i \alpha, c_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, m, \alpha \neq \mathbf{0},$$

即

$$c_i c_j \left|\left|\alpha\right|\right|^2 = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < 0, \forall 1 \leqslant i, j \leqslant m, i \neq j.$$

于是 $m \leqslant 2$.

假设对 $n-1$ 要证成立, 当 n 时. 由 $n = 1$ 的结果, $\operatorname{span}\{\alpha_1\}$ 至多包含两个 $\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, 所以我们把 $\alpha_i, 2 \leqslant i \leqslant m$ 正交投影到 $(\operatorname{span}\{\alpha_1\})^{\perp}$ 得到至少 $m-2$ 个非 $\mathbf{0}$ 向量. 我们来证明这 $m-2$ 个向量两两内积非正.

对自然数 $2 \leqslant i, j \leqslant m, i \neq j$, 直接计算就有

$$\left\langle v_i - \frac{\langle v_i, v_1 \rangle}{\left|\left|v_1\right|\right|^2} v_1, v_j - \frac{\langle v_j, v_1 \rangle}{\left|\left|v_1\right|\right|^2} v_1 \right\rangle = \langle v_i, v_j \rangle - \frac{\langle v_i, v_1 \rangle \langle v_j, v_1 \rangle}{\left|\left|v_1\right|\right|^2} \leqslant 0.$$

由归纳假设得 $m - 2 \leqslant 2(n-1)$, 即 $m \leqslant 2n$. 等号由 $\pm e_1, \pm e_2, \cdots, \pm e_n$ 取得.

298. (298.)

先来对一般的可逆 A 和线性函数 f 算一下行列式. 不妨设为矩阵, 则设 $\beta \in \mathbb{F}^n$ 使得 $f(\mathbf{x}) = \beta^T \mathbf{x}$. 于是由降阶公式21.7得

$$\begin{aligned} \det(A + bf) &= \det\left(A + b\beta^T\right) = \det(A) \cdot \det\left(I + A^{-1} b \beta^T\right) \\ &= \det(A) \cdot \left(1 + \beta^T A^{-1} b\right) = \det(A) + \beta^T A^* b \\ &= \det(A) + f(A^* b). \end{aligned}$$

由摄动法, 恒等式

$$\det(A + bf) = \det(A) + f(A^* b)$$

对不可逆的 A 也成立.

设

$$\chi(t) = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_0$$

是 A 的特征多项式, 由

$$V = \{p(A) b : p \in \mathbb{F}[x]\}$$

得 $A^j b, 0 \leqslant j \leqslant n-1$ 是 V 的一组基. 由伴随矩阵通过代数余子式的定义, 显然存在 $v_i \in \mathbb{F}^n, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 使得

$$(tI - A)^* b = v_0 + v_1 t + \cdots + v_{n-1} t^{n-1}.$$

由伴随矩阵性质, 我们还有

$$(tI - A)(tI - A)^* b = \chi(t) b.$$

对比

$$(tI - A)\left(v_0 + v_1 t + \cdots + v_{n-1} t^{n-1}\right) = b t^n + c_{n-1} b t^{n-1} + \cdots + c_0 b$$

系数得

$$v_{n-1} = b, v_{n-1-k} = A^k b + c_{n-1} A^{k-1} b + \cdots + c_{n-k+1} A b + c_{n-k} b, k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

于是从基 $b, Ab, \cdots, A^{n-1}b$ 到 $v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的过渡矩阵是一个对角元素全为 1, 右下部分元素全为 0 的矩阵, 所以 $v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 是 V 的一组基.

定义 $f \in V'$ 使得

$$\chi(t) - \prod_{i=1}^{n}(t-\lambda_i) = f(v_0) + f(v_1)\,t + \cdots + f(v_{n-1})\,t^{n-1} = f\left((tI-A)^* b\right).$$

现在就有

$$\det(tI - A - bf) = \det(tI-A) - f\left((tI-A)^* b\right) = \prod_{i=1}^{n}(t-\lambda_i),$$

我们得证.

299. (299.) 注意到 $S = \{\mathbf{0}\}$ 或 $S = \{\mathbf{0}, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ 为所求. 下证所求的 n 恰好只能是 $1, 7$.

假设有限集 $S \neq \{\mathbf{0}\}$ 满足条件, 来看 S 中的向量满足什么条件. 显然 S 不能由全共线向量组成. 若 $v \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ 满足 $||v|| \neq 1$. 取 $u \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ 是和 v 不共线的向量. 考虑

$$u_0 = u, u_n = v \times u_{n-1}, n = 1, 2, \cdots,$$

则因为 $u_n, n = 1, 2, \cdots$ 和 v 正交得

$$||u_n|| = ||v|| \cdot ||u_{n-1}|| \neq ||u_{n-1}||, n = 2, 3, \cdots,$$

即 S 有无限多个向量而矛盾!.

设 $u, v \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ 不共线, 我们有

$$||u|| = ||v|| = ||u \times v|| = 1,$$

即 $u \perp v$.

现在来确定 S. 对 S 不共线非 $\mathbf{0}$ 向量 u, v, 我们有

$$w \triangleq u \times v = -v \times u \in S.$$

又 u, v, w 是 $\mathbb{R}^3$ 标准正交基, 我们有

$$-u = w \times v, -v = u \times w, -w = v \times u \in S.$$

若还有其他 $\alpha \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$, 则 α 和 u, v, w 中某个向量共线, 结合长度为 1, 则 α 只能是正负这个向量, 因此我们得

$$S = \{\mathbf{0}, \pm u, \pm v, \pm w\}.$$

我们完成了证明.

300. (300.) 从 Taylor 公式启发, 我们知道存在 $h \in \mathbb{R}[x]$ 使得

$$p(p(x)) = p(x) + p'(x)(p(x)-x) + h(x)(p(x)-x)^2,$$

这里

$$h(x) = \int_0^1 (1-t)\,p''(x + t(p(x)-x))\,\mathrm{d}t.$$

现在

$$p(p(x)) - x = (1+p'(x))(p(x)-x) + h(x)(p(x)-x)^2.$$

于是若 $p(x) \neq x$ 就有

$$(p(x)-x) \mid (1+p'(x)).$$

考虑次数就有 $\deg p = 1$, 因此显然所求的全体 p 为

$$p(x) = \pm x + c, c \in \mathbb{R}.$$

301. (301.) 因为 A 实对称正定, 所以存在正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 使得

$$Q^TAQ = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}, \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 > 0.$$

于是计算得

$$\begin{aligned} &Q^T\left(I_3+t^2A^2\right)Q = I_3+t^2\left(Q^TAQ\right)^2 \\ \Rightarrow\ &Q^T\left(I_3+t^2A^2\right)^{-1}Q = \left(I_3+t^2\left(Q^TAQ\right)^2\right)^{-1} \\ \Rightarrow\ &\left(I_3+t^2A^2\right)^{-1} = Q\left(I_3+t^2\left(Q^TAQ\right)^2\right)^{-1}Q^T. \end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(I_3+t^2A^2\right)^{-1}\mathrm{d}t = Q\left(\int_0^\infty\left(I_3+t^2\left(Q^TAQ\right)^2\right)^{-1}\mathrm{d}t\right)Q^T \\ &= Q\left(\operatorname{diag}\left\{\int_0^\infty\left(1+t^2\lambda_1^2\right)^{-1}\mathrm{d}t,\int_0^\infty\left(1+t^2\lambda_2^2\right)^{-1}\mathrm{d}t,\int_0^\infty\left(1+t^2\lambda_3^2\right)^{-1}\mathrm{d}t\right\}\right)Q^T \\ &= Q\operatorname{diag}\left\{\frac{\pi}{2\lambda_1},\frac{\pi}{2\lambda_2},\frac{\pi}{2\lambda_3}\right\}Q^T = \frac{\pi}{2}A^{-1} = \frac{\pi}{8}\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

302. (302.) 若 $f(\alpha)=0, |\alpha|\leqslant 1$, 则

$$|a_0| = \left|\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha\right| \leqslant 1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|,$$

这就和条件不等式矛盾!. 因此 f 的任一复根 α 都有 $|\alpha|>1$.

如果 f 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在 $g,h\in\mathbb{Z}[x]$ 使得 $f=gh$ 且

$$\begin{aligned} g(x) &= x^r+b_{r-1}x^{r-1}+\cdots+b_0; \\ h(x) &= x^{n-r}+c_{n-r-1}x^{n-r-1}+\cdots+c_0, \end{aligned}$$

这里 $1\leqslant r<n$.

因为 $|b_0c_0| = |a_0|$ 是素数, 不妨设 $|b_0|=1$. 注意 g 的根也是 f 的根, 所以根的模长都大于 1, 韦达定理给出这些根的积的模就是 $|b_0|>1$, 这就是一个矛盾!. 现在我们知道 f 是 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式.

30.15 数学类函数性态分析

1. (1.) 若 $(x_0,y_0)\in B^2\setminus S^1$ 不在 f 值域中, 不妨设 $(x_0,y_0)=(0,0)$(其余点类似, 只是表达式写出来更为复杂, 写出的想法即以 (x_0,y_0) 为起点, 连接 (x,y) 做射线交单位圆周即可).

   设 $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ 并令

   $$g(x,y) = \left(\frac{u(x,y)}{\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}},\frac{v(x,y)}{\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}}\right).$$

   因为 $u^2+v^2\neq 0$, 所以 g 在 B^2 上连续且在 S^1 上满足 $g(x,y)=(x,y)$. 但注意到 B^2 是单连通的而 S^1 不是单连通的. 且 g 和自然嵌入构成 B^2 和 S^1 的同伦等价, 他们应该有相同的基本群, 因此这是一个矛盾!

2. (2.) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 我们知道

   $$f(n)-f(n-1) = f'(\theta_n), \theta_n\in(n-1,n).$$

   所以

   $$\lim_{n\to\infty}\left[|f(\theta_n)|^2+|f'(\theta_n)|^2\right]=0.$$

   如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 则记

   $$\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) \geqslant \delta > 0,. \tag{30.153}$$

对任何 $n>\frac{1}{\delta}$, 由于 $\int_0^{\infty} f(x)\,dx<\infty$, 我们知道存在严格递增到无穷的 a_n, 使得 $f(a_n)<\frac{1}{n}$. 由于 f 连续, 我们知道 $\left\{y>a_n: f(x)<\frac{1}{n}, \forall x\in[a_n,y]\right\}$ 不是空集, 我们考虑

$$b_n \triangleq \sup\left\{y>a_n: f(x)<\frac{1}{n}, \forall x\in[a_n,y]\right\}.$$

由于(30.153), 我们知道 $a_n<b_n<+\infty$. 若 $f(b_n)<\frac{1}{n}$, 连续函数保号性和 b_n 是上确界矛盾, 故 $f(b_n)\geqslant\frac{1}{n}$. 由于集合外的确界必然是聚点和连续函数的性质我们知道 $f(b_n)=\frac{1}{n}$.
同样的, 我们知道我们知道 $\left\{a_{n-1}<y<a_n: f(x)<\frac{1}{n}, \forall x\in[y,a_n]\right\}$ 不是空集, 类似的分析我们知道 $f(c_n)=\frac{1}{n}$, 这里

$$c_n \triangleq \inf\left\{a_{n-1}<y<a_n: f(x)<\frac{1}{n}, \forall x\in[y,a_n]\right\}.$$

由罗尔中值定理, 存在 $\theta_n\in(c_n,b_n)$, 使得

$$f'(\theta_n)=0, f(\theta_n)<\frac{1}{n},$$

这恰好蕴含

$$\lim_{n\to\infty}\left[|f(\theta_n)|^2+|f'(\theta_n)|^2\right]=0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$ 时我们给出一个由钰佬提供的更漂亮的证明: 设

$$f(y_n)\geqslant\epsilon_0>0, y_{n+1}\geqslant y_n+1, n=1,2,\cdots.$$

设 $x_n\in[y_n,y_{n+1}]$ 是 f 在 $[y_n,y_{n+1}]$ 的最小值点, 那么

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty} f(x_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{y_n}^{y_{n+1}} f(x)\,dx=0,$$

换言之, 当 n 充分大, 我们有 $x_n\in(y_n,y_{n+1})$, 因此 $f'(x_n)=0$, 从而我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left[|f(x_n)|^2+|f'(x_n)|^2\right]=0.$$

3. (3.) 定义

$$\chi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-|y|^2}}dy}e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}, \chi_\delta(x)=\frac{1}{\delta}\chi\left(\frac{x}{\delta}\right), \delta>0.$$

考虑 $g(x)=f'(x)e^{\lambda x}\in C(\mathbb{R})$ 单调不减, 则

$$f(x)=\int_1^x g(y)e^{-\lambda y}dy+f(1), f'(x)+\lambda f(x)=g(x)e^{-\lambda x}+\lambda\int_1^x g(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(1).$$

因此考虑磨光函数 $g_\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\chi_\delta(y)\,dy\in C^\infty(\mathbb{R})$, 由 g 不减则 g_δ 不减, 从而

$$\left[g_\delta(x)e^{-\lambda x}+\lambda\int_1^x g_\delta(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(1)\right]'=g_\delta'(x)e^{-\lambda x}\geqslant 0.$$

对 $x_2\geqslant x_1>0$, 我们有

$$g_\delta(x_2)e^{-\lambda x_2}+\lambda\int_1^{x_2} g_\delta(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(1)\geqslant g_\delta(x_1)e^{-\lambda x_1}+\lambda\int_1^{x_1} g_\delta(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(1).$$

注意到内闭一致的有

$$\lim_{\delta\to 0^+} g_\delta(x)=g(x),$$

这推出

$$g(x_2)e^{-\lambda x_2}+\lambda\int_1^{x_2} g(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(1)\geqslant g(x_1)e^{-\lambda x_1}+\lambda\int_1^{x_1} g(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(1).$$

因此我们证明了 $f'(x)+\lambda f(x)$ 不减.
反过来, 若 $h(x)=f'(x)+\lambda f(x)\in C(\mathbb{R})$ 不减, 注意到解微分方程得

$$f(x)=e^{-\lambda x}\int_1^x e^{\lambda y}h(y)\,dy+f(1)e^{\lambda(1-x)},$$

即

$$f'(x)e^{\lambda x}=h(x)e^{\lambda x}-\lambda\int_1^x h(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(1)e^{\lambda}.$$

考虑 $h_\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x-y)\chi_\delta(y)dy\in C^\infty(\mathbb{R})$, 由 h 不减则 h_δ 不减, 于是

$$\left[h_\delta(x)e^{\lambda x}-\lambda\int_1^x h_\delta(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(1)e^{\lambda}\right]'=h_\delta'(x)e^{\lambda x}\geqslant 0.$$

对 $x_2\geqslant x_1>0$, 我们有

$$h_\delta(x_2)e^{\lambda x_2}-\lambda\int_1^{x_2}h_\delta(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(1)e^{\lambda}\geqslant h_\delta(x_1)e^{\lambda x_1}-\lambda\int_1^{x_1}h_\delta(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(1)e^{\lambda}.$$

注意到内闭一致的有

$$\lim_{\delta\to 0^+}h_\delta(x)=h(x),$$

这推出

$$h(x_2)e^{\lambda x_2}-\lambda\int_1^{x_2}h(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(1)e^{\lambda}\geqslant h(x_1)e^{\lambda x_1}-\lambda\int_1^{x_1}h(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(1)e^{\lambda},$$

也即 $f'(x)e^{\lambda x}$ 单调不减.

4. (4.) 因为 f 是连续函数列的一致极限, 所以也是连续函数. 现在取 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant 1,\forall x\in[a,b],n\geqslant N.$$

记

$$M\triangleq\max\left\{\max_{x\in[a,b]}|f_1(x)|,\max_{x\in[a,b]}|f_2(x)|,\cdots,\max_{x\in[a,b]}|f_N(x)|,\max_{x\in[a,b]}(1+|f(x)|)\right\}.$$

对任何 $\epsilon>0$, 因为 g 在 $[-M,M]$ 一致连续, 所以存在 $\delta>0$ 使得

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\epsilon,\forall x,y\in[-M,M],|x-y|\leqslant\delta.$$

存在 $N'\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\delta,\forall x\in[a,b],n\geqslant N'.$$

于是当 $n\geqslant\max\{N,N'\}$, 我们有

$$|g\circ f_n(x)-g\circ f(x)|\leqslant\epsilon,\forall x\in[a,b],$$

因此我们证明了 $\{g\circ f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $g\circ f$.

5. (5.) 我们先来看测度版本的结果,

引理 30.12

一个参考可以见Rudin, Walter (1-WI) Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. xviii+424 pp. ISBN: 0-07-054236-8 46-01 (47-01)的 120 页 Theorem 5.5. 即设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 σ 代数 $\mathcal{R}$ 上的非原子广义实值测度 (即有某种介值性, 严格定义可见链接. 通常的勒贝格测度等当然满足这个条件). 考虑映射

$$\mu(E)\triangleq(\mu_1(E),\mu_2(E),\cdots,\mu_n(E)),E\in\mathcal{R},$$

则 μ 的值域是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸子集. ♡

笔记 证明的想法就是用经典的 Krein-Milman 定理和 Banach-Alaoglu 定理.

通过引理30.12, 我们考虑非原子广义实值测度 $d\mu_1=f(x)dx,d\mu_2=g(x)dx$ 和向量值测度 $\mu=(\mu_1,\mu_2)$. 注意到 $\mu([0,1])=(1,1),\mu(\{0\})=(0,0)$, 因此由凸性, 我们知道 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 也在 μ 的值域中, 从而存在勒贝格可测集 $E\subset[0,1]$, 使得 $\mu(E)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 这恰好意味着 $\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx=\frac{1}{2}$, 但遗憾的是这个方法做不到 E 是一个区间, 不过测度意义上有时候也就足够了.

如果采用代数拓扑的想法, 我们引用一个经典的代数拓扑定理

引理 30.13

一个参考可以见Hatcher, Allen (1-CRNL) Algebraic topology. (English summary) Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-055-01 (55-00)的 32 页 Theorem 1.10. 即对连续映射 $f:S^n\to\mathbb{R}^n$, 存在 $X\in S^n$, 使得 $f(X)=f(-X)$, 这里 S^n 即 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面.

现在考虑 $S^2\to\mathbb{R}^2$ 的连续映射

$$(x,y,z)\to\left(\mathrm{sgn}x\int_0^{x^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y\int_{x^2}^{x^2+y^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z\int_{x^2+y^2}^1f\mathrm{d}t,\mathrm{sgn}x\int_0^{x^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y\int_{x^2}^{x^2+y^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z\int_{x^2+y^2}^1g\mathrm{d}t\right).$$

由引理30.13, 我们知道存在 $(x_0,y_0,z_0)\in S^2$, 使得

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}f\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}g\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t.$$

于是就有

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t=0;$$

$$\mathrm{sgn}x_0\int_0^{x_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}y_0\int_{x_0^2}^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t+\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t=0.$$

注意到 x_0,y_0,z_0 必有两个符号相同 (0 可以视为有任意符号), 不妨设为 x_0,y_0 且 $\mathrm{sgn}x_0,\mathrm{sgn}y_0=1$, 则

$$\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1f\mathrm{d}t,\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t=-\mathrm{sgn}z_0\int_{x_0^2+y_0^2}^1g\mathrm{d}t.\tag{30.154}$$

利用 $\int_0^1f(x)\,dx=\int_0^1g(x)\,dx=1$, 我们知道 $\mathrm{sgn}z_0=-1$, 且

$$\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t=1-\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t,\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t=1-\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t.$$

这恰好是

$$\int_0^{x_0^2+y_0^2}f\mathrm{d}t=\int_0^{x_0^2+y_0^2}g\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

我们就完成了习题5.的证明.

6. (6.) **Method 1** 初等方法. 设 $M\triangleq\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f|$, 显然 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. 注意到

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=|f(x+1)-f(x)|\leqslant 2M;\\|f''(x)|&=|f'(x+1)-f'(x)|\leqslant 4M;\\&\vdots\\\left|f^{(n)}(x)\right|&=\left|f^{(n-1)}(x+1)-f^{(n-1)}(x)\right|\leqslant 2^nM.\end{aligned}$$

于是运用 Taylor 中值定理, 我们知道对任何 $x\in[0,1]$, 存在 $\theta\in[0,1]$, 使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

注意到

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}M}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0.$$

于是 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实解析函数. 因此

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1}f(y)\,dy&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_x^{x+1}y^k dy=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\left[(x+1)^{k+1}-x^{k+1}\right]}{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\left[\sum\limits_{n=0}^{k+1}C_{k+1}^nx^n-x^{k+1}\right]}{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{a_kC_{k+1}^n}{k+1}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_kC_{k+1}^n}{k+1}\right)x^n.\end{aligned}$$

于是 $a_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{a_kC_{k+1}^n}{k+1},n=0,1,2,\cdots$, 即 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_kC_{k+1}^n}{k+1}=0,n=0,1,2,\cdots$. 这如何确定 a_n 呢? 似乎并不那么容易[90].

Method 2 Fourier 变换方法[91].

实际上

$$f*\chi_{[-1,0]}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)*\chi_{[-1,0]}(y)\,dy=\int_{-1}^{0}f(x-y)\,dy=\int_x^{x+1}f(y)\,dy=f(x).$$

计算傅立叶变换得

$$\widehat{\chi_{[-1,0]}}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-1,0]}(x)\,e^{-2\pi isx}dx=\int_{-1}^{0}e^{-2\pi isx}dx=\frac{e^{2\pi is}-1}{2\pi is}.$$

现在对条件等式两边取傅立叶变换, 并利用傅立叶变换卷积公式得

$$\widehat{f*\chi_{[-1,0]}}=\frac{e^{2\pi is}-1}{2\pi is}\hat{f}=\hat{f}.\tag{30.155}$$

注意到 $\hat{f}$ 并不一定是个正常的函数, 他是一个缓增分布[92]. 注意到对任何 $\phi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, 我们有

$$0=\frac{e^{2\pi is}-1}{2\pi is}\hat{f}(u)-\hat{f}(u)=\hat{f}\left[\left(\frac{e^{2\pi is}-1}{2\pi is}-1\right)u\right],$$

即 $\hat{f}\left[\left(\frac{e^{2\pi is}-1}{2\pi is}-1\right)u\right]=0$. 考虑 $u=\frac{\phi}{\frac{e^{2\pi is}-1}{2\pi is}}$ 即可得 $\hat{f}(\phi)=0$. 因此 $\hat{f}$ 的支撑集要么是单点集 0, 要么是空集, 故 f 是多项式, f 有界给出了 f 为常数.

7. (7.) 记

$$\alpha\triangleq\max f-\min f>0.$$

若 f 周期为 $T>0$. 由连续周期函数必一致连续13.15, 如果 $f\circ g$ 周期, 那么存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(g(x))-f(g(y))|<\alpha,\forall|x-y|\leqslant\delta.$$

我们来证明

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}|g(x+\delta)-g(x)|=+\infty.\tag{30.156}$$

若(30.156)不成立, 则存在 $A>0$ 使得

$$|g(x+\delta)-g(x)|\leqslant A,\forall x\geqslant 0.$$

于是对 $x\in[n\delta,(n+1)\delta),n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x)}{x}\right|&\leqslant\left|\frac{g(x-n\delta)}{n\delta}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{g(x-k\delta)-g(x-(k+1)\delta)}{n\delta}\right|\\&\leqslant\frac{1}{n\delta}\sup_{x\in[0,\delta]}|g(x)|+\frac{1}{n\delta}\sum_{k=0}^{n-1}A=\frac{1}{n\delta}\sup_{x\in[0,\delta]}|g(x)|+\frac{A}{\delta},\end{aligned}$$

[90]作者懒得思考, 因为有一个更简单, 但是基础要求更高的方法.

[91]阅读本部分需要熟练掌握傅立叶分析理论, 一个参考是Rudin, Walter Functional analysis.

[92]即速降函数空间作为局部凸空间上的连续线性泛函.

即

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\frac{A}{\delta},$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了(30.156)成立.

现在存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$|g(x_0+\delta)-g(x_0)|\geqslant T.$$

由介值定理知存在 $s,t\in[x_0,x_0+\delta]$ 使得

$$f(g(s))=\max f, f(g(t))=\min f.$$

此时

$$\alpha=|f(g(s))-f(g(t))|<\alpha,$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 $f\circ g$ 不周期.

8. (8.) 我们归纳证明 $x^m\in\overline{V}$. 当 $m=0$, 取 $p_n=\frac{-a_n}{x-a_n}, n=1,2,\cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|p_n(x)-1|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\frac{x}{a_n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-1}=0.$$

假设对 m 已经证明, 于是所有次数不超过 m 的多项式也在 $\overline{V}$ 中, 注意到

$$-\frac{a_nx^{m+1}}{x-a_n}=-a_n\left[\frac{a_n^{m+1}}{x-a_n}+\sum_{k=1}^{m+1}C_n^k(x-a_n)^{k-1}a_n^{m+1-k}\right]\in\overline{V}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|-\frac{a_nx^{m+1}}{x-a_n}-x^{m+1}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\frac{x}{a_n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-1}=0.$$

这就证明了 $x^{m+1}\in\overline{V}$, 由第一逼近定理就知道 $\overline{V}=C[0,1]$.

9. (9.) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in[a,b]$, 则考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的点列 $(x_n,f(x_n))$ 的任何收敛子列 $(x_{n_k},f(x_{n_k}))$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=c\in\mathbb{R}$, 由 G_f 闭性我们有 $(x,c)\in G_f$, 则必有 $c=f(x)$. 现在由命题7.4的 (a) 的 $\mathbb{R}^2$ 版本知

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,f(x_n))=(x,f(x)).$$

从而就有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x).$$

这就证明了 $f\in C[a,b]$.

10. (10.) 如果存在 p,q, 那么代入两个解得

$$p(x)\cos x+q(x)\sin x=\sin x, p(x)(x+1)+q(x)x=-x-2.$$

注意到 $\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ x+1 & x\end{vmatrix}=x\cos x-(x+1)\sin x$ 只有孤立的零点, 我们有排除这些零点之后由线性方程组求解得

$$\begin{pmatrix}p(x)\\ q(x)\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}2x\sin x+2\sin x\\ -(x+1)\sin x-(x+2)\cos x\end{pmatrix}}{x\cos x-(x+1)\sin x}.$$

当 $x\cos x=(x+1)\sin x$ 时, $2x\sin x+2\sin x$ 不一定为 0, 因此 p 一定不连续.

11. (11.)**Method 1** 积分学方法

首先 $\int_0^a\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛且收敛必有界知存在 $\delta>0$ 使得

$$\sup_{y\in(0,\delta]}|\sqrt{y}f'(y)|<+\infty.$$

设 $\delta \geqslant x_2 > x_1 > 0$, 则由

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y} f'(y) \frac{1}{\sqrt{y}} dy \leqslant \sup_{y\in(0,a]} |\sqrt{y} f'(y)| \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

和 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 存在. 由 Cantor 定理知 f 在 $(0,a]$ 一致连续.

Method 2 微分学方法

存在 $\delta, C > 0$ 使得

$$\left|\sqrt{x} f'(x)\right| \leqslant C, \forall x \in (0,\delta).$$

于是

$$\left[f(x) - 2C\sqrt{x}\right]' = f'(x) - \frac{C}{\sqrt{x}} \leqslant 0, \forall x \in (0,\delta).$$

对 $0 < x_1 < x_2 < \delta$, 我们有

$$f(x_2) - 2C\sqrt{x_2} - (f(x_1) - 2C\sqrt{x_1}) \leqslant 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leqslant 2C\left|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right|.$$

类似的考虑 $f(x) + 2C\sqrt{x}$ 有

$$f(x_2) + 2C\sqrt{x_2} - (f(x_1) + 2C\sqrt{x_1}) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geqslant -2C\left|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right|,$$

现在

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2C\left|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right|, \forall 0 < x_1 < x_2 < \delta.$$

于是结合 $\sqrt{x}$ 一致连续和一致连续函数的拼接13.13的方法可得 f 一致连续.

笔记 显然, 数学函数性态分析习题11.的方法可以拓展到 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha f'(x), \alpha \in (0,1)$ 的情况.

12. (12.) 考虑

$$s = \sup\{x \in [a,b] : f(x) = f(a)\},$$

则 $f(s) = f(a)$. 对 $x > s$, 我们知道 $f(x) > f(a)$, 否则 $f(x) < f(a)$, 由零点定理可以找到更大的 $y > x > s$, 使得 $f(y) = f(a)$ 而矛盾!

现在在 $[s,b]$ 上考虑

$$t = \inf\{s \leqslant x \leqslant b : f(x) = f(b)\},$$

同样的 $f(t) = f(b)$ 且对 $s \leqslant x < t$ 有 $f(x) < f(b)$. 于是取 $[c,d] = [s,t]$ 为所求.

13. (13.) 考虑 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}, g''(x) = \frac{f''(x) - 2f'(x) + f(x)}{e^x}.$$

因为(13.261), 当 x 充分大时 $f' \neq 0$. 又 $f(x) \sim e^x, x \to +\infty$, 故取 $X > 0$, 使得 $f'(x), f(x) > 0$ 且(13.261)对 $x \geqslant X$ 都成立. 于是

$$|f'(x) - f'(X)| = \left|(L)\int_X^x f''(y)\,dy\right| \leqslant (L)\int_X^x |f''(y)|\,dy \leqslant c\int_X^x f'(y)\,dy = c\,|f(x) - f(X)|.$$

故

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(X)}{f(x)}\right| \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|c - \frac{f(X)}{f(x)}\right| = c.$$

从而存在 $d > 0$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant d\,|f(x)|, \forall x \geqslant X.$$

故

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} |g''(x)| \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{[(c+2)d+1]\,|f(x)|}{e^x} = (c+2)d + 1,$$

从而 $g''(x)$ 有界, 故由反向洛必达13.9第三条知

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1.$$

14. (14.)

(a). 对任何 $\epsilon>0$, 由题目条件, 有等式

$$(0,+\infty)=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{x>0:\left|f\left(\alpha_n x\right)\right|\leqslant\epsilon\right\}.$$

由 Baire 纲定理13.13, 我们知道存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 使得存在 $b>a>0$, 有

$$[a,b]\subset\bigcap_{n=N_0}^{\infty}\left\{x>0:\left|f\left(\alpha_n x\right)\right|\leqslant\epsilon\right\}.$$

现在选取 $N_1\in\mathbb{N}$, 满足

$$N_1\geqslant N_0,\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\leqslant\frac{b}{a},\forall n\geqslant N_1.$$

则当 $x\geqslant a\alpha_{N_1}$, 注意到

$$a\alpha_{n+1}\leqslant b\alpha_n,\forall n\geqslant N_1,\lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty,$$

于是

$$\left[a\alpha_{N_1},+\infty\right)=\bigcup_{n=N_1}^{\infty}\left[a\alpha_n,b\alpha_n\right],$$

于是存在 $c\in[a,b],N_2\geqslant N_1\in\mathbb{N}$ 满足 $x=c\alpha_{N_2}$, 于是

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(c\alpha_{N_2}\right)\right|\leqslant\epsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0$.

(b). 考虑

$$\alpha_n=n,n=1,2,\cdots,f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x=m\sqrt[m]{2},m\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases}.$$

则对任何 $x>0$, 我们证明至多只存在一个 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $nx=m\sqrt[m]{2}$. 若还有一个正整数 $n'\neq n$, 使得 $n'x=m'\sqrt[m']{2}$, 则

$$\frac{n}{n'}=\frac{m}{m'}2^{\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}}.$$

显然 $m\neq m'$ 且 $2^{\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}}$ 是无理数, 故就证明了至多只存在一个 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $nx=m\sqrt[m]{2}$. 于是 f 符合题目条件但不满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0$.

(c). 若 (c) 成立, 考虑 $\alpha_n=e^n$ 并设 $g\left(x\right)\triangleq f\left(e^x\right),x\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}g\left(\ln x+n\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(e^{n+\ln x}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\alpha_n x\right)=0,\forall x>0.\tag{30.157}$$

但由例题13.17的反例构造知这样的 g 不一定成立(30.157).

15. (15.) 本题来自当年的丘赛大佬逆神, 在互联网上留下了颇多有趣的问题和解答, 时至今日, 我也会去其 qq 空间学习方法, 不过似乎人早已消失在 qq. 不妨设 $a=0$ 且 b 充分小, 因为我们总可以缩小区间而不影响结论且总可以把条件不等式(13.262)右侧的系数放的更大. 更具体的我们设

$$c_0=c_1=\cdots=c_n=c>0,c\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b^{n-j}}{(n-1-j)!}<\frac{1}{2}.$$

归纳法, $n=0$ 时问题显然成立, 假设问题对小于 n 时成立, 对于 n 的时候. 考虑 $x^n=c\left(1+x+\cdots+x^{n-1}\right)$ 的正根 $x_0>0$ 且考虑 $g\left(x\right)=e^{-x_0x}f\left(x\right)$. 求导得

$$f^{(k)}\left(x\right)=\sum_{j=0}^{k}C_k^jx_0^{k-j}e^{x_0x}g^{(j)}\left(x\right),k=0,1,2,\cdots,n,$$

代入不等式(13.262)得

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^jx_0^{n-j}e^{x_0x}g^{(j)}\left(x\right)\leqslant c+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}C_k^jx_0^{k-j}e^{x_0x}\left|g^{(j)}\left(x\right)\right|,$$

即对某个 $c'>0$, 我们有

$$g^{(n)}(x) \leqslant c' e^{-x_0 x} + c' \sum_{k=1}^{n-1} \left| g^{(k)}(x) \right| + x_0^n \left[|g(x)| - g(x) \right].$$

若 f 有下界, 则 g 有下界, 则 $|g(x)| - g(x)$ 有上界, 因此存在 $c''>0$, 使得

$$g^{(n)}(x) \leqslant c'' + c'' \sum_{k=1}^{n-1} \left| g^{(k)}(x) \right|.$$

由归纳假设知 g' 有上界, 从而由中值定理知 g 有上界, 从而 f 有上界.

现在假设 f 即没有上界也没有下界, 从而 g 也没有上界和下界. 我们可取 $0<x_1<x_2<\cdots<b$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k = b, f^{(n-1)}(x_k) = 0, k = 1, 2, \cdots.$$

当 $x \in [0, x_k], k \in \mathbb{N}$, 我们

$$f^{(n-1)}(x) \leqslant f^{(n-1)}(0) + \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) \cdot x \leqslant \left| f^{(n-1)}(0) \right| + b \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y).$$

以及

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &\geqslant f^{(n-1)}(x_k) + \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) \cdot (x - x_k) \\ &\geqslant \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) \cdot (x - x_k) \geqslant - \left| f^{(n-1)}(0) \right| - b \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y). \end{aligned}$$

故我们得到了

$$\left| f^{(n-1)}(x) \right| \leqslant \left| f^{(n-1)}(0) \right| + b \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y). \tag{30.158}$$

现在对每个 $j = 0, 1, 2, \cdots, n-2$, 我们有

$$\left| f^{(j)}(x) \right| = \left| \sum_{i=j}^{n-2} \frac{f^{(i)}(0) x^{i-j}}{(i-j)!} + \frac{f^{(n-1)}(\theta) x^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \right| \leqslant \sum_{i=j}^{n-1} \frac{\left| f^{(i)}(0) \right| b^{i-j}}{(i-j)!} + \frac{\sup\limits_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) b^{n-j}}{(n-1-j)!},$$

因此对 $x \in [0, x_k]$, 结合(13.262), 我们有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &\leqslant c + c \sum_{j=0}^{n-1} \left| f^{(j)}(x) \right| \\ &\leqslant c + c \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=j}^{n-1} \frac{\left| f^{(i)}(0) \right| b^{i-j}}{(i-j)!} + \frac{\sup\limits_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) b^{n-j}}{(n-1-j)!} \right] \\ &\leqslant C + c b^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b^{-j}}{(n-1-j)!} \cdot \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) \\ &\leqslant C + \frac{1}{2} \sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y), \end{aligned}$$

这里 $C>0$ 是某个正常数. 两边对 $x \in [0, x_k]$ 取上确界, 我们有

$$\sup_{y\in[0,x_k]} f^{(n)}(y) \leqslant 2C.$$

于是 $f^{(n)}(x)$ 有上界, 从而 f 也有上界, 这就是一个矛盾! 故我们完成了证明.

16. (16.) 因为 xf' 单调, 我们知道 f' 一定内闭黎曼可积. 因为 f 有界且 xf' 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$ 存在或者为确定符号的 ∞. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) \neq 0$, 此时必有某个 $c>0$, 对充分大的 x, 成立不等式 $f'(x) > \frac{c}{x}$ 或者 $f'(x) < -\frac{c}{x}$. 而这样的不等式两边积分得 f 无界! 这就是一个矛盾!

现在 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$, 故 xf' 不变号. 于是 f' 不变号, 则 f 单调. 结合 f 有界知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

若 xf' 递增, 则有

$$f\left(x^2\right)-f(x)=\int_x^{x^2} f'(y)\,dy=\int_x^{x^2}\frac{yf'(y)}{y}dy\geqslant xf'(x)\int_x^{x^2}\frac{1}{y}dy=xf'(x)\ln x,$$

$$2f(x)-2f\left(\sqrt{x}\right)=2\int_{\sqrt{x}}^{x} f'(y)\,dy=2\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{yf'(y)}{y}dy\leqslant 2xf'(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{y}dy=xf'(x)\ln x,$$

于是由

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x^2\right)-f(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f\left(\sqrt{x}\right)\right]=0,$$

和夹逼准则我们知道 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)\ln x=0$.

若 xf' 递减, 类似可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)\ln x=0$.

这就完成了证明.

17. (17.) 注意到

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta)\,d\theta=2\pi f(0),$$

我们考虑连续偶函数 $g(x)=f(x)+f(-x)-2f(0)$, 则

$$\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[f(r\cos\theta)+f(-r\cos\theta)\right]d\theta-4\pi f(0)=0.$$

又

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta+\int_{\pi}^{2\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta+\int_0^{\pi} g(-r\cos\alpha)\,d\alpha\\&=2\int_0^{\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta,\end{aligned}$$

于是

$$0=\int_0^{\pi} g(r\cos\theta)\,d\theta=\int_{-1}^{1}\frac{g(rx)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-r}^{r}\frac{g(x)}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=2\int_0^{r}\frac{g(x)}{\sqrt{r^2-x^2}}dx.$$

现在

$$0=\int_0^{y}\frac{r}{\sqrt{y^2-r^2}}\int_0^{r}\frac{g(x)}{\sqrt{r^2-x^2}}dxdr=\int_0^{y} g(x)\,dx\int_x^{y}\frac{r}{\sqrt{y^2-r^2}\sqrt{r^2-x^2}}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{y} g(x)\,dx,$$

于是我们知道 $g(x)\equiv 0$. 从而就证明了

$$f(x)+f(-x)=2f(0),\forall x\in\mathbb{R}.$$

我们这里抛砖引玉一下, 若 $f\in C\left(\mathbb{R}^2\right)$ 则这个结果是不对的, 例如考虑

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

但是 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 则这个结果将成立. 我们把结论完整叙述一次, 以供读者钓鱼.

例题 30.2 设 $f\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\right)$, 若满足对任何 $r>0$, 都有 $\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta=0$, 证明

$$f(x,y)+f(-x,-y)=2f(0,0),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

此时似乎需要更高级工具才能完成, 也是作者最初查阅并给出本题的方法.

18. (18.) 考虑幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,z\in\mathbb{C}.$$

于是 f 是 $\mathbb{C}$ 上整函数且

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,z\in\mathbb{C},a\in\mathbb{R}.$$

因此

$$|f(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|z-a|^n=e^{|z-a|},$$

取 $a=\Re z$ 得

$$|f(z)|\leqslant e^{|\Im z|},\forall z\in\mathbb{C}. \tag{30.159}$$

证明借鉴Mse 解答.

证明的核心想法是建立恒等式

$$f'(0)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right). \tag{30.160}$$

最简单的证明方法是直接用留数定理计算级数.. 即

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=-\frac{4}{\pi}\mathrm{Res}_{z=-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2z+1)^2}f\left(\frac{2z+1}{2}\pi\right)\\&=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}{(2z+1)^2\sin(\pi z)}f\left(\frac{2z+1}{2}\pi\right)\right)'|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}f\left(\frac{2z+1}{2}\pi\right)\right)'|_{z=-\frac{1}{2}}\\&=f'(0)=1.\end{aligned}$$

现在我们证明了(30.160). 于是由

$$1=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right),\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=1,|f|\leqslant1,$$

我们知道

$$f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=(-1)^k,k\in\mathbb{Z}.$$

考虑整函数 $g(z)=\frac{f(z)-\sin z}{\cos z}$, 注意到

$$|\cos z|=\sqrt{\sin^2x\sinh^2y+\cos^2x\cosh^2y}\geqslant|\cos x|\cos hy\geqslant|\cos x|,z=x+iy. \tag{30.161}$$

则当 $|y|\geqslant1$, 由(30.159), 我们有

$$\left|\frac{f(z)-\sin z}{\cos z}\right|\leqslant\frac{|f(z)|+|\sin z|}{|\cos z|}\overset{(30.159)}{\leqslant}\frac{2e^{|y|}}{\frac{|e^{iz}+e^{-iz}|}{2}}\leqslant\frac{4e^{|y|}}{||e^{iz}|-|e^{-iz}||}=\frac{4e^{|y|}}{|e^{-y}-e^{y}|}\to4,|y|\to\infty.$$

当 $|y|\leqslant1$, 注意到取充分小的 $\delta>0$, 在 $\left|x-\frac{2k+1}{2}\pi\right|\geqslant\delta>0,k\in\mathbb{Z},|y|\leqslant1$, 我们有

$$\left|\frac{f(z)-\sin z}{\cos z}\right|\leqslant\frac{|f(z)|+|\sin z|}{|\cos z|}\overset{(30.159),(30.161)}{\leqslant}\frac{2e^{|y|}}{|\cos x|}\leqslant\frac{2e}{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right|}.$$

剩下部分区域上 $\left|\frac{f(z)-\sin z}{\cos z}\right|$ 的界由最大模定理被边界上的点控制, 因此仍然有界. 现在 g 有界, 于是我们证明了 g 为常数. 故 $f(z)=\sin z+c\cos z$. 结合 $|f(x)|\leqslant1,f(x)\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有 $f(x)=\sin x$.

19. (19.) 不妨设 p 首系数为 1.

充分性: 若 $n=1$, 设 $p=x+c,c>0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+cf'(x))=0$. 于是由洛必达法则, 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{cx}}{e^{cx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f'(x)+cf(x)]e^{cx}}{e^{cx}}=\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+cf(x))=0.$$

这就完成了证明. 若 $n=2$, 由例题8.44我们就完成了证明. 对于 $n>2$, p 总能分解为若干一次实多项式和二次式实多项式的积 $p=p_1p_2\cdots p_s$, 于是反复用一次和二次的情况得

$$\lim_{x\to+\infty}p\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}p_1p_2\cdots p_{s-1}\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

必要性: 若 p 有一个实根非负. 则 $p=(x-a)h, a\geqslant 0, h\in\mathbb{R}[x]$. 考虑 $f(x)=e^{ax}$, 我们有 $p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{ax}=0$ 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{ax}\neq 0$. 若 p 有一个根实部非负且虚部非 0, 记为 $a+bi$. 则考虑 $f(x)=e^{ax}\cos(bx)$ 有 $p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{ax}\cos(bx)=0$, 但

$$\lim_{x\to+\infty}p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{ax}\cos(bx)\neq 0.$$

20. (20.) 代入 $x=0$ 到原方程知 $f'(0)=0$. 又

$$\lim_{x\to0^+}f''(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-2f'(x)}{x}=f'(0)-2f''(0)=-2f''(0),$$

结合导数极限定理12.2, 我们知道 $f''(0)=0$, 即 $f\in C^2[0,1]$. 现在由题目方程知

$$\int_0^x yf''(y)\,dy+2\int_0^x f'(y)\,dy=\int_0^x f(y)\,dy,$$

即

$$xf'(x)-\int_0^x f'(y)\,dy+2f(x)=\int_0^x f(y)\,dy.$$

继续计算得

$$xf'(x)+f(x)=\int_0^x f(y)\,dy\Rightarrow\int_0^x(yf(y))'\,dy=\int_0^x\int_0^y f(z)\,dzdy.$$

继续计算我们有

$$xf(x)=\int_0^x\int_0^y f(z)\,dzdy=\int_0^x f(z)\,dz\int_z^x 1dy=\int_0^x(x-z)f(z)\,dz,$$

于是

$$x|f(x)|\leqslant\int_0^x(x-z)|f(z)|\,dz\leqslant x\int_0^x|f(z)|\,dz\Rightarrow|f(x)|\leqslant\int_0^x|f(z)|\,dz.$$

现在

$$\left[\frac{\int_0^x|f(z)|\,dz}{e^x}\right]'=\frac{|f(x)|-\int_0^x|f(z)|\,dz}{e^x}\leqslant 0\Rightarrow\frac{\int_0^x|f(z)|\,dz}{e^x}\leqslant 0\Rightarrow f(x)=0,\forall x\in[0,1],$$

我们完成了证明.

21. (21.) 对任何 $\epsilon>0$, 由 SW 定理13.45, 我们取 $q=\sum\limits_{j=0}^n a_jx^j\in\mathbb{Q}[x]$ 使得

$$\left|f\left(\sqrt[4]{x}\right)-q(x)\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall x\in[0,1].\tag{30.162}$$

取 $b_j\in\mathbb{Q}$, 使得

$$|b_j-a_j|\leqslant\frac{\epsilon}{2(n+1)},j=0,1,2,\cdots,n.$$

现在

$$|p(x)-q(x)|\leqslant\sum_{j=0}^n|b_j-a_j|x^j\leqslant\sum_{j=0}^n|b_j-a_j|\leqslant(n+1)\frac{\epsilon}{2(n+1)}=\frac{\epsilon}{2},\forall x\in[0,1],$$

结合(30.162)知

$$\left|f(x)-p\left(x^4\right)\right|\leqslant\left|f(x)-q\left(x^4\right)\right|+\left|q\left(x^4\right)-p\left(x^4\right)\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\forall x\in[0,1],$$

故 $p\left(x^4\right)$ 为所求.

22. (22.) 当 $\gcd(m,n)=1$, 取 $f(x)=\frac{m}{n}x$. 若 $y-x=k\in\mathbb{N}$, 则因 $0<k<n,\gcd(m,n)=1$, 我们知道

$$f(y)-f(x)=\frac{m}{n}y-\frac{m}{n}x=\frac{mk}{n}\notin\mathbb{N}.$$

于是 f 为所求.

当 $d=\gcd(m,n)=2$, 待定 $\epsilon>0$, 考虑

$$f(x)=\begin{cases}\frac{m}{n}x+\epsilon x\left(\frac{n}{2}-x\right), & 0\leqslant x\leqslant\frac{n}{2}\\ \frac{m}{n}x, & \frac{n}{2}\leqslant x\leqslant m\end{cases}.$$

当 $y-x$ 为整数且 $x>0,y<n$.

若 $\frac{n}{2}\leqslant x<y$, 则因 $\gcd\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)=1,0<y-x<\frac{n}{2}$ 知

$$f(y)-f(x)=\frac{m}{n}(y-x)=\frac{\frac{m}{2}(y-x)}{\frac{n}{2}}\notin\mathbb{N}.$$

若 $x<y\leqslant\frac{n}{2}$, 则

$$\frac{m}{n}(y-x)+\frac{n\epsilon(y-x)}{2}-\epsilon(y-x)(y+x).$$

注意到 $y-x$ 只有有限种取法, 所以可能的如此的数字 $\frac{m}{n}(y-x)$ 全体到整数的距离有一个正下界 δ. 于是取 $0<\epsilon<\frac{4\delta}{3n^2}$, 我们就有

$$\left|\frac{n\epsilon(y-x)}{2}-\epsilon(y-x)(y+x)\right|\leqslant\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\epsilon+\epsilon\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right)=\frac{3n^2}{4}\epsilon<\delta,$$

从而 $f(y)-f(x)$ 不是整数.

若 $x\leqslant\frac{n}{2}\leqslant y$, 则

$$f(y)-f(x)=\frac{m}{n}(y-x)+\epsilon x\left(\frac{n}{2}-x\right).$$

和刚才讨论同样的, 我们可让 ϵ 更小使得 $f(y)-f(x)$ 不为整数. 因此我们证明了 $d=\gcd(m,n)=2$ 时成立.

当 $d=\gcd(m,n)>2$, 若 f 满足题目条件, 考虑

$$g(x)=f\left(x+\frac{n}{d}\right)-f(x)-\frac{m}{d}\in C[0,n],$$

则因 $x+\frac{n}{d}-x=\frac{n}{d}\in\mathbb{N}$, 我们知道 $f\left(x+\frac{n}{d}\right)-f(x)\notin\mathbb{N}$, 但是 $\frac{m}{d}\in\mathbb{N}$. 于是

$$g(x)\neq0,\forall x\in\left(0,n-\frac{n}{d}\right).$$

若 $g(x)<0,\forall x\in\left(0,n-\frac{n}{d}\right)$, 则

$$f\left(\frac{tn}{d}\right)-f\left(\frac{(t-1)n}{d}\right)\leqslant\frac{m}{d},t=1,2,3,\cdots,d$$

且等号成立当且仅当 $t=1,d$. 于是求和得 $f(n)<m$, 矛盾! 当 $g(x)>0,\forall x\in\left(0,n-\frac{n}{d}\right)$ 的情况可同样导出 $f(n)>m$ 而矛盾!, 这就完成了证明.

23. (23.) 设 φ 全部不动点为 $y_1<y_2<\cdots<y_n$, 记 $y_0=-\infty,y_{n+1}=+\infty$, 显然 $\varphi(x)-x$ 在每个 $(y_k,y_{k+1}),k=0,1,2\cdots,n$ 都不变号, 因为 $\exists x_n\to+\infty$, 使得 $\varphi(x_n)>x_n,n\geqslant1$, 所以 $\varphi(x)>x,\forall x>y_n$.

给定 $z_1>y_n$, 我们知道 $z_1\in(\varphi(y_n),\varphi(z_1))$, 因此存在 $z_2\in(y_n,z_1)$, 使得 $\varphi(z_2)=z_1$. 现在 $z_2\in(\varphi(y_n),\varphi(z_2))$, 因此存在 $z_3\in(y_n,z_2)$, 使得 $\varphi(z_3)=z_2$, 如此依次下去, 我们有

$$\varphi(z_{m+1})=z_m,z_{m+1}\in(y_n,z_m),$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}z_m=z\geqslant y_n,\varphi(z)=z\Rightarrow z=y_n,$$

故

$$f(\varphi(z_{m+1}))=f(z_{m+1})=f(z_m)\Rightarrow f(z_1)=f(y_n),$$

因此 f 在 $[y_n,+\infty)$ 常值, 现在在 (y_{n-1},y_n) 上, 如果 $\varphi(x)>x$, 取定 $z_1\in(y_{n-1},y_n)$, 那么有 $z_1\in(y_{n-1},\varphi(z_1))$, 于是存在 $z_2\in(y_{n-1},z_1)$, 使得 $\varphi(z_2)=z_1$, 依次下去, 完全类似刚才的讨论, 我们有 $f(z_1)=f(y_{n-1})$, 结合连续性, 即得 f 在 $[y_{n-1},+\infty)$ 常值, 如果在 (y_{n-1},y_n) 上,$\varphi(x)<x$, 类似的相当于 $f(z_1)=f(y_n)$, 仍然有 f 在 $[y_{n-1},+\infty)$ 常值, 这样我们可以依次下去说明 f 在 $[y_1,+\infty)$ 为常值.

在 $(-\infty,y_1)$ 上, 如果 $\varphi(x)<x$ 仍然是类似得, 如果 $\varphi(x)>x$, 取定 $z_1\in(-\infty,y_1)$, 考虑递推

$$z_{n+1}=\varphi(z_n),$$

则

$$f(z_{n+1})=f(\varphi(z_n))=f(z_n),$$

如果存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $z_n\geqslant y_1$, 那么 $f(z_1)=f(y_1)$, 反之可有 $\varphi(z_n)<y_1,\forall n\in\mathbb{N}$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=y_1$, 仍然有 $f(z_1)=f(y_1)$, 故 f 在 $\mathbb{R}$ 为常值.

24. (24.) 由题目条件容易知道 $\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-x^2}e^{2\mu x}dx=0,\forall\mu\in\mathbb{R}$. 考虑

$$\varphi(z)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-x^2}e^{zx}dx,$$

于是容易证明

$$\varphi'(z)=\int_{\mathbb{R}}xf(x)e^{-x^2}e^{zx}dx.$$

现在 $\varphi\in H(\mathbb{C}),\varphi|_{\mathbb{R}}=0$. 由解析函数唯一性定理我们知道

$$\varphi\equiv0\Rightarrow\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-x^2}e^{-2\pi ixy}dx=0,\forall y\in\mathbb{R}.$$

故 $fe^{-x^2}\in L^1(\mathbb{R})$ 的傅立叶变换恒为 0 知 $fe^{-x^2}=0$, 这给出了 $f=0,a.e.$

25. (25.) 首先若 f 是有上界函数, 则由(13.263)知

$$|f(x)-f(y)|\leqslant g(x)\sup_{[0,+\infty)}f.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 故由 Cauchy 收敛准则易知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.
若 f 是无上界函数, 则由 f 连续性知 $[f(0),+\infty)\subset f([0,+\infty))$. 记 $k=[f(0)]+1\in\mathbb{N}$, 则记

$$y_n=\inf\{y\geqslant0:f(y)=n\},\forall n\geqslant k.$$

现在 $f(y_n)=n$. 若 $y_{n+1}\leqslant y_n$ 则导出 $[0,y_{n+1}]$ 之间必然取到 n, 这和 y_n 定义矛盾! 结合 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty$ 知 $y_{n+1}>y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$. 且

$$f(y_n)=\sup_{y\in[0,y_n]}f(y),n\geqslant k.$$

现在用(13.263)知

$$f(y_n)-f(x)\leqslant|f(y_n)-f(x)|\leqslant g(x)\sup_{t\in[x,y_n]}f(t)\leqslant g(x)\sup_{t\in[0,y_n]}f(t),$$

即

$$f(x)\geqslant n(1-g(x)),\forall0\leqslant x<y_n.$$

对充分大的 x 使得 $g(x)<1$, 令 $n\to\infty$ 知矛盾! 这就证明了 f 有上界, 从而完成了证明.

26. (26.) 因为连续单射等价严格单调12.2, 我们知道 f 严格单调. 假定

$$f(c)=c,c\in\mathbb{R}.$$

现在 $f(x)+f^{-1}(x)=2x$ 且 f 和 f 反函数有相同的单调性知 f 严格递增.
注意 $f(f(x))=2f(x)-x$, 我们任取

$$x_0\in\mathbb{R},x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{Z},$$

则 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n,n\in\mathbb{Z}$. 现在求通项得 $x_n=tn+x_0,n\in\mathbb{Z}$. 若 $f(x_0)>x_0$, 由递增递推数列的结论8.4.1, 显然有 x_n 严格递增且不能是不动点[93]. 于是取 $n\in\mathbb{Z}$ 使得

$$tn+x_0<c<t(n+1)+x_0.$$

[93] 如果是不动点, 那一项之后就变成了常值数列.

然后

$$t(n+1)+x_0=f(tn+x_0)<f(c)=c<t(n+1)+x_0,$$

这就是一个矛盾! 类似的可以考虑 $f(x_0)<x_0$, 这也将导出矛盾! 我们完成了证明.

27. (27.) 不失一般性, 只证 F 在 0 处连续. 对 $0<|x|<1$, 我们有

$$\int_{|y|\leqslant\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\left|e^{xy}-1\right|dy\leqslant\sup_{|t|\leqslant\sqrt{|x|}}\left|e^t-1\right|\int_{|y|\leqslant\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\,dy\leqslant\sup_{|t|\leqslant\sqrt{|x|}}\left|e^t-1\right|\int_{\mathbb{R}}|f(y)|\,dy.\tag{30.163}$$

又

$$\begin{aligned}\int_{|y|>\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\left|e^{xy}-1\right|dy&\leqslant\int_{|y|>\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\,e^{xy}dy+\int_{|y|>\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\,dy\\&\leqslant\int_{|y|>\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\,e^{y}dy+\int_{|y|>\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\,e^{-y}dy+\int_{|y|>\frac{1}{\sqrt{|x|}}}|f(y)|\,dy.\end{aligned}$$

结合(30.163)就证明了 F 在 0 连续. 我们完成了证明.

28. (28.) 对一般的满足题目积分条件的有正下界的可测函数 f,g, 我们考虑概率测度

$$\mu(A)\triangleq\int_A g(x)\,dx,\forall A\text{是}[0,1]\text{勒贝格可测子集.}$$

则利用题目条件有

$$\int_0^1\left(\frac{f}{g}-1\right)d\mu=0,\int_0^1\left|\frac{f}{g}-1\right|d\mu=\frac{3}{2}.$$

记 $h=\frac{f}{g}-1$, 则

$$\int_0^1 hd\mu=0,\int_0^1|h|\,d\mu=\frac{3}{2}\Rightarrow\int_0^1 h^+d\mu=\int_0^1 h^-d\mu=\frac{3}{4},$$

这里

$$h=h^+-h^-,h^+\text{是}h\text{的正部},h^-\text{是}h\text{的负部.}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{|f(x)|^2}{g(x)}dx&=\int_0^1(1+h)^2\,d\mu=1+\int_0^1 h^2d\mu\\&=1+\int_0^1\left(h^+\right)^2d\mu+\int_0^1\left(h^-\right)^2d\mu\\&\overset{\text{Cauchy 不等式16.1}}{\geqslant}1+\frac{1}{\mu(h>0)}\left(\int_0^1 h^+d\mu\right)^2+\frac{1}{\mu(h\leqslant 0)}\left(\int_0^1 h^-d\mu\right)^2\\&=1+\frac{9}{16}\left(\frac{1}{\mu(h>0)}+\frac{1}{1-\mu(h>0)}\right).\end{aligned}$$

这自然诱使我们估计

$$\begin{aligned}\mu(h>0)=1-\mu(h\leqslant 0)&=1-\int_{f\leqslant g}g(x)\,dx\\&\overset{\text{放大为能算的东西}}{\leqslant}1-\int_{f\leqslant g}[g(x)-f(x)]\,dx\\&=1+\int_{h\leqslant 0}hd\mu=1-\int_0^1 h^-d\mu=1-\frac{\delta}{2}=\frac{1}{4},\end{aligned}$$

故

$$1+\frac{9}{16}\left(\frac{1}{\mu(h>0)}+\frac{1}{1-\mu(h>0)}\right)\geqslant 1+\frac{9}{16}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=4.$$

这就证明了 $\int_0^1\frac{|f(x)|^2}{g(x)}dx\geqslant 4$.

29. (29.) 所证不等式等价于

$$\frac{f(1)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geqslant \frac{f(1)-f(x)}{1-x}, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

这是直接的割线不等式.

30. (30.) 考虑关于 λ, α, c 的方程

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} T_1(x) \cdot \left[Q\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda} Q(x) - c\sqrt{\lambda} T_3(x)\right] dx = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} T_2(x) \cdot \left[Q\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda} Q(x) - c\sqrt{\lambda} T_3(x)\right] dx = 0 \end{cases}. \tag{30.164}$$

我们采用隐函数定理. 对 λ 求导得

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} T_1(x) \cdot \left[-\frac{(x-\alpha)}{\lambda^2} Q'\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} Q(x) - \frac{c}{2\sqrt{\lambda}} T_3(x)\right] dx \\ \int_{\mathbb{R}} T_2(x) \cdot \left[-\frac{(x-\alpha)}{\lambda^2} Q'\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} Q(x) - \frac{c}{2\sqrt{\lambda}} T_3(x)\right] dx \end{cases}.$$

代入 $\lambda = 1, \alpha = 0$ 得

$$\int_{\mathbb{R}} T_1(x) \cdot \left[-xQ'(x) - \frac{1}{2} Q(x) - \frac{c}{2} T_3(x)\right] dx \overset{\text{分部积分和直接计算}}{=} 0;$$

$$\int_{\mathbb{R}} T_2(x) \cdot \left[-xQ'(x) - \frac{1}{2} Q(x) - \frac{c}{2} T_3(x)\right] dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 Q^2(x)\, dx - \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} T_3(x)\, dx.$$

对 α 求导得

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} T_1(x) \cdot Q'\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) dx \\ \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} T_2(x) \cdot Q'\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) dx \end{cases}.$$

代入 $\lambda = 1, \alpha = 0$ 得

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} T_1(x) \cdot Q'(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} Q^2(x)\, dx; \\ \int_{\mathbb{R}} T_2(x) \cdot Q'(x)\, dx = 0. \end{cases}$$

计算雅克比行列式得

$$J = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} Q^2(x)\, dx \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} x^2 Q^2(x)\, dx - \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} T_3(x)\, dx\right].$$

当 $|c|$ 充分小我们知道 $J \neq 0$, 于是存在 c 的邻域使得方程组(30.164)确定了关于 c 的函数 $\lambda(c), \alpha(c)$, 这就完成了证明.

31. (31.) 先证明满足方程(13.264)的函数唯一. 即设

$$u_t - \Delta u = 0, u(x,0) = 0, u \in C^2\left(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)\right).$$

构造 $e(t) = \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x,t)\, dx, t \geqslant 0$, 则

$$e'(t) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = 2 \int_{\mathbb{R}^2} u \triangle u dx \overset{\text{Gauss 公式}}{=} -2 \int_{\mathbb{R}^2} |Du|^2\, dx \leqslant 0.$$

于是我们有

$$0 \leqslant e(t) \leqslant e(0) = 0 \Rightarrow u \equiv 0,$$

这就证明了解的唯一性.

断言

$$u(x,t) \triangleq \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy, t > 0$$

是(13.264)的一个解. 事实上, 一个初等的计算表明

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)}{\partial t} - \Delta_x \left(\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right)\right] g(y)\, dy = 0.$$

显然的

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} u(x,t) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy \overset{y=x-\sqrt{t}z}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|z|^2}{4}} u_0\left(x-\sqrt{t}z\right)dz\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|z|^2}{4}}dz\cdot u_0(x) = u_0(x).\end{aligned}$$

上面是给不熟悉 pde 的读者的数分严格化. 接下来进入丘赛的核心步骤. 由卷积不等式16.3, 我们知道

$$||u||_{L^2} = \left|\left|u_0 * \left(\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)\right|\right|_{L^2} \leqslant ||u_0||_{L^2}\cdot\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)dx = ||u_0||_{L^2}.$$

这就完成了证明.

对于丘赛原题, 取

$$u(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t+1}}}{1+4t}, u_0(x,y) = e^{-x^2-y^2},$$

则

$$||u(x,y)||_{L^2}^2 = \frac{1}{(1+4t)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{4t+1}}dxdy = \frac{1}{4t+1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\left(x^2+y^2\right)}dxdy.$$

于是丘赛原题需要的不等式

$$\int_0^\infty ||u(x,t)||_{L^2}^2\,dt \leqslant C\,||u_0||_{L^2}^2.$$

是个错题.

32. (32.) 为书写方便, 我们用 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 来表示 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 于是对速降函数 f, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left|(-\Delta+I)^{-1}\left(e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}f\right)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \left|\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\left(e^{-|\mathbf{x}|^2}f\right)}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\\ &= \left|\left|\frac{\mathcal{F}\left(e^{-|\mathbf{x}|^2}f\right)}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \left|\left|\frac{\mathcal{F}\left(e^{-|\mathbf{x}|^2}\right)*\mathcal{F}(f)}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \left|\left|\frac{\left(\pi^{\frac{3}{2}}e^{-\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right)*\mathcal{F}(f)}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\\ &= \pi^3\left|\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\mathcal{F}(f)(\mathbf{y})}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}d\mathbf{y}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \overset{\text{闵可夫斯基不等式16.3}}{\leqslant} \pi^3\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left|\left|\frac{e^{-\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}|\mathcal{F}(f)(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}\right|^2\\ &\overset{\text{柯西不等式16.1}}{\leqslant} \pi^3\int_{\mathbb{R}^3}\left|\left|\frac{e^{-\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}}{1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2}\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\mathbf{y}\,||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \pi^3\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\left(1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2\right)^2}d\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-2\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}d\mathbf{y}\,||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\\ &= \pi^3\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\left(1+4\pi^2|\mathbf{x}|^2\right)^2}d\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-2\pi^2|\mathbf{y}|^2}d\mathbf{y}\cdot||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \pi^3\int_0^\infty\frac{4\pi r^2}{\left(1+4\pi^2r^2\right)^2}dr\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi^2t^2}dt\right)^3||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2\\ &= \pi^3\frac{1}{8\pi}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{32}||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{32}||f||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.\end{aligned}$$

显然, 有稠密性, 上述不等式可以扩充到一切 $f\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. 这就证明了

$$\left|\left|(-\Delta+I)^{-1}\left(e^{-|\mathbf{x}|^2}\right)\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}}{32}} < 1.$$

于是 $I+(-\Delta+I)^{-1}V$ 可逆.

33. (33.)**Method 1**

设 $\{t_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,+\infty)$ 是 f 的周期且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$, 则考虑卷积磨光13.14:

$$f_\delta(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y)\chi_\delta(y)\,dy, \delta>0, x\in\mathbb{R}.$$

注意到

$$f_\delta(x+t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t_n-y)\chi_\delta(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\chi_\delta(y)\,dy=f_\delta(x),$$

我们有

$$f'_\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_\delta(x+t_n)-f_\delta(x)}{t_n}=0.$$

因此 $f_\delta(x)\equiv c_\delta\in\mathbb{R}$. 由磨光的性质我们有

$$f(x)=\lim_{\delta\to0^+}f_\delta(x)=\lim_{\delta\to0^+}c_\delta,\forall x\in\mathbb{R},$$

这就证明了 $f(x)\equiv c$.

Method 2

设 $x<y$ 使得 $f(x)\neq f(y)$, 不妨设 $f(x)<f(y)$. 由连续性, 存在 $\delta\in\left(0,\frac{y-x}{2}\right)$, 使得

$$\sup_{z\in[x,x+\delta]}f(z)<\inf_{z\in[y-\delta,y]}f(z).\tag{30.165}$$

取 $T\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$ 使得 f 有周期 T. 再取 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x+Tk\in[y-\delta,y]$, 这里 k 存在性来自

$$x+Tk\in[y-\delta,y]\Leftrightarrow y-\delta\leqslant x+Tk\leqslant y\Leftrightarrow\frac{y-\delta-x}{T}\leqslant k\leqslant\frac{y-x}{T}$$

以及

$$\frac{y-x}{T}-\frac{y-x-\delta}{T}=\frac{\delta}{T}>2.$$

于是我们由 $f(x)=f(x+Tk)$ 知和(30.165)矛盾! 因此我们证明了 f 为常值函数.

34. (34.)f 第一类间断点至多可数当然是13.6直接推论. 为了证明 g 连续. 固定 $x_0\in[a,b]$, 不妨设 $x_0\in(a,b)$, 我们断言 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

事实上对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使得

$$|f(z)-f(y)|\leqslant\epsilon,\forall y,z\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

让 $y\to x_0,z\to x$, 我们有

$$|g(x)-g(x_0)|\leqslant\epsilon,\forall y,z\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

这就证明了 g 在 x_0 连续. 于是我们证明了 $g\in C[a,b]$.

35. (35.) 我们知道严格下凸函数单调性走势只有三种可能, 先严格减后严格增, 严格增, 严格减. 结合题目条件知存在 $X>0$ 使得 f,f' 在 $[X,+\infty)$ 严格递增且 $f(x)>0,f'(x)>0,\forall x\geqslant X$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 因此存在连续的严格递增反函数 $f^{-1}:[f(X),+\infty)\to[X,+\infty)$.

我们先来看 $f\in C^1[0,+\infty)$ 的情形, 现在

$$\int_X^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x\overset{x=f^{-1}(y)}{=}\int_{f(X)}^{\infty}\sin y\mathrm{d}f^{-1}(y)=\int_{f(X)}^{\infty}\frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y.$$

注意到 $\left|\int_{f(X)}^{x}\sin t\mathrm{d}t\right|\leqslant2$. 洛必达法则表明

$$+\infty=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f'(y)}{1},$$

注意上式右侧一定有意义, 所以可逆用洛必达. 于是 $\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ 递减到 0. 由 A-D 判别法14.4我们知道 $\int_0^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 进一步

$$\begin{aligned}\int_X^{\infty}|\sin f(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_{f(X)}^{\infty}\frac{|\sin y|}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y\geqslant\int_{f(X)}^{\infty}\frac{|\sin y|^2}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y\\&=\frac12\int_{f(X)}^{\infty}\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y-\frac12\int_{f(X)}^{\infty}\frac{\cos(2y)}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y\\&=\frac12\int_X^{\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}f(x)-\frac12\int_{f(X)}^{\infty}\frac{\cos(2y)}{f'(f^{-1}(y))}\mathrm{d}y\\&=+\infty,\end{aligned}$$

这里上式最后第二个积分可用 A-D 判别法14.4证明收敛. 因此我们证明了 $\int_0^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

$*$ 下面我们只对 f 严格下凸连续来证明本题结论, 我们只需证明 $\int_0^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在即可, 不绝对收敛的证明类似可得.

同样有存在 $X>0$ 使得 f 在 $[X,+\infty)$ 严格递增且 $f(x)>0,\forall x\geqslant X$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 因此存在连续的严格递增反函数 $f^{-1}:[f(X),+\infty)\to[X,+\infty)$.

注意到连续下凸函数是内闭绝对连续的且导数除去可数个点外存在, 且右导数处处存在是递增函数满足

$$f'(x)=f'_+(x),a.e.$$

结合例题12.44我们知道 f^{-1} 在 $[f(X),+\infty)$ 递增上凸, 因此也是内闭绝对连续的.

若

$$\lim_{x\to+\infty}f'_+(x)=c<+\infty,$$

则由例题12.60知

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f'_+(y)\,\mathrm{d}y}{x}=c,$$

这就是一个矛盾!, 即只能有

$$\lim_{x\to+\infty}f'_+(x)=+\infty.$$

不妨设

$$f'_+(x)\geqslant 1,\forall x\geqslant X.$$

由周民强实变函数教材 278 页推论 5.23 得

$$f\left(f^{-1}(t)\right)=t\Rightarrow\left[f^{-1}(t)\right]'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(t)\right)},a.e.$$

由周民强实变函数教材 278 页定理 5.24 得

$$\int_X^Y\sin f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{f(X)}^{f(Y)}\frac{\sin y}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\mathrm{d}y,\forall Y\geqslant X.$$

现在

$$\int_X^Y\sin f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{f(X)}^{f(Y)}\frac{\sin y}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\mathrm{d}y=\int_{f(X)}^{f(Y)}\frac{\sin y}{f'_+\left(f^{-1}(y)\right)}\mathrm{d}y.$$

此时就可以使用 A-D 判别法得到

$$\int_X^{\infty}\sin f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{Y\to+\infty}\int_X^Y\sin f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在, 这就完成了证明.

36. (36.) 由实解析函数的充要条件19.4我们知 f 实解析, 初值条件告诉我们 f 在 0 附近恒为 0, 实解析函数零点孤立性19.7告诉我们 $f\equiv 0$.

37. (37.) 对固定的满足题目条件的 ϕ, 注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\phi(x)\,\mathrm{d}x\overset{\text{换元}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\phi(x-h)-\phi(x)}{h}\mathrm{d}x.$$

又

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right]\phi(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup|\phi|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\phi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

不妨设 $\phi\neq0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x>0$, 对任何 $\epsilon>0$, 取 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\int_{|x|>n}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{4\sup|\phi'|}.$$

然后再利用紧集 $[-n-1,n+1]$ 上的连续函数 ϕ' 一致连续, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得

$$|\phi'(x+h)-\phi'(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x},\forall x\in[-n,n],h\in[-\delta,\delta].$$

因此当 $0<|h|<\delta$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\phi(x-h)-\phi(x)}{h}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot\left|\frac{\phi(x-h)-\phi(x)}{h}+\phi'(x)\right|\mathrm{d}x\\&\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\cdot|\phi'(x)-\phi'(\theta)|\,\mathrm{d}x,(|\theta-x|\leqslant|h|)\\&=\int_{-n}^{n}|f(x)|\cdot|\phi'(x)-\phi'(\theta)|\,\mathrm{d}x+\int_{|x|>n}|f(x)|\cdot|\phi'(x)-\phi'(\theta)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{-n}^{n}|f(x)|\cdot|\phi'(x)-\phi'(\theta)|\,\mathrm{d}x+2\sup|\phi'|\int_{|x|>n}|f(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\epsilon}{2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x+2\sup|\phi'|\frac{\epsilon}{4\sup|\phi'|}=\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\phi(x-h)-\phi(x)}{h}\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在我们得到了等式(13.265).

38. (38.) 对 $m\in\mathbb{N}$, 考虑

$$p_{n+1}(x)=\frac{2^m}{2^m-1}p_n(x)(1-p_n(x)),p_0(x)=x,x\in[0,1],$$

容易知道函数 $y=\frac{2^m}{2^m-1}t(1-t)$ 和 $y=t$ 相交于 $(0,0),\left(\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^m}\right)$, 作出折线图 (蛛网图), 容易看到当 $x\in\left[0,\frac{1}{2^m}\right]$, $p_n(x)$ 递增到 $\frac{1}{2^m}$, 当 $x\in\left[\frac{1}{2^m},\frac{1}{2}\right]$,$p_n(x)$ 递减到 $\frac{1}{2^m}$, 当 $x\in\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{2^m}\right]$, $p_1(x)\in\left[\frac{1}{2^m},\frac{1}{2}\right]$, 当 $x\in\left[1-\frac{1}{2^m},1\right]$, $p_1(x)\in\left[0,\frac{1}{2^m}\right]$.

因此注意到对四个区间, 分别运用 Dini 定理13.39, 并结合起来, 我们知道 $p_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛到 $\frac{1}{2^m}$.

现在对 $f\in C[a,b]$, 由 S-W 定理, 对任何 $\epsilon>0$, 取有理多项式 (不妨设其系数属于 $[0,1)$) $\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$, 使得

$$\left|\sum_{k=0}^{m}a_kx^k-f(x)\right|\leqslant\epsilon,$$

对每个 $k=0,1,2,\cdots,m$, 取 $n_k,j_k\in\mathbb{N}$, 使得

$$a_k\in[\frac{j_k}{2^{n_k}},\frac{j_k+1}{2^{n_k}}],\left|a_k-\frac{j_k}{2^{n_k}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n_k}}\leqslant\frac{\epsilon}{m+1},$$

现在取整系数多项式 $p_k(x)$, 使得 (都在 $x\in[a,b]$ 上), $\left|p_k(x)-\frac{1}{2^{n_k}}\right|\leqslant\frac{\epsilon}{(m+1)j_k}$, 那么

$$\left|j_kp_k(x)x^k-a_kx^k\right|\leqslant\left|a_k-\frac{j_k}{2^{n_k}}\right|+\left|j_kp_k(x)-\frac{j_k}{2^{n_k}}\right|\leqslant\frac{2\epsilon}{m+1},$$

从而

$$\left|\sum_{k=0}^{m}j_kp_k(x)x^k-f(x)\right|\leqslant\left|f(x)-\sum_{k=0}^{m}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{m}j_kp_k(x)x^k-\sum_{k=0}^{m}a_kx^k\right|\leqslant3\epsilon.$$

39. (39.) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=a\neq0$, 不妨设 $a>0$, 则存在 $x_1>a$, 使得 $f''(x)>\frac{a}{2},\forall x\geqslant x_1$, 此时

$$f(x)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{a}{4}(x-x_1)^2,\forall x\geqslant x_1,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=+\infty$, 这导出必有 $a=0$.

注意到

$$f(n)=f(x)+f'(x)(n-x)+\frac{f''(\theta_n)}{2}(n-x)^2,$$

以及

$$f(n+1)=f(x)+f'(x)(n+1-x)+\frac{f''(\theta_{n+1})}{2}(n+1-x)^2,$$

两式相减即得

$$f'(x)=f(n+1)-f(n)-\frac{f''(\theta_{n+1})}{2}(n+1-x)^2+\frac{f''(\theta_n)}{2}(n-x)^2,$$

选取 $n=[x]$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 现在

$$f(x)=f([x])+f'([x])(x-[x])+\frac{f''(\theta_x)}{2}(x-[x])^2,$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(n)\text{存在.}$$

我们完成了证明.

40. (40.) 对于 $x\in\mathbb{R}\setminus\overline{D}$, 显然 $f'(x)=g(x)=0$, 对 $x\in\partial D$, 由连续性, 我们有

$$f(x)=\lim_{y\in\mathbb{R}\setminus\overline{D},y\to x}f(y)=0,g(x)=\lim_{y\in\mathbb{R}\setminus\overline{D},y\to x}g(y)=0.$$

现在对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta>0$, 使得当 $|y-x|<\delta$, 有 $|g(y)|<\epsilon$, 于是对每个 $|y-x|<\delta,y\in D$, 注意 D 是无交开区间之并, 所以可在 y 所在 D 的连通分支的边界取一点 z 介于 x,y 之间 (z 可能和 x 重复), 现在有

$$|z-x|<|y-x|<\delta,$$

则由拉格朗日中值定理, 我们有

$$|f(y)-f(x)|=|f(y)-f(z)|\leqslant\epsilon|y-z|\leqslant\epsilon|x-y|,$$

当 $y\in\mathbb{R}\setminus D$, 仍然有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\epsilon|y-x|.$$

我们证明了 f 在 x 可微, 且 $f'(x)=0$.

41. (41.) 首先设 $f=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^{k+i},a_i\in R,i=0,1,2,\cdots,a_0\neq0$ 满足对充分大的 r, 有

$$f^r=a_0^rx^{rk}+\cdots\in S[[x]].$$

因此 $a_0^r\in S\Rightarrow a_0\in S$.

记

$$S'\triangleq\{a\in R:\forall m=1,2,\cdots,a_0a^m\in S\}.$$

对每个 $s,t_1,t_2,\cdots,t_s\in\mathbb{N},c_1,c_2,\cdots,c_s\in S'$, 我们对每个 $m=1,2,\cdots,t=s,s+1,\cdots$ 有

$$a_0^tc_1^{mtt_1}c_2^{mtt_2}\cdots c_s^{mtt_s}=a_0^{t-s}\left(a_0c_1^{mtt_1}\right)\left(a_0c_2^{mtt_2}\right)\cdots\left(a_0c_s^{mtt_s}\right)\in S,$$

这给出了 $a_0c_1^{mt_1}c_2^{mt_2}\cdots c_s^{mt_s}\in S$, 因此 $c_1^{t_1}c_2^{t_2}\cdots c_s^{t_s}\in S'$, 为方便, 我们称其为性质 T.

设 $a,b\in S'$, 现在由性质 T 有 $ab\in S'$, 以及

$$a_0(a-b)^m=a_0\sum_{s=0}^{m}C_m^s(-1)^sa^{m-s}b^s\in S,\forall m=1,2,\cdots,$$

故 $a-b\in S'$, 即 S' 是 R 的子环.

现在我们将归纳证明对一开始假设的 f, 有 $a_i\in S',i=0,1,2,\cdots$.

假定 $a_i\in S',i=0,1,2,\cdots,n$, 注意到由性质 T 有

$$a_0\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^{k+i}\right)^m\in S[[x]],\forall m=1,2,\cdots.$$

记 $f_n \triangleq \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+k}$, 注意对每个 $m=1,2,\cdots$, 和充分大的 $r \in \mathbb{N}$, 有

$$a_0 f^r \left(f-f_n\right)^{(m+1)r} = \sum_{s=0}^{(m+1)r} C_{(m+1)r}^{s} \left(-1\right)^{(m+1)r-s} f^{s+r} a_0 f_n^{(m+1)r-s} \in S\left[[x]\right],$$

即

$$a_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+k}\right)^r \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x^{i+k}\right)^{m(r+1)} = a_0^{r+1} a_{n+1}^{m(r+1)} x^{kr+(n+1+k)m(r+1)} + \cdots \in S\left[[x]\right],$$

因此 $a_0 a_{n+1}^m \in S \Rightarrow a_{n+1} \in S'$, 这样就完成了归纳证明.

现在, 因为 f 的所有系数都在 S', 所以结合性质 T, 我们有

$$a_0 f^m \in S\left[[x]\right], \forall m = 1,2,\cdots,$$

因此对充分大的 r, 有

$$\left(f-a_0 x^k\right)^r = f^r + \sum_{s=1}^{r} \left(-1\right)^s C_r^s a_0^s f^{r-s} x^{sk} \in S\left[[x]\right],$$

现在 a_1 作为 $f-a_0 x^k$ 的首项系数可知 $a_1 \in S$, 反复操作即知 $f \in S\left[[x]\right]$. 我们完成了证明.

42. (42.) 首先有裴蜀等式, 对充分大的自然数 r, 我们知道存在非负整数 s,t, 使得[94] $r = sm+nt$, 现在

$$f^r = \left(f^m\right)^s \left(f^n\right)^t \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right).$$

记偶数 $p \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $r \geqslant p$, 都有 f^r 光滑.

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 且存在一个最小的 $w \in \mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, 使得 $\frac{d^w f^p(x)}{dx^w}|_{x=x_0} \neq 0$, 现在由 Taylor, 我们有

$$f^p\left(x\right) = a\left(x-x_0\right)^w + o\left(x-x_0\right)^w \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f^p\left(x\right)}{\left(x-x_0\right)^w} = a,$$

注意到 $f^p\left(x\right) \geqslant 0$, 因此 m 必然为偶数 (否则考虑左右极限 a 只能为 0), 此时 $a>0$.

对任何 $r \geqslant p, r \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(f^p\left(x\right)\right)^{\frac{r}{p}}}{\left(x-x_0\right)^{\frac{wr}{p}}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\left[a\left(x-x_0\right)^w + o\left(x-x_0\right)^w\right]^{\frac{r}{p}}}{\left(x-x_0\right)^{\frac{wr}{p}}} = \lim_{x\to x_0} \left[a+o\left(1\right)\right]^{\frac{r}{p}} = a^{\frac{r}{p}}, \tag{30.166}$$

注意因为 $f^r \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$, 所以要么存在 $q \in \mathbb{N}_0$, 使得 $\lim_{x\to x_0} \frac{f^r(x)}{(x-x_0)^q} \neq 0$, 要么 $\lim_{x\to x_0} \frac{f^r(x)}{(x-x_0)^q} = 0, \forall q \in \mathbb{N}_0$, 第二种情况与(30.166)矛盾, 第一种情况暗示 $p|wr$.

所以固定 r 为奇素数可知存在 $\ell \in \mathbb{N}_0$, 使得 $w = p\ell$, 因此

$$f^p\left(x\right) = \left(x-x_0\right)^{p\ell} g\left(x\right), g\left(x_0\right) \neq 0, g\left(x\right) \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right),$$

这告诉我们 $f\left(x\right) = \left(x-x_0\right)^{\ell} g^{\frac{1}{p}}\left(x\right)$ 在 x_0 邻域内是 C^{∞} 的.

现在记

$$D \triangleq \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{d^j f^p\left(x\right)}{dx^j}|_{x=y} \neq 0, \text{对某个} j \in \mathbb{N}_0\right\},$$

则 $\mathbb{R} \setminus D = \bigcap_{j=0}^{\infty} \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{d^j f^p(x)}{dx^j}|_{x=y} = 0\right\}$ 是一个闭集, 因此 D 是一个开集, 等式(30.166)暗示了对每个 $r \geqslant p, r \in \mathbb{N}$, 都有

$$D = \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{d^j f^r\left(x\right)}{dx^j}|_{x=y} \neq 0, \text{对某个} j \in \mathbb{N}_0\right\},$$

以及如果 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$, 那么 $\lim_{x\to x_0} \frac{[f^p(x)]^{\frac{r}{p}}}{(x-x_0)^j} = 0, \forall j \in \mathbb{N}_0$ 暗示

$$\mathbb{R} \setminus D = \bigcap_{j=0}^{\infty} \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{d^j f^r\left(x\right)}{dx^j}|_{x=y} = 0\right\}.$$

[94] 这个基本的一次不定方程非负解的事实可以参考潘承洞, 潘承彪的《初等数论》85 页定理 4.

在习题41.中取

$$R \triangleq C(D), S \triangleq \{h \in C(\mathbb{R}) : h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus D\},$$

并且 S, R 满足习题41.的条件.

现在

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{j!} x^j \in R[[x]],$$

对任何 $r \geqslant p$, 注意形式的计算 (这是形式幂级数, 解析的时候显然成立的等式打开括号自然有如下等式) 有

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{j!} x^j \right)^r = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(f^r)^{(j)}}{j!} x^j \in S[[x]],$$

由习题41., $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{j!} x^j \in S[[x]]$, 从而 $f^{(j)}$ 是一个 $C(\mathbb{R})$ 中且在 $\mathbb{R} \setminus D$ 为 0 的元素在 D 的限制, 从而反复由习题40., 我们知道 $f^{(j)} \in C(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{N}_0$, 这样就证明了 $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

43. (43.) 对每一个 $k \in \mathbb{N}$, 取 $n_k \in \mathbb{N}$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}, \forall x \in \mathbb{R},$$

不妨设 n_k 严格递增, 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty,$$

因此

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right),$$

我们只需要证明 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right)$ 是连续函数的极限.

事实上, 对每个 $k \in \mathbb{N}$, 设 $h_k^{(m)} \in C(\mathbb{R})$, 满足

$$\lim_{m \to \infty} h_k^{(m)}(x) = f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

取

$$g_k^{(m)}(x) \triangleq \begin{cases} -\frac{1}{2^k}, & h_k^{(m)}(x) < -\frac{1}{2^k} \\ h_k^{(m)}(x), & -\frac{1}{2^k} \leqslant h_k^{(m)}(x) \leqslant \frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{2^k}, & h_k^{(m)}(x) > \frac{1}{2^k} \end{cases},$$

我们有

$$\lim_{m \to \infty} g_k^{(m)}(x) = f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x), \left| g_k^{(m)}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2^k}, \forall x \in \mathbb{R},$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(m)}$ 一致收敛, 因此连续, 所以由控制收敛定理18.16,

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m \to \infty} g_k^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right),$$

我们证明了 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right)$ 是连续函数的极限.

我们完成了证明.

44. (44.) 考虑 $g(x) = xf'(x), x \in (0, 1]$, 则

$$f(x) = f(1) - \int_x^1 \frac{g(y)}{y} \mathrm{d}y, \int_0^1 |g(y)| \, \mathrm{d}y < \infty,$$

于是

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |f(1)| + \int_0^1 \int_x^1 \frac{|g(y)|}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = |f(1)| + \int_0^1 \int_0^y \frac{|g(y)|}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |f(1)| + \int_0^1 |g(y)|\,\mathrm{d}y < \infty,$$

这就证明了 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

45. (45.) 不失一般性, 假设 $x=0$, 我们证明有环同构 $C[a,b]/m_x \cong \mathbb{R}$. 定义赋值映射

$$\iota : C[a,b] \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0).$$

显然 ι 是满射, $\ker \iota = m_0$, 然后利用环同态基本定理知道

$$C[a,b]/m_0 = C[a,b]/\ker \iota \cong \mathbb{R},$$

这就证明了 m_0 是极大理想.

46. (46.) 利用 $|\cos x - 1| \leqslant \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\left| f_n(x) - \frac{x^5}{5} \right| \leqslant \int_0^x t^4 \left| \cos\frac{t}{n} - 1 \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^x t^4 \cdot \frac{t^2}{n^2}\mathrm{d}t.$$

于是我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x^5}{5}, \forall x \in \mathbb{R}$. 为了研究一致收敛性, 注意到

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - \frac{x^5}{5} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_0^x t^4 \left(1 - \cos\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^4 \left(1 - \cos\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t = +\infty,$$

这就证明了 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛.

47. (47.) 首先由 Weyl 等分布定理9.18, 我们知道

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x+k-1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(x - 1 + \left\{\frac{k}{2\pi}\right\}2\pi\right) \\
&\overset{9.49}{=} \int_0^1 f(x-1+2\pi y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-1+y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-1}^{2\pi+x-1} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

但我们并不知道这个极限是否一致.

但是如果我们仔细回顾 Weyl 等分布定理证明, 由推论13.16, 我们知道只需对 f 为三角多项式验证即可. 因为三角多项式总是形如 $\left\{e^{imx}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 中有限个线性组合, 因此我们只需对每个 e^{imx} 验证一致性即可. 即

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^n e^{im(x+k-1)}}{n} = \begin{cases} e^{imx}\frac{1-e^{imn}}{n(1-e^{im})}, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases},$$

现在容易看到关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致的有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{im(x+k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}\mathrm{d}t,$$

这就完成了证明.

48. (48.) 于是对任何 $y > 0$, 当 $x > y$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\int_0^y f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_y^x f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sup_{z\in[x-y,x]} |f(z)| \cdot \int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{z\in[0,+\infty)} |f(z)| \cdot \int_y^x |g(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

于是由题目条件有

$$\lim_{x>y\to+\infty} \left(\sup_{z\in[x-y,x]} |f(z)| \cdot \int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{z\in[0,+\infty)} |f(z)| \cdot \int_y^x |g(t)|\,\mathrm{d}t \right) = 0,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \right) = 0.$$

49. (49.) 考虑 f 的傅立叶级数

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}, c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x, n \in \mathbb{Z}.$$

我们有 $f(2x) \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{4\pi i n x}$ 以及

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(x+\frac{1}{2}\right) &\sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(c_n e^{2\pi i n x} + c_n e^{2\pi i n\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \left(1+(-1)^n\right) e^{2\pi i n x} = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2n} e^{4\pi i n x}. \end{aligned}$$

由傅立叶系数的唯一性, 我们有

$$c_{2n} = \frac{c_n}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{30.167}$$

在(30.167)中取 $n=0$, 我们有 $c_0 = 0$. 当 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 我们由黎曼引理9.2有

$$c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

于是

$$(2n-1) c_{2n-1} = \lim_{m\to\infty} \left[2^m (2n-1) c_{2^m(2n-1)}\right] = 0 \Rightarrow c_{2n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow c_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z},$$

这就证明了 $f \equiv 0$.

50. (50.)

(a). 两边考虑傅立叶变换有

$$-(2\pi i)\left(2x\widehat{u} + x^2 (\widehat{u})'\right) + \widehat{u} + \frac{w^2}{2\pi i} (\widehat{u})' = 0,$$

我们得到

$$(\widehat{u})' + \frac{4\pi x + i}{2\pi x^2 + \frac{w^2}{2\pi}} \widehat{u} = 0,$$

即

$$\left(\widehat{u} \cdot e^{\int_0^x \frac{4\pi y + i}{2\pi y^2 + \frac{w^2}{2\pi}} \mathrm{d}y}\right)' = 0 \Rightarrow \widehat{u} \cdot e^{\int_0^x \frac{4\pi y + i}{2\pi y^2 + \frac{w^2}{2\pi}} \mathrm{d}y} \equiv c \in \mathbb{R}.$$

现在就有

$$\widehat{u}(x) = c e^{-\int_0^x \frac{4\pi y + i}{2\pi y^2 + \frac{w^2}{2\pi}} \mathrm{d}y} = c \frac{e^{-i \arctan \frac{2\pi x}{w}}}{1 + \frac{4\pi^2}{w^2} x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R}).$$

傅立叶变换把 L^1 函数变为连续函数, 把 L^2 函数变为 L^2 函数这就给出了 $u \in C(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$. 又

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi i x)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dy^2} \widehat{u}(y) e^{2\pi i x y} \mathrm{d}y,$$

于是可由 $\frac{d^2}{dy^2}\widehat{u}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ 有 $u \in L^1(\mathbb{R})$, 这就完成了证明.

(b). 注意到 $\int_{\mathbb{R}} u \mathrm{d}x = \widehat{u}(0) = c$, 以及由帕赛瓦尔恒等式有

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 \mathrm{d}x = c^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{-i \arctan \frac{2\pi x}{w}}}{1 + \frac{4\pi^2}{w^2} x^2}\right|^2 \mathrm{d}x = c^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{1 + \frac{4\pi^2}{w^2} x^2}\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{c^2 w}{4}.$$

于是我们有

$$\frac{\left[\int_{\mathbb{R}} u \mathrm{d}x\right]^2}{\int_{\mathbb{R}} |u|^2 \mathrm{d}x} = \frac{4}{w}.$$

(c). 由方程我们知道

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}), u(0) = 0.$$

同济高等数学方法表明原方程有通解

$$y(x)=c_1xe^{-\frac{x}{2}}+c_2xe^{-\frac{x}{2}}\int_1^x\frac{e^y}{y^2}\mathrm{d}y,x>0;$$
$$y(x)=c_1'xe^{-\frac{x}{2}}+c_2'xe^{-\frac{x}{2}}\int_{-\infty}^x\frac{e^y}{y^2}\mathrm{d}y,x<0.$$

注意

$$\lim_{x\to0^-}xe^{-\frac{x}{2}}\int_{-\infty}^x\frac{e^y}{y^2}\mathrm{d}y=\lim_{x\to0^-}\int_{-\infty}^1\frac{e^{xy}}{y^2}\mathrm{d}y=+\infty,$$

但是 $u(0)=0$, 故 $u(x)=c_1'xe^{-\frac{x}{2}},x\in(-\infty,0)$. 又 $u\in L^1(\mathbb{R})$, 故 $c_1'=0$. 同样的

$$\lim_{x\to0^+}xe^{-\frac{x}{2}}\int_1^x\frac{e^y}{y^2}\mathrm{d}y=\lim_{x\to0^+}\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{e^y}{y^2}\mathrm{d}y=-\infty,$$

故 $c_2=0$. 综上所述, 我们有

$$u(x)=\begin{cases}cxe^{-\frac{x}{2}}, & x\geqslant0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

51. (51.) 显然 $\mathcal{F}$ 对逐点收敛封闭. 若存在 $\epsilon_0>0$ 使得对任何 $n\in\mathbb{N}$, 都存在 $f_n\in\mathcal{F}$ 和对任何 $[a,b]\subset[0,1],b-a>\frac{1}{n}$, 都存在某个 $x_{n,a,b}\in[a,b]$, 成立不等式

$$\left|f_n(x_{n,a,b})-f_n(a)-\frac{f_n(b)-f_n(a)}{b-a}(x_{n,a,b}-a)\right|\geqslant\epsilon_0(b-a).\tag{30.168}$$

我们来证明存在某个 $f\in\mathcal{F}$ 使得对任何 $[a,b]\subset[0,1]$, 都有某个 $x_{a,b}\in(a,b)$ 使得

$$\left|f(x_{a,b})-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_{a,b}-a)\right|\geqslant\epsilon_0(b-a).\tag{30.169}$$

显然 f_n 一致有界且等度连续, 由 Ascoli 定理13.12, 存在严格递增的子列 $\{n_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 使得关于 $x\in[0,1]$ 一致的有 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}=f$. 断言 f 为所求.

对任何 $[a,b]\subset[0,1]$, 当 $n_{i_0}>\frac{1}{b-a}$, 我们有 $b-a>\frac{1}{n_i},\forall i\geqslant i_0$, 于是当 $i\geqslant i_0$, 有某个 $x_{n_i,a,b}\in[a,b]$ 使得(30.168)成立.

注意到 $x_{n_i,a,b}$ 有界, 所以我们可以继续抽子列[95]使得 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i,a,b}=x_{a,b}\in[a,b]$. 于是在(30.168)中把 n 换成 n_i 并让 $i\to+\infty$, 利用例题13.58的第一问就有

$$\left|f(x_{a,b})-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_{a,b}-a)\right|\geqslant\epsilon_0(b-a).$$

显然 $x_{a,b}\neq a,b$.

为运用(30.169), 我们取 $a\in[0,1)$ 是 f 的可微点, 注意到

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{b\to a^+}\left|\frac{f(x_{a,b})-f(a)}{b-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x_{a,b}-a}{b-a}\right|\\&=\lim_{b\to a^+}\left|\frac{f(x_{a,b})-f(a)}{x_{a,b}-a}\frac{x_{a,b}-a}{b-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x_{a,b}-a}{b-a}\right|\\&\leqslant\lim_{b\to a^+}\left|\frac{f(x_{a,b})-f(a)}{x_{a,b}-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=0,\end{aligned}$$

这就和(30.169)矛盾! 于是我们证明了第一问.

52. (52.) 对 f 做奇延拓之后周期 2π 延拓之后是 C^∞ 函数. 于是我们有傅立叶展开

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty a_n\sin nx,x\in\mathbb{R}.$$

光滑性暗示我们通过分部积分来改善傅立叶系数的阶, 即

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\mathrm{d}t\overset{\text{反复分部积分}}{=}\frac{2(-1)^m}{\pi n^{2m}}\int_0^\pi f^{(2m)}(t)\sin nt\mathrm{d}t,m\in\mathbb{N}_0.$$

[95]无妨仍然记为 n_i,

于是

$$a_n-\frac{a_1}{n^{2m-1}}=\frac{2(-1)^m}{\pi n^{2m}}\int_0^\pi f^{(2m)}(t)(\sin nt-n\sin t)\,\mathrm{d}t\leqslant 0,\forall m\in\mathbb{N}_0.$$

现在让 $m\to+\infty$, 我们有 $a_n\leqslant 0,\forall n\geqslant 2$.

再注意到

$$f(x)\geqslant 0,f''(x)\leqslant 0\Rightarrow f(x)-f''(x)\geqslant 0.$$

于是由

$$\int_0^\pi (f(x)-f''(x))(n\sin x-\sin nx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(n^2-1\right)a_n\geqslant 0$$

知 $a_n\geqslant 0,\forall n\geqslant 2$. 现在我们就知道存在 $a>0$ 使得 $f(x)=a\sin x$.

53. (53.) 注意到定理13.4表明 f 一定连续. 注意到由 f 的连续性和下凸性给出

$$\left\{(\mathbf{y},z)\in\mathbb{R}^{n+1}:z\geqslant f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\right\}$$

是闭凸集, 我们运用张恭庆泛函分析上册的定理 2.4.20, 在 $(\mathbf{x},0)$ 处做承托超平面, 即存在 $(\mathbf{r},r)\in\mathbb{R}^{n+1}$, 使得

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{y}-rz\leqslant\mathbf{r}\cdot\mathbf{x},\forall z\geqslant f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}).$$

显然 $r\neq 0$, 否则上述不等式不可能成立, 于是我们取 $z=f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})$ 有

$$f(\mathbf{y})\geqslant f(\mathbf{x})+\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$

54. (54.) 用 $f(x)+\frac{\mu A}{(\mu-1)x}$ 代替 f 可以不妨设 $A=0$. 然后设 $g(x)\triangleq xf(x)$, 我们由题目极限条件得

$$\lim_{x\to0^+}(g(\mu x)-\mu g(x))=0.$$

现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|g(\mu x)-\mu g(x)|<\epsilon,\forall x\in(0,\delta].$$

对 $x\in(0,\delta)$, 设 $n_x\triangleq\left\lfloor\frac{1}{\ln\mu}\ln\frac{\delta}{x}\right\rfloor$, 然后我们有

$$\frac{\delta}{\mu}=\mu^{\frac{1}{\ln\mu}\ln\frac{\delta}{x}-1}x\leqslant\mu^{n_x}x\leqslant\mu^{\frac{1}{\ln\mu}\ln\frac{\delta}{x}}x=\delta,$$

从而

$$\left|\mu^{-k}g\left(\mu^k x\right)-\mu^{-(k-1)}g\left(\mu^{k-1}x\right)\right|<\epsilon\mu^{-k},k=0,1,2,\cdots,n_x.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n_x}\left|\mu^{-k}g\left(\mu^k x\right)-\mu^{-(k-1)}g\left(\mu^{k-1}x\right)\right|\leqslant\epsilon\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}=\frac{\epsilon\mu}{\mu-1},$$

即

$$\left|g(x)-\mu^{-(n_x-1)}g\left(\mu^{n_x-1}x\right)\right|\leqslant\frac{\epsilon\mu}{\mu-1}.$$

现在

$$\begin{aligned}|g(x)|&\leqslant\mu^{-(n_x-1)}\cdot\left|g\left(\mu^{n_x-1}x\right)\right|+\frac{\epsilon\mu}{\mu-1}\\&\leqslant\mu^{-\left(\frac{1}{\ln\mu}\ln\frac{\delta}{x}-2\right)}\cdot\left|g\left(\mu^{n_x-1}x\right)\right|+\frac{\epsilon\mu}{\mu-1}\\&\leqslant\frac{\mu^2x}{\delta}\cdot\sup_{y\in\left[\frac{\delta}{\mu^2},\frac{\delta}{\mu}\right]}|g(y)|+\frac{\epsilon\mu}{\mu-1}.\end{aligned}$$

于是

$$\overline{\lim_{x\to0^+}}|g(x)|\leqslant\frac{\epsilon\mu}{\mu-1}\Rightarrow\lim_{x\to0^+}g(x)=0.$$

因此我们最后得到了

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x) = -\frac{\mu A}{\mu - 1}.$$

55. (55.) 显然 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. 取不超过 $n+1$ 次的实系数多项式 p 使得 $p^{(j)}(0) = f^{(j)}(0), j = 0, 1, 2, \cdots, n+1$. 于是由定理23.30得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p(x_k)}{\prod\limits_{m=0, m\neq k}^{n} (x_k - x_m)} = c + d\sum_{j=0}^{n} x_j$$

用 $f - p$ 代替 f 得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{m=0, m\neq k}^{n} (x_k - x_m)} = c' + \sum_{j=0}^{n} d_j x_j + \sum_{j=0}^{n} a_j f^{(n)}(x_j).$$

令[96] $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0, x_0 = x$ 得

$$\frac{f(x)}{x^n} = c' + d_0 x + a_0 f^{(n)}(x), f^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots, n+1.$$

带入 $x = 0$ 得 $c' = 0$, 两边除以 x 并带入 $x = 0$ 得 $d_0 = 0$. 于是 f 满足欧拉方程 $f(x) = a_0 x^n f^{(n)}(x)$. 由对称性, 应该有 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n, d_0 = d_1 = \cdots = d_n = 0$. 于是令 $x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, 就有

$$\frac{f(x)}{x^{n-1}(x-y)} - \frac{f(y)}{y^{n-1}(x-y)} = a_0 f^{(n)}(x) + a_0 f^{(n)}(y) = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{f(y)}{y^n}.$$

现在

$$\frac{f(x)}{x^{n-1}(x-y)} - \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f(y)}{y^n} + \frac{f(y)}{y^{n-1}(x-y)} \Rightarrow \frac{f(x)y}{x^n(x-y)} = \frac{xf(y)}{y^n(x-y)} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{f(y)}{y^{n+1}},$$

故 $\frac{f(x)}{x^{n+1}}$ 为常数, 从而 $f = 0$, 这就完成了证明.

56. (56.) 因为 f 有反函数, 所以 f 严格单调且 $f(\mathbb{R})$ 是一个开区间. 于是

$$f(g(x)) = x \Rightarrow g'(x) f'(g(x)) = 1 \Rightarrow g' \neq 0.$$

但是 g' 作为 f' 的反函数, 其值域应该是 f' 定义域, 矛盾! 故这样的函数不存在.

57. (57.) 不妨设 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f = 0$, 否则用 $f - \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f$ 代替 f. 注意到

$$C = f(x) - a\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y \leqslant f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

两边对 x 取下确界得

$$C \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant a\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

显然

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), f'(x) = af(x+1) - af(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

注意到

$$f'(x) + af(x) = af(x+1) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

假定

$$a_1 = a, [e^{a_n x} f(x)]' = f'(x) + a_n f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

[96] 可以考虑取极限意义, 依次对单个分量取极限.

我们有

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant a\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y = a\int_x^{x+1} e^{a_n y} f(y)\, e^{-a_n y}\mathrm{d}y \\ &\leqslant a\int_x^{x+1} e^{a_n(x+1)} f(x+1)\, e^{-a_n y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{a\left(e^{a_n}-1\right)}{a_n} f(x+1) = \frac{e^{a_n}-1}{a_n}\left[f'(x)+af(x)\right], \end{aligned}$$

于是

$$f'(x)+\left(a-\frac{a_n}{e^{a_n}-1}\right) f(x) \geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

现在 $a_{n+1}=a-\frac{a_n}{e^{a_n}-1}, n=1,2,\cdots$ 且递推函数递增. 注意到 $a_2=a-\frac{a}{e^a-1}<a=a_1$, $f(x)=a-\frac{x}{e^x-1}-x$ 是递减函数且

$$f(0)=a-1<0, \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty>0.$$

故存在唯一的比 a_1 小的不动点 $c<0$ 且 a_n 单调递减. 现在由递增数列8.4.1结论知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c<0$. 于是

$$f'(x)+cf(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f'(x)+a_n f(x)\right]\geqslant 0 \Rightarrow f'(x)\geqslant 0.$$

现在注意到

$$f^{(n)}(x)=af^{(n-1)}(x+1)-af^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)-a\int_x^{x+1} f^{(n)}(y)\,\mathrm{d}y=0, \forall n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}.$$

于是类似的我们有 $f^{(n)}(x)\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_0$. 注意到

$$f'(x)=a\int_x^{x+1} f'(y)\,\mathrm{d}y \leqslant a\int_x^{x+1} f'(x+1)\,\mathrm{d}y = af'(x+1)=f''(x)+af'(x),$$

即 $f''(x)\geqslant(1-a)f', \forall x\in\mathbb{R}$. 假设 $b_1=1-a, f''(x)-b_n f'(x)\geqslant 0$, 则

$$e^{b_n x}\left[e^{-b_n x}f'(x)\right]'=f''(x)-b_n f'(x)\geqslant 0,$$

即 $e^{-b_n x}f'(x)$ 递增. 于是我们有

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\int_x^{x+1} f'(y)\,\mathrm{d}y = a\int_x^{x+1} e^{b_n y}e^{-b_n y}f'(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant a\int_x^{x+1} e^{b_n y}e^{-b_n(x+1)}f'(x+1)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1-e^{-b_n}}{b_n}af'(x+1)=\frac{1-e^{-b_n}}{b_n}\left[f''(x)+af'(x)\right], \end{aligned}$$

即

$$f''(x)\geqslant\left(\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a\right)f'(x), b_{n+1}=\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a.$$

折线图方法可以知道 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ 存在且为 x 和 $\frac{x}{1-e^{-x}}-a$ 的切点横坐标. 现在

$$f''(x)\geqslant\lim_{n\to\infty} b_n f'(x)=bf'(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

现在 Taylor 公式表明

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}, \xi\in(x,x+1).$$

f'' 递增给出

$$\frac{1}{a}f'(x)=f(x+1)-f(x)=f'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}\geqslant f'(x)+\frac{f''(x)}{2},$$

即 $\frac{2(1-a)}{a}f'(x)\geqslant f''(x)$. 现在假定

$$c_n f'(x)\geqslant f''(x), c_1=\frac{2(1-a)}{a}.$$

和 b_n 一样的操作得到 $c_{n+1}=\frac{c_n}{1-e^{-c_n}}-a, n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=b$. 因此我们得到了 $f''(x)\leqslant$

$bf'(x),\forall x\in\mathbb{R}$, 从而

$$f''(x)=bf'(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

解微分方程得通解 $f(x)=C_1e^{bx}+C_2$. 最后将方程带回条件验证可得

$$f(x)=Ae^{\lambda x}+B,\frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}=a,A\geqslant 0,B\geqslant 0.$$

58. (58.) 不妨设 f 有下界, 否则用 $-f$ 代替 f. 不妨设 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f=0$, 否则用 $f-\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f$ 代替 f. 现在

$$f\in C^{\infty}(\mathbb{R}),e^{-ax}\left[e^{ax}f(x)\right]'=f'(x)+af(x)=af(x-1)\geqslant 0,$$

因此 $e^{ax}f(x)$ 递增. 于是

$$\begin{aligned}C&=f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y=f(x)+a\int_{x-1}^{x}e^{ay}f(y)\,e^{-ay}\mathrm{d}y\\&\leqslant f(x)+a\int_{x-1}^{x}e^{ax}f(x)\,e^{-ay}\mathrm{d}y=f(x)\,e^{a},\end{aligned}$$

从而 $f(x)\geqslant\frac{C}{e^a},\forall x\in\mathbb{R}$. 两边取下确界得 $C\leqslant 0$. 于是

$$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y\leqslant 0,$$

从而 $f\equiv 0$, 这就完成了证明.

59. (59.) 设 $f(x_1)=f(x_2)$, 由(13.266)我们知道 $x_1=x_2$. 由连续单射等价严格单调12.2知 f 严格单调. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$, 则在(13.266)中取极限得 $f(f(A))=\infty$ 而矛盾! 类似可以考虑 x 趋于 $-\infty$. 因此我们证明了 f 值域是 $\mathbb{R}$. 若 $f(x)>x$ 恒成立, 则由(13.266)得

$$f(f(x))=af(x)+bx>f(x)\Rightarrow 1>\frac{b}{1-a}>f(1)>1.$$

类似的当 $f(x)<x$ 恒成立也有矛盾! 因此我们证明了 f 有不动点 c. 注意到由(13.266)继续得

$$c=f(f(c))=af(c)+bc=(a+b)\,c,$$

我们有 $c=0$.

现在考虑 $x\in\mathbb{R},x_{n+1}=f^{-1}(x_n),n\in\mathbb{N}_0$, 则用(13.266)得 $x_{n-1}=ax_n+bx_{n+1},n\in\mathbb{N}$. 解数列递推得

$$x_n=c_1\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^n+c_2\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^n,n\in\mathbb{N}_0.$$

注意由递增函数递推数列结论8.4.1我们知道当 f 递增一定有 x_n 严格单调, 此时由

$$c_2\neq 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b}<0$$

知矛盾! 因此必有 $c_2=0$, 从而 $x_n=x\left(\frac{2}{\sqrt{a^2+4b}+a}\right)^n,n\in\mathbb{N}_0$, 即 $x_1=\frac{2}{\sqrt{a^2+4b}+a}x=f^{-1}(x)$, 这就证明了 k 存在性.

当 f 递减, 注意到 $x_0=x\in\mathbb{R},x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}_0$. 由(13.266)得 $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$. 现在解通项得

$$x_n=c_1\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n.$$

由递减数函数列递推结论8.4.1知 x_n 一定不单调. 类似讨论极限得 $c_1=0$. 现在 $x_n=x\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n,n\in\mathbb{N}_0$, 我们有

$$x_1=x\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)=f(x),$$

这就得到了 k 的存在性!

60. (60.) 如果 $|f'(a)|=0,a>0$, 则递减给出 $f'(x)=0,\forall x>a$, 这就得到要证明的.

假设 $|f'(x)|>0,\forall x\in(0,+\infty)$, Darboux 中值定理11.5告诉我们 f' 在 $(0,+\infty)$ 不变号, 于是 f' 单调. 注意

到单调函数必然内闭黎曼可积, 我们有

$$\int_1^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(1)$$

存在. 运用例14.52我们知道 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

61. (61.) 我们的想法是证让 f 在 $\mathbb{R}$ 上做周期 n 延拓, 然后对 $k\in\mathbb{N}$ 考虑

$$F_k(x) \triangleq f(x+k) - f(x), x \geqslant 0.$$

注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} F_k(tk) = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}[f((t+1)k) - f(tk)] = \frac{f(nk)-f(0)}{n} = 0,$$

于是由平均值定理12.3知存在 $x_0\in[0,(n-1)k]$ 使得 $F_k(x_0)=0$, 即 $f(x_0+k)=f(x_0)$.

设 $x_0\in[(m-1)n, mn), m\in\{1,2,\cdots,k\}$. 若 $mn-x_0\geqslant k$, 则考虑

$$x_k \triangleq x_0-(m-1)n+k, x_k' \triangleq x_0-(m-1)n$$

就有

$$f(x_k) = f(x_k'), x_k - x_k' = k.$$

若 $mn-x_0<k$, 注意 $f(x_0+k)=f(x_0+n)$, 我们定义

$$x_k \triangleq x_0+k-mn, x_k' \triangleq x_0-mn+n,$$

则有 $f(x_k')=f(x_k), x_k'-x_k = n-k$, 这就完成了证明.

62. (62.) 当 $n=1$ 命题显然成立, 假定命题对 $n-1$ 时成立, 当 n 时, 考虑

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[f(k+1)-f(k)] = \frac{f(n)-f(0)}{n} = 0.$$

由平均值定理12.3知存在 $x_0\in[0,n-1]$ 使得 $f(x_0+1)=f(x_0)$.

我们定义 $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,x_0] \\ f(x+1), & x\in[x_0,n-1]\end{cases}$. 注意到 $g\in C[0,n-1], g(0)=g(n-1)$, 于是由归纳假设知存在 $n-1$ 个不同的 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n-1$ 满足 $g(y_i)=g(x_i), y_i-x_i\in\mathbb{N}$. 又

$$0 = g(y_i)-g(x_i) = \begin{cases} f(y_i)-f(x_i), & y_i<x_0 \\ f(y_i+1)-f(x_i), & x_i\leqslant x_0\leqslant y_i \\ f(y_i+1)-f(x_i+1), & x_0<x_i\end{cases},$$

这就得到了 $n-1$ 组满足条件的, 又 (x_0,x_0+1) 也是满足条件的, 这就完成了证明.

63. (63.)

如果 f 一致连续, 我们取 $g(x)=f(x)-\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y, h(x)=\int_x^{x+1} f(y)\,\mathrm{d}y$, 则 $g\in C[0,+\infty), h\in C^1[0,+\infty)$, 且由(13.267)知

$$\lim_{x\to+\infty} h'(x) = \lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)] = 0.$$

然后对任何 $\epsilon>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得只要 $|y-x|\leqslant\frac{1}{n}, x,y\geqslant 0$ 就有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\epsilon. \tag{30.170}$$

注意到

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty}|g(x)| \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}|f(x)-f(y)|\,\mathrm{d}y = \lim_{x\to+\infty}\int_0^1|f(x+y)-f(x)|\,\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(x+y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+y)\right|\mathrm{d}y$$
$$\overset{(30.170)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|}{n} + \epsilon\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}1\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|}{n}+\epsilon.$$

然后利用(13.267)得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|}{n}=0$, 结合 ϵ 任意性得 $\lim\limits_{x\to+\infty}|g(x)|=0$.

接下来我们期望通过条件(13.267)证明 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

Step 1 类似命题13.13的证明, 只需证明对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0, X>0$ 使得

$$\sup_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)| \leqslant \epsilon, \forall x\in[X,+\infty).$$

Step 2 最难的一步: 我们证明对任何 $\epsilon>0$, 存在 $[a,b]\subset[0,+\infty), X>0$ 使得

$$\sup_{h\in[a,b]}|f(x+h)-f(x)| \leqslant \epsilon, \forall x\in[X,+\infty). \tag{30.171}$$

我们采用反证法, 如果 $\epsilon_0>0$ 使得对任何 $[a,b]\subset[0,+\infty), X>0$ 都有 $x\geqslant X$ 满足

$$\sup_{h\in[a,b]}|f(x+h)-f(x)|>\epsilon_0,$$

则取定 $[a_1,b_1]\subset[0,+\infty), x_1>0$ 使得

$$\sup_{h\in[a_1,b_1]}|f(x_1+h)-f(x_1)|>\epsilon_0.$$

把 $|f(x_1+h)-f(x_1)|$ 视为 h 的连续函数, 则有 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$ 使得

$$\inf_{h\in[a_2,b_2]}|f(x_1+h)-f(x_1)|>\epsilon_0.$$

对 $[a_2,b_2]\subset[0,+\infty)$, 取 $x_2>x_1+1$ 使得

$$\sup_{h\in[a_2,b_2]}|f(x_2+h)-f(x_2)|>\epsilon_0.$$

有 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$ 使得

$$\inf_{h\in[a_3,b_3]}|f(x_2+h)-f(x_2)|>\epsilon_0.$$

对 $[a_3,b_3]\subset[0,+\infty)$, 取 $x_3>x_2+1$ 使得

$$\sup_{h\in[a_3,b_3]}|f(x_3+h)-f(x_3)|>\epsilon_0.$$

这样依此下去我们得到一串 $\{[a_n,b_n]\}$ 和 $\{x_n\}$ 使得

$$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}], x_n>x_{n-1}+1, \inf_{h\in[a_n,b_n]}|f(x_n+h)-f(x_n)|>\epsilon_0.$$

注意 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$, 于是可取 $h_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 此时有 $|f(x_n+h_0)-f(x_n)|>\epsilon_0$. 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 这就和(13.267)矛盾!

Step 3 证明 **Step 1** 表明需要证明的.

事实上, 对任何 $\epsilon>0$, 由 **Step 2**, 存在 $[a,b]\subset[0,+\infty), X>0$ 使得(30.171)成立. 取 $\delta\in(0,b-a), m=\frac{b+a+\delta}{2}$, 此时

$$x+m-(x+h)\in[a,b], \forall x\geqslant X.$$

然后利用(13.267)就有 $X_1>X$ 使得

$$|f(x+m)-f(x)| \leqslant \epsilon, \forall x\in[X_1,+\infty). \tag{30.172}$$

因此对 $x \in [X_1, +\infty)$ 有

$$\sup_{h\in[0,\delta]} |f(x+h)-f(x)| \leqslant \sup_{h\in[0,\delta]} |f(x+h)-f(x+m)| + \sup_{h\in[0,\delta]} |f(x+m)-f(x)| \overset{(30.171),(30.172)}{\leqslant} \epsilon+\epsilon = 2\epsilon.$$

因此我们证明了 f 在 $[0,+\infty)$ 一致连续. 这就完成了证明.

64. (64.) 首先 $f(0) = bf(0) \Rightarrow f(0) = 0$. 取 $\delta > 0$ 使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in (-\delta, \delta)$. 对任何 $\epsilon > 0$, 取 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{M}{b^N} < \epsilon$, 当 $|x| < \frac{\delta}{a^N}$, 我们有

$$|f(x)| = \left|\frac{f(ax)}{b}\right| = \left|\frac{f(a^2x)}{b^2}\right| = \cdots = \left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right| \leqslant \frac{M}{b^N} < \epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

65. (65.) 取 $X > 0$ 使得 $g'(x) \neq 0, \forall x \geqslant X$.

Case 1 若 $g'(x) > 0, \forall x \geqslant X$, 考虑

$$F_1(x) \triangleq \frac{[f'(x)]^2}{g(x)} + f^2(x), x \geqslant X,$$

则

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \frac{2f'(x)f''(x)g(x) + 2g^2(x)f(x)f'(x) - g'(x)[f'(x)]^2}{g^2(x)} \\ &= \frac{-2f'(x)f(x)g^2(x) + 2g^2(x)f(x)f'(x) - g'(x)[f'(x)]^2}{g^2(x)} \\ &= -\frac{g'(x)[f'(x)]^2}{g^2(x)} \leqslant 0, \forall x \geqslant X. \end{aligned}$$

现在 F_1 在 $[X, +\infty)$ 递减知

$$f^2(x) \leqslant F_1(x) \leqslant F_1(X), \forall x \geqslant X,$$

即 f 是有界函数.

Case 2 若 $g'(x) < 0, \forall x \geqslant X$, 考虑

$$F_2(x) \triangleq [f'(x)]^2 + f^2(x)g(x), x \geqslant X,$$

则

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= 2f'(x)f''(x) + 2f(x)f'(x)g(x) + f^2(x)g'(x) \\ &= -2f'(x)f(x)g(x) + 2f(x)f'(x)g(x) + f^2(x)g'(x) \\ &= f^2(x)g'(x) \leqslant 0, \forall x \geqslant X. \end{aligned}$$

现在 F_2 在 $[X, +\infty)$ 递减知

$$\lambda f^2(x) \leqslant F_2(x) \leqslant F_2(X), \forall x \geqslant X,$$

即 f 是有界函数.

66. (66.) 由(13.269)知

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^x f(y)g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y = 0, \forall x > 0. \tag{30.173}$$

利用 f 递增和第二积分中值定理11.3和(30.173), 我们有

$$\int_0^x g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y + f(x)\int_\xi^x g'(y)g(y)\,\mathrm{d}y = 0, \xi \in [0,x],$$

即

$$\frac{1}{2}|g'(x)|^2 - \frac{1}{2}|g'(0)|^2 + \frac{f(x)}{2}\left[g^2(x) - g^2(\xi)\right] = 0.$$

现在一方面

$$\begin{aligned}\left|g'(x)\right|^2 &= \left|g'(0)\right|^2 - f(x)g^2(x) + f(x)g^2(\xi)\\ &\leqslant \left|g'(0)\right|^2 + f(x)g^2(\xi).\end{aligned}$$

另外一方面由(13.269)得

$$\frac{g''(x)g'(x)}{f(x)} + g'(x)g(x) = 0, \forall x > 0,$$

即

$$\int_0^x \frac{g''(y)g'(y)}{f(y)}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \forall x > 0.$$

由 f 递增和第二积分中值定理11.3, 我们有

$$\frac{1}{f(0)}\int_0^\eta g''(y)g'(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0, \eta \in [0,x].$$

从而

$$\frac{1}{2f(0)}\left[\left|g'(\eta)\right|^2 - \left|g'(0)\right|^2\right] + \frac{1}{2}g^2(x) - \frac{1}{2}g^2(0) = 0,$$

即

$$\begin{aligned}\left|g(x)\right|^2 &= g^2(0) - \frac{1}{f(0)}\left[\left|g'(\eta)\right|^2 - \left|g'(0)\right|^2\right]\\ &\leqslant g^2(0) + \frac{\left|g'(0)\right|^2}{f(0)}.\end{aligned}$$

现在 g 有界且

$$\left|g'(x)\right|^2 \leqslant C_1 + C_2 f(x) \leqslant M^2 f(x), |g(x)| \leqslant M,$$

这就证明了(13.270).

67. (67.) 若某个 $a_0 > 0$ 使得 $f(x) = a_0$ 在 $[1,+\infty)$ 只有有限个解, 设其中最小的为 x_1, 最大的为 x_2. 若 $f(x) > a_0, \forall x \geqslant x_2$. 现在在 $[1,x_2]$ 上 f 有正的下界, 因此 f 不能取遍 $(0,+\infty)$, 矛盾! 这就完成了证明.

68. (68.)(13.271)和拉格朗日中值定理给出

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|, \forall x,y \in (a,b).$$

对任何 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2k} > 0$, 我们来证明

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon, \forall x \in (a, a+\delta). \tag{30.174}$$

事实上固定 $x \in (a,a+\delta)$, 若 $|f(x) - f(a)| \geqslant \frac{\epsilon}{2}$, 由介值性知有 $x' \in (a,x)$ 使得 $|f(x') - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$.
现在

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f(x')| + |f(x') - f(a)| < k|x - x'| + \frac{\epsilon}{2} \leqslant k\frac{\epsilon}{2k} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

这就证明了(30.174). 若 $|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$, 则更有(30.174)成立. 因此我们证明了(30.174), 即 f 在 a 连续. 类似可证 f 在 b 连续, 这就证明了 $f \in C[a,b]$.

69. (69.) 考虑 $f(x) - \frac{A}{3}x$ 代替 f 可不妨设 $A = 0$. 由题目条件, 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x| \leqslant \delta$ 有

$$|f(2x) - f(-x)| \leqslant \epsilon|x|.$$

考虑 x 换成 $\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}x$, 我们有

$$\left|f\left(\frac{(-1)^k}{2^k}x\right) - f\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}x\right)\right| \leqslant \epsilon\left|\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}x\right|, k = 0,1,2,\cdots.$$

求和并利用绝对值不等式得

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}x\right)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{(-1)^{k}}{2^{k}}x\right)-f\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}x\right)\right| \\ &\leqslant \epsilon\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{2^{k+1}}x\right| \leqslant \epsilon\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{2^{k+1}}x\right| = \epsilon|x|.\end{aligned}$$

利用 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(x)-f\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}x\right)\right| = |f(x)-f(0)|,$$

即

$$|f(x)-f(0)| \leqslant \epsilon|x|, \forall 0<|x|\leqslant\delta,$$

这就证明了 $f'(0)=0$.

70. (70.) 我们断言 $g(x)\triangleq f(\sqrt{x}), x\in\left[0,\mu^2\right)$ 为所求.

现在考虑函数

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)}{x}, & 0<|x|<\mu\\ f''(0), & x=0\end{cases},$$

显然 h 连续. 由乘积的高阶导数并利用洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}h^{(k)}(x) &= \lim_{x\to 0}\sum_{j=0}^{k}C_k^j f^{(k-j+1)}(x)(-1)^j j!x^{-j-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k}C_k^j f^{(k-j+1)}(x)(-1)^j j!x^{k-j}}{x^{k+1}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}(k-j)C_k^j f^{(k-j+1)}(x)(-1)^j j!x^{k-j-1}+\sum\limits_{j=0}^{k}C_k^j f^{(k-j+2)}(x)(-1)^j j!x^{k-j}}{(k+1)x^k}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}(k-j)C_k^j f^{(k-j+1)}(x)(-1)^j j!x^{k-j-1}+\sum\limits_{j=-1}^{k-1}C_k^{j+1} f^{(k-j+1)}(x)(-1)^{j+1}(j+1)!x^{k-j-1}}{(k+1)x^k}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^k f^{(k+2)}(x)+\sum\limits_{j=0}^{k-1}\left[\left((k-j)C_k^j-(j+1)C_k^{j+1}\right)f^{(k-j+1)}(x)(-1)^j j!x^{k-j-1}\right]}{(k+1)x^k}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^k f^{(k+2)}(x)}{(k+1)x^k}=\frac{f^{(k+2)}(0)}{k+1},\end{aligned}$$

这里用到了

$$(k-j)C_k^j=(j+1)C_k^{j+1}, j=0,1,2,\cdots,k-1.$$

由导数极限定理12.2知 $h\in C^{\infty}(-\mu,\mu)$ 且偶函数的导函数是奇函数知 h 是偶函数. 这个过程可以反复进行下去, 即考虑

$$h_0(x)=f(x), h_{n+1}(x)=\begin{cases}\frac{h_n'(x)}{x}, & 0<|x|<\mu\\ h_n''(0), & x=0\end{cases}, n=0,1,2,\cdots,$$

则有 $h_n\in C^{\infty}(-\mu,\mu)$ 且是偶函数.

注意到

$$g'(x)=\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}h_1(\sqrt{x}), g''(x)=\frac{1}{4}h_2(\sqrt{x}),\cdots,g^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n}h_n(\sqrt{x}),$$

因此由导数极限定理12.2和 h_n 连续性我们知道 $g\in C^{\infty}\left[0,\mu^2\right)$.

71. (71.) 考虑非负连续函数 $g(x) \triangleq \max\{0, f'(x)\}, x \in [-1,1]$, 然后由 $\int_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(-1) > 0$ 有

$$\int_{-1}^{1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x < 2\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{30.175}$$

固定一个 $c_p > \frac{6p}{p-1}$, 则为所求. 如若不然, 则对任何 $x \in [-1,1]$, 只要 $f'(x) > 0$, 就必然有 $y \in [-1,1]$, 使得

$$|f(y) - f(x)| > c_p [f'(x)]^{\frac{1}{p}} |y - x| = c_p [g(x)]^{\frac{1}{p}} |y - x|.$$

于是对每一个 $x \in [-1,1]$, 容易看到必然有 $y \in [-1,1]$, 使得

$$|f(y) - f(x)| > c_p [g(x)]^{\frac{1}{p}} |y - x|.$$

对任何 $t \in (0,1)$, 和满足 $g(x) > t$ 的 $x \in [-1,1]$, 于是其对应一个 $y \in [-1,1]$, 考虑 x, y 为端点的闭区间 I_x, 则有

$$|f(y) - f(x)| > c_p [g(x)]^{\frac{1}{p}} |y - x| > c_p t^{\frac{1}{p}} |I_x|. \tag{30.176}$$

考虑这样的的闭区间全体, 由组合结果13.31我们知对任何 $a > 3$, 必然存在一些子区间 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$\{x \in [-1,1] : g(x) > t\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} aI_i.$$

现在由(30.175)和(30.176)得

$$c_p t^{\frac{1}{p}} \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right| \leqslant \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x < 2\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$|\{x \in [-1,1] : g(x) > t\}| \leqslant a\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right| < 2ac_p^{-1} t^{-\frac{1}{p}} \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在当 a 充分靠近 3 并用 Fubini 定理我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 |\{x \in [-1,1] : g(x) > t\}|\,\mathrm{d}t \\ &< 2ac_p^{-1}\int_0^1 t^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2ac_p^{-1}\frac{p}{p-1}\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x < \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 因此我们完成了证明.

72. (72.) 我们使用数学归纳法, 当 $m = 0$, 则(13.272)和(13.273)是一样的, 假设命题对小于等于 $m-1$ 都成立, 当 m 时, 因为 f' 满足归纳假设, 我们有

$$\sup_{x \geqslant 0} \left|f'(x)[p'(x)]^{m-1} e^{p(x)}\right| < \infty.$$

记

$$F(x) = [f(x) - f(0)][p'(x)]^m e^{p(x)}, g(x) = f'(x)[p'(x)]^{m-1} e^{p(x)},$$

我们有

$$F(x) = [p'(x)]^m e^{p(x)} \int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y = [p'(x)]^m e^{p(x)} \int_0^x \frac{g(y)}{e^{p(y)}[p'(y)]^{m-1}}\mathrm{d}y.$$

注意到

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\left[p'(x)\right]^m e^{p(x)}\int_0^x\frac{g(y)}{e^{p(y)}\left[p'(y)\right]^{m-1}}\mathrm{d}y\right| &= \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{\int_0^x\frac{g(y)}{e^{p(y)}[p'(y)]^{m-1}}\mathrm{d}y}{\left[p'(x)\right]^{-m}e^{-p(x)}}\right|\\ &\leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{\frac{g(x)}{e^{p(x)}[p'(x)]^{m-1}}}{-mp''(x)\left[p'(x)\right]^{-m-1}e^{-p(x)}-\left[p'(x)\right]^{-m+1}e^{-p(x)}}\right|\\ &= \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{g(x)}{-mp''(x)\left[p'(x)\right]^{-2}-1}\right| = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|g(x)\right|,\end{aligned}$$

这里不等号来自对绝对值版本的上下极限洛必达13.11, 最后一个等号来自

$$\deg\left[p'\right]^2>\deg p''\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{p''(x)}{\left[p'(x)\right]^2}=0.$$

结合 $\sup\limits_{x\geqslant0}\left|f(0)\left[p'(x)\right]^m e^{p(x)}\right|<\infty$, 于是我们证明了(13.273).

73. (73.) 我们在勒贝格积分下考虑, 实际上用勒贝格定理也能证明 f 黎曼可积, 但我们没必要做这种复杂的步骤. 因为勒贝格定理本身也是测度的方法. 一致收敛表明[97]

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^x\lim_{n\to\infty}f_n(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

接下来断言

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y=f(x).$$

不失一般性, 其余情况类似可证, 我们来对 $x\in[a,b)$, 证明:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)\,\mathrm{d}y=f(x). \tag{30.177}$$

注意到对任何 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{h\to0^+}}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right| &\leqslant \overline{\lim_{h\to0^+}}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left[f(y)-f_n(y)\right]\mathrm{d}y\right|\\ &+\overline{\lim_{h\to0^+}}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f_n(y)\,\mathrm{d}y-f_n(x)\right|+\overline{\lim_{h\to0^+}}\left|f_n(x)-f(x)\right|\\ &\leqslant\frac{1}{h}\sup_{y\in[a,b]}\left|f(y)-f_n(y)\right|\int_x^{x+h}1\mathrm{d}y+\left|f_n(x)-f(x)\right|\\ &=\sup_{y\in[a,b]}\left|f(y)-f_n(y)\right|+\left|f_n(x)-f(x)\right|,\end{aligned}$$

这里 $\lim\limits_{h\to0^+}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f_n(y)\,\mathrm{d}y-f_n(x)\right|=0$ 是因为 $\int_a^x f_n(y)\,\mathrm{d}y$ 是 $f_n(x)$ 原函数. 于是由 n 任意性和一致收敛条件得

$$\overline{\lim_{h\to0^+}}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|=0,$$

这就证明了(30.177), 我们完成了证明.

74. (74.) 取

$$a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},b_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}},n\in\mathbb{N},$$

我们有

$$f(a_n)-f(b_n)=a_n+b_n\sim\frac{1}{n\pi},\left|a_n-b_n\right|^\alpha\sim\left(\frac{1}{4\pi n^2}\right)^\alpha,n\to\infty,$$

[97]注意无限担心 f_n 没有连续性, 你可以直接考察证明.

因此 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. 下证

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{\sqrt{|x-y|}}<\infty. \tag{30.178}$$

不妨设 $y>x>0$, 然后记

$$z\triangleq\sup\{u\in[x,y]:f(u)=f(x)\}.$$

我们有 $0\leqslant\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\leqslant 2\pi$. 事实上, 若 $\frac{1}{z}-\frac{1}{y}>2\pi$, 记

$$z'=\frac{1}{z},x'=\frac{1}{x},y'=\frac{1}{y},$$

则

$$z'\triangleq\inf\left\{u'\in[y',x']:\frac{\sin u'}{u'}=\frac{\sin x'}{x'}\right\},z'-y'>2\pi.$$

不妨设 $\frac{\sin x'}{x'}>0$, 其余情况是完全类似的. 则因为 sin 周期为 2π, 所以在 $[y',z')$ 上, $\frac{\sin u'}{u'}$ 必然能取到非正的值, 从而这个值小于 $\frac{\sin x'}{x'}$. 又 $[y',z')$ 上, $\frac{\sin u'}{u'}$ 必然能取到 $\frac{1}{u'}>\frac{\sin x'}{x'}$, 因此由介值定理, 存在 $u_0'\in[y',z')$ 使得

$$\frac{\sin u_0'}{u_0'}=\frac{\sin x'}{x'},$$

这就和 z' 是下确界矛盾!

现在

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)|=|f(z)-f(y)|&=\left|\int_z^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\overset{\text{Cauchy 不等式16.1}}{\leqslant}\sqrt{\int_z^y 1^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_z^y|f'(t)|^2\mathrm{d}t}\\
&=\sqrt{|y-z|}\cdot\sqrt{\int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{y}}\left|\frac{1}{t}f'\left(\frac{1}{t}\right)\right|^2\mathrm{d}t}\\
&\leqslant\sqrt{|y-z|}\cdot\sqrt{\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}+2\pi}\left|\frac{1}{t}f'\left(\frac{1}{t}\right)\right|^2\mathrm{d}t}\\
&=\sqrt{|y-z|}\cdot\sqrt{\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}+2\pi}\left|\frac{\sin t}{t}-\cos t\right|^2\mathrm{d}t}\\
&\overset{|\cos t|\leqslant 1,|\sin t|\leqslant|t|}{\leqslant}\sqrt{|y-z|}\cdot\sqrt{\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}+2\pi}2^2\mathrm{d}t}=\sqrt{8\pi}\cdot\sqrt{|y-z|},
\end{aligned}$$

故所求最大值为为 $\alpha=\frac{1}{2}$.

75. (75.) 由积分中值定理11.3得

$$f\left(x_n^{(0)}\right)=\int_{2n}^{2n+1}f(x)\,\mathrm{d}x,x_n^{(0)}\in(2n,2n+1).$$

由 Cauchy 收敛准则得

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n^0\right)=\int_{2n}^{2n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

注意

$$1=2n+2-(2n+1)\leqslant x_{n+1}^{(0)}-x_n^{(0)}\leqslant 2n+3-2n=3,\forall n\in\mathbb{N},$$

这就证明了第一个问题.

由积分中值定理11.3, 对每一个 $n,m\in\mathbb{N}$ 都有 $x_n^{(m)}\in\left(\frac{2n}{m},\frac{2n+1}{m}\right)$ 使得

$$f\left(x_n^{(m)}\right)=m\int_{\frac{2n}{m}}^{\frac{2n+1}{m}}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall m\in\mathbb{N}.$$

显然 $x_{n+1}^{(m)}>x_n^{(m)}$. 由 Cauchy 收敛准则有

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n^{(m)}\right)=m\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{2n+1}{m}}^{\frac{2n+2}{m}}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall m\in\mathbb{N}. \tag{30.179}$$

固定 $m\in\mathbb{N}$, 对每一个 $x\geqslant x_1^{(m)}$, 存在唯一的 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n^{(m)}\leqslant x<x_{n+1}^{(m)}$. 因此我们有

$$\frac{f\left(x_{n+1}^{(m)}\right)+2}{e^{2x_{n+1}^{(m)}}}\leqslant\frac{f(x)+2}{e^{2x}}\leqslant\frac{f\left(x_n^{(m)}\right)+2}{e^{2x_n^{(m)}}},$$

即

$$e^{2\left(x-x_{n+1}^{(m)}\right)}\left[f\left(x_{n+1}^{(m)}\right)+2\right]-2\leqslant f(x)\leqslant e^{2\left(x-x_n^{(m)}\right)}\left[f\left(x_n^{(m)}\right)+2\right]-2,\forall n\in\mathbb{N}.$$

利用

$$\max\left\{\left|x-x_n^{(m)}\right|,\left|x-x_{n+1}^{(m)}\right|\right\}\leqslant x_{n+1}^{(m)}-x_n^{(m)}\leqslant\frac{2n+3}{m}-\frac{2n}{m}=\frac{3}{m},$$

我们有

$$e^{-\frac{6}{m}}\left[-\left|f\left(x_{n+1}^{(m)}\right)\right|+2\right]-2\leqslant f(x)\leqslant e^{\frac{6}{m}}\left[\left|f\left(x_n^{(m)}\right)\right|+2\right]-2,\forall n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$2e^{-\frac{6}{m}}-2\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}f(x)\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}f(x)\leqslant2e^{\frac{6}{m}}-2.$$

让 $m\to+\infty$ 得

$$\varliminf_{x\to+\infty}f(x)=\varlimsup_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

76. (76.) 注意到 $f(x)=Ae^{x-a}$ 满足

$$f(x)=A+\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

下证

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{30.180}$$

设 $M\triangleq\sup\limits_{y\in[a,b]}|f_0(y)-f(y)|$, 则

$$|f_1(x)-f(x)|\leqslant\int_a^x|f_0(y)-f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant M(x-a),x\in[a,b],$$

$$|f_2(x)-f(x)|\leqslant\int_a^x|f_1(y)-f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\int_a^x M(y-a)\,\mathrm{d}y=\frac{M}{2}(x-a)^2,x\in[a,b],$$

依次下去

$$|f_{n+1}(x)-f(x)|\leqslant\int_a^x|f_n(y)-f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\int_a^x\frac{M}{n!}(x-a)^n\,\mathrm{d}y=\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},x\in[a,b].$$

故

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_{n+1}(x)-f(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},\forall n\in\mathbb{N},$$

这就证明了(30.180).

77. (77.) 考虑

$$g_n(x)\triangleq\sup_{k\geqslant n,x\in[a,b]}|f_k(x)|+\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}.$$

则 g_n 显然满足13.274. 这就完成了证明.

78. (78.) 在(13.275)中取 $a=b$ 得 $2f(a)\geqslant 0,\forall a\in\mathbb{R}$.

Case 1

如果存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $\int_{-\infty}^{x_0}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x>f(x_0)$, 则取 $A<x_0$ 使得对任何 $x\leqslant A$ 都有

$$\int_x^{x_0}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y>f(x_0)\geqslant 0.$$

由(13.275)得

$$f(x)+f(x_0)\geqslant\int_x^{x_0}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y>f(x_0)>0.$$

令

$$G(x)\triangleq\int_x^{x_0}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y-f(x_0),$$

我们有

$$G'(x)=-f^2(x)\leqslant -G^2(x).$$

因此

$$\left(-\frac{1}{G(x)}+x\right)'=\frac{G'(x)+G^2(x)}{G^2(x)}\leqslant 0,$$

即 $-\frac{1}{G(x)}+x$ 在 $(-\infty,A]$ 递减. 但是

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{G(x)}+x\right)\leqslant\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty,$$

这就是一个矛盾!

Case 2

如果 $\int_{-\infty}^{x}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y\leqslant f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, 考虑 $F(x)\triangleq\int_{-\infty}^{x}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y$, 我们有

$$F'(x)=f^2(x)\geqslant F^2(x).$$

若 F 在 x 充分大时没有零点, 则

$$\left(-\frac{1}{F(x)}-x\right)'=\frac{F'(x)-F^2(x)}{F^2(x)}\geqslant 0,$$

即 $-\frac{1}{F(x)}-x$ 在 x 充分大递增. 但是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{F(x)}-x\right)\leqslant\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty,$$

这就是一个矛盾!. 因此 F 存在趋于正无穷的零点. 此时由 F 递增性, 我们知道 $F\equiv 0$, 从而 $f\equiv 0$.

79. (79.) 由条件的极限, 对充分大的 $X>0$, 有

$$\frac{f''(x)}{f(x)\left(1+|f'(x)|^2\right)^2}>m>0,\forall x\geqslant X.$$

于是 f 在 $x>X$ 是下凸的且 f' 递增, 从而 $f'(+\infty)$ 有意义. 注意到

$$\left[\int_{f'(X)}^{f'(x)}\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\right]'=\frac{f''(x)}{\left(1+|f'(x)|^2\right)^{\frac{3}{2}}}>mf(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2},\forall x\geqslant X,$$

两边从 X 到 x 积分我们有

$$\int_{f'(X)}^{f'(x)}\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\geqslant\int_X^x mf(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t.$$

因此

$$\int_{f'(X)}^{f'(+\infty)}\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t\geqslant\int_X^{+\infty}mf(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t,$$

以及

$$\lim_{X\to+\infty}\int_X^{+\infty} f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t=0.$$

洛必达法则告诉我们

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\int_0^X\frac{\sqrt{1+|f'(t)|^2}}{f(t)}\mathrm{d}t}{\frac{1}{\int_X^{+\infty}f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t}}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+|f'(X)|^2}}{f(X)}}{\frac{f(X)\sqrt{1+|f'(X)|^2}}{\left(\int_X^{+\infty}f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t\right)^2}}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\left(\int_X^{+\infty}f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t\right)^2}{f^2(X)}.$$

若 $\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)\neq0$, 则上式趋于 0. 若 $\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)=0$, 则由结论12.1知 $\lim\limits_{X\to+\infty}f'(X)=0$. 现在继续洛必达得

$$\begin{aligned}\lim_{X\to+\infty}\frac{\left(\int_X^{+\infty}f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t\right)^2}{f^2(X)}&=-\lim_{X\to+\infty}\frac{2\int_X^{+\infty}f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t\cdot f(X)\sqrt{1+|f'(X)|^2}}{2f(X)f'(X)}\\&=-\lim_{X\to+\infty}\frac{\int_X^{+\infty}f(t)\sqrt{1+|f'(t)|^2}\mathrm{d}t}{f'(X)}=\lim_{X\to+\infty}\frac{f(X)\sqrt{1+|f'(X)|^2}}{f''(X)}=0.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sqrt{1+|f'(y)|^2}}{f(y)}\mathrm{d}y\int_x^{+\infty}\sqrt{1+|f'(y)|^2}f(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

80. (80.) 考虑 $g(x)\triangleq f'(x)-f(x),x\in\mathbb{R}$, 于是由条件不等式得

$$\left|g^{(n)}(x)\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant1,\forall n\in\mathbb{N}_0,x\in\mathbb{R}.$$

由 Taylor 中值定理得

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

于是由 $\left|g^{(n+1)}\right|\leqslant1$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}=0,\forall x\in\mathbb{R},$$

即 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$. 现在 g 可以解析延拓至 $\mathbb{C}$ 为 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}z^k$. 刘维尔定理表明 g 为常数. 现在

$$f'-f=A\Rightarrow f(x)=Ce^x-A.$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=Ce^x.$$

81. (81.)

笔记 本题即递减连续函数列的极限函数是上半连续的, 递增函数列的极限函数是下半连续的, 因此极限函数连续.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\lim\limits_{n\to\infty}g_n=f$. 注意到

$$h_n(x)\geqslant f(x)\geqslant g_n(x),\forall x\in C[a,b].$$

我们对任何 $x_0\in[a,b]$ 有

$$h_n(x_0)=\overline{\lim_{x\to x_0,x\in[a,b]}}h_n(x)\geqslant\overline{\lim_{x\to x_0,x\in[a,b]}}f(x);$$

$$g_n(x_0)=\underline{\lim_{x\to x_0,x\in[a,b]}}g_n(x)\leqslant\underline{\lim_{x\to x_0,x\in[a,b]}}f(x).$$

在上式让 $n\to+\infty$ 得

$$\underline{\lim_{x\to x_0,x\in[a,b]}}f(x)=\overline{\lim_{x\to x_0,x\in[a,b]}}f(x)=f(x_0).$$

由 x_0 任意性得 $f\in C[a,b]$. 由 Dini 定理13.39得 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty},\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛.

82. (82.) 若存在 $x_0\neq 0$ 使得 $f(x_0)\neq 0$, 不妨设 $x_0>0$. 对充分大的整数 $N>m>0$, 考虑

$$A_n\triangleq\left\{x>0:|f(x)|\geqslant 2^{-N+n}\right\},n=1,2,\cdots,N-m.$$

对充分大的 m, 我们有 A_n 非空. 定义 $x_0=0,x_n\triangleq\inf A_n,n=1,2,\cdots,N-m$, 则

$$x_{n-1}<x_n,|f(x_n)|=2^{-N+n},n=1,2,\cdots,N-m.$$

在 $[x_{n-1},x_n]$ 上, 我们有

$$|f(x)|\leqslant|f(x_n)|\overset{(13.276)}{\Rightarrow}|f'(x)|\leqslant|f(x_n)|\cdot\ln\frac{1}{|f(x_n)|}\leqslant\frac{N-n}{2^{N-n}},$$

从而

$$\frac{|f(x_n)|-|f(x_{n-1})|}{x_n-x_{n-1}}\leqslant\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|\leqslant\frac{N-n}{2^{N-n}}.$$

现在

$$x_n-x_{n-1}\geqslant\frac{2^{-N+n}-2^{-N+n-1}}{(N-n)2^{n-N}}=\frac{1}{2(N-n)},$$

故

$$x_{N-m}-x_0\geqslant\sum_{n=1}^{N-m}\frac{1}{2(N-n)}\Rightarrow\lim_{N\to+\infty}x_{N-m}=+\infty.\tag{30.181}$$

又

$$|f(x)|\leqslant|f(x_{N-m})|=2^{-m},\forall x\in[0,x_{N-m}],$$

结合(30.181)和 $N\to+\infty$ 得 $|f(x)|\leqslant 2^{-m},\forall x\in[0,+\infty)$. 让 $m\to+\infty$ 得 $f\equiv 0$.

83. (83.) 由紧集上的连续函数一定一致连续, 我们知道对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任何 $0\leqslant x_i,y_i,z_i\leqslant 1,i=1,2$, 只要 $||(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)||<\delta$, 就有

$$f(x_2,y_2,z_2)-\epsilon<f(x_1,y_1,z_1)<\epsilon+f(x_2,y_2,z_2).\tag{30.182}$$

对固定的 $(x_0,y_0)\in[0,1]\times[0,1]$, 只要

$$||(x,y)-(x_0,y_0)||<\delta,0\leqslant x,y\leqslant 1,$$

我们有

$$0\leqslant x,y,z\leqslant 1,||(x,y,z)-(x_0,y_0,z)||<\delta,$$

从而利用(30.182)就有

$$f(x_0,y_0,z)-\epsilon<f(x,y,z)<\epsilon+f(x_0,y_0,z).$$

上式两边对 $z\in[0,1]$ 取上确界得

$$\sup_{z\in[0,1]}f(x_0,y_0,z)-\epsilon\leqslant\sup_{z\in[0,1]}f(x,y,z)\leqslant\epsilon+\sup_{z\in[0,1]}f(x_0,y_0,z),$$

即

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|\leqslant\epsilon.$$

因此我们证明了 g 在 (x_0,y_0) 连续. 由 (x_0,y_0) 任意性我们知道 $g\in C([0,1]\times[0,1])$.

84. (84.) 首先

$$g_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x-y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\chi_{[0,1]}(x-y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x-1}^{x}\chi_{[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

于是 $g_2 \in C(\mathbb{R})$, 即(13.277),(13.278),(13.279)对 $n=2$ 成立. 假设(13.277),(13.278),(13.279)对 $n \geqslant 2$ 成立, 当 $n+1$ 时, 注意到

$$g_{n+1}(x)=\int_0^1 g_n(x-y)\,\mathrm{d}y=\int_{x-1}^x g_n(y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x-1}^n g_n(y)\,\mathrm{d}y, & n\leqslant x\leqslant n+1\\ \int_{x-1}^x g_n(y)\,\mathrm{d}y, & 1\leqslant x<n\\ \int_0^x g_n(y)\,\mathrm{d}y, & 0\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}. \tag{30.183}$$

显然(13.277)对 $n+1$ 成立. 因为积分提升光滑性和(13.278)的归纳假设, 所以我们有 $g_{n+1}\in C^{n-1}(\mathbb{R})$, 即(13.278)对 $n+1$ 成立. 由(13.279)的归纳假设知 g_n 关于 $x=\frac{n}{2}$ 对称, 因此

$$\frac{d}{dx}g_{n+1}(n+1-x)=g_n(n-x)-g_n(n+1-x)=g_n(x)-g_n(x-1)=\frac{d}{dx}g_{n+1}(x).$$

注意到

$$g_{n+1}(n+1-x)|_{x=0}=g_{n+1}(x)|_{x=0}=0,$$

故

$$g_{n+1}(n+1-x)=g_{n+1}(x),\forall x\in\mathbb{R},$$

即 g_n 关于 $x=\frac{n+1}{2}$ 对称. 现在当 $x\leqslant\frac{n}{2}$, 由 g_n 单调性我们知道

$$g'_{n+1}(x)=g_n(x)-g_n(x-1)\geqslant 0.$$

当 $\frac{n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{n+1}{2}$, 我们有

$$g'_{n+1}(x)=g_n(x)-g_n(x-1)=g_n(n-x)-g_n(x-1)\geqslant 0.$$

结合对称性即得(13.279)对 $n+1$ 也成立. 由数学归纳法我们完成了(13.277),(13.278),(13.279)的证明.

定义傅立叶变换

$$\widehat{\chi_{[0,1]}}(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[0,1]}(y)\,e^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1-e^{-2\pi ix}}{2\pi ix}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

因此容易证明利用傅立叶变换的卷积公式, 我们有

$$\widehat{g_n}(x)=\left(\frac{1-e^{-2\pi ix}}{2\pi ix}\right)^n.$$

显然 $\left(\frac{1-e^{-2\pi ix}}{2\pi ix}\right)^n\in L^1(\mathbb{R}),\forall n\geqslant 2$, 于是结合 g_n 连续性我们有

$$g_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2\pi iy}}{2\pi iy}\right)^n e^{2\pi iyx}\mathrm{d}y,\forall x\in\mathbb{R}.$$

当 n 充分大, 我们有

$$g_n^{(k)}(x)=(2\pi i)^k\int_{-\infty}^{\infty}y^k\left(\frac{1-e^{-2\pi iy}}{2\pi iy}\right)^n e^{2\pi iyx}\mathrm{d}y,\forall x\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}_0$$

于是

$$\left|g_n^{(k)}(x)\right|\leqslant(2\pi)^k\int_{-\infty}^{\infty}|y|^k\left|\frac{1-e^{-2\pi iy}}{2\pi iy}\right|^n\mathrm{d}y=(2\pi)^k\int_{-\infty}^{\infty}|y|^k\left|\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right|^n\mathrm{d}y.$$

由 Laplace 方法9.3我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y|^k\left|\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right|^n\mathrm{d}y\sim\int_{-\infty}^{\infty}|y|^k e^{-n\frac{\pi^2}{6}y^2}\mathrm{d}y=O\left(\frac{1}{n^{\frac{k+1}{2}}}\right),n\to\infty.$$

现在就有(13.280)成立.

当 $k=0$, 注意到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_n(x)\right|\mathrm{d}x&=\int_0^n g_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2\pi iy}}{2\pi iy}\right)^n\int_0^n e^{2\pi iyx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi iyn}-1}{2\pi iy}\right)\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi iy}}{2\pi iy}\right)^n\mathrm{d}y=O\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{2\pi iyn}-1}{2\pi iy}\right|\cdot\left|\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right|^n\mathrm{d}y\right)\\&=O\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\pi y)}{y}\right|\cdot\left|\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right|^n\mathrm{d}y\right)=O\left(\int_0^{\infty}\frac{\left|\sin(ny)\right|}{y}\cdot\left|\frac{\sin y}{y}\right|^n\mathrm{d}y\right),\end{aligned}$$

以及继续用 Laplace 方法9.3得

$$\int_0^{\infty}\frac{\left|\sin(ny)\right|}{y}\cdot\left|\frac{\sin y}{y}\right|^n\mathrm{d}y\sim\int_0^{\infty}\frac{\left|\sin(ny)\right|}{y}\cdot e^{-\frac{y^2}{6}n}\mathrm{d}y=O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

这里用到了数学极限习题58., 现在我们有(13.281)成立.

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_n'(x)\right|\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{n}{2}}g_n'(x)\,\mathrm{d}x=2g_n\left(\frac{n}{2}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),n\to\infty,$$

即对 $k=1$ 成立(13.282). 我们可以证明[98]对每一个 $k\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant k+1$ 时都有 $g_n^{(k-1)}(x)$ 的单调区间个数为 $k+1$. 因此类似 $k=1$ 的证明我们有(13.282)成立. 因此我们完成了证明.

当然实际需要中, 我们有一个更弱的积分估计但更容易证明, 即对每一个 $k\in\mathbb{N}$, 成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_n^{(k)}(x)\right|\mathrm{d}x=O\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}-1}}\right),n\to\infty.\tag{30.184}$$

注意到对每一个 $k\in\mathbb{N},n\geqslant k+2$, 都有 $g_n^{(k)}$ 是分段的多项式函数, 所以存在

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=n$$

使得 $g_n^{(k)}(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,m$ 不变号. 因此当 $n\to+\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_n^{(k)}(x)\right|\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^m\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}g_n^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x\right|=\sum_{i=1}^m\left|g_n^{(k-1)}(x_i)-g_n^{(k-1)}(x_{i-1})\right|\\&\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n^{(k-1)}(x)\right|\sum_{i=1}^m\left|x_i-x_{i-1}\right|=n\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g_n^{(k-1)}(x)\right|\overset{(13.280)}{=}O\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}-1}}\right),\end{aligned}$$

这就证明了(30.184).

85. (85.) **Step 1**

先证明

$$\sup_{x\geqslant0}\left|f(x)\right|\leqslant\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|<\infty.\tag{30.185}$$

事实上, 对任何 $n\in\mathbb{N}_0$, 我们设

$$A_n\triangleq\sup_{x\in[n,n+1]}f(x),B_n\triangleq\inf_{x\in[n,n+1]}f(x).$$

若对某个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $A_n>A_{n-1}$, 则取

$$m\triangleq\inf\left\{x\in[n,n+1]:f(x)=A_n\right\},$$

我们有

$$A_n=f(m)=\int_{m-1}^m f(x)\,\mathrm{d}x<\int_{m-1}^m A_n\mathrm{d}x=A_n,$$

这就是一个矛盾! 因此

$$A_n\leqslant A_{n-1}\leqslant A_0,\forall n\in\mathbb{N}.\tag{30.186}$$

[98]这一步算例子是显然的, 一般情况该如何说明呢?

若对某个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $B_n<B_{n-1}$, 则取

$$w\triangleq\inf\left\{x\in[n,n+1]:f(x)=B_n\right\},$$

则

$$B_n=f(w)=\int_{w-1}^{w}f(x)\,\mathrm{d}x>\int_{w-1}^{w}B_n\mathrm{d}x=B_n,$$

这就是一个矛盾! 因此

$$B_n\geqslant B_{n-1}\geqslant B_0,\forall n\in\mathbb{N}. \tag{30.187}$$

综合(30.186)和(30.187)得(30.185).

Step 2

取 g_n 如数学函数性态分析习题84., 补充 f 在 $x<0$ 为 0, 读者可将题目条件写为

$$f(x)=\left(f*\chi_{[0,1]}\right)(x),\forall x\geqslant 1.$$

归纳可证

$$f(x)=(f*g_n)(x),\forall x\geqslant n. \tag{30.188}$$

事实上, 假定(30.188)对 n 成立, 对 $x\geqslant n+1$, 我们有

$$\begin{aligned}(f*g_{n+1})(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}(f*g_n)(x-y)\,\chi_{[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1(f*g_n)(x-y)\,\mathrm{d}y\\&\overset{\text{归纳假设}}{=}\int_0^1 f(x-y)\,\mathrm{d}y=\int_{x-1}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y=f(x),\end{aligned}$$

即 $n+1$ 时(30.188)也成立.

Step 3

对 $x>5$, 取 $n=\lfloor x\rfloor$, 则我们由(30.188)和(13.278)得

$$f'''(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,g_n'''(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

于是由(30.185)和(13.282)得

$$|f'''(x)|\leqslant\sup_{y\in[0,1]}|f(y)|\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g_n'''(x-y)|\,\mathrm{d}y=O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\leqslant\frac{C}{x\sqrt{x}}, \tag{30.189}$$

这里 $C>0$ 是某个正常数.

注如果要使用估计(30.184), 那么考虑 5 阶导数也能到 $O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

Step 4

现在对任何 $k\in\mathbb{N},x\geqslant 1$, 若 $f^{(k)}$ 在区间 $[x-1,x]$ 没有零点, 则不妨设 $f^{(k)}(y)>0,\forall y\in[x-1,x]$. 但是[99]

$$f^{(k-1)}(x)=\int_{x-1}^{x}f^{(k-1)}(y)\,\mathrm{d}y<\int_{x-1}^{x}f^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}y=f^{(k-1)}(x),$$

这就是一个矛盾! 因此对任何 $k\in\mathbb{N},x\geqslant 1$, $f^{(k)}$ 在区间 $[x-1,x]$ 必有零点.

Step 5

利用 **Step 4**, 我们对 $x>5$, 存在 $x_0\in[x,x+1]$ 使得 $f''(x_0)=0$, 然后利用(30.189)和拉格朗日中值定理有

$$|f''(x)|=|f''(x)-f''(x_0)|=|f'''(\theta)|\cdot|x-x_0|\leqslant\frac{C}{\theta\sqrt{\theta}}\leqslant\frac{C}{x\sqrt{x}}.$$

进一步类似的得

$$|f'(x)|\leqslant\frac{C}{x\sqrt{x}},\forall x>5.$$

因此我们证明了(13.283).

[99]如此积分等式可以直接从原条件等式得到, 例如

$$f'(x)=f(x)-f(x-1)=\int_{x-1}^{x}f'(y)\,\mathrm{d}y.$$

注从证明和(13.282)可以看到, 对任何 $k\in\mathbb{N}$, 实际上 $f^{(k)}$ 有快于任何多项式的估计, 从而

$$\int_1^{\infty} x^{\beta}\left|f^{(k)}(x)\right|\mathrm{d}x<\infty,\forall\beta>0,k\in\mathbb{N}.$$

86. (86.) 不妨设 $f(0)=1$, 则条件不等式变为

$$\int_x^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant cf(x),\forall x\geqslant 0.$$

记 $F(x)\triangleq\int_x^{\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t$, 则有

$$F(x)\leqslant cf(x),\forall x\geqslant 0.$$

从而

$$\begin{aligned}&-\frac{F'(x)}{F^2(x)}\geqslant\frac{1}{c^2}\Rightarrow\int_0^x\left(-\frac{F'(y)}{F^2(y)}\right)\mathrm{d}y\geqslant\frac{x}{c^2}\\&\Rightarrow\frac{1}{F(x)}\geqslant\frac{1}{F(0)}+\frac{x}{c^2}\overset{F(0)\leqslant cf(0)=c}{\Rightarrow}\frac{1}{c}+\frac{x}{c^2}\Rightarrow F(x)\leqslant\frac{c^2}{c+x}.\end{aligned}$$

现在对任何 $x>t>0$, 我们有

$$f^2(x)\leqslant\frac{1}{x-t}\int_t^x f^2(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{F(t)}{x-t}\leqslant\frac{c^2}{(c+t)(x-t)}.$$

为了使得上述放缩达到最佳, 我们取 $x-t=c+t$, 即 $0<t=\frac{x-c}{2}<x$. 从而

$$f^2(x)\leqslant\frac{c^2}{\left(c+\frac{x-c}{2}\right)\left(x-\frac{x-c}{2}\right)}=\frac{4c^2}{(x+c)^2},$$

即 $f(x)\leqslant\frac{2c}{x+c},\forall x>0$, 连续性得

$$f(x)\leqslant\frac{2c}{x+c},\forall x\geqslant 0.$$

87. (87.) 由(13.285)知 $f'+f$ 在单调递增, 从而由洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]$$

有意义. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$, 存在 $a,X>0$, 我们有 $f(x)\geqslant a,\forall x\geqslant X$. 由(13.284)知 g 在 $[a,+\infty)$ 有正的最小值 $c>0$. 结合(13.285)知 $f'(x)+f(x)-cx$ 在 $[X,+\infty)$ 递增,

因此

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=+\infty,$$

以及由(13.284)和(13.285)得

$$\lim_{x\to+\infty}g(f(x))=+\infty,\lim_{x\to+\infty}[f''(x)+f'(x)]=+\infty.$$

由(13.284)和(13.285)取 $x_1>0$ 使得

$$f'(x)+f''(x)\geqslant g(f(x))\geqslant\frac{2+a}{2}f^{1+a}(x),f''(x)+f'(x)>0,\forall x\geqslant x_1.$$

于是

$$2[f'(x)+f''(x)][f'(x)+f(x)]\geqslant(2+a)f^{1+a}(x)[f'(x)+f(x)]\geqslant(2+a)f^{1+a}(x)f'(x),\forall x\geqslant x_1.$$

于是两边积分得

$$[f'(x)+f(x)]^2\geqslant f^{2+a}(x)+[f'(x_1)+f(x_1)]^2-f^{2+a}(x_1),\forall x\geqslant x_1.$$

于是存在 $x_2>x_1$ 使得

$$f^{2+a}(x)+[f'(x_1)+f(x_1)]^2-f^{2+a}(x_1)>0,\forall x\geqslant x_2,$$

从而成立

$$f'(x)+f(x)\geqslant\sqrt{f^{2+a}(x)+[f'(x_1)+f(x_1)]^2-f^{2+a}(x_1)},\forall x\geqslant x_2,$$

即

$$\int_{x_2}^{x}\frac{f'(y)}{\sqrt{f^{2+a}(y)+\left[f'(x_1)+f(x_1)\right]^2-f^{2+a}(x_1)}-f(y)}\mathrm{d}y\geqslant\int_{x_2}^{x}1\mathrm{d}y=x-x_2,\forall x\geqslant x_2.$$

现在由

$$+\infty>\lim_{x\to+\infty}\int_{f(x_2)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{t^{2+a}+\left[f'(x_1)+f(x_1)\right]^2-f^{2+a}(x_1)}-t}\mathrm{d}t\geqslant\lim_{x\to+\infty}(x-x_2)$$

知这是一个矛盾! 因此我们证明了(13.286).

88. (88.) 设 $\varphi(x)\triangleq\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^px^n$, 由幂级数系数的阶蕴含和函数的阶19.1, 我们容易证明有[100] $C>0$ 使得

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant C\frac{1}{(1-x)^{p+1}},\forall x\in[0,1).\tag{30.190}$$

设

$$K\triangleq\max\left\{\sup_{n\geqslant1}\left|\frac{a_n}{n^p}\right|,\sup_{t\geqslant0}e^t\left|f(t)\right|\right\}>0,$$

以及

$$g(z)\triangleq\begin{cases}(z+1)\int_0^{\infty}e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t, & \forall\Re z>-1\\ (z+1)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}, & \forall|z|>1\end{cases}.$$

注意到

$$\int_0^{\infty}\left|e^{-zt}f(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant K\int_0^{\infty}e^{-(\Re z+1)t}\mathrm{d}t=\frac{K}{1+\Re z},\forall\Re z>-1,\tag{30.191}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_n}{z^{n+1}}\right|\leqslant\left|\frac{a_0}{z}\right|+K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{|z|^{n+1}}\leqslant\left|\frac{a_0}{z}\right|+K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{|z|^n}=\left|\frac{a_0}{z}\right|+K\varphi\left(\frac{1}{|z|}\right),\forall|z|>1,\tag{30.192}$$

以及

$$\int_0^{\infty}e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}e^{-zt}\frac{t^n}{n!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}},\forall\Re z>1,$$

我们由解析函数唯一性定理知 g 在 $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ 是良定义的解析函数. 从(30.191)可以看到

$$\overline{\lim_{x>-1,x\to-1}}|g(x)|\leqslant K\overline{\lim_{x\to-1,x>-1}}\left(\frac{|x+1|}{1+x}\right)=K<\infty.$$

从(30.192)可以看到

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}|g(z)|\leqslant\overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\frac{a_0(z+1)}{z}\right|+K\overline{\lim_{z\to\infty}}\left(|z+1|\varphi\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)=|a_0|+\varphi'(0)<\infty.$$

因此

$$g(x)=O(1),x>-1,x\to-1,g(z)=O(1),z\to\infty.$$

于是 g 在 $z=-1$ 不是极点且在无穷远点的洛朗展开没有正幂次部分.

Case 1 设 $z=x+iy$, 当 $|z|\leqslant1,z\neq-1$.

由(30.191)我们有 $\Re z>-1,y^2\leqslant1-x^2$, 于是我们有

$$\overline{\lim_{z\to-1,|z|\leqslant1}}|1+z|\cdot|g(z)|\leqslant K\overline{\lim_{z\to-1,|z|\leqslant1}}\frac{(1+x)^2+y^2}{1+x}\leqslant K\overline{\lim_{z\to-1,|z|\leqslant1}}\frac{(1+x)^2+1-x^2}{1+x}=2K<\infty.$$

Case 2 设 $z=x+iy$, 当 $x\leqslant-1,|z|>1$.

[100] 你可以在 $x=0$Taylor 展开 $(1-x)^{-p-1}$, 然后用 Gamma 函数对应的斯特灵公式9.4得到系数的阶.

由(30.190)和(30.192), 我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{z\to-1}}\left|z+1\right|^{2p+1}\left|g\left(z\right)\right|\leqslant\left|a_0\right|\overline{\lim_{z\to-1}}\frac{\left|z+1\right|^{2p+2}}{\left|z\right|}+\overline{\lim_{z\to-1}}K\left|z+1\right|^{2p+2}\varphi\left(\frac{1}{\left|z\right|}\right)\\
&\leqslant C\overline{\lim_{z\to-1}}K\frac{\left|z+1\right|^{2p+2}}{\left(1-\frac{1}{\left|z\right|}\right)^{p+1}}=C\overline{\lim_{z\to-1}}K\frac{\left|z+1\right|^{2p+2}}{\left(\left|z\right|-1\right)^{p+1}}\\
&=CK\overline{\lim_{z\to-1}}\left[\frac{\left(x+1\right)^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-1}\right]^{p+1}=CK\overline{\lim_{z\to-1}}\left[\frac{2\left(x+1\right)+x^2+y^2-1}{\sqrt{x^2+y^2}-1}\right]^{p+1}\\
&\leqslant CK\overline{\lim_{z\to-1}}\left[\sqrt{x^2+y^2}+1\right]^{p+1}=2^{p+1}CK<\infty.
\end{aligned}$$

Case 3 设 $x>-1,\left|z\right|>1,z=x+iy.$

注意到

$$\begin{aligned}
\left|z+1\right|^{2p+2}&=\left|\left(x+1\right)^2+y^2\right|^{p+1}=\left|2\left(x+1\right)+\left|z\right|^2-1\right|^{p+1}\\
&\overset{\text{基本不等式12.6}}{\leqslant}2^p\left[2^{p+1}\left(x+1\right)^{p+1}+\left(\left|z\right|^2-1\right)^{p+1}\right]\\
&\leqslant 2^{p+1}\max\left\{2^{p+1}\left(x+1\right)^{p+1},\left(\left|z\right|^2-1\right)^{p+1}\right\},
\end{aligned}$$

于是当 $2^{p+1}\left(x+1\right)^{p+1}\geqslant\left(\left|z\right|^2-1\right)^{p+1}$, 我们由(30.191)得

$$\overline{\lim_{z\to-1}}\left(\left|z+1\right|^{2p+1}\left|g\left(z\right)\right|\right)\leqslant 2^{p+1}\overline{\lim_{z\to-1}}\left(2^{p+1}K\frac{\left(x+1\right)^{p+1}}{x+1}\right)<\infty.$$

当 $2^{p+1}\left(x+1\right)^{p+1}\leqslant\left(\left|z\right|^2-1\right)^{p+1}$, 由(30.190)和(30.192)我们有

$$\overline{\lim_{z\to-1}}\left(\left|z+1\right|^{2p+1}\left|g\left(z\right)\right|\right)\leqslant\left|a_0\right|\overline{\lim_{z\to-1}}\frac{\left|z+1\right|^{2p+2}}{\left|z\right|}+2^{p+1}\overline{\lim_{z\to-1}}\left(KC\frac{\left(\left|z\right|^2-1\right)^{p+1}}{\left(1-\frac{1}{\left|z\right|}\right)^{p+1}}\right)=2^{2p+2}KC<\infty.$$

由刘维尔定理知 $g\left(z\right)\equiv C$. 从而成立

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}=\frac{C}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C\left(-1\right)^n}{z^{n+1}}\Rightarrow a_n=C\left(-1\right)^n\Rightarrow f\left(x\right)=Ce^{-x}.$$

89. (89.) 首先由

$$\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)'=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2}\geqslant 0$$

知

$$x-\frac{1}{x}-2\ln x\leqslant\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)|_{x=1}=0,\forall x\in\left(0,1\right).$$

于是我们证明了

$$e^{x-\frac{1}{x}}\leqslant x^2,\forall x\in\left(0,1\right).\tag{30.193}$$

条件不等式和 f 递减得 $\frac{f'(x)}{f(x)}<-1$. 于是一方面有

$$\left[\ln f\left(x\right)+x\right]'=\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}+1<0\Rightarrow\ln f\left(x\right)+x>\ln f\left(1\right)+1,\forall x\in\left(0,1\right),$$

即

$$\frac{f\left(1\right)}{f\left(x\right)}<e^{x-1},\forall x\in\left(0,1\right).\tag{30.194}$$

另外一方面有

$$\left[\ln f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\right]'=-\frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2f\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow\ln f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}<\ln f\left(1\right)+1,\forall x\in\left(0,1\right),$$

即

$$\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(1)}<e^{1-\frac{1}{x}},\forall x\in(0,1). \tag{30.195}$$

由(30.194), (30.195)和(30.193)得

$$\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<e^{x-1}e^{1-\frac{1}{x}}=e^{x-\frac{1}{x}}\leqslant x^2,\forall x\in(0,1),$$

这就证明了(13.287).

90. (90.) 首先对固定的 $s\in[0,1]$, 由黎曼引理9.2, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(t,s)\sin(nt)\,\mathrm{d}t=0.$$

对任何 $\epsilon>0$, 由 h 一致连续, 取 $\delta>0$, 使得

$$|h(t_1,s_1)-h(t_2,s_2)|\leqslant\epsilon,\forall\sqrt{(t_1-t_2)^2+(s_1-s_2)^2}<\delta,(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in[0,1]^2. \tag{30.196}$$

取正整数 $m>\frac{1}{\delta}$ 和 N 使得

$$\left|\int_0^1 h\left(t,\frac{i}{m}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon,\forall i=0,1,\cdots,m,n\geqslant N.$$

于是当 $n\geqslant N,s\in[0,1]$, 取 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $s\in\left[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\right]$, 于是利用不等式(30.196)就有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 h(t,s)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|&\leqslant\left|\int_0^1 h(t,s)\sin(nt)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 h\left(t,\frac{i}{m}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^1 h\left(t,\frac{i}{m}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\epsilon\int_0^1|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t+\epsilon\leqslant 2\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了当 $n\to\infty$ 时 $\int_0^1 h(t,s)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ 关于 $s\in[0,1]$ 一致收敛.

91. (91.) 用 f_n-f 代替 f, 我们不妨设 $f=0$, 下证 $g=0$, 这只需要证明 $g=0$ 的点在 (a,b) 稠密.

事实上, 对任何 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, 我们考虑

$$[\alpha,\beta]=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{m=N}^{\infty}\{x\in[\alpha,\beta]:|f_m'(x)-g(x)|\leqslant 1\}.$$

注意到

$$\bigcap_{m=N}^{\infty}\{x\in[\alpha,\beta]:|f_m'(x)-g(x)|\leqslant 1\}$$

是闭集, 于是由 Baire 纲定理知有某个 $N\in\mathbb{N}$ 使得存在 $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$ 满足

$$[\alpha',\beta']\subset\bigcap_{m=N}^{\infty}\{x\in[\alpha,\beta]:|f_m'(x)-g(x)|\leqslant 1\}.$$

于是

$$|f_m'(x)|\leqslant|g(x)|+1\leqslant\sup_{y\in[\alpha',\beta']}(|g(y)|+1),\forall x\in[\alpha',\beta'],m\geqslant N.$$

于是由牛顿莱布尼兹公式和控制收敛定理, 对 $x\in[\alpha',\beta']$, 我们有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{m\to\infty}[f_m(x)-f_m(\alpha')]=\lim_{m\to\infty}\int_{\alpha'}^{x}f_m'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{\alpha'}^{x}\lim_{m\to\infty}f_m'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha'}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$g(x)=0,\forall x\in[\alpha',\beta'].$$

于是我们证明了 $g=0$ 的点在 (a,b) 稠密. 这就完成了证明.

注从楼红卫教授视频中可以看到将f 削弱到可微, g 不动, 本结果是不对的. 将f 不动, g 削弱至有界且有原函数, 本结果也不对.

92. (92.) 若 f 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 不连续, 则存在 $x_n \to x_0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| > \delta > 0.$$

当 n 充分大, $f(x_n)$ 必有无穷多项使得恒大于 $f(x_0)$ 或者恒小于 $f(x_0)$. 不妨设前者发生并把这个子列仍然记为 x_n, 此时有

$$f(x_n) > f(x_0) + \delta > f(x_0).$$

取 $r \in \mathbb{Q}$ 使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$f(x_n) > r > f(x_0).$$

由介值性可取 r_n 介于 x_0 和 x_n 之间使得 $f(r_n) = r$. 因为 $r_n \to x_0$ 且 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 是闭集, 我们有

$$x_0 \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\},$$

这就证明了 $f(x_0) = r$ 而矛盾!, 因此 $f \in C(\mathbb{R})$.

93. (93.) 我们用复数表示映射, 则条件等式变为

$$g(z) = g\left(i\bar{z}^2\right), \forall |z| \leqslant 1.$$

现在

$$g(z) = g\left(i\bar{z}^2\right) = g\left(ii\overline{z^2}^2\right) = g\left(iz^4\right) = g\left(i\overline{iz^4}^2\right)$$
$$= g\left(i\bar{z}^8\right) = \cdots = \begin{cases} g\left(iz^{2^n}\right), & n\text{为正偶数} \\ g\left(i\bar{z}^{2^n}\right), & n\text{为正奇数} \end{cases}.$$

于是当 $|z| < 1$, 我们有

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} g\left(iz^{2^n}\right), & n\text{为正偶数} \\ g\left(i\bar{z}^{2^n}\right), & n\text{为正奇数} \end{cases} = g(0).$$

由连续性得

$$g(z) = g(0,0), \forall |z| \leqslant 1.$$

这就是一个矛盾! 我们完成了证明.

94. (94.) **Step 1**

注意到对开集 $G \subset \mathbb{R}$, 如果对每一个 $x \in G$, 都存在 x 在 G 的邻域 U, 使得 f 在 U 上是多项式, 那么因为 f 实解析, 从而由定理19.7知 f 在 G 上是多项式.

Step 2

对任何开集 $G \subset \mathbb{R}$, 我们有

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in G : f^{(n)}(x) = 0\right\}.$$

由 Baire 纲定理[101]13.13, 必然存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\left\{x \in G : f^{(n)}(x) = 0\right\}$ 包含一个开区间, 因此在这个区间上, f 是多项式.

Step 3

考虑开集

$$H \triangleq \{x \in \mathbb{R} : \text{存在}x\text{邻域使得}f\text{在这个邻域是多项式.}\}.$$

若闭集 $F \triangleq \mathbb{R} \setminus H$ 非空, 则 F 不能有内点, 否则和 **Step 2** 用 Baire 纲得到的结果矛盾! 如果 F 有孤立点 a, 则在 a 左右侧, 由 **Step 1** 得 f 是多项式. 现在把 f 在 $x = a$ 展开为足够高次的 Taylor 多项式, 则 a 左右 f 应该是同一个多项式, 从而 $a \in H$ 而矛盾!

Step 4

[101] 相对 G 的子空间拓扑用.

现在 F 是无孤立点的无处稠密集, 若 F 非空, 考虑

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in F:f^{(n)}(x)=0\right\}.$$

继续对 F 的子空间拓扑用 Baire 纲定理13.13, 存在有界开区间 I 和 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $I\bigcap F$ 里每个点, 其 n 阶导数都是 0. 因为 F 无孤立点, 所以 $I\bigcap F$ 中每个点都是 $I\bigcap F$ 中的点的极限, 由导数定义可得

$$f^{(k)}(x)=0,\forall x\in F\bigcap I,k\geqslant n. \tag{30.197}$$

注意到

$$I=\left(F\bigcap I\right)\bigcup\left(H\bigcap I\right),$$

运用开集构造定理, 我们有划分[102]

$$H\bigcap I=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n).$$

因此 $a_n,b_n\in F\bigcap I$ 或者是 I 的端点. 如果 $a_n\in F\bigcap I$, 那么因为 f 是 $[a_n,b_n]$ 的多项式且(30.197)成立, 我们知道 $f^{(n)}$ 在 $[a_n,b_n]$ 恒为 0. 类似的可以考虑 $b_n\in F\bigcap I$ 得 $f^{(n)}$ 在 $[a_n,b_n]$ 恒为 0. 显然 $(a_n,b_n)\neq I$, 故必有 $a_n\in F\bigcap I$ 或者 $b_n\in F\bigcap I$, 因此 $f|_{H\bigcap I}=0$. 因为 F 无处稠密, 所以 $H\bigcap I$ 在 I 稠密[103], 故由 $f^{(n)}$ 连续性得 $f^{(n)}$ 在 I 上恒为 0, 因此 $I\subset H$, 这导致 $F\bigcap I=\emptyset$, 矛盾! 因此我们由 **Step 1** 得到 f 是多项式.

95. (95.) 首先

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

然后

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-ty)|e^{-y^2}\mathrm{d}y\leqslant\frac{\sup|f|}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y<\infty,\forall t\in[0,1],$$

即反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x-ty)e^{-y^2}\mathrm{d}y$ 关于 $t\in[0,1]$ 一致收敛, 因此对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}f\left(x-\frac{y}{n}\right)e^{-y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-y^2}\mathrm{d}y=f(x).\end{aligned}$$

96. (96.) 若 f,g 线性相关, 则存在不全为 0 的 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $af+bg=0$. 注意 $af'+bg'=0$, 于是

$$\begin{pmatrix}f&g\\f'&g'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\Rightarrow\det\begin{pmatrix}f&g\\f'&g'\end{pmatrix}=0.$$

反之设 $\det\begin{pmatrix}f&g\\f'&g'\end{pmatrix}=0$, 不妨设 g 不恒为 0, 否则显然 f,g 线性相关. 因为实解析函数零点是孤立的19.7, 所以除去一个孤立集外有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0.$$

于是取一个 g 非 0 的开区间 I 都有某个常数 c 使得 $f(x)-cg(x)=0,\forall x\in I$. 由解析函数唯一性我们知道

$$f(x)-cg(x)=0,\forall x\in\mathbb{R},$$

这就证明了 f,g 线性相关.

当 $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 则结论不对, 可取

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}},&x>0\\0,&x\leqslant0\end{cases},g(x)=\begin{cases}0,&x\geqslant0\\e^{-\frac{1}{x^2}},&x<0\end{cases},$$

[102] 分解为不交集合的并.

[103] 对任何开集 $G\subset I$, 我们有 G 不能是 F 的子集, 所以 G 含有 $H\bigcap I$ 中的点.

则由例题12.1知 $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 且 $w(f,g)=0$, 但 f,g 线性无关.

97. (97.) 由 Cauchy 不等式16.1得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|f(x)-\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left|f(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x+\epsilon t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{4}\int_0^1\left|\int_{-1}^{1}[f(x)-f(x+\epsilon t)]\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-1}^{1}|f(x)-f(x+\epsilon t)|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_0^1|f(x)-f(x+\epsilon t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由定理13.48, 显然有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^1|f(x)-f(x+\epsilon t)|^2\,\mathrm{d}x=0$$

关于 $t\in[-1,1]$ 一致的成立, 因此我们有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^1\left|f(x)-\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x=0.$$

98. (98.) 由 Cauchy 不等式[104]得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|L-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\int_x^{x+1}f(y)\,\mathrm{d}y-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{x+\frac{n-1}{N}}^{x+\frac{n}{N}}\left[f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right]\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\chi_{\left[x+\frac{n-1}{N},x+\frac{n}{N}\right]}(y)\left[f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right]\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\chi_{\left[x+\frac{n-1}{N},x+\frac{n}{N}\right]}(y)\,\mathrm{d}y\cdot\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}}\chi_{\left[x+\frac{n-1}{N},x+\frac{n}{N}\right]}(y)\left|f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
=&\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\int_{x+\frac{n-1}{N}}^{x+\frac{n}{N}}\left|f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
\leqslant&2\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\int_{x+\frac{n-1}{N}}^{x+\frac{n}{N}}\left[|f(y)|^2+\left|f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
=&2\int_0^1\int_x^{x+1}|f(y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\left|f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
=&2\int_0^1|f(y)|^2\,\mathrm{d}y+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\frac{n}{N}}^{1+\frac{n}{N}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\\
=&2\int_0^1|f(y)|^2\,\mathrm{d}y+2\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=4\int_0^1|f(y)|^2\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

考虑线性算子

$$T_Ng=\int_0^1\left[\int_0^1g(y)\,\mathrm{d}y-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g\left(x+\frac{n}{N}\right)\right]\mathrm{d}x,N\in\mathbb{N},$$

于是由章节9.4的 Friedrichs mollifier technique 和稠密性结果13.49的最后一条, 我们只需要对 $f\in C(\mathbb{R})$ 且 f

[104]注意把求和和积分看成乘积测度用 Cauchy 不等式.

是周期 1 的函数证明(13.288)即可.

设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且 f 是周期 1 的函数, 于是 f 是一致连续的[105]. 现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-y|\leqslant\delta, x,y\in\mathbb{R}$, 我们有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\epsilon.$$

于是当 $N>\frac{1}{\delta}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|L-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\int_x^{x+1}f(y)\,\mathrm{d}y-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left|\sum_{n=1}^N\int_{x+\frac{n-1}{N}}^{x+\frac{n}{N}}\left[f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right]\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left|\sum_{n=1}^N\int_{\mathbb{R}}\chi_{\left[x+\frac{n-1}{N},x+\frac{n}{N}\right]}(y)\left[f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right]\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_0^1\left[\sum_{n=1}^N\int_{\mathbb{R}}\chi_{\left[x+\frac{n-1}{N},x+\frac{n}{N}\right]}(y)\,\mathrm{d}y\cdot\sum_{n=1}^N\int_{\mathbb{R}}\chi_{\left[x+\frac{n-1}{N},x+\frac{n}{N}\right]}(y)\left|f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=1}^N\int_0^1\int_{x+\frac{n-1}{N}}^{x+\frac{n}{N}}\left|f(y)-f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\leqslant\epsilon\sum_{n=1}^N\int_0^1\int_{x+\frac{n-1}{N}}^{x+\frac{n}{N}}1\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\epsilon,
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1\left|L-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x=0.$$

现在(13.288)对一切满足题目条件的函数都成立.

99. (99.) 我们直接计算得

$$\begin{aligned}
I^\alpha\left(I^\beta f(x)\right)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-s)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-t)^{\beta-1}f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)\left[\int_t^x(x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\\
&\overset{s=t\cos^2\theta+x\sin^2\theta}{=}\frac{2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}t\\
&\overset{u=\sin^2\theta}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\left[\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t\\
&=\frac{\beta(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{d}t\\
&=I^{\alpha+\beta}f(x),
\end{aligned}$$

这里用到了 Beta 函数的一个性质

$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\forall a,b>0.$$

对称的, 我们知道(13.289)成立.

100. (100.) **Step 1**

设

$$g(x)\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},x>0.$$

[105] 见例题9.47的注释.

首先注意到

$$\ln\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=x\ln n-\ln x-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$
$$=x\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln x-\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right].$$

由例题8.6和 $\ln(1+x)-x\sim-\frac{x^2}{2},x\to 0$ 我们知道 g 的定义极限是存在的, 从而 g 是良定义的. 又

$$\left[\ln\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right]''=\frac{1}{x^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+x)^2}>0,$$

我们知道对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\ln\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ 是下凸的, 因此其极限函数[106]$\ln g$ 也是下凸的. 容易验证

$$g(1)=1,g(x+1)=xg(x).$$

Step 2

利用 $f(x+1)=xf(x)$ 得

$$f(n)=(n-1)!,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由割线斜率递增我们知道

$$\ln f(n+1)-\ln f(n)\leqslant\frac{\ln f(n+1+t)-\ln f(n+1)}{t}\leqslant\ln f(n+2)-\ln f(n+1),\forall t\in(0,1),n\in\mathbb{N},$$

即

$$0\leqslant\ln f(n+1+t)-\ln n!-t\ln n\leqslant t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\forall t\in(0,1),n\in\mathbb{N}.$$

类似的有

$$0\leqslant\ln g(n+1+t)-\ln n!-t\ln n\leqslant t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\forall t\in(0,1),n\in\mathbb{N}.$$

于是

$$|\ln g(n+1+t)-\ln f(n+1+t)|\leqslant t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\forall t\in(0,1),n\in\mathbb{N}.$$

继续利用

$$f(x+1)=xf(x),g(x+1)=xg(x)$$

得

$$|\ln g(t)-\ln f(t)|\leqslant t\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\forall t\in(0,1),n\in\mathbb{N},$$

从而令 $n\to\infty$ 得 $f(t)=g(t),\forall t\in(0,1)$. 进一步递推得(13.290)成立.

101. (101.) 对任何 $\epsilon>0$, 由 f 一致连续, 存在 $\delta\in(0,1)$, 使得当 $|x-y|\leqslant\delta,x,y>0$ 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\epsilon.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n\delta)$ 存在, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $n,m\geqslant N$ 成立

$$|f(n\delta)-f(m\delta)|\leqslant\epsilon.$$

现在对 $x_2,x_1>(N+1)\delta$, 我们取 $k_i\in\mathbb{N}$ 使得

$$|x_i-k_i\delta|<\delta,i=1,2.$$

现在容易看到 $k_i\geqslant N,i=1,2$, 于是我们有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|f(x_2)-f(k_2\delta)|+|f(k_2\delta)-f(k_1\delta)|+|f(k_1\delta)-f(x_1)|\leqslant 3\epsilon,$$

即由 Cauchy 收敛准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

[106]下凸的定义是函数有一个不等式, 而极限保不等式.

102. (102.) 我们归纳证明. 当 $m=1$, 显然(13.291)成立. 下设对 $m-1$ 有(13.291)成立. 当 $m\geqslant 2$ 时. 首先由 f 递增正值下凸知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

由归纳假设, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $X>0$ 使得

$$\frac{f'(x)f'''(x)}{f''^2(x)}\leqslant 1-\frac{1}{m-1}+\epsilon,\forall x\geqslant X.$$

于是

$$\left(\frac{f'^2}{f''}\right)'=\left(2-\frac{f'f'''}{f''^2}\right)f'\geqslant\left(1+\frac{1}{m-1}-\epsilon\right)f',\forall x\geqslant X.$$

积分得

$$\frac{f'^2(x)}{f''(x)}\geqslant\left(1+\frac{1}{m-1}-\epsilon\right)[f(x)-f(X)]+\frac{f'^2(X)}{f''(X)},\forall x\geqslant X,$$

即

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f'^2(x)}{f''(x)f(x)}\geqslant\varliminf_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}-\epsilon\right)\left[1-\frac{f(X)}{f(x)}\right]+\frac{f'^2(X)}{f''(X)f(x)}\right]=1+\frac{1}{m-1}-\epsilon.$$

现在我们由 ϵ 任意性得

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f'^2(x)}{f''(x)f(x)}\geqslant 1+\frac{1}{m-1},$$

即

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f''(x)f(x)}{f'^2(x)}\leqslant\frac{1}{1+\frac{1}{m-1}}=1-\frac{1}{m}.$$

于是由数学归纳法得对一切 $m\in\mathbb{N}$ 都有(13.291)成立.

103. (103.) 考虑

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\mathbf{x}\mapsto(u(\mathbf{x}),v(\mathbf{x})),$$

我们知道

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det(DT).$$

若 $\det(DT(\mathbf{x}_0))=0$, 则存在 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ 使得 $DT(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}=0$. 于是由(13.292)得

$$\begin{aligned}&||T(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-T(\mathbf{x}_0)-tDT(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}||\\&=||T(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-T(\mathbf{x}_0)||\geqslant C|t|\cdot||\mathbf{v}||,\end{aligned}$$

这和可微性导出的

$$||T(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-T(\mathbf{x}_0)-tDT(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}||=o(t),t\to 0$$

矛盾! 因此我们证明了(13.293).

104. (104.) 由(13.294)知 f 单射, 由连续函数单射等价严格单调知 f 在 $[1,+\infty)$ 严格单调. 不妨设 f 递增, 否则用 $-f$ 代替 f. 继续由由(13.294)得

$$f(y)\geqslant f(x)+a(y-x),\forall y\geqslant x.$$

故 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 且存在 $X>0$ 使得

$$f(x)\geqslant 1,\forall x\geqslant X.\tag{30.198}$$

现在对 $x,y\geqslant X$ 成立

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x+e^{-x}}{f(x)}-\frac{y+e^{-y}}{f(y)}\right|=\left|\frac{xf(y)-yf(x)+e^{-x}f(y)-e^{-y}f(x)}{f(x)f(y)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{(x-y)f(y)+y(f(y)-f(x))+e^{-x}(f(y)-f(x))-f(x)(e^{-x}-e^{-y})}{f(x)f(y)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{(x-y)f(y)}{f(x)f(y)}\right|+\left|\frac{(y+e^{-x})(f(y)-f(x))}{f(x)f(y)}\right|+\left|\frac{f(x)(e^{-x}-e^{-y})}{f(x)f(y)}\right|\\&\overset{(30.198)}{\leqslant}|x-y|+\left|e^{-x}-e^{-y}\right|+|f(y)-f(x)|+\left|\frac{y(f(y)-f(x))}{f(x)f(y)}\right|\\&\overset{(13.294)}{\leqslant}|x-y|+\left|e^{-x}-e^{-y}\right|+|f(y)-f(x)|+|f(y)-f(x)|\cdot\frac{y}{f(X)+a(y-X)}.\end{aligned}$$

于是由 $\frac{y}{f(X)+a(y-X)}$ 在 $[X,+\infty)$ 有界和 $e^{-x},x,f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 一致连续得 $\frac{x+e^{-x}}{f(x)}$ 在 $[X,+\infty)$ 一致连续.

105. (105.) 必要性显然, 下面证明充分性. 对每一个 $x\in\mathbb{R}$, 当 n 充分大, 我们有

$$g_n(x)=\frac{|n+f(x)|-|n-f(x)|}{2}=\frac{n+f(x)-(n-f(x))}{2}=f(x).$$

设 $x_m\to x$ 使得 $f(x_m)\to+\infty$. 对任何 $n\in\mathbb{N}$, 当 m 充分大得

$$\lim_{m\to\infty}g_n(x_m)=\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_m)+n-n+f(x_m)}{2}=+\infty,$$

这就和 g_n 连续矛盾!

设 $x_m\to x$ 使得 $f(x_m)\to-\infty$, 类似上面的讨论也矛盾!

设 $x_m\to x$ 使得 $f(x_m)\to c$, 当 n,m 充分大, 我们有

$$g_n(x)=\lim_{m\to\infty}g_n(x_m)=\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_m)+n-n+f(x_m)}{2}=\lim_{m\to\infty}f(x_m)=c,$$

即由命题7.4知 f 在 x 连续, 这就完成了证明.

106. (106.) 我们设 $f=(f_1,f_2),g=(g_1,g_2)$, 然后考虑

$$F_1(x,y)\triangleq f_1(x)-g_1(y),F_2(x,y)\triangleq f_2(x)-g_2(y).$$

注意到

$$\begin{aligned}&F_1(0,y)=-g_1(y)\leqslant0,F_1(1,y)=1-g_1(y)\geqslant0;\\&F_2(x,0)=f_2(x)-1\leqslant0,F_2(x,1)=f_2(x)\geqslant0,\end{aligned}$$

由 Poincare-Miranda 定理12.4我们知道存在 $(x_0,y_0)\in[a,b]^2$ 是 F_1,F_2 公共零点, 这就证明了 $f(x_0)=g(y_0)$, 从而 f,g 像非空.

107. (107.) 由闭区间上的连续函数必然取得最大最小值和介值性我们有 f 的值域是 $[\alpha,\beta]$, 因此 f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 有定义. 对任何闭集 $F\subset[\alpha,\beta]$, 我们知道 F 紧. 由连续函数把紧集送到紧集, 我们知道 $f(F)$ 是紧的, 从而是闭的. 现在对 f^{-1} 来说, 闭集的原像是闭集, 因此 f^{-1} 连续, 这就完成了证明!.

108. (108.) 记 $F(x)\triangleq f(x)+f(-x)$. 利用 x^α 下凸性得

$$a^\alpha+b^\alpha\geqslant2^{1-\alpha}(a+b)^\alpha.$$

于是

$$\begin{aligned}F(x)&\geqslant\int_{-x}^{x}f^\alpha(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left[f^\alpha(t)+f^\alpha(-t)\right]\mathrm{d}t\\&\geqslant2^{1-\alpha}\int_0^x\left[f(t)+f(-t)\right]^\alpha\mathrm{d}t=2^{1-\alpha}\int_0^xF^\alpha(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记 $G(x)\triangleq\int_0^xF^\alpha(t)\,\mathrm{d}t$, 若 G 不恒为 0, 则存在 $X>0$ 使得 $G(x)>0,\forall x\geqslant X$, 于是

$$\frac{G'(x)}{G^\alpha(x)}\geqslant2^{\alpha-\alpha^2}\Rightarrow\int_{G(X)}^{G(+\infty)}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t=\int_X^\infty\frac{G'(y)}{G^\alpha(y)}\mathrm{d}y=+\infty,$$

这就和 $\int_{G(X)}^\infty\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t<\infty$ 矛盾!. 因此 G 恒为 0 可得 F 恒为 0, 显然就有 f 恒为 0.

109. (109.) 由命题13.15知周期连续函数[107]必然一致连续. 若 f 不为常值函数, 设 $f(c)\neq f(0), c>0$ 且 f 周期为 $T>0$. 考虑

$$x_n=\sqrt{nT+c}, y_n=\sqrt{nT}, n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{\sqrt{nT+c}+\sqrt{nT}}=0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n^2\right)-f\left(y_n^2\right)\right)=\lim_{n\to\infty}(f(nT+c)-f(nT))=f(c)-f(0)\neq 0,$$

这就和 $f\left(x^2\right)$ 一致连续矛盾! 因此我们证明了 f 为常数.

110. (110.) 若存在严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 和 $c>0$ 使得 $|n_k!a_{n_k}|\geqslant c, k=1,2,\cdots$, 我们有

$$\left|a_{n_k}f^{(n_k)}(x)\right|\geqslant c\frac{\left|f^{(n_k)}(x)\right|}{n_k!}, k=1,2,\cdots.$$

于是可设

$$M\triangleq\sup_{k\geqslant 1,x\in[0,1]}\frac{\left|f^{(n_k)}(x)\right|}{n_k!}<\infty,$$

然后由 Taylor 中值定理得

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n_k-1}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j+\frac{f^{(n_k)}(\theta(x))}{n_k!}x^{n_k}=\frac{f^{(n_k)}(\theta(x))}{n_k!}x^{n_k},\forall x\in[0,1).$$

现在

$$0\leqslant|f(x)|\leqslant\lim_{k\to\infty}Mx^{n_k}=0,$$

即结合 f 连续性得 $f(x)=0,\forall x\in[0,1]$, 这就是一个矛盾! 因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n=0$.

111. (111.) 考虑

$$g(x,y)\triangleq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

注意到对两组序列

$$a_n<0<b_n, n=1,2,\cdots, \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0;$$

$$a_n'<0<b_n', n=1,2,\cdots, \lim_{n\to\infty}a_n'=\lim_{n\to\infty}b_n'=0,$$

总能合并成一组序列

$$a_1,a_1',a_2,a_2',\cdots,b_1,b_1',b_2,b_2',\cdots,$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}g(b_n,a_n)=\lim_{n\to\infty}g(b_n',a_n').$$

现在存在一个和数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 选取无关的实数 A 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}g(b_n,a_n)=A$, 即由二元函数的海涅准则得

$$\lim_{x\to0^-,y\to0^+}g(x,y)=A.$$

现在对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|g(x,y)-A|=\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-A\right|\leqslant\epsilon,\forall x\in(-\delta,0),y\in(0,\delta).$$

分别令 $x\to0^-,y\to0^+$ 可得

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}-A\right|\leqslant\epsilon,\forall t\in(-\delta,\delta),$$

即 $f'(0)=A$.

[107]你也可以视为紧集上的连续函数.

112. (112.) 设 $x_1<x_2<\cdots<x_k$ 是 f 的实根, 注意到

$$\left(e^xf\right)'=e^x\left(f+f'\right),\lim_{x\to-\infty}e^xf=0,$$

利用罗尔中值定理, 我们有 $f+f'$ 的 k 个实根分别落于区间

$$\left(-\infty,x_1\right),\left(x_1,x_2\right),\left(x_2,x_3\right),\cdots,\left(x_{k-1},x_k\right).$$

设 $a<b$, 是 $f+f'$ 的实根, 则必然不能是 f 的实根 (否则 f 将有重根), 现在必有

$$\frac{f'(a)}{f(a)}=\frac{f'(b)}{f(b)}=-1,\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{x-x_j}.$$

因为 $[\frac{f'(x)}{f(x)}]'=-\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{(x-x_j)^2}<0$, 因此必有 j, 使得 $a<x_j<b$, 我们将证明 $b-a\geqslant d(f)$.

反证, 若不然 $0<b-a<d(f)$, 则必有

$$x_{i+1}-x_i>b-a,(x_i-a)(x_{i+1}-b)>0,i=1,2,\cdots,k-1,$$

因此

$$\frac{1}{a-x_i}<\frac{1}{b-x_{i+1}},i=1,2,\cdots,k-1,$$

因此

$$\frac{f'(a)}{f(a)}=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{a-x_j}+\frac{1}{a-x_k}<\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{b-x_{j+1}}+\frac{1}{b-x_1}=\frac{f'(b)}{f(b)}.$$

这是一个矛盾, 我们完成了证明!

113. (113.) 我们证明存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $n\geqslant N$, 在 $\mathbb{C}$ 上 f_n 只有互不相同的实根, 显然对 $\deg f=0,1$ 时, 问题显然成立, 现在假定命题对 $\deg f=m-1,m\geqslant2$ 成立, 我们去证明命题对 $\deg f=m$ 成立.

不妨设 f 是首 1 的, 由于 $f'_{n+1}=f'_n+f''_n$, 和归纳假设, 不妨设 f'_n 有 $m-1$ 个不同的零点

$$x_{m-1}^{(n)}<x_{m-2}^{(n)}<\cdots<x_1^{(n)},\forall n\in\mathbb{N}.$$

因此当 j 为奇数, $x_j^{(n)}$ 是 f_n 的极小值点, 当 j 为偶数, $x_j^{(n)}$ 是 f_n 的极大值点, 我们只需说明当 n 充分大, f_n 在所有极大值点为正, 在所有极小值点为负, 看单调性和零点定理就能说明 f_n 有 m 个不同的实根.

再利用 $e^xf'_{n+1}=\left(e^xf'_n\right)'$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^xf'_n(x)=0$ 和罗尔中值定理以及 f'_{n+1} 有 $m-1$ 个零点知

$$x_1^{(n)}>x_1^{(n+1)}>x_2^{(n)}>x_2^{(n+1)}>x_3^{(n)}>\cdots>x_{m-1}^{(n)}>x_{m-1}^{(n+1)}.$$

现在我们来证明

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x_j^{(n)}\right)=+\infty, & j\text{为偶数}\\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x_j^{(n)}\right)=-\infty, & j\text{为奇数}\end{cases}\tag{30.199}$$

利用数学函数性态分析习题**??**, 我们有

$$d\triangleq\min\left\{d\left(f'\right),1\right\},d\left(f'_n\right)\geqslant d,\forall n\in\mathbb{N}.$$

为方便, 令 $x_m^{(n)}=-\infty$, 取 $\xi=x_j^{(n)}-\frac{d}{m}$, 因为 $x_{j+1}^{(n)}<\xi<x_j^{(n)}$, 则

$$\frac{f''_n(\xi)}{f'_n(\xi)}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{\xi-x_k^{(n)}}\leqslant\sum_{k=j+1}^{m-1}\frac{1}{\xi-x_k^{(n)}}+\frac{1}{\xi-x_j^{(n)}}\leqslant\frac{m-1}{\xi-\left(x_j^{(n)}-d\right)}+\frac{1}{\xi-x_j^{(n)}}=0.$$

又 f_n 在 $\left(x_{j+1}^{(n)},x_j^{(n)}\right)$ 递增, 所以 $f'_n(\xi)>0,f''_n(\xi)\leqslant0$, 由 $\frac{f''_n}{f'_n}$ 递减, 我们知道 $f_n(x)$ 在 $\left[\xi,x_j^{(n)}\right]$ 邻域内上凸, 因此

$$f_n(\xi)\geqslant f_n\left(x_j^{(n)}\right)+f'_n(\xi)\left(\xi-x_j^{(n)}\right).$$

又

$$\xi-x_{j+1}^{(n)}=x_j^{(n)}-\frac{d}{m}-x_{j+1}^{(n)}\geqslant\left(1-\frac{1}{m}\right)d\geqslant\frac{d}{m}=x_j^{(n)}-\xi,$$

$$f_n'(\xi)=m\prod_{k=1}^{m-1}\left|\xi-x_k^{(n)}\right|\geqslant m\prod_{k=1}^{m-1}\left|\xi-x_j^{(n)}\right|\geqslant\frac{d^{m-1}}{m^{m-2}},$$

这给出了

$$f_n'(\xi)+f_n(\xi)\geqslant f_n\left(x_j^{(n)}\right)+f_n'(\xi)\left(1-\frac{d}{m}\right)\geqslant f_n\left(x_j^{(n)}\right)+\frac{(m-1)\,d^{m-1}}{m^{m-1}},$$

因此

$$f_{n+1}\left(x_j^{(n+1)}\right)\geqslant f_{n+1}(\xi)\geqslant f_n\left(x_j^{(n)}\right)+\frac{(m-1)\,d^{m-1}}{m^{m-1}}.$$

类似地考虑 j 为奇数, 我们知道(30.199)成立.

我们完成了证明.

114. (114.) 由条件得

$$\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x=1,n=1,2,\cdots.$$

由黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x=0,$$

这就是一个矛盾!, 因此这样的函数并不存在.

$*$ 我们想探索更多的, 即如果 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ 满足

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=g(0),\forall g\in C_c^\infty(0,1).$$

现在对任何 $[a,b]\subset(0,1)$, 我们有

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=g(0),\forall g\in C_c^\infty(a,b).$$

因为 $f\in L^1[a,b]$, 所以逼近方法告诉我们

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall g\in C[a,b].$$

因此可以取 $g(x)=\cos(n\pi x)$ 同样导出 f 不存在.

115. (115.) 由 a_n 非负递减性, 显然

$$\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\geqslant 0,\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\leqslant 0,\forall n\geqslant 2.$$

当 $n=1$, 不等式(13.295)显然成立. 假设(13.295)对 $n-1$ 成立, 当 n 时, 设

$$g(x)\triangleq f\left(x+\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\right)-f(x)-\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}f(a_k),$$

则

$$g'(x)=f'\left(x+\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\right)-f'(x)\leqslant 0,\forall x\in\left[-\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k,+\infty\right).$$

现在有

$$g(a_1)\leqslant g\left(-\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\right)\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\right)-f(a_1)\leqslant f(0)-f\left(-\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\right),$$

即

$$f\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\right)\leqslant f(a_1)-f\left(-\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\right).$$

结合归纳假设有

$$f\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\right)\leqslant f(a_1)-f\left(-\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}a_k\right)\leqslant f(a_1)+\sum_{k=2}^n(-1)^{k+1}f(a_k)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}f(a_k),$$

这就由数学归纳法证明了(13.295)对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立.

116. (116.)

Step 1 如果 f 在 x_0 可微, 不妨设 $x_0 = 0$, 则对任何 $a \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+a)-f(h)-f(a)+f(0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h},$$

即 $f'(a)$ 存在.

下面假设要证的不对, 即 f 处处导数不存在.

Step 2

考虑 Dini 导数

$$D^+ f(x) \triangleq \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$
$$D_+ f(x) \triangleq \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$
$$D_- f(x) \triangleq \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$
$$D^- f(x) \triangleq \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

考虑

$$a < b, g(x) \triangleq f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),$$

我们知道

$$g(a) = g(b) = 0, g \in C(\mathbb{R}).$$

因为 g 处处不可导, 可不妨设 $x_0 \in (a,b)$ 是 g 最值点.

若 x_0 是 g 最大值点, 则

$$D^+ g(x_0) \leqslant 0 \leqslant D_- g(x_0),$$

即

$$D^+ f(x_0) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant D_- f(x_0).$$

相似 **Step 1** 的证明我们有

$$D^+ f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant D_- f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

类似的若 x_0 是 g 最小值点, 则

$$D_+ f(x) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant D^- f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Step 3

如果 f 是 $\mathbb{R}$ 上凸或者下凸函数, 由凸函数几乎处处可微, 即定理13.3可知 f 必有可微点, 从而矛盾!.

如果 f 不是 $\mathbb{R}$ 上凸或者下凸函数, 则由例13.2知 f 既会有在割线上方, 也会有在割线下方的部分, 所以结合 **Step 2** 知 f 的四个 Dini 导数都相等, 因此我们证明了 f 处处可微.

117. (117.) 我们直接计算有

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -u_t^2(2-t,t) - u_x^2(2-t,t) - u_t^2(t,t) - u_x^2(t,t) + 2\int_t^{2-t} (u_t u_{tt} + u_x u_{xt})\,\mathrm{d}x \\
&= -u_t^2(2-t,t) - u_x^2(2-t,t) - u_t^2(t,t) - u_x^2(t,t) + 2\int_t^{2-t} (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{分部积分}}{=} -u_t^2(2-t,t) - u_x^2(2-t,t) - u_t^2(t,t) - u_x^2(t,t) + 2u_t u_x|_{x=t}^{x=2-t} - 2\int_t^{2-t} (u_{xt}u_x)\,\mathrm{d}x + 2\int_t^{2-t} (u_x u_{xt})\,\mathrm{d}x \\
&= -u_t^2(2-t,t) - u_x^2(2-t,t) - u_t^2(t,t) - u_x^2(t,t) + 2u_t(2-t,t)\,u_x(2-t,t) - 2u_t(t,t)\,u_x(t,t) \\
&= -[u_t(2-t,t) - u_x(2-t,t)]^2 - [u_t(t,t) + u_x(t,t)]^2 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

118. (118.)

(a). 对区间 $I\subset(-1,1)$, $x\in I_1, y\in I_3$, 则 $|y-x|\geqslant\mu$, 对 $k\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{\left|f^{(k-1)}(y)\right|+\left|f^{(k-1)}(x)\right|}{\mu}\geqslant\left|\frac{f^{(k-1)}(y)-f^{(k-1)}(x)}{y-x}\right|\geqslant m_k(I).$$

由 x,y 任意性得

$$m_k(I)\leqslant\frac{1}{\mu}\left(m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)\right),k=1,2,\cdots,n.$$

(b). 我们归纳证明 $m_k(I)\leqslant\frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k}{\lambda^k}$. $k=0$ 显然成立, 假设对 $k-1$ 成立, 当 k 时, 取

$$|I_1|=|I_3|=\frac{k-1}{2k}\lambda.$$

如上把区间 I 分成 3 份之后运用归纳假设, 我们由归纳假设和第 1 问有

$$m_k(I)\leqslant\frac{m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)}{|I_2|}\leqslant\frac{\frac{2^{\frac{k(k-1)}{2}}(k-1)^{k-1}}{|I_1|^{k-1}}+\frac{2^{\frac{k(k-1)}{2}}(k-1)^{k-1}}{|I_3|^{k-1}}}{|I|-|I_1|-|I_3|}=\frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k}{\lambda^k},$$

这就证明了第 2 问.

(c). **Step 1** 由例题70.我们知道对 $k=0,1,2,\cdots,n,(a,b)\subset(-1,1)$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\left|f^{(k)}(\xi)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{k}C_k^i\cdot\left(\frac{k}{b-a}\right)^k=\frac{2^kk^k}{(b-a)^k}.$$

Step 2 取

$$a_k\in\left(\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}\right),b_k\in\left(-\frac{k}{2n},-\frac{k-1}{2n}\right),k=1,2,\cdots,n$$

使得

$$\left|f^{(k)}(a_k)\right|,\left|f^{(k)}(b_k)\right|\leqslant(2n)^k2^kk^k\leqslant(2n)^n2^nn^n=\left(4n^2\right)^n.$$

取定

$$\alpha_n\triangleq\left(8n^2\right)^n,n\in\mathbb{N}.$$

我们证明当 $|f'(0)|\geqslant\alpha_n$ 时 $f^{(n)}$ 有 $n-1$ 个根. 不失一般性, 设 $f'(0)\geqslant\alpha_n$.

Step 3 我们归纳证明对每一个 $k=1,2,\cdots,n$, 存在

$$b_k=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}<\cdots<x_k^{(k)}<x_{k+1}^{(k)}=a_k$$

使得

$$\begin{cases}f^{(k)}\left(x_j^{(k)}\right)\geqslant2^{n+1-k}\left(4n^2\right)^n, & 1\leqslant j\leqslant k\text{为奇数};\\ f^{(k)}\left(x_j^{(k)}\right)\leqslant-2^{n+1-k}\left(4n^2\right)^n, & 1\leqslant j\leqslant k\text{为偶数}.\end{cases}$$

当 $k=1$ 可取 $x_1^{(1)}=0$. 假设 k 时成立, 当 $k+1$ 时, 我们由拉格朗日中值定理可得

$$x_i^{(k+1)}\in\left(x_{i-1}^{(k)},x_i^{(k)}\right),i=1,2,\cdots,k+1$$

使得

$$f^{(k+1)}\left(x_i^{(k+1)}\right)=\frac{f^{(k)}\left(x_i^{(k)}\right)-f^{(k)}\left(x_{i-1}^{(k)}\right)}{x_i^{(k)}-x_{i-1}^{(k)}}.$$

由

$$0\leqslant a_k-b_k\leqslant\frac{k}{n}\leqslant1\Rightarrow0\leqslant x_i^{(k)}-x_{i-1}^{(k)}\leqslant1,i=1,2,\cdots,k+1,$$

我们有

$$\begin{cases}f^{(k+1)}\left(x_i^{(k+1)}\right)\geqslant\frac{2^{n+1-k}\left(4n^2\right)^n-\left(4n^2\right)^n}{1}\geqslant2^{n-k}\left(4n^2\right)^k, & 1\leqslant i\leqslant k+1\text{为奇数};\\ f^{(k+1)}\left(x_i^{(k+1)}\right)\leqslant\frac{-2^{n+1-k}\left(4n^2\right)^n+\left(4n^2\right)^n}{1}\leqslant-2^{n-k}\left(4n^2\right)^k, & 1\leqslant i\leqslant k+1\text{为偶数}.\end{cases}$$

于是我们就归纳完成了证明.

Step 4 当 $k=n$, 我们由 **Step 3** 得

$$-\frac{1}{2}<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}<\frac{1}{2}$$

使得

$$f^{(n)}\left(x_j^{(n)}\right)f^{(n)}\left(x_{j+1}^{(n)}\right)<0, j=1,2,\cdots,n-1,$$

从而 $f^{(n)}(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 至少有 $n-1$ 个不同的根.

119. (119.) 取 $Y>0$ 使得

$$\int_{|y|\geqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{\epsilon}{4}.$$

因为

$$\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1,$$

存在 $C>1,\delta>0$ 使得

$$|e^z-1|\leqslant C|z|,\forall|z|\leqslant\delta.$$

于是当

$$|x_1-x_2|\leqslant\min\left\{\frac{\epsilon}{4\pi CY\int_{|y|\leqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y},\frac{\delta}{2\pi Y}\right\},$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\hat{\phi}(x_1)-\hat{\phi}(x_2)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi\sqrt{-1}x_1\cdot y}\phi(y)-e^{-2\pi\sqrt{-1}x_2\cdot y}\phi(y)\,\mathrm{d}y\right|\\
&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-2\pi\sqrt{-1}x_1\cdot y}-e^{-2\pi\sqrt{-1}x_2\cdot y}\right|\cdot|\phi(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_{|y|\leqslant Y}\left|e^{-2\pi\sqrt{-1}x_1\cdot y}-e^{-2\pi\sqrt{-1}x_2\cdot y}\right|\cdot|\phi(y)|\,\mathrm{d}y+2\int_{|y|\geqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{|y|\leqslant Y}\left|e^{-2\pi\sqrt{-1}(x_1-x_2)\cdot y}-1\right|\cdot|\phi(y)|\,\mathrm{d}y+2\int_{|y|\geqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant2\pi C\int_{|y|\leqslant Y}|(x_1-x_2)\cdot y|\cdot|\phi(y)|\,\mathrm{d}y+2\int_{|y|\geqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant2\pi CY\frac{\epsilon}{4\pi CY\int_{|y|\leqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y}\int_{|y|\leqslant Y}|\phi(y)|\,\mathrm{d}y+2\cdot\frac{\epsilon}{4}\\
&=\epsilon.
\end{aligned}$$

现在我们知道 $\hat{\phi}$ 一致连续.

对每一个

$$k\in\mathbb{N},x_1,x_2,\cdots,x_k\in\mathbb{R}^n,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k\in\mathbb{C},$$

我们都有

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i,j\leqslant k}\hat{\phi}(x_i-x_j)\xi_i\overline{\xi_j}=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant k}\xi_i\overline{\xi_j}e^{-2\pi\sqrt{-1}(x_i-x_j)\cdot y}\phi(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\xi_ie^{-2\pi\sqrt{-1}x_i\cdot y}\right)\cdot\overline{\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\xi_ie^{-2\pi\sqrt{-1}x_i\cdot y}}\cdot\phi(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\xi_ie^{-2\pi\sqrt{-1}x_i\cdot y}\right|^2\cdot\phi(y)\,\mathrm{d}y\geqslant0.
\end{aligned}$$

现在我们知道 $\hat{\phi}$ 正定.

120. (120.) 必要性:

若 f 连续, 则 f 一致连续. 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\epsilon,\forall x,y\in[0,1],|x-y|\leqslant\delta.$$

因为 Φ 正规, 对任何 $a\in C$, 存在自然数 N, 使得若数列 $b\in C$ 满足 a,b 前 N 个分量相同, 则

$$|\Phi(a)-\Phi(b)|\leqslant\delta.$$

现在对 $a\in C$, 数列 $b\in C$ 满足 a,b 前 N 个分量相同, 则

$$|f\circ\Phi(a)-f\circ\Phi(b)|\leqslant\epsilon,$$

因此 $f\circ\Phi$ 正规.

充分性:

若 $x_n\in[0,1]$ 收敛于 $x\in[0,1]$, 我们取

$$\Phi(a)=\begin{cases}0, & a=\left(0,\underbrace{\cdots}_{\text{随意}}\right)\\ x, & a=(1,1,\cdots)\\ x_n, & a=\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n\text{个}},0,\underbrace{\cdots}_{\text{随意}}\right)\end{cases},$$

这里第一种情况可视为 $n=0$.

我们先断言 Φ 正规. 事实上对 $\epsilon>0$, $\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n\text{个}},0,\underbrace{\cdots}_{\text{随意}}\right),n\geqslant0$, 取 $N=n+1$, 则对和 a 前 $n+1$ 个分量相同的 $b\in C$, 我们有

$$|\Phi(a)-\Phi(b)|=0<\epsilon.$$

对 $a=(1,1,\cdots)$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 取自然数 N 使得

$$|x_n-x|\leqslant\epsilon,\forall n\geqslant N.$$

于是对和 a 前 N 个分量相同的 $b\in C$, 我们有

$$|\Phi(a)-\Phi(b)|=\begin{cases}0, & b=(1,1,\cdots)\\ |x_n-x|, & b=\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n\text{个}},0,\underbrace{\cdots}_{\text{随意}}\right),n\geqslant N\end{cases}\leqslant\epsilon.$$

因此 Φ 正规, 从而 $f\circ\Phi$ 正规.

对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何和 $a=(1,1,\cdots)$ 前 N 个分量相等的 b 都有

$$|f\circ\Phi(b)-f\circ\Phi(a)|\leqslant\epsilon.$$

取

$$b=\left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n\text{个}},0,\underbrace{\cdots}_{\text{随意}}\right),n\geqslant N,$$

我们有

$$|f\circ\Phi(b)-f\circ\Phi(a)|=|f(x_n)-f(x)|\leqslant\epsilon,\forall n\geqslant N,$$

因此我们证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$, 从而由海涅准则得 f 在 x 连续. 自然 $f\in C[0,1]$.

121. (121.) 取定 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 考虑微分方程

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}.$$

由解的存在唯一性定理, 存在 $\delta>0$ 和 $y\in C^1\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ 使得

$$y'\left(x\right)=f\left(x,y\left(x\right)\right),y\left(x_0\right)=y_0. \tag{30.200}$$

现在由(30.200)得

$$y''\left(x\right)=\frac{\partial f\left(x,y\left(x\right)\right)}{\partial x}+y'\left(x\right)\frac{\partial f\left(x,y\left(x\right)\right)}{\partial y}=0,$$

即

$$y\left(x\right)=f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0,\forall x\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right).$$

由解的延拓定理和直线在任何闭区间有界, 我们知道解 y 可以延拓到 $y\in C^1\left(\mathbb{R}\right)$, 从而

$$y\left(x\right)=f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

于是由(30.200)得

$$f\left(x_0,y_0\right)=f\left(x,f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

现在若存在 $\left(x_1,y_1\right)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $f\left(x_0,y_0\right)\neq f\left(x_1,y_1\right)$, 则设

$$f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0=f\left(x_1,y_1\right)\left(x-x_1\right)+y_1$$

的解为 x_2. 现在我们有

$$f\left(x_0,y_0\right)=f\left(x_2,f\left(x_0,y_0\right)\left(x_2-x_0\right)+y_0\right)=f\left(x_1,y_1\right),$$

这就是一个矛盾! 因此我们证明了 f 是常值函数.

122. (122.) 考虑

$$f\left(x\right)\triangleq\frac{ad\left(x,B\right)+bd\left(x,A\right)}{d\left(x,A\right)+d\left(x,B\right)}.$$

我们有

$$a=\frac{ad\left(x,B\right)+ad\left(x,A\right)}{d\left(x,A\right)+d\left(x,B\right)}\leqslant f\left(x\right)\leqslant\frac{bd\left(x,B\right)+bd\left(x,A\right)}{d\left(x,A\right)+d\left(x,B\right)}=b.$$

又

$$d\left(x,A\right)+d\left(x,B\right)=0\Leftrightarrow x\in A\bigcap B=\emptyset,$$

我们有 $f\in C\left(X\right)$. 显然 $f\left(A\right)=\left\{a\right\},f\left(B\right)=\left\{b\right\}$.

123. (123.) 首先由定理13.3得

$$f'_-\left(x\right)\leqslant f'_+\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

由条件不等式得

$$f'_+\left(x\right)-f'_-\left(x\right)=\lim_{y\to0^+}\left(\frac{f\left(x+y\right)-f\left(x\right)}{y}-\frac{f\left(x\right)-f\left(x-y\right)}{y}\right)\leqslant\lim_{y\to0^+}y=0.$$

现在我们有 $f\in D^1\left(\mathbb{R}\right)$.

考虑连续函数

$$g\left(x\right)\triangleq f\left(x\right)-\frac{x^2}{2}.$$

由条件不等式我们有

$$g\left(x+y\right)+g\left(x-y\right)\leqslant2g\left(x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

现在 g 连续 Jensen 上凸, 因此上凸, 故 g' 递减. 现在

$$f'\left(x\right)-x\geqslant f'\left(y\right)-y,\forall y\geqslant x.$$

因为 f 下凸, 于是

$$f'\left(y\right)\geqslant f'\left(x\right),\forall y\geqslant x.$$

综合上面的不等式得

$$|f'(y)-f'(x)|\leqslant|y-x|,\forall y\geqslant x.$$

由对称性得

$$|f'(y)-f'(x)|\leqslant|y-x|,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

124. (124.) 设

$$L\triangleq\sup_{t\in I}|g(t)|<\infty.$$

对 $x_1,x_2,t\in I$, 我们有

$$\begin{aligned}f(t)+x_1g(t)&=f(t)+x_2g(t)+(x_1-x_2)g(t)\\&\leqslant f(t)+x_2g(t)+L|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

两边对 $t\in I$ 取上确界得

$$h(x_1)\leqslant h(x_2)+L|x_1-x_2|.$$

交换 x_1,x_2 得

$$h(x_2)\leqslant h(x_1)+L|x_1-x_2|,$$

即

$$|h(x_1)-h(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|.$$

125. (125.) 设

$$M\triangleq\max\{\sup|f|,\sup|g|\}+1>0.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$, 我们知道存在 $\eta>0$ 使得

$$|\sin x-x|\leqslant|x|^3,\forall|x|\leqslant\eta.$$

对任何 $\epsilon>0$, 因为 fg 黎曼可积, 所以存在 $\delta'>0$, 使得 $||P||<\delta'$ 时有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)g(x_k)\Delta x_k-\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

取

$$\delta=\min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{2M^4(b-a)}},\delta'\right\}>0,$$

然后当 $||P||<\delta$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\sin[g(x_k)\Delta x_k]-\sum_{k=1}^{n}f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}[|f(x_k)|\cdot|\sin[g(x_k)\Delta x_k]-g(x_k)\Delta x_k|]\\&\leqslant M\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)|^3\cdot|\Delta x_k|^3\leqslant M^4\frac{\epsilon}{2M^4(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

即由三角不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\sin[g(x_k)\Delta x_k]-\int_a^bf(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

126. (126.) 为了和现有的理论匹配, 我们将和式改为左端点, 即

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x_i-I\right|<\epsilon.$$

这是不失一般性的, 因为你可以考虑 $f(-x)$.

对 $\epsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使得当划分 $||P||<\delta$ 成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x_i - I\right| < \frac{\epsilon}{10}.$$

然后取正整数 $N>\max\left\{\frac{5(b-a)\sup|f|}{\epsilon}, \frac{1}{\delta}\right\}$, 然后考虑拆分

$$P_0 : x_k^0 = a + (b-a)\frac{k}{2N}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2N.$$

对任何 $t_i \in \left[x_{i-1}^0, x_i^0\right], i = 1, 2, \cdots, 2N$, 考虑子拆分

$$\begin{aligned} P_1 :& x_0^0, t_1, t_2, x_2^0, t_3, t_4, x_4^0, \cdots, x_{2N}^0; \\ P_2 :& x_0^0, t_1, \quad x_2^0, t_3, \quad x_4^0, \cdots, x_{2N}^0, \end{aligned}$$

我们有 $||P_1||<\delta, ||P_2||<\delta$, 从而考虑 P_1, P_2 对应和式之差得

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left[f\left(t_{2i-1}\right)-f\left(t_{2i}\right)\right]\left(x_{2i}^0 - t_{2i}\right)\right| < \frac{2\epsilon}{10}. \tag{30.201}$$

相似的, 考虑拆分

$$\begin{aligned} P_3 :& x_0^0, x_1^0, t_2, t_3, x_3^0, t_4, t_5, x_5^0, \cdots, x_{2N-1}^0, x_{2N}^0; \\ P_4 :& x_0^0, x_1^0, t_2, \quad , x_3^0, t_4, \quad , x_5^0, \cdots, x_{2N-1}^0, x_{2N}^0, \end{aligned}$$

我们有 $||P_3||<\delta, ||P_4||<\delta$, 从而考虑 P_3, P_4 对应和式之差得

$$\left|\sum_{i=1}^{N-1}\left[f\left(t_{2i}\right)-f\left(t_{2i+1}\right)\right]\left(x_{2i+1}^0 - t_{2i+1}\right)\right| < \frac{2\epsilon}{10}. \tag{30.202}$$

相加(30.201)和(30.202)得

$$\left|\sum_{i=2}^{2N}\left[f\left(t_{i-1}\right)-f\left(t_i\right)\right]\left(x_i^0 - t_i\right)\right| < \frac{4\epsilon}{10}. \tag{30.203}$$

考虑拆分

$$P_5 : x_0^0, t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{2N}, x_{2N}^0,$$

于是由 $||P_5||<\delta$, 我们有

$$\left|f\left(x_0^0\right)\left(t_1 - x_0^0\right) + \sum_{i=1}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(t_{i+1} - t_i\right) + f\left(t_{2N}\right)\left(x_{2N}^0 - t_{2N}\right) - I\right| < \frac{\epsilon}{10}. \tag{30.204}$$

把(30.203)写做

$$\left|\sum_{i=1}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0 - t_{i+1}\right) - \sum_{i=2}^{2N} f\left(t_i\right)\left(x_i^0 - t_i\right)\right| < \frac{4\epsilon}{10}$$

并和(30.204)相加, 注意到

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0 - t_{i+1}\right) - \sum_{i=2}^{2N} f\left(t_i\right)\left(x_i^0 - t_i\right) \\ &+ f\left(x_0^0\right)\left(t_1 - x_0^0\right) + \sum_{i=1}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(t_{i+1} - t_i\right) + f\left(t_{2N}\right)\left(x_{2N}^0 - t_{2N}\right) - I \\ &= \sum_{i=1}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0 - t_i\right) - \sum_{i=1}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_i^0 - t_i\right) + f\left(t_1\right)\left(x_1^0 - t_1\right) + f\left(x_0^0\right)\left(t_1 - x_0^0\right) - I \\ &= \sum_{i=2}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0 - x_i^0\right) + f\left(t_1\right)\left(x_2^0 - x_1^0\right) + f\left(t_1\right)\left(x_1^0 - t_1\right) + f\left(x_0^0\right)\left(t_1 - x_0^0\right) - I \\ &= \sum_{i=2}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0 - x_i^0\right) + f\left(t_1\right)\left(x_2^0 - t_1\right) + f\left(x_0^0\right)\left(t_1 - x_0^0\right) - I \end{aligned}$$

即

$$\left|\sum_{i=2}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0-x_i^0\right)+f\left(t_1\right)\left(x_2^0-t_1\right)+f\left(x_0^0\right)\left(t_1-x_0^0\right)-I\right|<\frac{5\epsilon}{10}.$$

现在

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=2}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_{i+1}^0-x_i^0\right)-I\right| &< \frac{5\epsilon}{10}+\left|f\left(t_1\right)\left(x_2^0-t_1\right)+f\left(x_0^0\right)\left(t_1-x_0^0\right)\right| \\ &\leqslant \frac{5\epsilon}{10}+\frac{3\left(b-a\right)\sup|f|}{2N}\leqslant\frac{5\epsilon}{10}+\frac{3\epsilon}{10}=\frac{8}{10}\epsilon.\end{aligned}$$

因为 $x_{i+1}^0-x_i^0=x_i^0-x_{i-1}^0$, 我们有

$$\left|\sum_{i=2}^{2N-1} f\left(t_i\right)\left(x_i^0-x_{i-1}^0\right)-I\right|<\frac{8\epsilon}{10},$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{2N} f\left(t_i\right)\left(x_i^0-x_{i-1}^0\right)-I\right| &< \frac{8\epsilon}{10}+\left|f\left(t_1\right)\left(x_1^0-x_{i-1}^0\right)\right|+\left|f\left(t_{2N}\right)\left(x_{2N}^0-x_{2N-1}^0\right)\right| \\ &\leqslant \frac{8\epsilon}{10}+\frac{\left(b-a\right)\sup|f|}{2N}+\frac{\left(b-a\right)\sup|f|}{2N}\leqslant\frac{8\epsilon}{10}+\frac{2\epsilon}{10}=\epsilon.\end{aligned}$$

由 t_i 的任意性可得

$$\left|\sum_{i=1}^{2N} w_i\left(f\right)\left(x_i^0-x_{i-1}^0\right)\right|<2\epsilon,$$

这里 $w_i\left(f\right)$ 表示 f 在 $\left[x_{i-1}^0,x_i^0\right]$ 振幅. 于是我们有 f 黎曼可积, 从而显然得 $I=\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

127. (127.)注[分析] 运用二阶构造类的想法, 即考虑 $y''+t^2y=0$ 的通解

$$y=c_1\sin\left(tx\right)+c_2\cos\left(tx\right).$$

于是

$$\left(\sin^2\left(tx\right)\left(\frac{y}{\sin\left(tx\right)}\right)'\right)'=0.$$

当 $c<\frac{\pi}{t}$, 我们注意到

$$\left(\sin^2\left(tx\right)\left(\frac{f\left(x\right)}{\sin\left(tx\right)}\right)'\right)'=\sin\left(tx\right)\left(f''\left(x\right)+t^2f\left(x\right)\right)\geqslant 0,\forall x\in\left(0,c\right).$$

于是

$$\sin^2\left(tx\right)\left(\frac{f\left(x\right)}{\sin\left(tx\right)}\right)'=f'\left(x\right)\sin\left(tx\right)+tf\left(x\right)\cos\left(tx\right)$$

在 $[0,c]$ 递增, 于是

$$f'\left(c\right)\sin\left(tc\right)\geqslant 0\Rightarrow f'\left(c\right)\geqslant 0.$$

结合

$$f'\left(c\right)=\lim_{x\to c^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(c\right)}{x-c}\leqslant 0,$$

我们有 $f'\left(c\right)=0$, 从而

$$\sin^2\left(tx\right)\left(\frac{f\left(x\right)}{\sin\left(tx\right)}\right)'=0,\forall x\in\left(0,c\right).$$

现在

$$\left(\frac{f\left(x\right)}{\sin\left(tx\right)}\right)'=0\Rightarrow f\left(x\right)=k\sin\left(tx\right),$$

因此我们要让 $f\left(c\right)=k\sin\left(tc\right)=0$, 这是不可能的.

当 $c=\frac{\pi}{t}$, $f(x)=\sin(tx)$ 为所求一满足条件的例子, 从而 c 最小值为 $\frac{\pi}{t}$.

128. (128.) 不妨设 $f\in C[a,b]$, 否则内闭的考虑即可. 用 $f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ 代替 f 可以不妨设 $f(a)=f(b)=0$.

若

$$f(x_0)=\max_{x\in[a,b]}f(x)>0,$$

则 $x_0\in(a,b)$. 取 $\epsilon>0$ 使得

$$f(x_0)+\epsilon(x_0-a)(x_0-b)>0.$$

考虑

$$f_\epsilon(x)\triangleq f(x)+\epsilon(x-a)(x-b).$$

取 $x_1\in(a,b)$ 使得

$$f_\epsilon(x_1)=\max_{x\in[a,b]}f_\epsilon(x)>0.$$

现在

$$0\geqslant\lim_{h\to0}\frac{1}{h^3}\left\{\int_0^h\left[f_\epsilon(x_1+u)+f_\epsilon(x_1-u)-2f_\epsilon(x_1)\right]\mathrm{d}u\right\}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{2}{3}\epsilon h^3}{h^3}=\frac{2}{3}\epsilon>0,$$

这就是一个矛盾! 因此我们有

$$\max_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant0.$$

考虑 $-f$, 我们有

$$\max_{x\in[a,b]}(-f(x))\leqslant0,$$

现在就有

$$f(x)=0,\forall x\in[a,b],$$

即所求函数 f 为线性函数.

129. (129.)**Case 1** 若 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$.

我们考虑

$$G(x)\triangleq\int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y,$$

则

$$G(x+1)-G(x)=\int_x^{x+1}g(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y=0,$$

即 G 是周期 1 函数. 现在

$$n\int_0^1 f(x)\,g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}G(nx)=-\int_0^1 f'(x)\,G(nx)\,\mathrm{d}x.$$

由黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\,g(nx)\,\mathrm{d}x\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\int_0^1 f'(x)\,G(nx)\,\mathrm{d}x\right]=0.$$

Case 2 若 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

定义

$$G(x)\triangleq\int_0^x\left(g(y)-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

我们有

$$\begin{aligned} G(x+1)-G(x) &= \int_0^{x+1}\left(g(y)-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\int_0^x\left(g(y)-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_x^{x+1} g(y)\,\mathrm{d}y-(x+1)\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x+x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0, \end{aligned}$$

即 G 是周期 1 函数. 现在利用 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 得

$$n\int_0^1 f(x)\,g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}G(nx)=-\int_0^1 f'(x)\,G(nx)\,\mathrm{d}x.$$

由黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_0^1 f(x)\,g(nx)\,\mathrm{d}x\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\int_0^1 f'(x)\,G(nx)\,\mathrm{d}x\right]=0.$$

130. (130.) 显然 f 是实解析函数. 由实解析函数零点孤立性19.7, 我们知道 f 在局部上和一个多项式相等, 因此整体上 f 也和这个多项式相等, 这就完成了证明.

131. (131.) 由命题极值至多可数13.5, 我们知道 f 的值域是至多可数集. 而连续函数把区间映射为区间或者一个点. 区间不是至多可数集知 f 值域是一个点, 因此 f 是常值函数.

132. (132.) 如果对任何 $n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}$ 都有 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$. 因为 f 非负递增, 所以 $f(x)=0,\forall x\leqslant 0$. 由 bernstein 定理19.8, 于是我们证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 实解析. 由实解析函数零点孤立性19.7我们知道 $f\equiv 0$, 这就和 $f(1)=1$ 矛盾!, 于是我们完成了证明.

133. (133.) 题目条件即 V 是完备的. 考虑恒等映射

$$i:V\to C[0,1].$$

为证明 i 是有界线性算子, 设

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0,\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)-g(x)|=0.$$

由闵可夫斯基不等式16.3得

$$0\leqslant\sqrt{\int_0^1|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\int_0^1|f(x)-f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_0^1|g(x)-f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x}\right]=0,$$

即 $f=g$. 现在我们使用闭图像定理得 $K>0$ 使得

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)|^2\leqslant K\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x,\forall f\in V.$$

设 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是 V 中的标准正交集, 于是对任何 $\sum_{i=1}^n c_i^2=1,x\in[0,1]$, 我们有

$$\left|\sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)\right|^2\leqslant K\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)\right|^2\mathrm{d}x=K\sum_{i=1}^n c_i^2=K.$$

取

$$c_i=\frac{\phi_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\phi_i^2(x)}},i=1,2,\cdots,n$$

得

$$\sum_{i=1}^n\phi_i^2(x)\leqslant K\Rightarrow n=\int_0^1\sum_{i=1}^n\phi_i^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 K\mathrm{d}x=K,$$

即 $n\leqslant K$. 因此我们知道 V 是有限维线性空间.

134. (134.)

(a). 设

$$F(x) \triangleq \frac{\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{x^{2C}}, x \in (0,1).$$

注意到

$$xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left|xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant C\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2,$$

我们有

$$F'(x) = 2\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - C\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{x^{2C+1}} \leqslant 0.$$

取正整数 $n > C$, 则由 Taylor 公式 Peano 余项得

$$f(x) = o(x^n), x \to 0^+,$$

因此

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}{x^{2C}} = \left[\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{Cx^{C-1}}\right]^2 = 0,$$

即 $F = 0$, 故 $f = 0$.

(b). 取

$$f(x) \triangleq \begin{cases} \frac{C}{x^{1+\delta}}e^{-\frac{C}{\delta x^\delta}}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

我们有

$$\left|x^{1+\delta}f(x)\right| = Ce^{-\frac{C}{\delta x^\delta}} = C\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|, \forall x \in (0,1).$$

因此不一定有 $f = 0$.

135. (135.) 注意到 f 在 $(0,+\infty)$ 严格递增, 因此 f 显然存在可微反函数且

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty.$$

对 $a \in [-1,1]$, 当 k 充分大, 断言

$$\lim_{k\to+\infty}\cos\left[f\left(\left\lfloor f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right\rfloor\right)\right] = a. \tag{30.205}$$

利用拉格朗日中值定理得

$$|\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to+\infty}\left|\cos\left[f\left(\left\lfloor f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right\rfloor\right)\right] - a\right| \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left|\cos\left[f\left(\left\lfloor f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right\rfloor\right)\right] - \cos\left[f\left(f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right)\right]\right| \\
&\leqslant \lim_{k\to+\infty}\left|f\left(\left\lfloor f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right\rfloor\right) - f\left(f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right)\right| \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\left|f'(\theta_k)\right| \cdot \left|\left\lfloor f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right\rfloor - f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right|\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自

$$\lim_{k\to+\infty} f'(\xi_k) = 0, \left|\left\lfloor f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right\rfloor - f^{-1}(\arccos a + 2k\pi)\right| \leqslant 1.$$

因此我们知道(30.205)成立, 于是 $\{\cos f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点集为 $[-1,1]$.

136. (136.) 设

$$g(x) \triangleq e^{-x}\left[f'(x) + f(x)\right], x \in \mathbb{R},$$

则

$$g'(x)=e^{-x}\left[f''(x)-f(x)\right]\geqslant 0.$$

现在

$$e^{-x}\left[f'(x)+f(x)\right]\leqslant e^{-x_0}\left[f'(x_0)+f(x_0)\right],\forall x\leqslant x_0,$$

即

$$\begin{aligned}e^{x_0}f(x_0)-e^{x}f(x)&=\int_x^{x_0}e^{y}\left[f'(y)+f(y)\right]\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_x^{x_0}e^{2y-x_0}\mathrm{d}y\cdot\left[f'(x_0)+f(x_0)\right]=\frac{1}{2}\left(e^{x_0}-e^{2x-x_0}\right)\cdot\left[f'(x_0)+f(x_0)\right].\end{aligned}$$

让 $x\to-\infty$ 得

$$e^{x_0}f(x_0)\leqslant\frac{1}{2}e^{x_0}\left[f(x_0)+f'(x_0)\right]\Rightarrow f'(x_0)\geqslant f(x_0).$$

由 x_0 任意性得证.

137. (137.) 注意到 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 一致连续, 所以对任何 $\epsilon\in(0,\pi)$, 存在 $\eta>0$ 使得

$$\left|\arcsin x-\arcsin y\right|<\epsilon,\forall\left|x-y\right|\leqslant\eta,x,y\in[-1,1].$$

因为 $\sin f$ 一致连续, 我们知道存在 $\delta>0$ 使得

$$\left|\sin f(x_2)-\sin f(x_1)\right|\leqslant\eta,\forall\left|x_2-x_1\right|\leqslant\delta.$$

现在为书写方便, 我们允许闭区间 $[a,b]$ 中 $b<a$, 此时表示 $[b,a]$.

对 $|x_2-x_1|\leqslant\delta$, 如果 $|f(x_2)-f(x_1)|\geqslant\pi$, 那么取整数

$$\begin{cases}n\in\left[\frac{1}{\pi}f(x_1)+\frac{1}{2},\frac{1}{\pi}f(x_2)-\frac{1}{2}\right], & f(x_2)>f(x_1);\\ n\in\left[\frac{1}{\pi}f(x_2)+\frac{1}{2},\frac{1}{\pi}f(x_1)-\frac{1}{2}\right], & f(x_1)\geqslant f(x_2),\end{cases}$$

则有

$$\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\subseteq\left[f(x_1),f(x_2)\right].$$

由连续函数介值定理知存在 $x_3,x_4\in[x_1,x_2]$ 使得

$$f(x_4)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,f(x_3)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,\left|x_4-x_3\right|\leqslant\delta.$$

现在

$$\left|\sin f(x_4)-\sin f(x_3)\right|\leqslant\eta,$$

于是

$$\pi=\left|\arcsin\sin f(x_4)-\arcsin\sin f(x_3)\right|\leqslant\epsilon<\pi,$$

这就是一个矛盾!, 即

$$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|<\pi.$$

现在存在整数 n 使得

$$\begin{cases}n\in\left[\frac{1}{\pi}f(x_2)-\frac{3}{2},\frac{1}{\pi}f(x_1)+\frac{1}{2}\right], & f(x_2)\geqslant f(x_1);\\ n\in\left[\frac{1}{\pi}f(x_1)-\frac{3}{2},\frac{1}{\pi}f(x_2)+\frac{1}{2}\right], & f(x_1)>f(x_2),\end{cases}$$

即

$$\left[f(x_1),f(x_2)\right]\subset\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right].$$

若 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 不介于 $f(x_1), f(x_2)$ 之间, 则

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-n\pi-[f(x_2)-n\pi]| \\ &= |\arcsin\sin f(x_1)-\arcsin\sin f(x_2)| \leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

若 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 介于 $f(x_1), f(x_2)$ 之间, 则

$$\left|x_1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right| \leqslant \delta, \left|x_2-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right| \leqslant \delta,$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-n\pi-[f(x_2)-n\pi]| \\ &= |\arcsin\sin f(x_1)-\arcsin\sin f(x_2)| \\ &\leqslant \left|\arcsin\sin f(x_1)-\arcsin\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right| \\ &\quad + \left|\arcsin\sin f(x_2)-\arcsin\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right| \\ &\leqslant \epsilon+\epsilon = 2\epsilon.\end{aligned}$$

现在我们知道 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

138. (138.) 由第一逼近定理设多项式序列 $q_n \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $q_n \rightrightarrows f$. 考虑多项式序列

$$p_n \triangleq q_n - \frac{1}{b-a}\int_a^b q_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned}|p_n(x)-f(x)| &= \left|q_n(x)-f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b [q_n(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant |q_n(x)-f(x)| + \frac{1}{b-a}\int_a^b |q_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\sup_{x\in[a,b]}|q_n(x)-f(x)|,\end{aligned}$$

即

$$\sup_{x\in[a,b]}|p_n(x)-f(x)| \leqslant 2\sup_{x\in[a,b]}|q_n(x)-f(x)|.$$

这就证明了

$$p_n \rightrightarrows f, \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

139. (139.) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有原函数 F. 由拉格朗日中值定理, 对 $x_n \downarrow 0$, 存在 $\xi_n \in (0, x_n)$ 使得

$$F(x_n)-F(0) = f(\xi_n)x_n \geqslant \frac{x_n}{\xi_n} > 1.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) \neq F(0),$$

即 F 在 $x=0$ 不连续, 矛盾!. 因此 f 原函数不存在.

140. (140.) 首先

$$\left[\frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}}\right]' = \frac{f'(x)-f^3(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)}\mathrm{d}y} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{\int_0^x f^2(y)\mathrm{d}y}} \geqslant \frac{f(0)}{e^{\int_0^0 f^2(y)\mathrm{d}y}} \geqslant 0,$$

即

$$f(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0.$$

设 $f(a) > 0, a \geqslant 0$, 我们考虑

$$A \triangleq \sup\{y > a : f(x) > 0, \forall x \in [a, y)\} \in (0, +\infty].$$

对 $x\in(a,A)$, 我们有

$$\left(x+\frac{1}{2f^2(x)}\right)'=1-\frac{f'(x)}{f^3(x)}\leqslant 0,$$

即

$$\lim_{x\to A}\left(x+\frac{1}{2f^2(x)}\right)\leqslant a+\frac{1}{2f^2(a)}<\infty.$$

若 $A<+\infty$, 则 $f(A)=0$, 从而

$$\lim_{x\to A}f(x)=f(A)=0\Rightarrow\lim_{x\to A^-}\frac{1}{f^2(x)}=+\infty,$$

这不可能!.

若 $A=+\infty$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,$$

这也不可能!.

至此我们证明了

$$f(x)=0,\forall x\geqslant 0.$$

141. (141.) 当 $f_1,f_2,\cdots,f_{n-1}\in C^2(\mathbb{R}^n)$, 用$\widehat{\ }$表示删去, 我们直接计算得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\mathbf{x})&\cdots&\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
=&\sum_{j=1}^n(-1)^{j+n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(\mathbf{x})\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
=&\sum_{j=1}^n(-1)^{j+n-1}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
=&(-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\mathbf{x})\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x})\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(\mathbf{x})&\cdots&\widehat{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x})}&\cdots&\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\mathrm{d}\mathbf{x}\\
\overset{\text{非数学类微分学计算习题22.}}{=}&0.
\end{aligned}$$

对于一般的 $f_1,f_2,\cdots,f_{n-1}\in C^1(\mathbb{R}^n)$, 设

$$\mathrm{supp}\phi\subset V\triangleq\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}<r\},$$

这里 $r>0$. 由逼近方法13.49我们知道存在 $f_i^{(m)}\in C^\infty\left(\overline{V}\right),i=1,2,\cdots,n-1$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}\int_V\left|\frac{\partial}{\partial x_j}f_i^{(m)}(\mathbf{x})-\frac{\partial}{\partial x_j}f_i(\mathbf{x})\right|\mathrm{d}\mathbf{x}=0,i=1,2,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,n,$$

这里

$$f_i^{(m)}(\mathbf{x}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f_i(\mathbf{y}) \chi_{\frac{1}{m}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

对 $\mathbf{x} \in \overline{V}, m \geqslant 1, k = 1, 2, \cdots, n, i = 1, 2, \cdots, n-1$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^{(m)}(\mathbf{x}) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_k} f_i(\mathbf{y}) \chi_{\frac{1}{m}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \right| \\ &\leqslant \sup_{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n} \leqslant r+1} |Df_i(\mathbf{y})| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\frac{1}{m}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} = \sup_{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n} \leqslant r+1} |Df_i(\mathbf{y})|. \end{aligned} \tag{30.206}$$

现在有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^{(m)}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1^{(m)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1^{(m)}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2^{(m)}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2^{(m)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2^{(m)}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}^{(m)}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^{(m)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}^{(m)}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}\mathbf{x} = 0, m = 1, 2, \cdots.$$

展开上述行列式的任意一项形如

$$\pm \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial f_1^{(m)}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial f_2^{(m)}}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}^{(m)}}{\partial x_{i_{n-1}}} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

容易证明[108]

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial f_1^{(m)}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial f_2^{(m)}}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}^{(m)}}{\partial x_{i_{n-1}}} \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{i_{n-1}}} \mathrm{d}\mathbf{x},$$

从而得(10.39)成立, 这就完成了证明.

142. (142.) 假如满足题目条件的 f 存在. 显然

$$f'(x) \geqslant |f(x)|^\alpha + \beta \geqslant \beta > 0, \forall x \geqslant x_0.$$

于是由结论12.1得 $f \uparrow +\infty$.

设 $f(x_1) > 0, x_1 > x_0$, 我们有

$$\int_{f(x_1)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha} = \int_{x_1}^{\infty} \frac{f'(t)}{f^\alpha(t)} \mathrm{d}t \geqslant \int_{x_1}^{\infty} 1 \mathrm{d}t = +\infty,$$

这就和 $\alpha > 1$ 矛盾!, 即满足题目条件的 f 不存在.

143. (143.) 注意到 DF 可逆给出开映射定理成立, 即 $F(\mathbb{R}^n)$ 是开集.

设 $\mathbf{x}_k, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$F(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{y}.$$

若 $\mathbf{x}_k$ 无界, 则有 $||\mathbf{x}_{k_i}|| \to +\infty$, 此时有

$$||F(\mathbf{x}_{k_i})|| \to +\infty,$$

这就是一个矛盾!.

现在我们知道存在 $\mathbf{x}_{k_i} \to \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 因此

$$F(\mathbf{x}_{k_i}) \to F(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

即 $F(\mathbb{R}^n)$ 是闭集.

由 $\mathbb{R}^n$ 连通性我们知道 $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

144. (144.) 由内闭一致收敛的性质我们知道 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

[108] 你可以用估计(30.206).

解 $n=1$ 时的微分方程得

$$\varphi(x)=ke^x, k\in\mathbb{R}.$$

145. (145.) 断言

$$f(x)=\sqrt{1+2x}-1$$

为所求.

首先直接计算得

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+f(t)}\mathrm{d}t, \forall x\in[0,1].$$

然后我们归纳有

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x)-f(x)| &\leqslant \int_0^x \left|\frac{1}{1+f_n(t)}-\frac{1}{1+f(t)}\right|\mathrm{d}t\\ &=\int_0^x \frac{|f_n(t)-f(t)|}{(1+f_n(t))(1+f(t))}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

记

$$M\triangleq \max_{x\in[0,1]}|f_0(x)-f(x)|,$$

我们有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant \frac{M}{n!}x^n\leqslant \frac{M}{n!}, \forall n\in\mathbb{N}, x\in[0,1],$$

因此 f_n 关于 $x\in[0,1]$ 一致收敛到

$$f(x)=\sqrt{1+2x}-1.$$

146. (146.) 由黎曼引理9.2得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sin(nx))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=0.$$

对非 0 的 $n\in\mathbb{Z}$, 我们有

$$0=\int_0^1 f(\sin(nx))\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^n f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

记

$$F(x)\triangleq\int_0^x f(\sin y)\,\mathrm{d}y,$$

我们有 F 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 且在所有整数点为 0 的连续函数. 于是

$$F(n+2\pi k)=0, \forall n,k\in\mathbb{Z}.$$

因为 2π 是无理数, 所以由命题9.9知 $n+2\pi k$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密. 至此我们证明了 $F\equiv 0$, 从而 $f\equiv 0$.

147. (147.) 不妨设 f 单调递减. 我们可以定义

$$f(x)\triangleq f(1), x\in(1,+\infty)$$

使得 f 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

首先

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\leqslant\frac{f(\epsilon_n)}{n}\leqslant\frac{f\left(\frac{\theta}{n}\right)}{n}=\frac{1}{\theta}\frac{f\left(\frac{\theta}{n}\right)}{\frac{n}{\theta}}.$$

我们断言

$$\lim_{x\to0^+}xf(x)=0.$$

注意到

$$0=\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x} f(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\lim_{x\to0^+}xf(x)\leqslant 2\lim_{x\to0^+}\int_{\frac{x}{2}}^x f(y)\,\mathrm{d}y=0,$$

从而

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(\epsilon_n)=0.$$

一方面我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\epsilon_n+\frac{i}{n}\right)\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)+\frac{f(\epsilon_n)}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f\left(\frac{i}{n}\right)\mathrm{d}x\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另外一方面我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\epsilon_n+\frac{i}{n}\right)\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}f\left(\frac{i+1}{n}\right)\mathrm{d}x\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\epsilon_n+\frac{i}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

148. (148.) 不失一般性, 假设 $K\neq\emptyset$. 当 $y\geqslant x$ 得

$$|f(y)-f(x)|=\left|K\bigcap(x,y]\right|\leqslant|y-x|.$$

显然 f 递增.

按定义和 f 连续性有

$$f(x)=|K|,x\geqslant\sup K,f(x)=0,x\leqslant\inf K,$$

于是结合 f 有介值性我们有

$$f(\mathbb{R})=[0,|K|].$$

设 $y\in(0,|K|)$ 但是不存在 $x\in K$ 使得 $f(x)=y$. 但是由介值性得 $x_0\in[\inf K,\sup K]\setminus K$ 使得 $f(x_0)=y$. 我们不妨设

$$x_0\triangleq\sup\{x\in[\inf K,\sup K]:f(x)=y\}\notin K.$$

注意到 $[\inf K,\sup K]\setminus K$ 是开集, 从而是可数个不交开区间的并. 现在 x_0 落在某个构成区间内, 但是在 x_0 右邻域内仍然有 $f(x)=y$, 这就和 x_0 的 sup 性矛盾!, 至此我们证明了 $f(K)=[0,|K|]$.

149. (149.) 将不等式

$$\begin{aligned}&|f(x+y)-f(x)-g(y)|\leqslant M;\\&|f(x+y+z)-f(x+y)-g(z)|\leqslant M;\\&|f(x+y+z)-f(x)-g(y+z)|\leqslant M,\end{aligned}$$

相加得

$$|g(y+z)-g(y)-g(z)|\leqslant 3M,\forall y,z\in\mathbb{R}.$$

于是我们有

$$\left|\frac{g\left(2^{k+1}x\right)}{2^{k+1}}-\frac{g\left(2^kx\right)}{2^k}\right|\leqslant\frac{3M}{2^{k+1}},k=0,1,2,\cdots.$$

现在

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{g\left(2^{k+1}x\right)}{2^{k+1}}-\frac{g\left(2^{k}x\right)}{2^{k}}\right|<\infty,$$

从而设

$$H\left(x\right)\triangleq\lim_{k\to+\infty}\frac{g\left(2^{k}x\right)}{2^{k}},x\in\mathbb{R}. \tag{30.207}$$

注意到

$$0\leqslant\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{g\left(2^{k}\left(x+y\right)\right)}{2^{k}}-\frac{g\left(2^{k}x\right)}{2^{k}}-\frac{g\left(2^{k}y\right)}{2^{k}}\right|\leqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{3M}{2^{k}}=0,$$

因此 H 满足 Cauchy 方程

$$H\left(x+y\right)=H\left(x\right)+H\left(y\right).$$

又

$$0\leqslant\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{f\left(x+2^{k}y\right)}{2^{k}}-\frac{f\left(x\right)}{2^{k}}-\frac{g\left(2^{k}y\right)}{2^{k}}\right|\leqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{M}{2^{k}}=0,$$

我们有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f\left(x+2^{k}y\right)}{2^{k}}=H\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

又

$$\left|\frac{f\left(x+2^{k}y\right)-f\left(x\right)}{2^{k}}-g\left(y\right)\right|=\left|\frac{1}{2^{k}}\sum_{j=0}^{2^{k}-1}\left[f\left(x+\left(j+1\right)y\right)-f\left(x+jy\right)-g\left(y\right)\right]\right|\leqslant\frac{1}{2^{k}}\sum_{j=0}^{2^{k}-1}M\leqslant M,$$

于是令 $k\to+\infty$ 得

$$\left|H\left(y\right)-g\left(y\right)\right|\leqslant M,\forall y\in\mathbb{R}.$$

我们完成了证明.

注 从证明中可以看到, 式(30.207)是一致收敛, 因此如果 $g\in C\left(\mathbb{R}\right)$, 那么 $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$. 从而由 Cauchy 方程的解的结果12.8知 $H(x)=ax$.

150. (150.) 由凹凸性和割线斜率的关系13.3以及下凸函数必有递增的左 (右) 导数13.3. 实际上我们只需证明 f 有递增左 (右) 导数时 f 是下凸函数.

不妨设 f 有递增右导数, 对 $a<x<y<z<b$, 考虑

$$g\left(w\right)\triangleq f\left(w\right)-f\left(y\right)-f'_{+}\left(y\right)\left(w-y\right),$$

于是

$$g'_{+}\left(w\right)=f'_{+}\left(w\right)-f'_{+}\left(y\right)\begin{cases}\geqslant0, & w\geqslant y\\ \leqslant0, & w\leqslant y\end{cases}.$$

由定理13.42知 g 在 $[y,b)$ 递增, 在 $(a,y]$ 递减. 因此

$$g\left(z\right)\geqslant g\left(y\right)=0,g\left(x\right)\geqslant g\left(y\right)=0,$$

这就是

$$\frac{f\left(y\right)-f\left(x\right)}{y-x}\leqslant f'_{+}\left(y\right)\leqslant\frac{f\left(z\right)-f\left(y\right)}{z-y}.$$

现在割线斜率递增表明 f 是下凸函数, 这就得到了证明.

151. (151.)

(a). 考虑 $x=y=\sqrt{t},t>0$, 我们得

$$f\left(t\right)+f\left(t\right)=f\left(2t\right)+f^{2}\left(t\right)\Rightarrow1-f\left(2t\right)=\left(1-f\left(t\right)\right)^{2}.$$

由上式可得

$$f\left(2^n\right)=1,\forall n\in\mathbb{Z}.$$

由连续性得

$$f\left(0\right)=\lim_{n\to-\infty}f\left(2^n\right)=1.$$

现在

$$1-f\left(2t\right)=\left(1-f\left(t\right)\right)^2=\cdots=\left(1-f\left(2^{-n}t\right)\right)^{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-f\left(2^{-n}t\right)\right)^{2^n}=0,$$

即

$$f\left(t\right)=1,\forall t\geqslant 0.$$

取 $y=-x,x>0$ 得

$$f^2\left(-x^2\right)=1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(-x^2\right)=\pm1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

由介值性得 $f\equiv1$.

(b). 令 $x=y=0$ 得

$$2f\left(0\right)=f\left(0\right)+f^2\left(0\right)\Rightarrow f\left(0\right)=0,1.$$

固定 $t\in\mathbb{R}$, 取 $y=\frac{t}{x},x>0$, 然后我们有

$$f\left(\frac{t^2}{x^2}\right)-f^2\left(t\right)=f\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)-f\left(x^2\right).$$

令 $x\to+\infty$, 利用 f 一致连续性得

$$f^2\left(t\right)=f\left(0\right),\forall t\in\mathbb{R}.$$

于是当 $f(0)=0$ 就有 $f\equiv0$.

当 $f(0)=1$ 得

$$f\left(t\right)=\pm1,\forall t\in\mathbb{R}.$$

由介值性得 $f\equiv1$. 这就完成了证明.

152. (152.) 如果满足题目条件的 c_n 不存在, 那么

$$\left(fg\right)'=f'g+fg'$$

在 x 充分大时非负, 从而结合

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A\in\left(0,+\infty\right)$$

知存在 $X>0$ 使得 fg 在 $[X,+\infty)$ 递增且 f 在 $[X,+\infty)$ 为正.

现在

$$\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)g\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\frac{1}{A}\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]$$

有意义, 这就和

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}g\left(x\right)\neq\underline{\lim_{x\to+\infty}}g\left(x\right)$$

矛盾!, 因此我们证明了 c_n 的存在性.

153. (153.) 首先由均值极限8.3, 我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f\left(k\right)\right|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{\left|f(k)\right|}{k}\right)}{n}=0.$$

设无理数 $\gamma>0$ 是 f 的周期, 由 Weyl 等分布定理9.18和例题9.49得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|f(k)|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f\left(\gamma\left\{\frac{k}{\gamma}\right\}\right)\right|}{n}=\int_0^1|f(\gamma x)|\,\mathrm{d}x.$$

现在我们知道 $f(x)=0,\forall x\in[0,\gamma]$, 即 $f\equiv 0$.

154. (154.) 不妨设 f 是上凸函数, 于是利用切线不等式得

$$f(y)\leqslant f'(x)(y-x)+f(x),\forall x,y\in(0,+\infty).$$

取 $y=2x,\frac{x}{2}$ 得

$$f(2x)-f(x)\leqslant xf'(x)\leqslant 2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right),\forall x\in(0,+\infty).$$

由条件得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(2x)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]=0,$$

即我们证明了

$$\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$$

155. (155.)

(a). 考虑内积空间 $\mathbb{R}[x]$, 这里内积为

$$(f,g)\triangleq\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,f,g\in\mathbb{R}[x].$$

注意到 $1,x,x^2,\cdots$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 中线性无关的向量组, 我们做施密特正交化就得到等价的正交向量组. 即我们记

$$q_1(x)\triangleq 1,q_m(x)\triangleq q_1-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(x^{m-1},q_k)}{(q_k,q_k)}q_k,m=2,3,\cdots.$$

然后再单位化

$$p_m\triangleq\frac{q_m}{\sqrt{(q_m,q_m)}},m=1,2,\cdots.$$

因为任何多项式 p 总可以用 $1,x,x^2,\cdots$ 中有限个线性表出, 所以 p 也可以用 $p_1,p_2,\cdots$ 中有限个线性表出. 因此我们知道对 $f\in C[a,b]$, 若

$$\int_a^b f(x)p_i(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall i\in\mathbb{N},$$

则

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall p\in\mathbb{R}[x].$$

由第一逼近定理13.45, 存在 $h_n\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $h_n\rightrightarrows f$. 于是我们还有

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f=0.$$

现在我们知道 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为所求.

(b). 由定理13.49我们知道前一问对平方可积函数 f 也能推出 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$.

记

$$c_n\triangleq\int_a^b g(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

首先对 $m \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(g-\sum_{n=1}^{m} c_n p_n, g-\sum_{n=1}^{m} c_n p_n\right) &= (g,g)-2\sum_{n=1}^{m} c_n\left(g,p_n\right)+\left(\sum_{n=1}^{m} c_n p_n, \sum_{n=1}^{m} c_n p_n\right)\\ &= (g,g)-2\sum_{n=1}^{m} c_n^2+\sum_{n,n'=1}^{m} c_n c_{n'}\left(p_n,p_{n'}\right)=(g,g)-\sum_{n=1}^{m} c_n^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

然后对 $m \geqslant N \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\sum_{n=N}^{m}\left[c_n p_n(x)\right]\right|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{n,n'=N}^{m} c_n c_{n'} \int_a^b p_{n'}(x) p_n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n,n'=N}^{m} c_n c_{n'} \delta_{nn'} = \sum_{n=N}^{m} c_n^2,\end{aligned}$$

即由平方可积空间完备性知存在平方可积函数 h 使得

$$\lim_{m\to\infty}\left(h-\sum_{n=1}^{m} c_n p_n, h-\sum_{n=1}^{m} c_n p_n\right)=0.$$

现在

$$\left(h-g,p_k\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m} c_n p_n-g,p_k\right)=0, k=1,2,\cdots,$$

于是由第一问知我们有 $(h-g,h-g)=0$. 现在

$$\begin{aligned}0=(g-h,g-h) &= \lim_{m\to\infty}\left(g-\sum_{n=1}^{m} c_n p_n, g-\sum_{n=1}^{m} c_n p_n\right)\\ &= (g,g)-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} c_n^2=(g,g)-\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2,\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b g(x) p_n(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

156. (156.) 对 $n \in \mathbb{N}$, 考虑

$$B_k \triangleq \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 : \left|\mathbf{x}-\gamma\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n^\alpha}\right\}, k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

注意到

$$[0,1]^2 \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k,$$

我们有

$$1 \leqslant n\cdot\pi\cdot\frac{M^2}{n^{2\alpha}}=\frac{\pi M^2}{n^{2\alpha-1}}, \forall n\in\mathbb{N},$$

即 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

157. (157.) 首先

$$\left(xf(x)-\int_{x-1}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y\right)'=xf'(x)+f(x-1)=0, \forall x\geqslant 1,$$

即

$$xf(x)-\int_{x-1}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y=f(1)-\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=0, \forall x\geqslant 1.$$

下面不妨设 f 不恒为 0.

若存在 $x^*\geqslant 1$ 使得

$$|f(x^*)|=\max_{y\in[0,x^*]}|f(y)|,$$

我们有

$$\max_{y\in[0,x^*]}|f(y)|=|f(x^*)|\leqslant\frac{1}{x^*}\int_{x^*-1}^{x^*}|f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{\max\limits_{y\in[0,x^*]}|f(y)|}{x^*}\leqslant\max_{y\in[0,x^*]}|f(y)|,$$

即要么 $x^*=1$, 要么 $\max\limits_{y\in[0,x^*]}|f(y)|=0$. 因为 f 不恒为 0, 所以我们知道存在 $X\geqslant 1$ 使得

$$|f(x)|<\max_{y\in[0,x]}|f(y)|,\forall x\geqslant X.$$

我们断言

$$|f(x)|\leqslant\max_{y\in[0,X]}|f(y)|,\forall x\geqslant X. \tag{30.208}$$

若不然, 存在 $x_0\geqslant X$ 使得

$$|f(x_0)|>\max_{y\in[0,X]}|f(y)|.$$

记

$$x_1\triangleq\inf\left\{x\in[X,x_0]:|f(x)|>\max_{y\in[0,X]}|f(y)|\right\},$$

则

$$\max_{y\in[0,X]}|f(y)|=|f(x_1)|<\max_{y\in[0,x_1]}|f(y)|=|f(x_2)|,x_2\in(X,x_1),$$

这就和 x_1 是下确界矛盾!, 从而(30.208)得证.

若对任何 $x\geqslant 1$ 都有

$$|f(x)|<\max_{y\in[0,x]}|f(y)|,$$

此时仍然回到上面讨论的情形, 即我们证明了 f 是有界函数.

现在

$$|f(x)|=\frac{1}{x}\left|\int_{x-1}^{x}f(y)\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{x}\cdot\sup_{y\in[0,+\infty)}|f(y)|\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

158. (158.) 由 $x'>0$ 知 x 递增. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=A<+\infty$, 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}x'(t)=g(A)>0.$$

由结论12.1得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$ 而矛盾!, 故 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$.

首先 $x_0\geqslant x(0)$, 然后设

$$\int_{x(0)}^{x_n}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s\geqslant\int_{x(0)}^{x(n)}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s=\int_0^n\frac{x'(t)}{g(x(t))}\mathrm{d}t=n,n=0,1,2,\cdots,$$

于是

$$\int_{x(0)}^{x_{n+1}}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s\geqslant n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s\geqslant n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{1}{g(x_n)}\mathrm{d}s=n+1=\int_{x(0)}^{x(n+1)}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s,$$

即 $x_{n+1}\geqslant x(n+1)$. 由数学归纳法得

$$x_n\geqslant x(n),n=0,1,2,\cdots.$$

现在对 $n \in \mathbb{N}_0$ 有

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \\ &= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \leqslant x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^{k} g(x(k))\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^{k} g(x(s))\,\mathrm{d}s = x_0 + g(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^{k} x'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= x_0 + g(x_0) + x(n-1) - x(0) \leqslant x(n) + g(x_0), \end{aligned}$$

于是我们证明了

$$x_n = x(n) + O(1), n \to \infty.$$

159. (159.) 对任何 $\epsilon > 0$, 因为 f 一致连续, 我们取 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \forall |x - y| \leqslant \delta, x, y \geqslant 0.$$

由

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0, \lim_{n\to\infty} f\left(\sqrt{n}\right) = c \in \mathbb{R},$$

取 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|f\left(\sqrt{n}\right) - c\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \delta, \forall n \geqslant N.$$

当 $x \geqslant \sqrt{N}$, 存在唯一的整数 $n_x \geqslant N$ 使得

$$\sqrt{n_x} \leqslant x < \sqrt{n_x + 1}.$$

于是

$$|x - \sqrt{n_x}| \leqslant \left|\sqrt{n_x + 1} - \sqrt{n_x}\right| \leqslant \delta,$$

从而

$$|f(x) - c| \leqslant |f(x) - f(\sqrt{n_x})| + |f(\sqrt{n_x}) - c| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

因此我们证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$.

160. (160.) 定义

$$\phi : B \to B, (\alpha, \beta) \mapsto \left(\int_0^1 \cos((\alpha \sin t + \beta \cos t)^2)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 \sin((\alpha \sin t + \beta \cos t)^2)\,\mathrm{d}t\right),$$

这里 B 是 $\mathbb{R}^2$ 的单位闭球. 由 Schauder 不动点定理13.16得 $(\alpha_0, \beta_0) \in B$ 使得

$$\phi(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha_0, \beta_0).$$

断言

$$f(x) \triangleq \alpha_0 \sin x + \beta_0 \cos x$$

为所求.

事实上, 对 $x \in [0, 1]$, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos f^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \sin x + \int_0^1 \sin f^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \cos x \\ &= \alpha_0 \cdot \sin x + \beta_0 \cdot \cos x = f(x), \end{aligned}$$

这就完成了证明.

161. (161.) 由条件得 $f(f(0)) = 0$. 注意到

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) - f(f(x))}{x}, x < 0.$$

于是我们有

$$f(-\epsilon)-f(-1)=\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\mathrm{d}x,\epsilon\in(0,1).$$

现在让 $\epsilon\to0^+$ 得

$$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0}\frac{\varphi(x)-f(f(x))}{x}\mathrm{d}x\sim\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

这就是一个矛盾!, 因此满足条件的可微函数 f 不存在.

162. (162.) 不失一般性, 假定 $b-a<\sqrt{2}$. 不妨设只考虑 b 附近, 此时可以不妨设 $f\in C^2[a,b)$.

假设 f 在 $x\to b^-$ 时无下界, 则存在 $a_n\uparrow b$ 使得 $f(a_n)<0$.

若存在 $\delta\in(0,b-a_1)$ 使得

$$f'(x)\leqslant0,\forall x\in[b-\delta,b),$$

则 f 在 $[b-\delta,b)$ 递减, 从而

$$f(x)\leqslant f(a_1)<0,\forall x\in(a_1,b).$$

现在

$$f''(x)\geqslant-f'(x)-f(x)>0,\forall x\in[a_1,b),$$

于是对 $x\in[a_1,b)$ 有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a_1)+\int_{a_1}^{x}f'(y)\,\mathrm{d}y\geqslant f(a_1)+f'(a_1)(x-a_1)\\&\geqslant f(a_1)+\begin{cases}f'(a_1)(b-a_1), & f'(a_1)<0\\0, & f'(a_1)\geqslant0\end{cases},\end{aligned}$$

这就和 f 有下界是一个矛盾!.

显然 $f'(x)\geqslant0$ 在 b 附近也不能恒成立, 于是存在 $x_n\uparrow b$[109]使得

$$f'(x_n)=0,\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=-\infty.$$

对

$$a<\alpha<\beta<b,f(\alpha)=f(\beta)=0,f(x)\geqslant0,x\in[\alpha,\beta],$$

由

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)[f''(x)+f'(x)+f(x)]\,\mathrm{d}x\geqslant0,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\int_{\alpha}^{x}f'(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}\left[(x-\alpha)\left(\int_{\alpha}^{x}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\int_{\alpha}^{\beta}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即

$$\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=0,\forall x\in[\alpha,\beta].$$

现在定义

$$A\triangleq\{x\in(a,b):f(x)>0\}.$$

由开集构造定理, 我们知道 A 是至多可数不交开区间的并, 注意因为 f 无在 b 附近无下界, 所以这些开区间

[109]例如取一列极小值点.

的右端点不能为 b. 对于端点不包含 a 的构成区间, 我们有 f 在端点处值为 0, 从而有 f 在这个构成区间为 0.

现在我们知道 $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$, 从而

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{x_1}^{x_n}\left[f''(x)+f'(x)+f(x)\right]\mathrm{d}x\\&=f(x_n)-f(x_1)+\int_{x_1}^{x_n}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant f(x_n)-f(x_1)+\int_{A\bigcap[x_1,x_n]}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant f(x_n)-f(x_1)+\int_{A\bigcap[x_1,x_n]}f(x)\,\mathrm{d}x\to-\infty,\end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 至此我们证明了 f 在 (a,b) 有下界.

163. (163.) 首先对 $x\in[a,b],n=2,3,\cdots$, 由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}\left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right|&\leqslant\int_a^x\left|\sin f_n(t)-\sin f_{n-1}(t)\right|\mathrm{d}t\\&=\int_a^x\left|\cos\theta\right|\cdot\left|f_n(t)-f_{n-1}(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x\left|f_n(t)-f_{n-1}(t)\right|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

然后记

$$M\triangleq\sup_{x\in[a,b]}\left|f_2(x)-f_1(x)\right|.$$

若

$$\left|f_n(x)-f_{n-1}(x)\right|\leqslant\frac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

则

$$\left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right|\leqslant\int_a^x\frac{M(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t=\frac{M(x-a)^n}{n!}.$$

即由数学归纳法可得

$$\left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right|\leqslant\frac{M(x-a)^n}{n!},n=1,2,\cdots.$$

现在

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(b-a)^n}{n!}<\infty,$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

164. (164.) 我们先证对满足题目条件的 f,g 必有 $\ell(f\circ g)\leqslant\ell(f)\ell(g)$.

事实上 g 分出了 $\ell(g)$ 个单调区间且在相邻两个单调区间时单调性不同. 则 $f\circ g$ 在每个单调区间至多又产生 $\ell(f)$ 个相邻两个单调区间时单调性不同的单调区间. 现在我们知道 $f\circ g$ 至多有 $\ell(f)\ell(g)$ 个单调区间, 因此 $\ell(f\circ g)\leqslant\ell(f)\ell(g)$.

设

$$a_n\triangleq\ln\left[\ell\left(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次}}\right)\right],$$

我们有

$$0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,m,n=1,2,\cdots.$$

由例题9.56我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ell\left(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次复合}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{a_n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}}$$

存在.

165. (165.) **Method 1**

首先由定理13.4得 $f'_+(t)$ 在 (a,d) 存在且单调, f 在 (a,d) 内闭绝对连续, 即

$$f(y)=f(x)+\int_x^y f'_+(t)\,\mathrm{d}t=f(x)+(y-x)\int_0^1 f'_+(x+t(y-x))\,\mathrm{d}t,\forall a<x<y<d.$$

现在

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\int_0^1 f'_+(x+t(y-x))\,\mathrm{d}t$$

关于 y 递增, 我们由例13.2的笔记知 f 在 (a,d) 下凸. 由定理13.8的证明我们可以看到 f 改变在 a 处取值可以使得 f 在 $[a,d]$ 下凸是由 a,d 附近的 f 的单调性来等价刻画, 这和 f 在 $[a,c]$ 下凸带来的 f 在 a 处的取值, 在 $[b,d]$ 下凸带来的 f 在 d 处的取值满足的性质的是一致的, 因此 f 在 $[a,d]$ 是下凸函数.

Method 2

对 $a\leqslant p<r<q\leqslant d$, 记 $L(p,q)$ 为连接 $(p,f(p)),(q,f(q))$ 的直线段. 要证明 f 在 $[a,d]$ 上下凸, 由例题13.2知只需证明 $(r,f(r))$ 在 $L(p,q)$ 之下或者恰好落在上面.

若 $[p,q]\subset[a,c]$ 或者 $[p,q]\subset[b,d]$, 则已经得证. 下假设 $p<b<c<q$.

先把 f 减去过 $(p,f(p)),(q,f(q))$ 一次线性函数可不妨设 $f(p)=f(q)=0$. 然后若 $f(r)>0$, 则

Case 1 若 $r\in[b,c]$, 由 f 在 $[b,c]$ 下凸, 所以

$$\max\{f(b),f(c)\}\geqslant f(r)>0.$$

若 $f(b)\geqslant f(r)$, 则

$$f(b)>0=f(p),$$

这意味着[110]$(b,f(b))$ 落在 $L(p,r)$ 之上, 这和 f 在 $[a,c]$ 上下凸矛盾!. 同理可以讨论 $f(c)\geqslant f(r)$ 也导出矛盾!

Case 2 若 $r\in(p,b)$, 由 f 在 $[a,c]$ 下凸, 割线斜率单调性, 即例题13.3给出

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\geqslant\frac{f(b)-f(p)}{b-p}\geqslant\frac{f(r)-f(p)}{r-p}>0.$$

现在 $f(c)>f(b)>0$ 给出 $(c,f(c))$ 落在 $L(b,q)$ 之上. 但是 f 在 $[b,d]$ 上下凸, 矛盾!

Case 3 若 $r\in(c,q)$, 则类似 **Case 2**, 这也会导出矛盾!.

至此我们证明了 $(r,f(r))$ 在 $L(p,q)$ 之下或者恰好落在上面, 从而 f 在 $[a,d]$ 是下凸函数.

166. (166.) 设

$$h(x)\triangleq e^{\frac{1}{3}\ln^3 x}f(x),$$

我们有

$$h'(x)=\frac{e^{\frac{1}{3}\ln^3 x}}{x}\left[xf'(x)+\ln^2 x\cdot f(x)\right]\leqslant 0,\forall x\in(0,1).$$

于是

$$h(x)\leqslant\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{3}\ln^3 x}f(x)=0,$$

即

$$f(x)\leqslant 0,\forall x\in(0,1).$$

[110]读者可以尝试画图.

现在自然有

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0, \forall x \in (0,1).$$

因为 f 不恒为 0, 所以存在某个 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) < 0$. 因为 h 递减, 所以

$$e^{\frac{1}{3}\ln^3 x} f(x) \leqslant e^{\frac{1}{3}\ln^3 x_0} f(x_0) < 0, \forall x \in (x_0, 1].$$

现在我们知道

$$f(x) < 0, \forall x \in [x_0, 1],$$

因此显然有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \forall x \in (0,1).$$

167. (167.) 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 f 在 $x = x_0$ 不连续, 则存在互不相同的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_n \to x_0$ 且

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \delta > 0, n = 1, 2, \cdots. \tag{30.209}$$

现在 $K \triangleq \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是紧集, 于是 $f(K)$ 也是紧集, 从而由单射得存在唯一的 $n_0 \in \mathbb{N}_0$ 和严格递增的 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_{n_0}).$$

由不等式(30.209)得 $n_0 \neq 0$. 然后 $K_1 \triangleq \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \setminus \{x_{n_0}\}$ 是紧集, 于是 $f\left(\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \bigcup \{x_0\}\right)$ 是紧集但不包含极限点 $f(x_{n_0})$, 这就是一个矛盾!. 因此我们证明了 $f \in C(\mathbb{R})$.

168. (168.) 设

$$f(s_0) = \max_{x\in[0,1]} f(x), s_0 \in [0,1].$$

对 $\mu \leqslant t \leqslant s_0$, 利用上凸性我们有

$$f(t) \geqslant \frac{t}{s_0} f(s_0) + \left(1 - \frac{t}{s_0}\right) f(0) \geqslant \frac{t}{s_0} f(s_0) \geqslant \mu f(s_0).$$

当 $s_0 \leqslant t \leqslant 1-\mu$, 我们继续应用上凸性得

$$f(t) \geqslant \frac{1-t}{1-s_0} f(s_0) + \frac{t-s_0}{1-s_0} f(1) \geqslant \frac{1-t}{1-s_0} f(s_0) \geqslant \mu f(s_0).$$

现在我们证明了

$$f(t) \geqslant \mu f(s), \forall t \in [\mu, 1-\mu], s \in [0,1].$$

169. (169.) 显然我们只需要证明 f 是一个下凸函数, 然后用 f 下凸即得要证的信息.
设

$$\ell_{x_0}(x) \triangleq f(x_0) + g(x_0)(x - x_0), x \in (a,b),$$

于是

$$f(x) = \sup_{t\in(a,b)} \ell_t(x), \forall x \in (a,b).$$

我们将证明更强的, 即一族下凸函数的上确界也下凸.
对 $x, y \in (a,b), \lambda \in [0,1]$, 我们有

$$\ell_t(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda \ell_t(x) + (1-\lambda)\ell_t(y).$$

两边对 t 取 sup 得

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

即 f 也下凸. 现在导数定义可得要证不等式, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant g(x_0) \geqslant \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0),$$

这就完成了证明.

170. (170.) 当 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 时分部积分可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

对题目的 f, 由定理13.4我们知上凸函数一定连续. 由卷积磨光13.14构造

$$f_\epsilon(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\chi_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}y,\epsilon>0.$$

现在对 $x,z\in\mathbb{R},\lambda\in[0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}f_\epsilon(\lambda x+(1-\lambda)z)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda x+(1-\lambda)z-y)\chi_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda(x-y)+(1-\lambda)(z-y))\chi_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\chi_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y+(1-\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y)\chi_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y\\&=\lambda f_\epsilon(x)+(1-\lambda)f_\epsilon(z),\end{aligned}$$

我们有 f_ϵ 是光滑上凸函数, 结合

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^b|f_\epsilon(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0,\forall[a,b]\subset\mathbb{R},$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}f_\epsilon(x)g''(x)\,\mathrm{d}x\geqslant0.$$

我们完成了证明.

171. (171.)

172. (172.) 给定 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 对任何 $\epsilon>0$, 由 f 一致连续得 $\delta>0$ 使得对 $|s-t|<\delta,s,t>0$ 成立

$$|f(s)-f(t)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $N_x\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f(x+\lambda_n)|<\frac{\epsilon}{2},\forall n\geqslant N_x.$$

考虑相对 $[a,b]$ 开集

$$I_x\triangleq\{y\in[a,b]:|y-x|<\delta\}.$$

对 $y\in I_x,n\geqslant N_x$ 得

$$|f(y+\lambda_n)|\leqslant|f(y+\lambda_n)-f(x+\lambda_n)|+|f(x+\lambda_n)|\leqslant\epsilon.$$

注意到 $[a,b]=\bigcup\limits_{x\in[a,b]}I_x$, 于是由有限覆盖定理得 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$ 使得 $[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^{n}I_{x_i}$.

记 $N\triangleq\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}N_{x_i}\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\sup_{y\in[a,b]}|f(y+\lambda_n)|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{y\in I_{x_i}}|f(y+\lambda_n)|\leqslant\epsilon,\forall n\geqslant N,$$

即我们证明了在 $(0,+\infty)$ 内闭一致的有

$$\lim_{n\to\infty}f(x+\lambda_n)=0.$$

173. (173.) 对 $[a,b]\subset\mathbb{R},x\in[a,b]$. 我们设

$$U_x\triangleq\left(x-\frac{\delta_x}{2},x+\frac{\delta_x}{2}\right).$$

现在

$$[a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]}U_x.$$

由有限覆盖定理得

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$$

使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

此时显然有

$$f(a) \geqslant f(x_1) > f(x_2) > \cdots > f(x_n) \geqslant f(b),$$

即 f 严格递减.

174. (174.)

定义连续函数

$$g_T(x) \triangleq \frac{f(x+T)-f(x)}{T} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, x \in [a, b-T].$$

由上凸函数割线斜率单调性得 g_T 递减且

$$g_T(a) \geqslant 0, g_T(b-T) \leqslant 0,$$

即由零点定理得 $x_0 \in [a, b-T]$ 使得 $g_T(x_0) = 0$, 即

$$\frac{f(x_0+T)-f(x_0)}{T} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

若 $x_0 = a$, 则

$$\frac{f(a+T)-f(a)}{T} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

考虑上凸函数

$$h(x) \triangleq f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

我们有

$$h(a+T) = h(a) = h(b) = 0,$$

此时考虑割线斜率单调性知上凸函数只能恒为 0, 从而 f 为线性函数, 因此 $x_0 \in (a,b)$ 显然存在.

175. (175.)

Method 1

在 V 上考虑内积

$$(f,g) \triangleq \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

考虑线性函数

$$T : V \to \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \sin(\pi x) \mathrm{d}x.$$

于是由里斯表示定理得唯一的 $p \in V$ 使得

$$Tf = (f,p), \forall f \in V,$$

这就是

$$\int_{-1}^{1} f(x) p(x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \sin(\pi x), \forall f \in V.$$

Method 2

设 $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$, 要证等式等价于

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_{-1}^{1} x^{k+j} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} x^k \sin(\pi x) \mathrm{d}x, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

这是一个线性方程组, 系数矩阵为 $\left(\int_{-1}^{1} x^{k+j}\mathrm{d}x\right)_{n\times n}$. 注意到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{-1}^{1} x^{k+j}\mathrm{d}x\cdot t_k t_j=\int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k x^k\right)^2\mathrm{d}x,$$

即 $\left(\int_{-1}^{1} x^{k+j}\mathrm{d}x\right)_{n\times n}$ 正定, 因此可逆, 从而线性方程组解存在唯一, 因此 p 存在唯一.

当 $n=3$, 具体解上述线性方程组得 $p(x)=\frac{3}{2}x$.

176. (176.)

(a). 我们首先证明 Jensen 不等式, 即对任何 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n\in B_2, n\in\mathbb{N}$ 都有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}_k)\geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k\right).$$

当 $n=2$ 上式显然成立, 下面假设 n 时成立, 当 $n+1$ 时我们有

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)&=f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k+\frac{n-1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k}{2n}\right)=f\left(\frac{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k}{n}+\frac{x_{n+1}+(n-1)\left(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)}{n}}{2}\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2}f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k}{n}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{x_{n+1}+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)}{n}\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\mathbf{x}_k)}{n}+\frac{f(x_{n+1})}{n}+\frac{(n-1)f\left(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)}{n}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}f(\mathbf{x}_k)+\frac{(n-1)f\left(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)}{n}\right],
\end{aligned}$$

即

$$\left(1-\frac{n-1}{2n}\right)f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n+1}f(\mathbf{x}_k)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{x}_k\right)\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(\mathbf{x}_k).$$

现在由数学归纳法得 Jensen 不等式成立.

对任何正整数 $1\leqslant p<q$, 我们运用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{p}{q}\mathbf{x}+\left(1-\frac{p}{q}\right)\mathbf{y}\right)&=f\left(\underbrace{\frac{\mathbf{x}}{q}+\frac{\mathbf{x}}{q}+\cdots+\frac{\mathbf{x}}{q}}_{p\text{个}}+\underbrace{\frac{\mathbf{y}}{q}+\frac{\mathbf{y}}{q}+\cdots+\frac{\mathbf{y}}{q}}_{q-p\text{个}}\right)\\
&\leqslant\frac{p}{q}f(\mathbf{x})+\left(1-\frac{p}{q}\right)f(\mathbf{y}),\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in B_2.
\end{aligned}$$

由 f 连续和有理数在实数中稠密得对任何 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in B_2$ 和 $\lambda\in(0,1)$ 都有

$$\lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})\geqslant f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}).$$

(b). 我们的想法是在每条线段上导出的 Lip 常数一致, 因此考虑对任何 $\mathbf{w}\in\partial B_1$, 我们考虑连续下凸函数

$$f_{\mathbf{w}}(\lambda)\triangleq f(\lambda\mathbf{w}),\lambda\in[-2,2].$$

记

$$C_{\mathbf{w}}\triangleq\max\left\{\left|\frac{f(2\mathbf{w})-f(\mathbf{w})}{2-1}\right|,\left|\frac{f(-\mathbf{w})-f(-2\mathbf{w})}{-1-(-2)}\right|\right\},$$

由割线斜率不等式得

$$|f_{\mathbf{w}}(\lambda)-f_{\mathbf{w}}(\mu)|\leqslant C_{\mathbf{w}}|\lambda-\mu|,\forall\lambda,\mu\in[-1,1].$$

记

$$C\triangleq\max_{\mathbf{w}\in\partial B_1}C_{\mathbf{w}},$$

我们就有

$$|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|\leqslant C||\mathbf{x}-\mathbf{y}||,\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in B_1.$$

177. (177.)

(a). 考虑

$$F(x,t)\triangleq f(x)-tg(x),$$

我们有

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=f'(0)\neq 0.$$

于是由隐函数定理得 $\delta>0$ 使得 $x(t)$ 是方程在 $t\in(-\delta,\delta)$ 上满足 $x(0)=0$ 的唯一解.

(b). 隐函数定理表明 $x\in C^1(-\delta,\delta)$. 于是在方程

$$f(x(t))=tg(x(t))$$

两边求导得

$$x'(t)\cdot f'(x(t))=g(x(t))+tx'(t)g'(x(t)).$$

代入 $t=0$ 得

$$x'(0)=\frac{g(0)}{f'(0)}.$$

于是所求一阶 Taylor 展开得

$$x(t)=\frac{g(0)}{f'(0)}t+o(t).$$

178. (178.)

(a). 如果 $\sup_{x\in\mathbb{R}}f'(x)\leqslant 1$, 那么 $f(x)-x$ 递减, 从而

$$0=f(1)-1\leqslant f(0)-0=0\Rightarrow f(x)=x,\forall x\in[0,1],$$

但是

$$f'(x)=0,\forall x>1,$$

这就和导数介值性矛盾!, 因此我们证明了 $\sup_{x\in\mathbb{R}}f'(x)>1$.

(b). 首先

$$f(0)=0,f(1)=1,f^{(j)}(0)=f^{(j)}(1)=0,1\leqslant j\leqslant k.$$

分部积分得

$$\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t=1,$$

以及可以计算得

$$\int_0^1\left|\frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{k-1}}{(k-1)!}\right|\mathrm{d}t=\frac{1}{k!\cdot 2^{k-1}}.$$

若

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant 2^{k-1}\cdot k!,$$

我们有

$$1 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}t \leqslant 1.$$

为了等号成立需

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = 2^{k-1}\cdot k!, \forall x \in [0,1],$$

这自然和 $f^{(k)}(0)=0$ 矛盾!, 因此我们证明了

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| > 2^{k-1}\cdot k!.$$

179. (179.) 对任何 $\epsilon>0$, 因为连续周期函数一致连续, 即命题13.15, 我们知道存在 $\delta\in(0,\pi)$ 成立

$$\sup_{|t|\leqslant\delta} |f(t+x)-f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

由斯特林公式9.4得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{4\pi}{n}}, n\to\infty.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} = 0.$$

存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$0 < \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{1}{4\pi\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|+1}\cdot\frac{\epsilon}{2}, \forall n\geqslant N.$$

于是对 $n\geqslant N, x\in\mathbb{R}$, 我们有

利用 $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, f 周期为 2π 我们有

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(x))\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x}\right| \\
&\leqslant \frac{\int_{-\pi-x}^{\pi+x}|f(t+x)-f(x)|\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} \overset{\text{周期}2\pi}{=} \frac{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\int_{|t|\leqslant\delta}|f(t+x)-f(x)|\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} + \frac{\int_{\delta<|t|\leqslant\pi}|f(t+x)-f(x)|\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} \\
&\leqslant \sup_{|t|\leqslant\delta}|f(t+x)-f(x)|\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} + 2\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|\cdot\frac{\int_{0\leqslant|t|\leqslant\pi}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} \\
&= \sup_{|t|\leqslant\delta}|f(t+x)-f(x)| + 4\pi\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

即 f_n 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛到 f.

180. (180.) 取 $\rho\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 满足

$$0\leqslant\rho\leqslant 1, \rho|_{|x|\leqslant 1}=1, \rho|_{|x|\geqslant 2}=0.$$

然后取

$$g(x) \triangleq \frac{x^n}{n!}\rho(x)$$

以及

$$\mu \triangleq \max\left\{1, \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left(\frac{|A|\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g^{(k)}(x)\right|}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n-k}}\right\} > 0.$$

注意到

$$g|_{|x|\geqslant 2} = 0, g|_{|x|\leqslant 1} = \frac{x^n}{n!}.$$

于是由各阶导数连续性得

$$g^{(n)}(0) = 1, g^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

现在设

$$f(x) \triangleq \frac{A}{\mu^n} g(\mu x), x \in \mathbb{R},$$

于是

$$f^{(n)}(0) = Ag^{(n)}(0) = A, f^{(k)}(0) = \frac{A}{\mu^{n-k}} g^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

对 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 得

$$\begin{aligned}
&\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|A\mu^{k-n} g^{(k)}(\mu x)\right| \\
&\leqslant \left|A\left(\frac{|A|\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g^{(k)}(x)\right|}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n-k}}\right|^{k-n} \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|g^{(k)}(x)\right| \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

我们完成了证明.

181. (181.) 记

$$h(x) \triangleq x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), x \geqslant 1,$$

则

$$h'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \forall x \geqslant 1.$$

于是

$$\min_{x\geqslant 1} h(x) = h(1) = 1 + \ln 2, |h(x_2) - h(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|, \forall x_2, x_1 \geqslant 1.$$

注意到

$$\sup_{x\geqslant 1}\frac{|f(x)|}{h(x)} \leqslant \sup_{x\geqslant 1}\frac{|f(1)| + L|x-1|}{x} < \infty,$$

于是对 $x_1, x_2 \geqslant 1$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x_1)}{h(x_1)} - \frac{f(x_2)}{h(x_2)}\right| = \left|\frac{f(x_1)h(x_2) - f(x_2)h(x_1)}{h(x_1)h(x_2)}\right| \\
&\leqslant \frac{|f(x_1)h(x_2) - f(x_2)h(x_2)|}{h(x_1)h(x_2)} + \frac{|f(x_2)h(x_2) - f(x_2)h(x_1)|}{h(x_1)h(x_2)} \\
&\leqslant \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{h(x_1)} + |f(x_2)| \cdot \left|\frac{h(x_1) - h(x_2)}{h(x_1)h(x_2)}\right| \\
&\leqslant \frac{L|x_1 - x_2|}{h(x_1)} + \sup_{x\geqslant 1}\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right| \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{h(x_1)} \\
&\leqslant \frac{L + \sup_{x\geqslant 1}\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right|}{1 + \ln 2}|x_1 - x_2|,
\end{aligned}$$

即 $\frac{f(x)}{x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续.

182. (182.) 对 $[a,b]\subset[0,1]$, 考虑

$$M\triangleq\max_{u\in[a,b]}f(u),$$

以及

$$s\triangleq\sup\{x\in[a,b]:f(x)=M\},t\triangleq\inf\{x\in[a,b]:f(x)=M\}.$$

因为 f 在 $[a,b]$ 至少取得两个最大值点, 所以 $t<s$.

若 $s<b$, 则 $[s,b]$ 上 f 只在唯一的点取 f 在 $[s,b]$ 上的最大值 M, 矛盾!, 因此我们有 $s=b$. 类似的 $t=a$, 于是 $f(b)=f(a)$, 这就证明了 f 为常值.

183. (183.) 对任意 $\epsilon>0$, 记 $X>0$ 使得

$$\int_{|t|\geqslant X}|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\epsilon}{4}.$$

再记

$$\delta\triangleq\frac{1}{1+\int_{|t|<X}|tf(t)|\,\mathrm{d}t}\cdot\frac{\epsilon}{4}>0.$$

当 $|x-y|\leqslant\delta$ 的时候利用

$$|\cos\alpha|\leqslant1,|\cos\alpha-\cos\beta|\leqslant|\alpha-\beta|,$$

我们有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)|&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(yt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_{|t|\geqslant X}|f(t)|\cdot|\cos(xt)-\cos(yt)|\,\mathrm{d}t+\int_{|t|<X}|f(t)|\cdot|\cos(xt)-\cos(yt)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant2\int_{|t|\geqslant X}|f(t)|\,\mathrm{d}t+|x-y|\int_{|t|<X}|tf(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant2\cdot\frac{\epsilon}{4}+2\cdot\frac{\epsilon}{4}=\epsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 φ 一致连续.

184. (184.) 记

$$X(t)\triangleq\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix},\mathbf{a}(t,\mathbf{x})\triangleq\begin{pmatrix}a_1(t,\mathbf{x})\\a_2(t,\mathbf{x})\\\vdots\\a_n(t,\mathbf{x})\end{pmatrix}.$$

对 $(0,\mathbf{x})\in V$, 考虑一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}X(t,\mathbf{x})}{\mathrm{d}t}=-\mathbf{a}(t,X(t,\mathbf{x})),X(0,\mathbf{x})=\mathbf{x}.\tag{30.210}$$

由常微分方程解的可微依赖定理得包含原点的开集 $W\subset V$, 使得存在解 $X\in C^1(W,\mathbb{R}^n)$ 满足(30.210).

现在

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t,X(t,\mathbf{x}))=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}a_i(t,X(t,\mathbf{x}))\frac{\partial u}{\partial x_i}=b(t,X(t,\mathbf{x}))u.$$

注意

$$u(0,X(0,\mathbf{x}))=u(0,\mathbf{x})=0,$$

于是由解的存在唯一性定理得

$$u(t,X(t,\mathbf{x}))=0,\forall(t,\mathbf{x})\in W.$$

注意到

$$T:(t,\mathbf{x})\mapsto(t,X(t,\mathbf{x}))$$

在 $(0,\mathbf{0})$ 处的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial X}{\partial t}(0,\mathbf{0}) & I\end{pmatrix},$$

这里右下角来自 $X(0,\mathbf{x})=\mathbf{x}$ 两边对 $\mathbf{x}$ 取微分. 现在雅可比在原点可逆, 反函数定理表明存在开集 $\widetilde{W}\subset W$ 使得 $T\left(\widetilde{W}\right)$ 是开集, 现在 u 在 $U\triangleq T\left(\widetilde{W}\right)$ 恒为 0, 得证.

185. (185.) **Step 1** 首先证明 $\left\{f^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 一致有界.

因为 $\left\{f^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 等度连续, 存在 $\delta\in(0,1)$ 使得当

$$x,y\in[0,1],|y-x|\leqslant\delta,$$

就有

$$\left|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)\right|\leqslant 1,\forall k=0,1,2,\cdots.$$

现在对 $x\in(0,1],k=0,1,2,\cdots$, 利用 $\frac{x}{\left\lceil\frac{x}{\delta}\right\rceil}\leqslant\delta$, 我们有

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\left\lceil\frac{x}{\delta}\right\rceil}\left|f^{(k)}\left(\frac{jx}{\left\lceil\frac{x}{\delta}\right\rceil}\right)-f^{(k)}\left(\frac{(j-1)x}{\left\lceil\frac{x}{\delta}\right\rceil}\right)\right|\leqslant\left\lceil\frac{x}{\delta}\right\rceil\leqslant\frac{1}{\delta}+1$$

因此这就证明了 $\left\{f^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 一致有界.

Step 2

现在对 $x\in(0,1],k\in\mathbb{N}$, 由 Taylor 中值定理得 $\theta\in(0,x)$ 成立

$$f(x)=\frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}x^k.$$

于是

$$|f(x)|\leqslant\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\frac{1}{k!}x^k\to 0,k\to+\infty,$$

这就证明了

$$f(x)=0,\forall x\in[0,1].$$

186. (186.) 首先我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}c_kx^k&=\sum_{k=0}^{n}c_k\left(x-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^i\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\sum_{k=i}^{n}c_kC_k^i\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-i}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^i\right],\end{aligned}$$

于是记

$$d_i\triangleq\sum_{k=i}^{n}c_kC_k^i\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-i},i=0,1,2,\cdots,$$

我们有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|\sum_{k=0}^n c_kx^k-f(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|\sum_{k=0}^n d_k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^k-f(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{a+b}{2}}\left|\sum_{k=0}^n d_kx^k-f\left(x+\frac{a+b}{2}\right)\right|^2\mathrm{d}x\\&=\frac{b+a}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\left|\sum_{k=0}^n d_k\left(\frac{a+b}{2}\right)^kx^k-f\left(\frac{a+b}{2}x+\frac{a+b}{2}\right)\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即可以不妨设 $a=-1,b=1$.

现在由闵可夫斯基不等式16.3显然有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\left|\sum_{k=0}^n c_kx^k-\sum_{k=0}^{n-1}c_kx^k\right|^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1|c_nx^n|^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{2|c_n|^2}{2n+1}=0,$$

即存在 $C>0$ 成立

$$|c_n|\leqslant C\sqrt{n},\forall n\geqslant 0.$$

现在我们有

$$g(x)=\sum_{k=0}^\infty c_kx^k,x\in(-1,1).$$

对任何 $[c,d]\subset(-1,1)$, 利用幂级数在收敛域内闭一致收敛得

$$\int_c^d|g(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_c^d\left|\sum_{k=0}^n c_kx^k-f(x)\right|^2\mathrm{d}x=0,$$

即

$$g(x)=f(x),\forall x\in(c,d).$$

由 c,d 任意性得

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty c_kx^k,x\in(-1,1)$$

是实解析函数.

187. (187.) 设 $\delta>0$ 使得

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^\infty\varphi_jx^j,a(t,x)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty a_{i,j}t^ix^j,f(t,x)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty f_{i,j}t^ix^j,|t|\leqslant\delta,|x|\leqslant\delta,$$

这里

$$\sum_{j=0}^\infty|\varphi_j|\,\delta^j<\infty,\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty|a_{i,j}|\,\delta^{i+j}<\infty,\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty|f_{i,j}|\,\delta^{i+j}<\infty.$$

若 u 是原点某邻域的题目方程的实解析解, 则存在 $\delta'\in(0,\delta)$ 使得

$$u(t,x)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty u_{i,j}t^ix^j,\forall|t|<\delta',|x|<\delta',$$

且上述级数在 $|t|<\delta',|x|<\delta'$ 绝对且一致收敛.

计算得

$$u(0,x)=\sum_{j=0}^{\infty}u_{0,j}x^j;$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)u_{i+1,j}t^ix^j;\forall|t|<\delta',|x|<\delta'.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)u_{i,j+1}t^ix^j,$$

代入方程对比系数得

$$u_{0,j}=\varphi_j,(p+1)u_{p+1,q}-f_{p,q}=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}(j+1)u_{p-i,q-j}u_{i,j+1},\forall p,q\in\mathbb{N}_0. \tag{30.211}$$

显然由上面递推唯一确定了 $u_{i,j},i,j=0,1,2,\cdots$, 因此在 $|t|<\delta',|x|<\delta'$ 中实解析函数是唯一的.

我们用强函数法证明由递推(30.211)确定的幂级数在某个原点邻域内绝对且一致收敛. 其想法是构造不等式

$$|\varphi_j|\leqslant\Phi_j,|a_{i,j}|\leqslant A_{i,j},|f_{i,j}|\leqslant F_{i,j},\forall i,j\in\mathbb{N}_0,$$

以及实解析函数

$$\Phi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_jx^j,A(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{i,j}t^ix^j,F(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}F_{i,j}t^ix^j.$$

然后考虑

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x)=A(t,x)\frac{\partial U}{\partial x}(t,x)+F(t,x),u(0,x)=\Phi(x)$$

的实解析解

$$U=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}U_{i,j}t^ix^j.$$

由递推(30.211)可得

$$|u_{i,j}|\leqslant|U_{i,j}|,\forall i,j\in\mathbb{N}_0,$$

这就能帮助我们估计 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_{i,j}t^ix^j$ 收敛性.

设 $C>0$ 使得

$$\max\left\{|\varphi_j|\delta^j,|a_{i,j}|\delta^{i+j},|f_{i,j}|\delta^{i+j}\right\}\leqslant C,\forall i,j\in\mathbb{N}_0.$$

计算得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C}{\delta^{i+j}}t^ix^j=\frac{C}{\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)},\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C}{\delta^j}x^j=\frac{C}{1-\frac{x}{\delta}}.$$

如果考虑偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{C}{\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)+\frac{C}{\left(1-\frac{t}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)},u(0,x)=\frac{C}{1-\frac{x}{\delta}},$$

我们由特征线法可以解得一个实解析解

$$u(t,x)=C\left(\delta-x-\delta\sqrt{\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^2+2\ln\left(1-\frac{t}{\delta}\right)}+\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{\delta}\right)^2+2\ln\left(1-\frac{t}{\delta}\right)}}\right),$$

从而原方程在 $(0,0)$ 邻域有一个实解析解.

注 本题涉及的强函数法大概就是说把方程的系数和初值展开为幂级数. 然后把幂级数系数绝对值放大为非负的系数得到新的解析函数. 以这些新的解析函数为系数和初值的方程若存在一个实解析解, 这给出原方程也存在一个实解析解且此解析解展开为幂级数的收敛半径只受方程初值和系数展开为幂级数的收敛半

径所影响.

188. (188.)

对 $x \leqslant y$, 取唯一的 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$x + T(k-1) \leqslant y < x + Tk,$$

于是由 Holder 不等式16.1得

$$\begin{aligned}
&|f'(y) - f'(x)| = |f'(y-(T-1)k) - f'(x)| \\
&= \left| \int_x^{y-(T-1)k} f''(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant (y-(T-1)k-x)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^{y-(T-1)k} |f''(z)|^p\,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant (y-x)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T |f''(z)|^p\,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

由例题17.2得

$$\begin{aligned}
|f'(x)|^{1+q} &\leqslant (q+1) \left(\int_0^T |f(x)|^p\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{q}{p}} |f(x)| \\
&= \frac{2p-1}{p-1} \left(\int_0^T |f(x)|^p\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot |f(x)|,
\end{aligned}$$

即

$$|f'(x)|^{\frac{2p-1}{p-1}} \leqslant \frac{2p-1}{p-1} \left(\int_0^T |f''(x)|^p\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

189. (189.) 首先我们来看一个基本事实: 即对某个 $\delta > 0$, 若

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} |a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}| \, \delta^{i_1+i_2+\cdots+i_n} < \infty,$$

则存在 $C > 0$ 使得

$$|a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}| \, \delta^{i_1+i_2+\cdots+i_n} \leqslant C, \forall i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{N}_0.$$

回忆高中数学的全排列公式有

$$\frac{C}{\delta^{i_1+i_2+\cdots+i_n}} \leqslant \frac{C(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{\delta^{i_1+i_2+\cdots+i_n} i_1! i_2! \cdots i_n!}, \forall i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{N}_0.$$

于是当 $-\delta < x_1 + x_2 + \cdots + x_n < \delta$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} \frac{C(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{\delta^{i_1+i_2+\cdots+i_n} i_1! i_2! \cdots i_n!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=N \\ i_1,i_2,\cdots,i_n \in \mathbb{N}_0}} \frac{C(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{\delta^{i_1+i_2+\cdots+i_n} i_1! i_2! \cdots i_n!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= C \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{x_1}{\delta} + \frac{x_2}{\delta} + \cdots + \frac{x_n}{\delta} \right)^N = \frac{C}{1 - \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\delta}}.
\end{aligned}$$

回到原题: 用 $u - \sum_{r=0}^{m-1} t^r \varphi_r$ 代替 u 可不妨设 $\varphi_r = 0, r = 0, 1, 2, \cdots, m-1$.

若在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的原点某邻域方程(13.296)存在实解析解

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{U_p(\mathbf{x})}{p!} t^p, U_p(\mathbf{x}) = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}(0, \mathbf{x}), p = 0, 1, 2, \cdots.$$

注意

$$\frac{\partial^{p+m}u}{\partial t^{p+m}}=\frac{\partial^p}{\partial t^p}f\left(t,\mathbf{x},\left(\frac{\partial^{|\alpha|+k}u}{\partial\mathbf{x}^\alpha\partial t^k}(t,\mathbf{x})\right)_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}\right),p=0,1,2,\cdots.$$

上式右边没有出现对 t 求偏导数超过 $p+1$ 阶的项. 于是通过迭代可得

$$U_p(\mathbf{x})=\frac{\partial^p u}{\partial t^p}(0,\mathbf{x}),p=0,1,2,\cdots$$

被唯一确定.

注[分析思路] 考虑方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,\mathbf{x})=\frac{C}{1-\frac{t+\sum\limits_{i=1}^n x_i+\sum\limits_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}\frac{\partial^{|\alpha|+k}u}{\partial\mathbf{x}^\alpha\partial t^k}(t,\mathbf{x})}{\delta}},\\ \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(0,\mathbf{x})=0,\qquad r=0,1,2,\cdots,m-1\end{cases}.\tag{30.212}$$

类似数学类函数性态分析习题187., 我们只需证明(30.212)在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的原点邻域内存在一个实解析函数即可. 现在我们寻求方程(30.212)有形如 $u\left(t+\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)$ 的解, 此时记 $w=t+\sum\limits_{i=1}^n x_i$, 则方程(30.212)变为

$$\begin{cases}u^{(m)}(w)=\frac{C}{1-\frac{w+\sum\limits_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}u^{(|\alpha|+k)}(w)}{\delta}},\\ u^{(r)}(w)=0,\qquad r=0,1,2,\cdots,m-1\end{cases}.\tag{30.213}$$

但是(30.213)显然无解.

我们将(30.213)写成

$$\begin{cases}u^{(m)}(w)=\frac{C}{1-\frac{w+\sum\limits_{j=0}^m k_j u^{(j)}(w)}{\delta}},\\ u^{(r)}(w)=0,\qquad r=0,1,2,\cdots,m-1\end{cases},\tag{30.214}$$

这里 $k_j\in\mathbb{N},j=0,1,2,\cdots,m$.

回到原题:

设 $\eta>\frac{\delta+2\sqrt{k_mC\delta}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}k_j}$, 由例题13.35的 3 我们知道实际上我们考虑方程

$$\begin{cases}u^{(m)}(w)=\frac{\delta-w-\sum\limits_{j=0}^{m-1}k_ju^{(j)}(w)+\sqrt{\left(\delta-w-\sum\limits_{j=0}^{m-1}k_ju^{(j)}(w)\right)^2-4k_mC\delta}}{2k_m},\\ u^{(r)}(0)=\eta,\qquad r=0,1,2,\cdots,m-1\end{cases}$$

的实解析解 U 有系数非负的 Taylor 级数.

注意到 U 也满足方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t,\mathbf{x})=\frac{C}{1-\frac{t+\sum\limits_{i=1}^n x_i+\sum\limits_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m}\frac{\partial^{|\alpha|+k}u}{\partial\mathbf{x}^\alpha\partial t^k}(t,\mathbf{x})}{\delta}},\\ \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(0,\mathbf{x})=U^{(r)}(\mathbf{x}),\qquad r=0,1,2,\cdots,m-1\end{cases}.$$

这个偏微分方程存在的实解析解也给出了原方程解的一个强函数, 从而我们得证.

190. (190.) 不妨设

$$W=\left\{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^{n+1}:|t|<2\delta,||\mathbf{x}||<2\delta\right\},\delta>0.$$

记

$$U(t,\mathbf{x})\triangleq u\left(t-||\mathbf{x}||^2,\mathbf{x}\right),W_\lambda\triangleq\left\{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^{n+1}:||\mathbf{x}||^2<t<\lambda\right\},\lambda>0.$$

我们取 $\lambda>0$ 充分小使得 U 在 $\overline{W_\lambda}$ 邻域 m 阶连续可微.

注意到 U 也满足类似(13.297)的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^m U}{\partial t^m}(t,\mathbf{x}) + \sum\limits_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m} b_{k,\alpha}(t,\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha|+k} U}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k}(t,\mathbf{x}) = 0, & \forall (t,\mathbf{x}) \in \overline{W_\lambda} \\ \frac{\partial^r U}{\partial t^r}\left(||\mathbf{x}||^2, \mathbf{x}\right) = 0, & \forall ||\mathbf{x}|| \leqslant \sqrt{\lambda}, r = 0,1,\cdots,m-1, \end{cases}$$

这里 $b_{k,\alpha}, (\alpha,k) \in \mathbb{I}_m$ 在 $\overline{W_\lambda}$ 邻域是实解析的.

对任何 $\mathbb{R}^n$ 的多项式 p, 考虑方程

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(t,\mathbf{x}) + \sum\limits_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m} (-1)^{|\alpha|+k} \frac{\partial^{|\alpha|+k}(b_{k,\alpha} v)}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k}(t,\mathbf{x}) = 0, & \forall (t,\mathbf{x}) \in \overline{W_\lambda} \\ \frac{\partial^r v}{\partial t^r}(\lambda,\mathbf{x}) = 0, & \forall ||\mathbf{x}|| \leqslant \sqrt{\lambda}, r = 0,1,\cdots,m-2. \\ \frac{\partial^r v}{\partial t^r}(\lambda,\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), & \forall ||\mathbf{x}|| \leqslant \sqrt{\lambda}, r = m-1 \end{cases}$$

由强函数构造解的过程[111]中可以看到上述方程解的幂级数收敛半径被方程系数的收敛半径决定, 所以我们可以缩小 $\lambda > 0$ 使得上述方程在 $\overline{W_\lambda}$ 总有解[112].

现在

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{W_\lambda} \left[v(t,\mathbf{x}) \frac{\partial^m U}{\partial t^m}(t,\mathbf{x}) + \sum_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m} b_{k,\alpha}(t,\mathbf{x}) v(t,\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha|+k} U}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k}(t,\mathbf{x}) \right] \mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{W_\lambda} \left[(-1)^m U(t,\mathbf{x}) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(t,\mathbf{x}) + U(t,\mathbf{x}) \sum_{(\alpha,k)\in\mathbb{I}_m} (-1)^{|\alpha|+k} \frac{\partial^{|\alpha|+k}(b_{k,\alpha} v)}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k}(t,\mathbf{x}) \right] \mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{||\mathbf{x}||<\sqrt{\lambda}} (-1)^{m-1} U(\lambda,\mathbf{x}) \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}(\lambda,\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{||\mathbf{x}||<\sqrt{\lambda}} (-1)^{m-1} U(\lambda,\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

即

$$\int_{||\mathbf{x}||<\sqrt{\lambda}} U(\lambda,\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \forall p.$$

由第一逼近定理得

$$U(\lambda,\mathbf{x}) = 0, \forall ||\mathbf{x}|| \leqslant \sqrt{\lambda}.$$

现在让 λ 取遍 0 到某个正数就可得 $u(t,\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 原点右邻域为 0. 类似可得 $u(t,\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 原点左邻域为 0, 至此我们完成了证明.

191. (191.) 由 $x^p f(x)$ 递减到 0 得 f 非负.

注意到

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x f(x) &= 2x^p f(x) \int_{\frac{x}{2}}^{x} x^{-p} \mathrm{d}t \leqslant 2x^p f(x) \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^{-p} \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2 \int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t) t^{-p} \mathrm{d}t = 2 \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

于是由 Cauchy 收敛准则和夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty} [x f(x)] = 0.$$

192. (192.)

[111] 见数学类函数性态分析习题189.的证明.

[112] 这里其实要用到解析函数收敛半径随着展开点是局部有正下界的, 需要用到多元复分析的知识点, 超出了本讲义范围.

引理 30.14

设 $\mathbb{R}$ 上复值连续函数 f 周期 $a>0$, $\mathbb{R}$ 上复值连续函数 g 周期 $b>0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)=\begin{cases}\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x, & \frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{na}\int_0^{na}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x, & \frac{a}{b}=\frac{m}{n},m,n\in\mathbb{N}\end{cases}. \tag{30.215}$$

♡

证明 当 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ 时 fg 有公共周期 $na=mb>0$. 于是我们做 $x=ty$ 并用黎曼引理9.2即得(30.215).

当 $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$, 我们首先有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}||f||_\infty\cdot||g||_\infty\,\mathrm{d}x+\frac{1}{ab}\int_0^a||f||_\infty\,\mathrm{d}x\int_0^b||g||_\infty\,\mathrm{d}x\\ =&2||f||_\infty\cdot||g||_\infty.\end{aligned}$$

然后对

$$f=e^{\frac{2\pi ik}{a}x},g=e^{\frac{2\pi ij}{b}x},k,j\in\mathbb{Z},$$

我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}e^{\frac{2\pi ik}{a}x}e^{\frac{2\pi ij}{b}x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}e^{2\pi i\left(\frac{k}{a}+\frac{j}{b}\right)x}\mathrm{d}x\right)=\begin{cases}1, & k=j=0\\ 0, & \text{其余}\end{cases},$$

以及

$$\frac{1}{ab}\int_0^a e^{\frac{2\pi ik}{a}x}\mathrm{d}x\int_0^b e^{\frac{2\pi ij}{b}x}\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & k=j=0\\ 0, & \text{其余}\end{cases}.$$

现在由线性性知(30.215)对一切三角多项式都成立. 于是由第二逼近定理13.15和 Friedrichs mollifier technique 可得(30.215)对一切满足题目条件的 f,g 成立.

回到原题: 我们不妨设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的周期两两不可公约, 即周期比不为有理数. 否则你可以把那些周期可公约的函数之和看成一个整体的周期函数.

然后设 f_k 周期为 $a_k>0$, 用 $f_k-\frac{1}{a_k}\int_0^{a_k}f(x)\,\mathrm{d}x$ 代替 f_k 可不妨设

$$\frac{1}{a_k}\int_0^{a_k}f(x)\,\mathrm{d}x=0,k=1,2,\cdots,n.$$

于是运用引理30.14我们有

$$\sum_{k=1}^{n}f_k=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\mathrm{d}x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\int_0^{a_k}f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)=0,$$

以及

$$\begin{aligned}0=&\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\mathrm{d}x\right)\\ =&\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}f_i(x)\,f_j(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ =&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\int_0^{a_i}f_i^2(x)\,\mathrm{d}x\right)+\sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{a_ia_j}\int_0^{a_i}f_i(x)\,\mathrm{d}x\int_0^{a_j}f_j(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ =&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\int_0^{a_i}f_i^2(x)\,\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

即 $f_1=f_2=\cdots=f_n=0$, 这就说明 $n=1$, 我们完成了证明.

193. (193.) 记

$$\epsilon_0 \triangleq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p x(0)^{p-1}} > 0.$$

当 $0 < \epsilon < \epsilon_0$, 考虑

$$f(y) \triangleq x(0) + \epsilon y^p - y, y \geqslant 0.$$

现在直接求导得 f 在 $\left[0, \frac{1}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p-1}}}\right)$ 递减, 在 $\left(\frac{1}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p-1}}}, +\infty\right]$ 递增且

$$f\left(\frac{1}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p-1}}}\right) = x(0) - \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p-1}}} < 0.$$

注意到

$$f(0) = x(0) > 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) > 0,$$

于是我们知道存在 $b > a > 0$ 使得

$$f(y) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \in [0, a] \bigcup [b, +\infty).$$

现在

$$x(t) \in [0, a] \bigcup [b, +\infty), \forall t \in \mathbb{R}.$$

注意到

$$0 = f(a) = x(0) + \epsilon a^p - a > x(0) - a,$$

即 $x(t) \in [0, a]$. 于是由 x 连续和介值定理得 $x(t) \in [0, a]$. 我们得证.

194. (194.) 设 $r_0 < s_0$ 使得 $f(r_0) < f(s_0)$. 定义

$$c \triangleq \frac{f(s_0) - f(r_0)}{2(s_0 - r_0 + 2)} > 0.$$

若对任何 $a \in \mathbb{R}$ 都有 $x_a \in (0, 1]$ 使得

$$f(a + x_a) - f(a - x_a) < c x_a.$$

注意到

$$[r_0, s_0] \subset \bigcup_{a \in [r_0, s_0]} (a - x_a, a + x_a),$$

由有限覆盖定理得

$$[r_0, s_0] \subset J \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i - x_{a_i}, a_i + x_{a_i}).$$

不妨设 n 是实现上述覆盖最小的自然数且 a_i 严格递增, 于是这些区间依次两两相交且不会出现三个同时相交的情况. 显然有

$$|J| = |(a_1 - x_{a_1}, a_n + x_{a_n})| \leqslant s_0 + 1 - (r_0 - 1) = s_0 - r_0 + 2,$$

从而注意到 J 中任意一个点至多只被上述区间覆盖两次知[113]

$$\sum_{i=1}^{n} 2x_{a_i} = \sum_{i=1}^{n} |(a_i - x_{a_i}, a_i + x_{a_i})| \leqslant 2(s_0 - r_0 + 2).$$

[113]注意到

$$2\chi_J(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{(a_i - x_{a_i}, a_i + x_{a_i})}(t), \forall t \in J,$$

于是

$$2|J| = \int_J 2\chi_J(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_J \chi_{(a_i - x_{a_i}, a_i + x_{a_i})}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} |(a_i - x_{a_i}, a_i + x_{a_i})|.$$

现在就有

$$\begin{aligned} & f\left(s_0\right)-f\left(r_0\right) \leqslant f\left(a_n+x_{a_n}\right)-f\left(a_1-x_{a_1}\right) \\ \leqslant & \sum_{k=1}^n\left[f\left(a_k+x_{a_k}\right)-f\left(a_n-x_{a_k}\right)\right]<c \sum_{k=1}^n x_{a_k} \\ \leqslant & f\left(s_0\right)-f\left(r_0\right), \end{aligned}$$

这就是一个矛盾!, 于是我们证明了存在 $a \in \mathbb{R}, c>0$ 使得

$$f(a+x)-f(a-x) \geqslant c x, \forall x \in[0,1] .$$

195. (195.) 记

$$\overline{u} \triangleq \frac{1}{\left|\partial B_r(\mathbf{x})\right|} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \mathrm{d} S(\mathbf{y})=\frac{1}{\left|\partial B_1(\mathbf{0})\right|} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x}+r \mathbf{y}) \mathrm{d} S(\mathbf{y}),$$

这里 $B_r(\mathbf{x})$ 表示以 $\mathbf{x}$ 为心, 半径 $r>0$ 的 $\mathbb{R}^d$ 中的开球.

我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} & =\frac{1}{\left|\partial B_1(\mathbf{0})\right|} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \mathbf{y} \cdot \nabla u(\mathbf{x}+r \mathbf{y}) \mathrm{d} S(\mathbf{y}) \\ & \overset{\text{Gauss-Green}}{=} \frac{1}{\left|\partial B_1(\mathbf{0})\right|} \int_{B_1(\mathbf{0})} r \Delta u(\mathbf{x}+r \mathbf{y}) \mathrm{d} \mathbf{y} \\ & =\frac{1}{\left|\partial B_r(\mathbf{x})\right|} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) \mathrm{d} \mathbf{y}=\frac{r}{\left|B_r(\mathbf{x})\right| d} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) \mathrm{d} \mathbf{y} \\ & =\frac{r}{d} \Delta u(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

这里最后一个等号来自调和函数平均值定理20.7. 积分中值定理表明

$$\overline{u}(0, \mathbf{x})=\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\left|\partial B_r(\mathbf{x})\right|} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \mathrm{d} S(\mathbf{y})=u(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

于是

$$\overline{u}(r, \mathbf{x})=u(\mathbf{x})+\frac{r^2}{2 d} \Delta u(\mathbf{x}), \forall r>0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

注意到

$$\frac{1}{2 d} \Delta u(\mathbf{x})=\lim_{r \to+\infty}\left(\frac{u(\mathbf{x})}{r^2}+\frac{1}{2 d} \Delta u(\mathbf{x})\right)=\lim_{r \to+\infty} \frac{\overline{u}(r, \mathbf{x})}{r^2} \geqslant 0,$$

我们有

$$\Delta u(\mathbf{x}) \geqslant 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

即 Δu 是 $\mathbb{R}^d$ 非负调和函数. 于是存在 $C \geqslant 0$ 使得

$$\Delta u(\mathbf{x})=C, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

现在考虑调和函数

$$h(\mathbf{x}) \triangleq u(\mathbf{x}) - C\frac{||\mathbf{x}||^2}{2d} \geqslant -C\frac{||\mathbf{x}||^2}{2d},$$

我们有 $C_1(\mathbf{x}_0, d) > 0$ 使得对任何 $R > 1$ 成立

$$\begin{aligned}\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} |h(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + 2\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} h^-(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\leqslant |B_R(\mathbf{x}_0)|\cdot h(\mathbf{x}_0) + 2\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{||\mathbf{x}||^2}{2d}\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\leqslant |B_R(\mathbf{x}_0)|\cdot h(\mathbf{x}_0) + 2\int_{B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{(R+||\mathbf{x}_0||)^2}{2d}\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= |B_R(\mathbf{x}_0)|\cdot h(\mathbf{x}_0) + |B_R(\mathbf{x}_0)|\frac{(R+||\mathbf{x}_0||)^2}{d}\\ &\leqslant C_1(\mathbf{x}_0, d)\,R^{2+d}.\end{aligned}$$

然后对任意阶为 k 的指标 α, 由调和函数微分的估计, 即周蜀林 30 页定理 2.7, 我们有

$$|D^\alpha h(\mathbf{x}_0)| \leqslant \frac{C_k(d)}{R^{d+k}}\int_{B_R(\mathbf{x})} |h(\mathbf{y})|\,\mathrm{d}\mathbf{y} \leqslant \frac{C_k(d)}{R^{k-2}}C_1(\mathbf{x}_0, d).$$

让 $R \to +\infty$ 知对 $k > 2$ 有 $D^\alpha h(\mathbf{x}) \equiv 0$, 这就推出 h 只能是二次多项式, 从而 u 也是二次多项式.

196. (196.) 条件不等式给出 $g' \neq 0$, 即 g 严格单调, 因此我们可以得

$$\left|\left(g\circ f\circ g^{-1}\right)'(x)\right| = \left|\frac{g'\left(f\left(g^{-1}(x)\right)\right)f'\left(g^{-1}(x)\right)}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}\right| < c, \forall x\in\mathbb{R}.$$

于是拉格朗日中值定理得

$$\left|\left(g\circ f\circ g^{-1}\right)(x) - \left(g\circ f\circ g^{-1}\right)(y)\right| \leqslant c|x-y|, \forall x, y\in\mathbb{R}.$$

现在 $g\circ f\circ g^{-1}$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 压缩映射, 因此由例题12.43知存在唯一的 $t\in\mathbb{R}$ 使得

$$\left(g\circ f\circ g^{-1}\right)(t) = t,$$

即 $\xi \triangleq g^{-1}(t)$ 为 f 所求唯一不动点.

197. (197.) 设

$$T_0 \triangleq \{T > 0 : f(x+T) = f(x), \forall x\in\mathbb{R}\},$$

则 f 有正周期 $T_n \downarrow T_0$.

若 $T_0 = 0$, 则对 $x\in X, n\in\mathbb{N}$, 存在 $k_n\in\mathbb{N}$ 使得

$$|x - x_0 - k_nT_n| \leqslant \frac{T_n}{2}.$$

于是我们有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x - k_nT_n) = f(x_0),$$

这和 f 不是常值函数矛盾!.

若 $T_0 > 0$ 不是 f 的周期, 则不妨设 T_n 严格递减[114], 此时 $T_{n-1} - T_n, n = 2, 3, \cdots$ 也是 f 的正周期, 因此 f 有趋于 0 的正周期而矛盾!. 至此我们证明了 f 必有最小正周期.

198. (198.) 解决此类问题的想法是

引理 30.15 (Pringsheim 定理)

若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ 收敛半径为 $R > 0$ 且对某个 $N\in\mathbb{N}$ 成立 $a_n \geqslant 0, \forall n \geqslant N$. 则 f 以 $z = R$ 为奇点. ♡

[114] 你可以从原本的 T_n 中挑选出严格递减的子列.

证明 不妨设 $N=0$. 若 f 在 $z=R$ 解析, 则设

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-R)^k,|z-R|<r,r>0.$$

对 $h\in\left(0,\frac{r}{3}\right)$, 我们的目标是证明

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_m(R+h)^j<\infty,$$

从而就有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 收敛半径超过 R 而矛盾!.

为此我们考虑 $R-h$ 小邻域 (例如 $|z-R+h|<\frac{h}{2}$) 内有

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-R+h)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{j=0}^{k}C_k^j(z-R+h)^j(R-h)^{k-j}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty}a_kC_k^j(R-h)^{k-j}\right)(z-R+h)^j,\end{aligned}$$

这里换序来自

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\left|a_kC_k^j(R-h)^{k-j}(z-R+h)^j\right|\\\leqslant&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}a_kC_k^j(R-h)^{k-j}|z-R+h|^j\\=&\sum_{k=0}^{\infty}a_k(R-h+|z-R+h|)^j<\infty\end{aligned}$$

和 Fubili 定理.

现在我们知道

$$b_j=\sum_{k=j}^{\infty}a_kC_k^j(R-h)^{k-j},j=0,1,2,\cdots.$$

设

$$|z-R+h|<r-h,$$

我们有

$$|z-R|\leqslant|z-R+h|+|h|<r-h+h=r,$$

即

$$R+h\in\{z\in\mathbb{C}:|z-R+h|<r-h\}\subset\{z\in\mathbb{C}:|z-R|<r\}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned} f(R+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (R+h-R+h)^k = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (2h)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} a_k C_k^j (R-h)^{k-j} (2h)^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_k C_k^j (R-h)^{k-j} (2h)^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (R+h)^k < \infty, \end{aligned}$$

这里换序来自 Levi 定理, 即非负级数无脑换. 现在我们完成了证明.

回到原题, 我们知道 $f_n(z)$ 在扣掉负半轴和原点解析, 所以 f_n 在 $z=1$ 的幂级数收敛半径为 1. 又 f_n 在 $z=2$ 解析, 所以 f_n 在 $z=1$ 的幂级数系数不能恒非负, 因此我们得证明.

199. (199.) 先来证明如果 $\mathbb{R}$ 上的复值光滑函数 f 满足对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有

$$f(2x) - \lambda f(x) \in \mathbb{C}[x],$$

则 $f \in \mathbb{C}[x]$.

事实上, 不妨设 $\lambda \neq 0$. 然后我们取 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$2^k > |\lambda|, \frac{d^k}{dx^k}\left[f(2x) - \lambda f(x)\right] = 0,$$

即

$$f^{(k)}(x) = \frac{2^k}{\lambda} f^{(k)}(2x).$$

现在对 $x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$f^{(k)}(x) = \lim_{m\to\infty} f^{(k)}\left(\frac{x}{2^m}\right) = \lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{2^k}{\lambda}\right)^m f^{(k)}(x)\right],$$

即只能有 $f^{(k)}(x) = 0$. 因此我们证明了 $f \in \mathbb{C}[x]$.

现在可以把 V 看成复数域上的线性空间 (你可以选 V 一组基, 然后 V 中元素看成这组基的复线性组合.) 考虑

$$T : V \to V, f(x) \mapsto f(2x).$$

由复线性变换可以相似上三角化, 即命题23.2可得 V 一组基 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 使得 T 在这组基下是上三角矩阵, 并记对角线为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. 我们有

$$Tf_1 = \lambda_1 f_1, Tf_i - \lambda_i f \in \operatorname{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_{i-1}\}, i = 2, 3, \cdots, m.$$

现在用一开始的结果归纳得

$$f_i \in \mathbb{C}[x], i = 1, 2, \cdots, m.$$

于是我们知道 $V \subset \mathbb{R}[x]$.

200. (200.) 首先 $\tan f$ 递减得 f 递减, 于是对任何 $x_0 \in (0,1)$ 都有 $f(x_0^+), f(x_0^-)$ 存在. 现在

$$\begin{aligned} f(x_0^-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0^+) &= \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)\tan x}{\tan x} \\ &= \frac{1}{\tan x_0} \lim_{x\to x_0^+} [f(x)\tan x] \\ &\geqslant \frac{1}{\tan x_0} \lim_{x\to x_0^-} [f(x)\tan x] = f(x_0^-), \end{aligned}$$

即

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0),$$

因此 f 在 x_0 连续. 我们证明了 f 在 $(0,1)$ 连续.

201. (201.) 首先假设

$$|b| \leqslant M, |c| \leqslant M.$$

然后对 $t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}$, 考虑

$$E(t) \triangleq \int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 + a^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|^2 \right) \mathrm{d}x, t \in [0,t_0],$$

则

$$\begin{aligned}
E'(t) = & \int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(2u_t u_{tt} + 2a^2 u_x u_{xt}\right) \mathrm{d}x \\
& - a\left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)|_{x=x_0+a(t_0-t)} - a\left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)|_{x=x_0-a(t_0-t)} \\
\overset{\text{分部积分}}{=} & \int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(2u_t u_{tt} - 2a^2 u_{xx} u_t\right) \mathrm{d}x + 2a^2 u_x u_t|_{x=x_0-a(t_0-t)}^{x=x_0+a(t_0-t)} \\
& - a\left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)|_{x=x_0+a(t_0-t)} - a\left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right)|_{x=x_0-a(t_0-t)} \\
= & -2\int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(bu_x u_t + cu_t^2\right) \mathrm{d}x \\
& - a\left(u_t - au_x\right)^2|_{x=x_0+a(t_0-t)} - a\left(u_t + au_x\right)^2|_{x=x_0-a(t_0-t)} \\
\leqslant & 2\int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(|bu_x u_t| + \left|cu_t^2\right|\right) \mathrm{d}x \leqslant 2M \int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(|u_x u_t| + \left|u_t^2\right|\right) \mathrm{d}x \\
\leqslant & M\int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} \left(|u_x|^2 + 3|u_t|^2\right) \mathrm{d}x \leqslant M\left(3 + \frac{1}{a^2}\right) E(t).
\end{aligned}$$

注意到 $E(0) = 0$ 以及

$$\left(\frac{E(t)}{e^{M\left(3+\frac{1}{a^2}\right)t}}\right)' = \frac{E'(t) - M\left(3+\frac{1}{a^2}\right)E(t)}{e^{M\left(3+\frac{1}{a^2}\right)t}} \leqslant 0,$$

于是我们有

$$0 \leqslant \frac{E(t)}{e^{M\left(3+\frac{1}{a^2}\right)t}} \leqslant 0, \forall t \in [0,t_0],$$

即

$$u_t(x,t) = u_x(x,t) = 0, \forall t \in [0,t_0], x \in [x_0 - a(t_0-t), x_0 + a(t_0-t)].$$

特别的有

$$u_t(x_0,t_0) = u_x(x_0,t_0) = 0.$$

由 t_0, x_0 任意性得 u_t, u_x 恒为 0, 从而 u 恒为 0 得证.

202. (202.) 若 f 在 $[0,+\infty)$ 严格递增, 则

$$M(t) + m(t) = f(t) + f(0), \forall t \geqslant 0,$$

即 $M+m$ 在 $[0,+\infty)$ 严格递增.

若 $M+m$ 在 $[0,+\infty)$ 严格递增. 首先

$$M(t) = \underbrace{M(t) + m(t)}_{\text{严格递增}} - \underbrace{m(t)}_{\text{递减}},$$

即 M 在 $[0,+\infty)$ 严格递增.

如果存在 $t > 0$ 使得 $f(t) \neq M(t)$, 则取 $s \in [0,t)$ 使得 $f(s) = M(t)$. 注意到

$$M(s) \geqslant f(s) = M(t) > M(s),$$

这就是矛盾!, 因此 $f(t) = M(t)$ 是严格递增函数而得证.

203. (203.)

先证明 f 一定连续, 若不然, 不妨设 f 在 $x=0$ 不连续. 取 g 为线性函数得 f 在任何闭区间具有原函数并由达布中值定理11.5得 f 在 $[0,1]$ 具有介值性. 于是存在实数 $y_0 \neq f(0)$ 使得 0 的任意邻域内 f 取得无穷次. 考虑

$$F(x) \triangleq \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ y_0, & x = 0 \end{cases}.$$

我们来证明存在同胚映射 $h:[0,1]\to[0,1]$ 使得 $F\circ h$ 有原函数.

首先 F 仍然有介值性. 设 $\widetilde{f}$ 是 f 在 $[0,1]$ 原函数, 我们对 $x\in[0,1]$ 有

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left[\widetilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\widetilde{f}(x)\right]+(y_0-f(0))\max\{0,1-nx\}\right).$$

现在我们知道 F 是具有介值性的第一类 Baire 函数[115] 由On continuous transformation of some functions into an ordinary derivative 中的 Lusin 定理得 h 存在性.

现在注意到 $f\circ h, F\circ h$ 只在一个不同, 由条件得 $f\circ h$ 有原函数, 因此 $F\circ h - f\circ h$ 是一个只有一个点非 0 的导函数, 这和其具备介值性矛盾!. 因此我们得到了 f 连续.

当 f 连续时, 对任何 $c\in\mathbb{R}, t>0$, 注意到

$$\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

有原函数[116] $\int_0^x \sin\frac{1}{y}\mathrm{d}y$, 我们由条件有

$$\begin{cases} f\left(t\sin\frac{1}{x}+c\right), & x\in(0,1] \\ f(c), & x=0 \end{cases}$$

是有界函数且有原函数 H_c. 因此我们有

$$\begin{aligned} f(c)=H_c'(0)&=\lim_{x\to0+}\frac{H_c(x)-H_c(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\left[\frac{1}{x}\int_0^x f\left(t\sin\frac{1}{y}+c\right)\mathrm{d}y\right] \\ &=\lim_{s\to+\infty}\left[s\int_s^\infty\frac{f(t\sin u+c)}{u^2}\mathrm{d}u\right]=\lim_{s\to+\infty}\left[\int_1^\infty\frac{f(t\sin(su)+c)}{u^2}\mathrm{d}u\right] \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t\sin x+c)\,\mathrm{d}x\int_1^\infty\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t\sin x+c)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这里倒数第二个等号来自黎曼引理9.2.

考虑卷积磨光13.14得

$$f_\epsilon(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\chi_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}y,\epsilon>0.$$

我们有

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}f(t\sin u+y)\chi_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\chi_\epsilon(x-t\sin u-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}u \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_\epsilon(x-t\sin u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

对 t 求二次导并代入 $t=0$ 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_\epsilon''(x)\sin^2u\mathrm{d}u=0\Rightarrow f_\epsilon''=0,$$

[115] 即连续函数列的逐点极限.

[116] 见例题8.47.

即有

$$f_\epsilon(x)=a_\epsilon x+b_\epsilon,\epsilon>0.$$

由

$$\lim_{\epsilon\to0^+}f_\epsilon(0)=f(0),\lim_{\epsilon\to0^+}f_\epsilon(1)=f(1)$$

可得

$$\lim_{\epsilon\to0^+}b_\epsilon=f(0),\lim_{\epsilon\to0^+}a_\epsilon=f(1)-f(0),$$

即

$$f(x)=\lim_{\epsilon\to0^+}f_\epsilon(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$$

为线性函数.

204. (204.) 取 $f(x)=g(x)=x$ 可得对一切 $\alpha\geqslant2$ 都有

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))=|x-y|^2\geqslant|x-y|^\alpha,\forall x,y\in[0,1].$$

当 $\alpha\leqslant0$, 显然令 $x=y$ 就说明了 f,g 不存在.

当 $\alpha\in(0,2)$, 我们考虑

$$h(x)\triangleq\frac{f(x)+g(x)}{2},x\in[0,1],$$

则有

$$\begin{aligned}|h(x)-h(y)|&=\frac{f(x)-f(y)+g(x)-g(y)}{2}\\&=\frac{|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|}{2}\geqslant\sqrt{|f(x)-f(y)||g(x)-g(y)|}\\&\geqslant|x-y|^{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

现在我们知道 $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是单射, 所以记 $S\triangleq h([0,1])$, 我们有

$$\left|h^{-1}(x)-h^{-1}(y)\right|\leqslant|x-y|^{\frac{2}{\alpha}},\forall x,y\in S.$$

对

$$n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant m,k\in\mathbb{N},x,y\in S\bigcap\left[n+\frac{k-1}{m},n+\frac{k}{m}\right),$$

我们有

$$\left|h^{-1}(x)-h^{-1}(y)\right|\leqslant\frac{1}{m^{\frac{2}{\alpha}}},$$

即

$$\left|h^{-1}\left(S\bigcap\left[n+\frac{k-1}{m},n+\frac{k}{m}\right)\right)\right|\leqslant\frac{1}{m^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

我们有

$$\left|h^{-1}\left(S\bigcap[n,n+1)\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^m\left|h^{-1}\left(S\bigcap\left[n+\frac{k-1}{m},n+\frac{k}{m}\right)\right)\right|\leqslant m^{1-\frac{2}{\alpha}}.$$

让 $m\to+\infty$ 得

$$\left|h^{-1}\left(S\bigcap[n,n+1)\right)\right|=0,\forall n\in\mathbb{Z}.$$

现在

$$1=\left|h^{-1}(S)\right|=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|h^{-1}\left(S\bigcap[n,n+1)\right)\right|=0,$$

这就是一个矛盾!. 即 f,g 不存在.

综上所述, 所求 α 范围为 $\alpha\geqslant2$.

205. (205.) 由连续映射单射等价严格单调12.2可不妨设 f 递增, 递减时考虑换元 $x=1-y$ 即可.

对 $t\in[0,1]$, 充分大的自然数 n 考虑

$$\varphi_t^{(n)}(x)\triangleq\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant t\\ n\left(t+\frac{1}{n}-x\right), & t<x<t+\frac{1}{n}\\ 0, & t+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases},$$

我们有

$$0\leqslant\varphi_t^{(n)}(x)\leqslant 1,\lim_{n\to\infty}\varphi_t^{(n)}(x)=\chi_{[0,t]}(x).$$

现在控制收敛定理表明

$$\begin{aligned}f^{-1}(t)&=\int_0^1\chi_{[0,t]}(f(x))\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_t^{(n)}(f(x))\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_t^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\chi_{[0,t]}(x)\,\mathrm{d}x\\&=t,\end{aligned}$$

即 $f=x$ 或者 $f=1-x$.

注[*] 我们有本题真正的背景推广

定理 30.2

设 Ω 是度量空间, $C_b(\Omega)$ 表示 Ω 上有界连续函数全体, μ,ν 是 Ω 上有限测度. 若

$$\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}\nu,\forall g\in C_b(\Omega),$$

则 $\mu=\nu$.

♡

证明 设 $C\subset\Omega$ 是闭集, 考虑

$$\varphi_n(\mathbf{x})\triangleq\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in C\\ 1-nd(\mathbf{x},C), & d(\mathbf{x},C)\leqslant\frac{1}{n}\\ 0, & d(\mathbf{x},C)>\frac{1}{n}\end{cases},\mathbf{x}\in\Omega,n\in\mathbb{N}.$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\mathbf{x})=\chi_C(\mathbf{x}),0\leqslant\varphi_n(\mathbf{x})\leqslant 1.$$

于是控制收敛定理和条件等式表明

$$\mu(C)=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\varphi_n\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\varphi_n\mathrm{d}\nu=\nu(C).$$

用 $\mathscr{B}(\Omega)$ 表示 Ω 上 Borel 可测集全体. 容易验证

$$\{C\subset\mathscr{B}(\Omega):\mu(C)=\nu(C)\}$$

是一个包含所有闭集构成 $\pi-$ 类的 $\lambda-$ 类, 因此由 $\pi-\lambda$ 定理可得

$$\mu(C)=\nu(C),\forall C\in\mathscr{B}(\Omega).$$

那定理30.2和原题有什么关系呢?

对 $f:\Omega\to\Omega$ 是一个可测映射, f 把 Ω 上的测度 μ 前推到 Ω 的测度为 ν. 则

$$\int_\Omega g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\nu=\int_\Omega g(f(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mu,\forall\text{可测函数}g,$$

即定理30.2表明为了验证 f 是保测的, 我们只需要对有界连续函数 g 验证等式

$$\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}\nu$$

即可.

还是没感觉?

为了得到概率空间 Ω(概率为 P) 上的随机变量 X,Y 同分布, 我们只需要验证对一切有界 $f\in C(\mathbb{R})$ 成立

$$\int_{\Omega} f(X)\,\mathrm{d}P=\int_{\Omega} f(Y)\,\mathrm{d}P$$

即可.

206. (206.) 考虑非空紧集

$$\{x\in[a,b]:f(x)\leqslant 0\}.$$

则紧集必达到最大值的得 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)\leqslant 0$. 现在当 $x\in(c,b]$ 必有 $f(x)>0$. 若 $f(c)<0$, 则连续性给出 c 右邻域内 $f<0$, 这和 c 最大性矛盾!, 因此 $f(c)=0$. 得证.

207. (207.) 首先

$$\begin{aligned}\left|T_n\left((t-x)^2\right)(x)\right|&=\left|\left(T_n\left(t^2\right)(x)-x^2\right)-2x\left(T_n(t)(x)-x\right)+x^2\left(T_n(1)(x)-1\right)\right|\\&\leqslant\left|\left(T_n\left(t^2\right)(x)-x^2\right)\right|+2|x|\cdot\left|\left(T_n(t)(x)-x\right)\right|^2+x^2\left|T_n(1)(x)-1\right|,\end{aligned}$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}T_n\left((\cdot-x)^2\right)(x)=0.$$

对任何 $\delta>0$, 考虑

$$w_f(\delta)\triangleq\sup\left\{|f(s)-f(t)|,s,t\in X,|s-t|\leqslant\delta\right\}.$$

我们有

$$|f(t)-f(s)|\leqslant w_f(\delta)+\frac{2\sup\limits_X|f|}{\delta^2}|t-s|^2,\forall t,s\in X.$$

注意到

$$\begin{aligned}&|T_n(f)(x)-f(x)|\leqslant|T_n(f-f(x))(x)|+|f(x)|\,|T_n(1)(x)-1|\\&\leqslant T_n(|f-f(x)|)(x)+\sup_X|f|\cdot|T_n(1)(x)-1|\\&\leqslant w_f(\delta)T_n(1)(x)+\frac{2M}{\delta^2}T_n\left((\cdot-x)^2\right)(x)+\sup_X|f|\cdot|T_n(1)(x)-1|,\end{aligned}$$

我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in X}|T_n(f)(x)-f(x)|\leqslant w_f(\delta).$$

注意到 f 在 X 一致连续, 于是

$$\lim_{\delta\to0^+}w_f(\delta)=0,$$

因此一致的有

$$\lim_{n\to\infty}T_n(f)=f.$$

208. (208.) 若 $\beta\neq0$, 则存在 $X,c>0$ 使得

$$\left|\sum_{p=0}^{k}a_pf(x+p)\right|\geqslant cx^{-\alpha}>0,\forall x\geqslant X.$$

由连续性, 不妨设[117]

$$\sum_{p=0}^{k}a_pf(x+p)\geqslant cx^{-\alpha}>0,\forall x\geqslant X.$$

记

$$b_j\triangleq\sum_{p=0}^{j}a_p,j=0,1,2,\cdots,k,$$

[117] 负的情况类似讨论即可.

我们由 Abel 变换8.2得对 $Y>X$ 有

$$\begin{aligned}\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^k a_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x&=\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_p\left[f\left(x+p\right)-f\left(x+p+1\right)\right]+b_kf\left(k+p\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x-\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_pf\left(x+p+1\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x-\int_{X+1}^{Y+1}\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{Y+1}^Y\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x-\int_{X+1}^X\left[\sum_{p=0}^{k-1}b_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^k a_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x&\leqslant 2\sum_{p=0}^{k-1}\left|b_p\right|\cdot\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f\left(x\right)\right|;\\\int_X^Y\left[\sum_{p=0}^k a_pf\left(x+p\right)\right]\mathrm{d}x&\geqslant\int_X^Y cx^{-\alpha}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

让 $Y\to+\infty$ 即得矛盾!, 因此 $\beta=0$.

209. (209.) 若存在这个 f, 对 $N\in\mathbb{N}$, 考虑

$$S_N\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}:\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\leqslant n!\cdot N,\forall n\in\mathbb{N}_0\right\}.$$

于是 S_N 是闭集. 因为对任何 $x\in\mathbb{R}$, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x\right)}{n!}\left(y-x\right)^n$$

收敛半径为 ∞, 所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{f^{(n)}\left(x\right)}{n!}\right|=0,$$

从而 $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}S_N$. 由 Baire 纲定理13.13, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得 S_{N_0} 包含一个长度小于 1 的开区间 I. 因此取 $x_0\in I$, 我们由 Taylor 公式拉格朗日余项得

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\frac{f^{(n+1)}\left(\theta\right)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1},\forall x\in I.$$

现在我们有

$$\left|\frac{f^{(n+1)}\left(\theta\right)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}\right|\leqslant N_0\cdot\left|I\right|^{n+1}\to 0,n\to\infty,$$

于是 f 在 I 实解析, 这就是和 f 无处实解析矛盾!

210. (210.) 不妨设 f 不为线性函数, 否则不等式是平凡的.

我们证明

$$M_1\leqslant 2\left(1+\alpha\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}M_0^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}M_{1+\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

对 $x\in\mathbb{R},h>0$, 我们有

$$\begin{aligned}f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)&=\int_{-h}^h f'\left(x+t\right)\mathrm{d}t\\&=2hf'\left(x\right)+\int_{-h}^h\left(f'\left(x+t\right)-f'\left(x\right)\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|\frac{f(x+h)-f(x-h)-\int_{-h}^{h}(f'(x+t)-f'(x))\,\mathrm{d}t}{2h}\right| \\ &\leqslant \frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h}+\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f'(x+t)-f'(x)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M_0}{h}+\frac{M_{1+\alpha}}{2h}\int_{-h}^{h}|t|^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{M_0}{h}+\frac{h^{\alpha}M_{1+\alpha}}{\alpha+1}.\end{aligned}$$

现在我们取

$$h\triangleq\left(\frac{(1+\alpha)M_0}{M_{1+\alpha}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}>0.$$

此时就有

$$|f'(x)|\leqslant 2(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}}M_0^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}M_{1+\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

因此由 x 任意性得

$$M_1\leqslant 2(1+\alpha)^{-\frac{1}{1+\alpha}}M_0^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}M_{1+\alpha}^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

现在 $\lambda(\alpha)\triangleq\frac{1}{1+\alpha}$ 为所求.

211. (211.) 首先容易看到

$$f_n'=f_{n-1},n=1,2,\cdots.$$

先来证明第一个论述:

我们归纳证明, 当 $n=1$, 若 $f(a)f_1(a)<0$, 则不妨设 $f(a)<0$, 此时 $\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y>0$, 因此显然 f 至少变号 1 次.

设 n 时命题成立, 当 $n+1$ 时, 由归纳假设得 f_1 在 $[0,a]$ 变号次数大于等于 $f_1(a),f_2(a),\cdots,f_{n+1}(a)$ 变号次数 k. 因为 $f_1(0)=0$, 所以 $f_1'=f$ 变号次数大于等于 f_1 变号次数. 因此接下来只需要考虑 $f(a)f_1(a)<0$ 且 f_1 变号次数恰好为 k 的情况, 否则已经得证.

若 f_1 变号次数为 k, 设严格递增数列 $\{a_i\}_{i=1}^k$ 是 f 变号点, 严格递增数列 $\{b_i\}_{i=1}^k$ 是 f_1 变号点. 注意到 $(b_{i-1},b_i),i=2,3,\cdots,k$ 一定有 f 的变号点. 因为 $f(a)f_1(a)<0$, 所以 f 在 (b_k,a) 还有变号点. 又 $f_1(0)=0$, 所以 $(0,b_1)$ 上 f 也有变号点, 这样就得到了 f 有 $k+1$ 个变号点, 此时得证 f 在 $[0,a]$ 符号改变次数不小于等于有序集 $f(a),f_1(a),\cdots,f_n(a)$ 符号改变次数.

对于第二个论述:

我们考虑 $g(x)\triangleq f(a-x)$, 则对 $n=0,1,2,\cdots$, 可类似 f_n 取函数 g_n, 然后有

$$g_{n+1}(a)=\frac{1}{n!}\int_0^a(a-t)^n f(a-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\int_0^a t^n f(t)\,\mathrm{d}t,$$

从而由第一个论述可得结论.

212. (212.) 条件给出 $\mathcal{P}$ 是 $C[0,1]$ 的闭子空间. 考虑分解

$$\mathcal{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{p\in\mathcal{P}:\deg p\leqslant n\}.$$

若 $\mathcal{P}$ 无限维, 注意到上式右侧取并的集合都是有限维的, 因此是闭的且在 $\mathcal{P}$ 中没有内点, 这和 Baire 纲定理13.13矛盾!, 因此 $\mathcal{P}$ 有限维.

213. (213.)

对任何固定的 $R>0$, 考虑

$$M_k\triangleq\sup_{||\mathbf{y}||<R(1-2^{-k})}|u(\mathbf{y})|,k=1,2,\cdots.$$

对任何 $||\mathbf{x}|| \leqslant R\left(1-2^{-k}\right)$, 由调和函数平均值定理20.7我们有

$$|u(\mathbf{x})| \leqslant \frac{2^{n(k+1)}}{a(n) R^n} \int_{||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<\frac{R}{2^{k+1}}} |u(\mathbf{y})| \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

注意到由三角不等式得上述积分区域中的点 $\mathbf{y}$ 一定满足

$$||\mathbf{y}|| \leqslant R\left(1-2^{-k-1}\right),$$

我们有

$$|u(\mathbf{x})| \leqslant \frac{2^{n(k+1)}}{a(n) R^n} M_{k+1}^{1-p} \int_{||\mathbf{y}-\mathbf{x}||<\frac{R}{2^{k+1}}} |u(\mathbf{y})|^p \mathrm{d}\mathbf{y} \leqslant \frac{C 2^{n(k+1)} M_{k+1}^{1-p}}{a(n) R^n}.$$

于是我们就得到了

$$M_k \leqslant \frac{C 2^{n(k+1)} M_{k+1}^{1-p}}{a(n) R^n}, k=1,2, \cdots.$$

若 u 不恒为 0, 则当 R 充分大, 我们有所有 $M_k>0$, 则对 $k=1,2, \cdots$ 都有

$$(1-p)^k \ln M_k-(1-p)^{k+1} \ln M_{k+1} \leqslant (1-p)^k \ln \frac{C 2^n}{a(n) R^n}+k(1-p)^k \ln 2^n.$$

显然

$$\lim_{k \to+\infty}\left[(1-p)^{k+1} \ln M_{k+1}\right]=0,$$

于是求和得

$$\begin{aligned}(1-p) \ln M_1 &\leqslant \ln \frac{C 2^n}{a(n) R^n} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k+\ln 2^n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k \\ &=\frac{1-p}{p} \cdot \ln \frac{C 2^n}{a(n) R^n}+\frac{1-p}{p^2} \cdot \ln 2^n.\end{aligned}$$

然后让 $R \to+\infty$ 得

$$\lim_{R \to+\infty} M_1=\lim_{R \to+\infty} \sup_{||\mathbf{y}||<\frac{R}{2}} |u(\mathbf{y})|=0,$$

这就证明了只能有 $u \equiv 0$, 从而矛盾!. 因此我们有 $u \equiv 0$.

214. (214.) 为方便, 我们对 $S \subset \Omega$, 记

$$||f||^S \triangleq \sum_{|\alpha| \leqslant k}\left(\frac{1}{\alpha!} \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|D^\alpha f(\mathbf{x})\right|\right). \tag{30.216}$$

先证明

$$||fg||^S \leqslant ||f||^S ||g||^S. \tag{30.217}$$

事实上

$$\begin{aligned}||fg||^S &= \sum_{|\alpha| \leqslant k}\left(\frac{1}{\alpha!} \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|D^\alpha(fg)(\mathbf{x})\right|\right) \\ &=\sum_{|\alpha| \leqslant k}\left(\frac{1}{\alpha!} \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|\sum_{\gamma \leqslant \alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}} C_\alpha^\gamma D^\gamma f(\mathbf{x}) \cdot D^{\alpha-\gamma} g(\mathbf{x})\right|\right) \\ &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sum_{\gamma \leqslant \alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}}\left(\frac{1}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|D^\gamma f(\mathbf{x})\right| \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|D^{\alpha-\gamma} g(\mathbf{x})\right|\right) \\ &=\sum_{|\gamma| \leqslant k}\left(\frac{1}{\gamma!} \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|D^\gamma f(\mathbf{x})\right|\right) \cdot \sum_{|\alpha| \leqslant k}\left(\frac{1}{\alpha!} \sup_{\mathbf{x} \in S}\left|D^\alpha f(\mathbf{x})\right|\right) \\ &=||f||^S \cdot ||g||^S,\end{aligned}$$

这就得到了(30.217).

取紧集列 $\{K_p\}_{p=0}^{\infty}$ 使得

$$K_0 \triangleq \emptyset, K_p \subset K_{p+1}^{\circ}, p=0,1,2,\cdots, \bigcup_{p=0}^{\infty} K_p = \Omega.$$

再取

$$\epsilon_p \triangleq \inf_{K_{p+1}\setminus K_p} \epsilon(\mathbf{x}) > 0, p=0,1,2,\cdots.$$

我们的目标是找到 Ω 上的实解析函数 g 使得

$$||f-g||^{K_{p+1}\setminus K_p} \leqslant \epsilon_p, \forall p \in \mathbb{N}_0. \tag{30.218}$$

不妨设 $\lim\limits_{p\to+\infty} \epsilon_p = 0$, 取 $\varphi_p \in C_c^{\infty}(\Omega), p=0,1,2,\cdots$ 使得在 K_{p-1} 邻域内有 $\varphi_p = 0$, 在 $\overline{K_{p+1}\setminus K_p}$ 内 $\varphi_p = 1$. 考虑

$$M_p \triangleq 1 + ||\varphi_p||^{\Omega}, \delta_p > 0, p \in \mathbb{N}_0$$

使得

$$2\delta_{p+1} \leqslant \delta_p, \sum_{q=p}^{\infty} \delta_q M_{q+1} \leqslant \frac{1}{4}\epsilon_p, \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

引理 30.16

对 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n), \lambda > 0$, 记

$$I_\lambda(f)(\mathbf{x}) \triangleq \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2} \mathrm{d}\mathbf{y},$$

则 $I_\lambda(f)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 实解析函数且

$$\lim_{\lambda\to+\infty} ||I_\lambda(f) - f||^{\mathbb{R}^n} = 0,$$

这里范数的定义可见(30.216).

证明 考虑

$$I_\lambda(f)(\mathbf{z}) \triangleq \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-\lambda||\mathbf{z}-\mathbf{y}||_{\mathbb{C}^n}^2} \mathrm{d}\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}.$$

我们有

$$\begin{aligned} I_\lambda(f)(\mathbf{z}) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda||\mathbf{z}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2\right)^m}{m!} \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right)^m \mathrm{d}\mathbf{y}}_{\text{关于}\mathbf{z}\text{的多项式}}. \end{aligned}$$

显然上述级数关于 $\mathbf{z}$ 内闭一致收敛, 所以 $I_\lambda(f)$ 是一个 $\mathbb{C}^n$ 的整函数, 即 $I_\lambda(f)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 实解析函数.
对任何 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leqslant k$, 我们有

$$\begin{aligned} D^\alpha I_\lambda(f)(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} D^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2} \mathrm{d}\mathbf{y}\right] \\ &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} D^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) e^{-\lambda||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2} \mathrm{d}\mathbf{y}\right] \\ &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) e^{-\lambda||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2} \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(\mathbf{y}) e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2} \mathrm{d}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

对任何 $\epsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使得

$$|D^{\alpha}f(\mathbf{y})-D^{\alpha}f(\mathbf{x})|\leqslant\frac{\epsilon}{2},\forall||\mathbf{y}-\mathbf{x}||\leqslant\delta.$$

记

$$M\triangleq\sup_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n}|D^{\alpha}f(\mathbf{y})|.$$

于是设 λ 充分大使得 $M2^{1+\frac{n}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}\delta^2}<\frac{\epsilon}{2}$, 我们就有

$$\begin{aligned}
&|D^{\alpha}I_{\lambda}(f)(\mathbf{x})-D^{\alpha}f(\mathbf{x})|\\
\leqslant&\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\alpha}f(\mathbf{y})-D^{\alpha}f(\mathbf{x})|\,e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2}\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\leqslant&\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\epsilon}{2}\int_{||\mathbf{y}-\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}\leqslant\delta}e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2}\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}2M\int_{||\mathbf{y}-\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^n}>\delta}e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2}\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\leqslant&\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\lambda||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2}\mathrm{d}\mathbf{y}+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}2Me^{-\frac{\lambda}{2}\delta^2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{\lambda}{2}||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^n}^2}\mathrm{d}\mathbf{y}\\
=&\frac{\epsilon}{2}+M2^{1+\frac{n}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}\delta^2}\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,
\end{aligned}$$

这就给出了

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}|D^{\alpha}I_{\lambda}(f)(\mathbf{x})-D^{\alpha}f(\mathbf{x})|\leqslant\epsilon,$$

因此我们证明了 $D^{\alpha}I_{\lambda}(f)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 一致收敛到 $D^{\alpha}f$. 因此显然有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}||I_{\lambda}(f)-f||^{\mathbb{R}^n}=0.$$

回到原题. 由引理30.16, 存在 $\lambda_0>0$ 使得 $g_0\triangleq I_{\lambda_0}(\varphi_{\lambda_0}f)$ 成立

$$||g_0-\varphi_{\lambda_0}f||^{K_1}<\delta_0.$$

假设

$$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{p-1},\cdots;g_0,g_1,\cdots,g_{p-1},\cdots$$

已经给定, 由引理30.16得 $l_p>0$ 使得对任何 $\lambda_p>l_p$,

$$g_p\triangleq I_{\lambda_p}(\varphi_p(f-g_0-\cdots-g_{p-1}))$$

满足

$$||g_p-\varphi_p(f-g_0-\cdots-g_{p-1})||^{K_{p+1}}<\delta_p.$$

现在得到 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty},\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ 之后, 我们把选取的 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ 取更大使得

$$\{\lambda_p\}_{p=0}^{\infty}\subset(1,+\infty),\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_q}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\lambda_q}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi_q(\mathbf{y})\left(f(\mathbf{y})-\sum_{k=0}^{q-1}g_k(\mathbf{y})\right)\right|\mathrm{d}\mathbf{y}<\infty.\tag{30.219}$$

对 $p\in\mathbb{N}$, 因为 φ_p 在 K_{p-1} 邻域为 0, 所以

$$||g_p||^{K_{p-1}}=||g_p-\varphi_p(f-g_0-\cdots-g_{p-1})||^{K_{p-1}}<\delta_p.$$

因为 φ_p 在 $\overline{K_{p+1}\setminus K_p}$ 邻域为 1, 所以

$$||f-g_0-\cdots-g_{p-1}-g_p||^{K_{p+1}\setminus K_p}<\delta_p.$$

现在我们有 $||g_{p+1}||^{K_p} \leqslant \delta_{p+1}$ 以及

$$\begin{aligned}||g_{p+1}||^{K_{p+1}\backslash K_p} &\leqslant \left|\left|\varphi_{p+1}\left(f-\sum_{k=0}^{p}g_k\right)\right|\right|^{K_{p+1}\backslash K_p}+\left|\left|g_{p+1}-\varphi_{p+1}\left(f-\sum_{k=0}^{p}g_k\right)\right|\right|^{K_{p+1}\backslash K_p}\\ &\leqslant ||\varphi_{p+1}||^{K_{p+1}\backslash K_p}\left|\left|f-\sum_{k=0}^{p}g_k\right|\right|^{K_{p+1}\backslash K_p}+\delta_{p+1}\\ &\leqslant ||\varphi_{p+1}||^{\Omega}\delta_p+\delta_{p+1}\leqslant M_{p+1}\delta_p+\delta_{p+1}.\end{aligned}$$

现在我们有

$$||g_{p+1}||^{K_{p+1}}\leqslant M_{p+1}\delta_p+2\delta_{p+1}\leqslant M_{p+1}\delta_p+\delta_p\leqslant 2\delta_p M_{p+1}.$$

因此我们有

$$\left|\left|\sum_{q=p+1}^{\infty}g_q\right|\right|^{K_{p+1}}\leqslant 2\sum_{q=p+1}^{\infty}\delta_q M_{q+1}<\frac{1}{2}\epsilon_p,\forall p\in\mathbb{N},$$

即

$$g\triangleq\sum_{q=0}^{\infty}g_q\in C^k(\Omega).$$

我们还有

$$||f-g||^{K_{p+1}\backslash K_p}\leqslant\left|\left|f-\sum_{q=0}^{p}g_q\right|\right|^{K_{p+1}\backslash K_p}+\left|\left|\sum_{q=p+1}^{\infty}g_q\right|\right|^{K_{p+1}\backslash K_p}<\delta_p+\frac{1}{2}\epsilon_p<\epsilon_p.$$

相似引理30.16的证明, 对 $p\in\mathbb{N}_0$, 我们知道

$$g_p(\mathbf{z})\triangleq\left(\frac{\lambda_p}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_p(\mathbf{y})\left(f(\mathbf{y})-\sum_{q=0}^{p-1}g_q(\mathbf{y})\right)e^{-\lambda_p\sum\limits_{j=1}^{n}(z_j-y_j)^2}\mathrm{d}\mathbf{y}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数且

$$\rho_p\triangleq\frac{1}{2}d(K_p,\Omega\setminus K_{p+1})>0,p=0,1,2,\cdots.$$

再取开集 $U_p\subset\mathbb{C}^n$ 使得

$$K_p\subset U_p,\Re\left\{\sum_{j=1}^{n}(z_j-y_j)^2\right\}>\rho_p,\forall\mathbf{z}\in U_p,\mathbf{y}\in\Omega\setminus K_{p+1}.$$

注意到

$$\mathrm{supp}\varphi_q\subset\Omega\setminus K_{p+1},\forall q>p+1.$$

对 $\mathbf{z}\in U_p,q>p+1$, 我们有

$$\begin{aligned}|g_q(\mathbf{z})|&\leqslant\left(\frac{\lambda_q}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\lambda_q\rho_p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi_q(\mathbf{y})\left(f(\mathbf{y})-\sum_{k=0}^{q-1}g_k(\mathbf{y})\right)\right|\mathrm{d}\mathbf{y}\\ &\leqslant\left(\frac{\lambda_q}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\lambda_q}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi_q(\mathbf{y})\left(f(\mathbf{y})-\sum_{k=0}^{q-1}g_k(\mathbf{y})\right)\right|\mathrm{d}\mathbf{y}.\end{aligned}$$

由我们知道 $\sum\limits_{q=1}^{\infty}g_q(\mathbf{z})$ 在 U_p 一致收敛, 所以 $\sum\limits_{q=0}^{\infty}g_q(\mathbf{z})$ 在 Ω 上内闭一致收敛, 因此收敛到 Ω 上一个解析函数.

因此我们证明了 $g\triangleq\sum\limits_{p=0}^{\infty}g_p$ 为所求.

215. (215.)dF 处处可逆我们知道 F 是开映射, 即 $F(\mathbb{R}^n)$ 是开集.

设 $F(\mathbf{x}_n)\to\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. 我们由

$$g(||F(\mathbf{x}_n)||)\geqslant||\mathbf{x}_n||$$

知 $\{\mathbf{x}_n\}$ 有界, 因此设 $\mathbf{x}_{n_k} \to \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 从而

$$F\left(\mathbf{x}_{n_k}\right) \to \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in F\left(\mathbb{R}^n\right).$$

现在 $F\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是闭集. 因此由 $\mathbb{R}^n$ 连通得 $F\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}^n$.

216. (216.) 注意到 $L_\lambda = I +$ 秩2算子, 所以由张恭庆泛函分析上册 222 页, 定理 4.2.10, 我们有

$$\dim\ker L_\lambda = \dim\left(C[0,1]/\mathrm{Im}L_\lambda\right),$$

特别的 L_λ 满射等价于 L_λ 单射. 我们还有

$$\mathrm{Im}L_\lambda = \left(\ker L_\lambda^*\right)^\perp, \dim\ker L_\lambda^* = \dim\ker L_\lambda.$$

当 $f \in \ker L_\lambda$, 我们有

$$f(x) = \lambda\int_0^1 (1+xt) f(t)\,\mathrm{d}t = c + dx.$$

于是

$$\ker L_\lambda = \ker L_\lambda|_{\mathrm{span}\{1,x\}}.$$

计算 $L_\lambda|_{\mathrm{span}\{1,x\}}$ 的表示矩阵和其对应行列式为

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1-\frac{\lambda}{3} \end{pmatrix}, \frac{\lambda^2}{12} - \frac{4\lambda}{3} + 1.$$

于是 L_λ 双射等价于

$$\frac{\lambda^2}{12} - \frac{4\lambda}{3} + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 8 \pm 2\sqrt{13}.$$

当 $\lambda = 8 \pm 2\sqrt{13}$, 我们有

$$\dim\ker L_\lambda^* = \dim\ker L_\lambda = 1.$$

我们首先可验证

$$\ker L_{8-2\sqrt{13}}^* = \mathrm{span}\left\{\left(1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3}t\right)\mathrm{d}t\right\},$$

这可以从

$$\int_0^1 L_{8-2\sqrt{13}} f(t) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3}t\right)\mathrm{d}t = 0, \forall f \in C[0,1]$$

看到.

现在我们知道

$$\mathrm{Im}L_{8-2\sqrt{13}} = \left(\ker L_{8+2\sqrt{13}}^*\right)^\perp = \left\{f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)\left(1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3}t\right)\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

类似的有

$$\mathrm{Im}L_{8+2\sqrt{13}} = \left\{f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)\left(1 - \frac{\sqrt{13}-2}{3}t\right)\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

注[思路补充] $1 \pm \frac{\sqrt{13}-2}{3}t$ 来自计算 $\ker L_{8\pm2\sqrt{13}}$.

217. (217.) 设

$$E_j(t) \triangleq \frac{1}{3}\left(e^t + 2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2j\pi}{3}\right)\right), j = 0,1,2.$$

直接计算容易得出

$$E_0(t)E_1(t) - E_2^2(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\left[2e^{\frac{3t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right]$$

存在正根 $T \in \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}\right)$. 我们断言

$$c \triangleq \frac{E_2(T)}{E_0(T)} = \frac{E_1(T)}{E_2(T)} \approx 1.0189$$

为所求最佳值.

取

$$g(t) \triangleq E_1(t) - cE_2(t).$$

容易看到 $g''' = g$ 以及

$$\begin{aligned} &g(0) = 0, g'(0) = 1, g''(0) = -c; \\ &g(T) = 0, g'(T) = \left(1 - c^3\right) E_0(T) < 0, g''(T) = 0. \end{aligned}$$

对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 考虑

$$B(s) \triangleq f''(s) g(x-s) + f'(s) g'(x-s) + f(s) g''(x-s),$$

我们有

$$B'(s) = [f'''(s) - f(s)] g(x-s) \leqslant 0.$$

于是就有

$$f'(x) - cf(x) = B(x) \leqslant B(x-T) = f'(x-T) g'(T) < 0.$$

因此我们证明了

$$f'(x) < cf(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

再来证明 c 是最佳的. 取 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$0 \leqslant \chi \leqslant 1, \chi|_{t \leqslant 0} = 0, \chi|_{t \geqslant 1} = 1.$$

然后对 $\epsilon, \delta \in (0,1)$, 考虑

$$a_{\epsilon,\delta}(x) \triangleq \epsilon^3 + \left(1 - \epsilon^3\right) \chi\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

考虑初值问题

$$\begin{cases} y''' = a_{\epsilon,\delta} y \\ y(0) = 1, y'(0) = \epsilon, y''(0) = \epsilon^2 \end{cases}$$

的唯一解 $f_{\epsilon,\delta} \in C^3(\mathbb{R})$. (Gronwall 不等式和解的延拓保证解在 $\mathbb{R}$ 存在.)

容易看到

$$\epsilon^3 f_{\epsilon,\delta}(x) \leqslant f'''_{\epsilon,\delta}(x) \leqslant f_{\epsilon,\delta}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

我们可以写

$$f_{\epsilon,\delta}(x) = \begin{cases} e^{\epsilon x}, & x \leqslant 0 \\ f_{\epsilon,\delta}(x), & 0 < x < \delta \\ f_{\epsilon,\delta}(\delta) E_0(x-\delta) + f'_{\epsilon,\delta}(\delta) E_1(x-\delta) + f''_{\epsilon,\delta}(\delta) E_2(x-\delta), & x \geqslant \delta \end{cases}.$$

基本性态分析可以给出 $f_{\epsilon,\delta}, f'_{\epsilon,\delta}, f''_{\epsilon,\delta} > 0$. 注意到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\left[\left|f_{\epsilon,\delta}\right|^2 + \left|f'_{\epsilon,\delta}\right|^2 + \left|f''_{\epsilon,\delta}\right|^2\right]\right) \\ &= e^{-2x}\left(2f_{\epsilon,\delta}f'_{\epsilon,\delta} + 2f'_{\epsilon,\delta}f''_{\epsilon,\delta} + 2f''_{\epsilon,\delta}f'''_{\epsilon,\delta} - 2\left|f_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f'_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f''_{\epsilon,\delta}\right|^2\right) \\ &\leqslant e^{-2x}\left(\left|f_{\epsilon,\delta}\right|^2 + 2\left|f'_{\epsilon,\delta}\right|^2 + 2\left|f''_{\epsilon,\delta}\right|^2 + \left|f'''_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f'_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f''_{\epsilon,\delta}\right|^2\right) \\ &\leqslant e^{-2x}\left(2\left|f_{\epsilon,\delta}\right|^2 + 2\left|f'_{\epsilon,\delta}\right|^2 + 2\left|f''_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f'_{\epsilon,\delta}\right|^2 - 2\left|f''_{\epsilon,\delta}\right|^2\right) = 0, \end{aligned}$$

于是我们有

$$\left|f_{\epsilon,\delta}(x)\right|^2+\left|f'_{\epsilon,\delta}(x)\right|^2+\left|f''_{\epsilon,\delta}(x)\right|^2\leqslant\left(1+\epsilon^2+\epsilon^4\right)e^{2x}\leqslant 3e^2,\forall x\in[0,1].$$

改写成积分方程为

$$\begin{aligned}f_{\epsilon,\delta}(x)&=1+\epsilon x+\frac{\epsilon^2x^2}{2}+\int_0^x\frac{(x-s)^2}{2}a_{\epsilon,\delta}(s)f_{\epsilon,\delta}(s)\,\mathrm{d}s;\\ f'_{\epsilon,\delta}(x)&=\epsilon+\epsilon^2x+\int_0^x(x-s)a_{\epsilon,\delta}(s)f_{\epsilon,\delta}(s)\,\mathrm{d}s;\\ f''_{\epsilon,\delta}(x)&=\epsilon^2+\int_0^x a_{\epsilon,\delta}(s)f_{\epsilon,\delta}(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|f_{\epsilon,\delta}(\delta)-1\right|&=\left|\epsilon\delta+\frac{\epsilon^2\delta^2}{2}+\int_0^\delta\frac{(\delta-s)^2}{2}a_{\epsilon,\delta}(s)f_{\epsilon,\delta}(s)\,\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant\epsilon\delta+\frac{\epsilon^2\delta^2}{2}+3e^2\int_0^\delta\frac{(\delta-s)^2}{2}\mathrm{d}s\\ &=\epsilon\delta+\frac{\epsilon^2\delta^2}{2}+\frac{1}{2}\delta^3e^2.\end{aligned}$$

类似的可估计 $f'_{\epsilon,\delta}(\delta),f''_{\epsilon,\delta}(\delta)$, 于是

$$\lim_{\epsilon,\delta\to0^+}f_{\epsilon,\delta}(\delta)=1,\lim_{\epsilon,\delta\to0^+}f'_{\epsilon,\delta}(\delta)=0,\lim_{\epsilon,\delta\to0^+}f''_{\epsilon,\delta}(\delta)=0.$$

现在当 $\epsilon,\delta\to0^+$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f'_{\epsilon,\delta}(T)}{f_{\epsilon,\delta}(T)}&=\frac{f_{\epsilon,\delta}(\delta)E'_0(T-\delta)+f'_{\epsilon,\delta}(\delta)E'_1(T-\delta)+f''_{\epsilon,\delta}(\delta)E'_2(T-\delta)}{f_{\epsilon,\delta}(\delta)E_0(T-\delta)+f'_{\epsilon,\delta}(\delta)E_1(T-\delta)+f''_{\epsilon,\delta}(\delta)E_2(T-\delta)}\\ &=\frac{f_{\epsilon,\delta}(\delta)E_2(T-\delta)+f'_{\epsilon,\delta}(\delta)E_0(T-\delta)+f''_{\epsilon,\delta}(\delta)E_1(T-\delta)}{f_{\epsilon,\delta}(\delta)E_0(T-\delta)+f'_{\epsilon,\delta}(\delta)E_1(T-\delta)+f''_{\epsilon,\delta}(\delta)E_2(T-\delta)}\\ &\to\frac{1\cdot E_2(T)+0\cdot E_0(T)+0\cdot E_1(T)}{1\cdot E_0(T)+0\cdot E_1(T)+0\cdot E_2(T)}=\frac{E_2(T)}{E_0(T)}=c.\end{aligned}$$

因此我们所求最佳常数为 c.

218. (218.) 不妨设 $x_1<x_2$, 考虑

$$M\triangleq\max\{f(x_1),f(x_2)\},m\triangleq\min\{f(x_1),f(x_2)\}.$$

我们有

$$m\leqslant\sqrt{mM}\leqslant M,m\leqslant\frac{m+M}{2}\leqslant M,$$

即由介值定理得 $\xi_1,\xi_2\in[x_1,x_2]\subset I$ 使得

$$f(\xi_1)=\sqrt{mM}=\sqrt{f(x_1)f(x_2)},f(\xi_2)=\frac{m+M}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

若总有 $\xi_1<\xi_2$ 但 f 不递增, 我们设

$$x_1<x_2,f(x_2)<f(x_1).$$

考虑

$$x_0\triangleq\inf\left\{t\in[x_1,x_2]:f(t)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\right\},$$

则

$$f(x_0)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(x_1).$$

介值定理表明存在 $x_3\in(x_1,x_0)$ 使得

$$f(x_3)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

这就和总有 $\xi_1<\xi_2$ 矛盾!, 因此我们证明了 f 在区间 I 递增.

30.16 数学类积分不等式

1. (1.) 事实上我们断言

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{x^2(1-x)^2}{3}\int_0^x \frac{|f(t)|}{t(1-t)}dt, \forall x \in [0,1]. \tag{30.220}$$

令 $g(x)=\int_0^x \frac{|f(t)|}{t(1-t)}dt$, 注意到 $g(0)=g'(0)=0$, 我们证明 $g-3(g')^2$ 在 $[0,1]$ 递增. 事实上

$$\begin{aligned}\left(g-3(g')^2\right)' &= \frac{|f|}{x(1-x)} - 6\frac{f}{x(1-x)}\cdot\left(\frac{f}{x(1-x)}\right)' \\ &\geqslant \frac{|f|}{x(1-x)} - 6\frac{|f|}{x(1-x)}\cdot\left|\left(\frac{f}{x(1-x)}\right)'\right| \\ &\geqslant \frac{|f|}{x(1-x)} - \frac{|f|}{x(1-x)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

这里用到了: 取

$$k(x,y)=\begin{cases}-\frac{x^2(1-y)^2}{2}, & x\leqslant y\leqslant 1\\ \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)y^2+\left(x^2-x\right)y, & 0\leqslant y<x\end{cases}.$$

直接分部积分计算就有 $f(x)=\int_0^1 k(x,y)f'''(y)\,dy$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{f}{x(1-x)}\right)'\right| &= \left|\int_0^1\left(\frac{k(x,y)}{x(1-x)}\right)'f'''(y)\,dy\right| \\ &\leqslant \int_0^1\left|\left(\frac{k(x,y)}{x(1-x)}\right)'\right|dy \\ &= \int_x^1\left|\frac{(1-y)^2}{2(1-x)^2}\right|dy+\int_0^x\left|\frac{y^2}{2x^2}\right|dy \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

于是我们证明了(30.220). 现在运用(30.220)就有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2dx &\leqslant \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^x\frac{(1-x)^2|f(y)|}{y(1-y)}dydx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1\frac{|f(y)|}{y(1-y)}dy\int_y^1(1-x)^2dx \\ &= \frac{1}{9}\int_0^1\frac{(1-y)^2}{y}|f(y)|\,dy.\end{aligned}$$

我们完成了证明.

2. (2.) 由 $t=xu$ 知, 可以不妨设 $x=1$, 由 f 递减, 我们可以注意到如下不等式成立

$$\int_x^\infty f(t)\,dt \geqslant f(1)(1-x)+\int_1^\infty f(t)\,dt, \forall x\in(0,+\infty),$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^a f(t)\,dt &= \int_0^\infty\int_t^\infty at^{a-1}f(x)\,dxdt \geqslant \int_0^{\frac{a+1}{a}}at^{a-1}\left[f(1)(1-t)+\int_1^\infty f(x)\,dx\right]dt \\ &= af(1)\int_0^{\frac{a+1}{a}}\left(t^{a-1}-t^a\right)dt+\left(\frac{a+1}{a}\right)^a\int_1^\infty f(t)\,dt \\ &= af(1)\left[\frac{\left(\frac{a+1}{a}\right)^a}{a}-\frac{\left(\frac{a+1}{a}\right)^{a+1}}{a+1}\right]+\left(\frac{a+1}{a}\right)^a\int_1^\infty f(t)\,dt = \left(\frac{a+1}{a}\right)^a\int_1^\infty f(t)\,dt.\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} t^a \int_t^\infty f(x)\,dx \leqslant \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty x^a f(x)\,dx = 0,$$

这就完成了证明.

3. (3.) 显然, 不等式(17.54)等价于不等式

$$\lambda^p \int_{-1}^1 |f(x)|^p\,d\gamma \leqslant C_{p,q}\lambda^2 \int_{-1}^1 |f'(x)|^2\,d\gamma + \lambda^q \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q}{2}}, \forall \lambda \in (0,+\infty), f \in \mathcal{F}, \quad (30.221)$$

即

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p\,d\gamma \leqslant C_{p,q}\lambda^{2-p} \int_{-1}^1 |f'(x)|^2\,d\gamma + \lambda^{q-p} \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q}{2}}, \forall \lambda \in (0,+\infty), f \in \mathcal{F}. \quad (30.222)$$

这又等价于

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p\,d\gamma \leqslant \inf_{\lambda>0}\left[C_{p,q}\lambda^{2-p} \int_{-1}^1 |f'(x)|^2\,d\gamma + \lambda^{q-p} \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q}{2}}\right], \forall f \in \mathcal{F}. \quad (30.223)$$

而直接求导知当 $\lambda = \left[\frac{(p-2)C_{p,q}\int_{-1}^1 |f'|^2 d\gamma}{(q-p)\left(\int_{-1}^1 |f|^2 d\gamma\right)^{\frac{q}{2}}}\right]^{\frac{1}{q-2}}$, 式(30.223)右边取最小值. 此时不等式(17.54)等价于不等式

$$\int_{-1}^1 |f|^p\,d\gamma \leqslant D_{p,q}\left(\int_{-1}^1 |f'|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q-p}{q-2}} \left(\int_{-1}^1 |f|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q(p-2)}{2(q-2)}}, \forall f \in \mathcal{F}, \quad (30.224)$$

这里

$$D_{p,q} = C_{p,q}^{\frac{q-p}{q-2}}\left[\left(\frac{p-2}{q-p}\right)^{\frac{2-p}{q-2}} + \left(\frac{p-2}{q-p}\right)^{\frac{q-p}{q-2}}\right] > 0.$$

我们在不等式(30.224)中取 $f_n = \left(1-x^2\right)^n \in \mathcal{F}, n = 1,2,3,\cdots$. 然后运用 Laplace 方法9.3, 当 $n \to \infty$ 我们得到等价

$$\int_{-1}^1 |f_n|^2\,d\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{2n} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int_{-\infty}^\infty e^{-2nx^2}\,dx = \frac{1}{2a\sqrt{n}}; \quad (30.225)$$

$$\int_{-1}^1 |f_n|^p\,d\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{pn} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int_{-\infty}^\infty e^{-pnx^2}\,dx = \frac{1}{a\sqrt{2pn}}, \quad (30.226)$$

$$\int_{-1}^1 |f_n'|^2\,d\gamma = \frac{4n^2}{\sqrt{2\pi}a}\int_{-1}^1 x^2\left(1-x^2\right)^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx \sim \frac{4n^2}{\sqrt{2\pi}a}\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-2nx^2}\,dx = \frac{\sqrt{n}}{2a}. \quad (30.227)$$

把不等式(30.224)改写为

$$\frac{\int_{-1}^1 |f_n|^p\,d\gamma}{\left(\int_{-1}^1 |f_n'|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q-p}{q-2}}\left(\int_{-1}^1 |f_n|^2\,d\gamma\right)^{\frac{q(p-2)}{2(q-2)}}} \leqslant D_{p,q}. \quad (30.228)$$

于是带入等价量(30.225),(30.226),(30.227), 我们发现

$$\frac{\frac{1}{a\sqrt{2pn}}}{\left(\frac{\sqrt{n}}{2a}\right)^{\frac{q-p}{q-2}}\left(\frac{1}{2a\sqrt{n}}\right)^{\frac{q(p-2)}{2(q-2)}}} \leqslant D_{p,q},$$

即

$$\frac{\frac{1}{a\sqrt{2p}}}{\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{q-p}{q-2}}\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{q(p-2)}{2(q-2)}}} n^{\frac{qp-6q+2p+4}{4(q-2)}} \leqslant D_{p,q},$$

因此必须有

$$\frac{qp-6q+2p+4}{4(q-2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow q(6-p) \geqslant 2p+4 \Leftrightarrow p<6, q \geqslant \frac{2p+4}{6-p}.$$

下面证明 $p \in (2,6), q \geqslant \frac{2p+4}{6-p}$ 为所求, 先来看 $p \in (2,6), q = \frac{2p+4}{6-p}$ 的情况.
运用牛顿莱布尼兹定理, 我们可以注意到

$$f^2(x) = 2\int_{-1}^x f(y) f'(y)\,dy, x \in [-1,1],$$

于是由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &\leqslant 2\int_{-1}^{1}|f(y)|\,|f'(y)|\,dy \leqslant 2\left[\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 e^{-\frac{y^2}{2a^2}}dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 e^{\frac{y^2}{2a^2}}dy\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant 2\sqrt{2\pi}a\left[\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 e^{\frac{y^2}{a^2}}d\gamma\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant 2\sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\left[\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

运用这个不等式并取

$$\epsilon=\left(2\sqrt{2\pi}\right)^{\frac{(p-2)(6-p)}{8}}a^{\frac{(p-2)(6-p)}{8}}e^{\frac{(p-2)(6-p)}{16a^2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{4}\right)^{\frac{6-p}{4}}>0,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|^p d\gamma &\leqslant \left(2\sqrt{2\pi}ae^{\frac{1}{2a^2}}\left[\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p-2}{2}}\int_{-1}^{1}|f(x)|^2 d\gamma\\ &=\left(2\sqrt{2\pi}\right)^{\frac{p-2}{2}}a^{\frac{p-2}{2}}e^{\frac{p-2}{4a^2}}\left[\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{p+2}{4}}\left[\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{p-2}{4}}\\ &\leqslant\left(2\sqrt{2\pi}\right)^{\frac{p-2}{2}}a^{\frac{p-2}{2}}e^{\frac{p-2}{4a^2}}\left[\frac{p-2}{4}\epsilon^{\frac{4}{p-2}}\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 d\gamma+\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{4}\right)\epsilon^{-\frac{4}{6-p}}\left[\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 d\gamma\right]^{\frac{p+2}{6-p}}\right]\\ &=\frac{p-2}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{4}\right)^{\frac{6-p}{p-2}}\left(2\sqrt{2\pi}\right)^2 a^2 e^{\frac{1}{a^2}}\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 d\gamma+\left(\int_{-1}^{1}|f(y)|^2 d\gamma\right)^{\frac{p+2}{6-p}},\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自高中版本的Young 不等式. 因此我们证明了 $p\in(2,6),q=\frac{2p+4}{6-p}$ 的情况, 此时也对应(30.224)的下述不等式成立

$$\int_{-1}^{1}|f|^p d\gamma\leqslant D_{p,q}\left(\int_{-1}^{1}|f'|^2 d\gamma\right)^{\frac{p-2}{4}}\left(\int_{-1}^{1}|f|^2 d\gamma\right)^{\frac{p+2}{4}}. \tag{30.229}$$

对于 $p\in(2,6),q>\frac{2p+4}{6-p}$, 我们知道由牛顿莱布尼兹公式和 Cauchy 不等式, 有

$$|f(x)|^2=\left|\int_{-1}^{x}f'(y)\,dy\right|^2\leqslant(x+1)\int_{-1}^{x}|f'(y)|^2 dy\leqslant(x+1)\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 dy,$$

于是

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2 dx\leqslant\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 dy=2\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 dy.$$

然后

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2 d\gamma\leqslant 2\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 e^{\frac{y^2}{2a^2}}d\gamma\leqslant 2e^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^{1}|f'(y)|^2 d\gamma. \tag{30.230}$$

对于 $p\in(2,6),q>\frac{2p+4}{6-p}$: 对式(30.229), 运用式(30.230), 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f|^p d\gamma &\leqslant D_{p,q}\left(\int_{-1}^{1}|f'|^2 d\gamma\right)^{\frac{p-2}{4}}\left(\int_{-1}^{1}|f|^2 d\gamma\right)^{\frac{p+2}{4}-\frac{6q-4-2p-pq}{4(q-2)}}\left(\int_{-1}^{1}|f|^2 d\gamma\right)^{\frac{6q-4-2p-pq}{4(q-2)}}\\ &\leqslant D_{p,q}\left(\int_{-1}^{1}|f'|^2 d\gamma\right)^{\frac{p-2}{4}}\left(\int_{-1}^{1}|f|^2 d\gamma\right)^{\frac{p+2}{4}-\frac{6q-4-2p-pq}{4(q-2)}}\left(2e^{\frac{1}{2a^2}}\int_{-1}^{1}|f'|^2 d\gamma\right)^{\frac{6q-4-2p-pq}{4(q-2)}}\\ &=\left(2e^{\frac{1}{2a^2}}\right)^{\frac{6q-4-2p-pq}{4(q-2)}}D_{p,q}\left(\int_{-1}^{1}|f'|^2 d\gamma\right)^{\frac{q-p}{q-2}}\left(\int_{-1}^{1}|f|^2 d\gamma\right)^{\frac{q(p-2)}{2(q-2)}}.\end{aligned}$$

这同样给出了我们要证的不等式(17.54). 于是我们证明了所求 p,q 范围是 $p\in(2,6),q\geqslant\frac{2p+4}{6-p}$.

4. (4.) 我们先来证明存在 $C>0$, 使得对任何 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数 g, 都有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx\leqslant C\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\alpha}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\beta}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right].\tag{30.231}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx&=\int_{|x|\leqslant 1}|g(x)|\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}|g(x)|\,dx\\&=\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-\alpha}|x|^{\alpha}|g(x)|\,dx+\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-\beta}|x|^{\beta}|g(x)|\,dx\\&\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-2\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{2\alpha}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-2\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{2\beta}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-2\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\alpha}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-2\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\beta}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

这里倒数第二个不等号来自 Cauchy 不等式.

现在在上述不等式(30.231)中用 $g(\lambda x),\lambda>0$ 代替 $g(x)$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(\lambda x)|\,dx\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-2\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\alpha}|g(\lambda x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-2\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\beta}|g(\lambda x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-2\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{n}{2}-\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\alpha}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\lambda^{\beta-\frac{n}{2}}}\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-2\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\beta}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在上式两边关于 λ 取最小得可得[118]可得不等式(17.55)成立, 这里

$$C=\left[\left(\frac{\beta-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-\alpha}\right)^{\frac{\frac{n}{2}-\alpha}{\beta-\alpha}}+\left(\frac{\beta-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-\alpha}\right)^{\frac{\frac{n}{2}-\beta}{\beta-\alpha}}\right]\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-2a}\,dx\right)^{\frac{\beta-\frac{n}{2}}{2(\beta-\alpha)}}\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-2\beta}\,dx\right)^{\frac{\frac{n}{2}-\alpha}{2(\beta-\alpha)}}.$$

5. (5.) 相似数学类积分不等式习题3.的证明技巧, 我们知道不等式(17.56)等价于存在 $D>0$, 使得

$$\int_V|f(x)|^p\,dx\leqslant D\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_V|D_\alpha f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{q-p}{q-2}}\cdot\left(\int_V|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{q(p-2)}{2(q-2)}},\forall f\in C_c^\infty(V).\tag{30.232}$$

当 $m>\frac{n}{2}$, 由数学类积分不等式习题4., 我们知道存在 $C(n,m)>0$, 使得对任何 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数 g 都有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx\leqslant C(n,m)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{2m}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2m}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{n}{4m}}.\tag{30.233}$$

现在我们定义

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\,e^{-2\pi i\sum\limits_{j=1}^n x_jy_j}\,dy,$$

读者不难通过交换积分顺序证明下述傅立叶逆变换和 parseval 等式:

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)\,e^{2\pi i\sum\limits_{j=1}^n x_jy_j}\,dy.\tag{30.234}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(x)\right|^2\,dx.\tag{30.235}$$

[118] 即取

$$\lambda=\left(\frac{\beta-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}\cdot\left(\frac{\left(\int_{|x|\geqslant 1}|x|^{-2\beta}\,dx\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\beta}|g(x)|^2\,dx\right)}{\left(\int_{|x|\leqslant 1}|x|^{-2\alpha}\,dx\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2\alpha}|g(x)|^2\,dx\right)}\right)^{\frac{1}{2(\beta-\alpha)}}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2m}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^m\left|\hat{f}(x)\right|^2dx\\&=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\int_{\mathbb{R}^n}x_1^{2\alpha_1}x_2^{2\alpha_2}\cdots x_{\alpha_n}^{2\alpha_n}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx\\&=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\int_{\mathbb{R}^n}\left|x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\hat{f}(x)\right|^2dx\\&=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(2\pi)^m}\widehat{D_\alpha f}(x)\right|^2dx\\&=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{(4\pi^2)^m\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{D_\alpha f}(x)\right|^2dx\\&\leqslant\frac{m!}{(4\pi^2)^m}\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{D_\alpha f}(x)\right|^2dx.\end{aligned}$$

利用上述等式我们知道

$$\begin{aligned}|f(x)|^2&\overset{(30.234)}{=}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)\,e^{2\pi i\sum\limits_{j=1}^n x_jy_j}dy\right|^2\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(y)\right|dy\right)^2\\&\overset{(30.233)}{\leqslant}C^2(n,m)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{m}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2m}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx\right)^{\frac{n}{2m}}\\&\leqslant C_2(n,m)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{m}}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{D_\alpha f}(x)\right|^2dx\right)^{\frac{n}{2m}}\\&\overset{(30.235)}{=}C_2(n,m)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{m}}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_\alpha f(x)|^2dx\right)^{\frac{n}{2m}}\\&=C_2(n,m)\left(\int_V|f(x)|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{m}}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_\alpha f(x)|^2dx\right)^{\frac{n}{2m}},\end{aligned}$$

这里 $C_2(n,m)>0$ 是某个常数. 即得到了估计

$$|f(x)|^2\leqslant C_2(n,m)\left(\int_V|f(x)|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{m}}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_\alpha f(x)|^2dx\right)^{\frac{n}{2m}}.\tag{30.236}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\int_V|f(x)|^pdx&\leqslant\sup_V|f|^{p-2}\cdot\int_V|f(x)|^2dx\\&\overset{(30.236)}{\leqslant}C_2^{\frac{p-2}{2}}(n,m)\left(\int_V|f(x)|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{2m}(p-2)}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_\alpha f(x)|^2dx\right)^{\frac{n}{4m}(p-2)}\cdot\int_V|f(x)|^2dx\\&=C_2^{\frac{p-2}{2}}(n,m)\left(\int_V|f(x)|^2dx\right)^{\frac{m-\frac{n}{2}}{2m}(p-2)+1}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_\alpha f(x)|^2dx\right)^{\frac{n}{4m}(p-2)}\\&\overset{\text{Young 不等式}}{\leqslant}C(p,q,n,m)\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_\alpha f(x)|^2dx\right)+\left(\int_V|f(x)|^2dx\right)^{\frac{2mp-np+2n}{4m-np+2n}}.\end{aligned}$$

于是我们证明了对 $m>\frac{n}{2},q=\frac{4mp-2np+4n}{4m-np+2n},p\in\left(2,2+\frac{4m}{n}\right)$ 有不等式(17.56). 又和数学类积分不等式习题3.完全类似的知道对 $m>\frac{n}{2},q\geqslant\frac{4mp-2np+4n}{4m-np+2n},p\in\left(2,2+\frac{4m}{n}\right)$ 仍然有不等式(17.56)成立.

6. (6.) 记 $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx, n\in\mathbb{N}$, 柯西不等式16.1表明 $I_2\geqslant I_1^2$ 且对任何 $m\in\mathbb{R}$ 都有

$$\left(\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)f(x)\,dx\right)^2\leqslant\left(\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)^2dx\right)\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

利用条件 $I_3=0$, 化简得对所有 $m\in\mathbb{R}$, 恒有

$$\left(I_2-I_1^2\right)m^2+2I_2^2m+I_2I_4\geqslant 0.$$

由二次函数判别式, 我们有

$$I_4\geqslant\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\overset{\text{视为}I_2\text{的函数求导求最小值}}{\geqslant}\frac{27}{4}I_1^4,$$

这恰好是不等式(17.57).

7. (7.) 回忆遇到 $f(f)$ 的考虑单射的想法. 我们设 $f(x_1)=f(x_2)$, 则

$$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow x_1^a=x_2^a\Rightarrow x_1=x.$$

由连续单射等价于严格单调12.2, 我们知道 f 严格单调. 注意 $f(f(0))=0, f(f(1))=1$, 若 f 递减, 则 $f(x)=0,\forall x\geqslant f(0)$, 这就是矛盾! 故 f 严格递增. 现在设 $f(0)=c>0$, 则 $f(c)=0$. 故 $f(x)=0,\forall x\in[0,c]$, 这就是一个矛盾! 因此 $f(0)=0$. 此外若 $f(1)>1$, 则

$$1=f(f(1))>f(1)>1,$$

这就是一个矛盾! 若 $f(1)<1$, 则

$$1=f(f(1))<f(1)<1,$$

这也是一个矛盾! 故 $f(1)=1$.

由题目条件知 $f(x)=f^{-1}(x^a)$, 这些都在疯狂暗示 Young 不等式16.45. 由 Young 不等式16.45取等条件, 我们有

$$\begin{aligned}1&=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx\\&=\int_0^1 f(x)\,dx+a\int_0^1 x^{a-1}f^{-1}(x^a)\,dx\\&=\int_0^1\left(1+ax^{a-1}\right)f(x)\,dx\\&\overset{\text{cauchy 不等式16.1}}{\leqslant}\int_0^1\left(1+ax^{a-1}\right)^2dx\int_0^1 f^2(x)\,dx\\&=\frac{a^2+6a-3}{2a-1}\int_0^1|f(x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

这就证明了不等式(17.58).

8. (8.)

(a). 首先

$$\int_0^a|f(x)-x|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^a|f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{a^3}{3}-2\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是(17.60)等价于

$$\int_0^a|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x.\tag{30.237}$$

由(17.59)和 Holder 不等式16.1得对每一个 $t\in[0,a]$ 有

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\int_0^t 1\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\leqslant\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}},$$

即

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant t^2.$$

现在

$$2\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^a \sqrt{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left(\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{30.238}$$

继续由(17.59)和 Holder 不等式16.1得

$$\int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}.$$

现在结合(30.238)我们知道(30.237)成立. 这就完成了证明.

(b). 由条件(17.59)和 Holder 不等式16.1得

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\int_0^t 1\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}, \forall t\in[0,a],$$

即

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant t^2, \forall t\in[0,a].$$

还能得

$$\int_0^t x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^t x^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{t^{\frac{8}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}}\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}.$$

定义

$$k \triangleq \max_{t\in(0,a]}\frac{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}{t^2} \in (0,+\infty),$$

我们有

$$\int_0^t x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^t \frac{\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y}{k}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2k}\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

现在

$$\frac{1}{2k}\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{3}} \leqslant \frac{t^{\frac{8}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \sup_{t\in(0,a]}\left(\frac{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}{t^2}\right)^{\frac{4}{3}} \leqslant \frac{2k}{4^{\frac{2}{3}}}$$
$$\Rightarrow k^{\frac{4}{3}} \leqslant \frac{2k}{4^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow k^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{2}{4^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow k \leqslant \frac{8}{16} \Rightarrow k \leqslant \frac{1}{2}.$$

于是我们有

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}t^2, \forall t\in[0,a]. \tag{30.239}$$

(c). 为了证明(17.62), 显然打开括号计算知只需证明

$$\int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x. \tag{30.240}$$

不妨设 f 不恒为 0, 记连续函数

$$F(x) \triangleq \begin{cases}\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y, & x>a\\ \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant a\\ 0, & x<0\end{cases}, M \triangleq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

考虑 $\varphi:[0,M]\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi(s) = \inf\{x\in[0,a] : F(x)\geqslant s\}.$$

容易看到 L-S 测度 $\mathrm{d}F$ 是 φ 的像测度 (取 Borel 意义).

对 $t\in[0,a]$, 我们有

$$\begin{aligned}F^2(t)\geqslant&\int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^t f^2(x)\,\mathrm{d}F(x)\\=&\int_0^{F(t)}f^2(\varphi(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^t f^2(\varphi(x))\,\mathrm{d}x\leqslant t^2,\forall t\in[0,M].$$

考虑

$$g(t)\triangleq\int_0^t f^2(\varphi(x))\,\mathrm{d}x-t^2\geqslant -t^2.$$

类似的有

$$\begin{aligned}&\int_0^a f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}F(x)=\int_0^M f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x;\\&\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}F(x)=\int_0^M\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由切线不等式得

$$\sqrt{t}-\frac{M-x}{\sqrt{t}}\leqslant\sqrt{2x}-\frac{M-x}{\sqrt{2x}}+\frac{M+x}{2(2x)^{\frac{3}{2}}}(t-2x),\forall t>0,x\in(0,M).$$

对 $\epsilon\in(0,M)$ 得

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^M f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x\leqslant&\int_\epsilon^M\frac{M-x}{f(\varphi(x))}\mathrm{d}x+\int_\epsilon^M\left(\sqrt{2x}-\frac{M-x}{\sqrt{2x}}\right)\mathrm{d}x+\int_\epsilon^M\frac{M+x}{2(2x)^{\frac{3}{2}}}\left(f^2(\varphi(x))-2x\right)\mathrm{d}x\\=&\int_\epsilon^M\frac{M-x}{f(\varphi(x))}\mathrm{d}x+\int_\epsilon^M\left(\sqrt{2x}-\frac{M-x}{\sqrt{2x}}\right)\mathrm{d}x\\&+\frac{Mg(M)}{(2M)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(M+\epsilon)g(\epsilon)}{2(2\epsilon)^{\frac{3}{2}}}+\int_\epsilon^M\frac{3M+x}{2(2x)^{\frac{5}{2}}}g(x)\,\mathrm{d}x\\\leqslant&\int_\epsilon^M\frac{M-x}{f(\varphi(x))}\mathrm{d}x+\int_\epsilon^M\left(\sqrt{2x}-\frac{M-x}{\sqrt{2x}}\right)\mathrm{d}x+\epsilon^2\frac{M+\epsilon}{2(2\epsilon)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

让 $\epsilon\to0^+$ 得

$$\begin{aligned}\int_0^M f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x\leqslant&\int_0^M\frac{M-x}{f(\varphi(x))}\mathrm{d}x+\int_0^M\left(\sqrt{2x}-\frac{M-x}{\sqrt{2x}}\right)\mathrm{d}x\\=&\int_0^M\left(\int_x^M\frac{\mathrm{d}y}{f(\varphi(x))}\right)\mathrm{d}x=\int_0^M\left(\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{f(\varphi(x))}\right)\mathrm{d}y\\\leqslant&\int_0^M\left(\int_{\varphi^{-1}((-\infty,\varphi(y)])}\frac{\mathrm{d}x}{f(\varphi(x))}\right)\mathrm{d}y\\=&\int_0^M\left(\int_0^{\varphi(y)}\frac{\mathrm{d}F(x)}{f(x)}\right)\mathrm{d}y\leqslant\int_0^M\varphi(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

这就得证不等式(17.62).

(d). 由(17.61)得

$$\begin{aligned}\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x=&a\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^a\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\\geqslant&a\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^a\min\left\{\frac{t^2}{2},\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\\=&\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

于是由(30.240)得

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)-x|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^a |f(x)|^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a^3}{3}\\ &\leqslant \frac{a^3}{3} - \int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{a^3}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

9. (9.) 我们记

$$|f(x_0)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

取

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x_0}-1}{e^{2+x_0}-e^{x_0}}e^x & x_0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{e^{2x_0}-e^2}{e^{2+x_0}-e^{x_0}}e^x & 0 \leqslant x \leqslant x_0 \end{cases}.$$

直接计算有

$$\int_0^1 g^2(y)\,dy \int_0^1 [f(y)+f'(y)]^2\,dy \geqslant \left|\int_0^1 g(y)f(y)+g(y)f'(y)\,dy\right|^2 = |f(x_0)|^2,$$

以及

$$\int_0^1 g^2(y)\,dy = \frac{e^{2+2x_0}-e^2-e^{4x_0}+e^{2x_0}}{2e^{2+2x_0}-2e^{2x_0}}.$$

故由 cauchy 不等式16.1, 我们有

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{e^{2+2x_0}-e^2-e^{4x_0}+e^{2x_0}}{2e^{2+2x_0}-2e^{2x_0}}\int_0^1 [f(y)+f'(y)]^2\,dy \leqslant \frac{1}{2}\tanh\frac{1}{2}\int_0^1 [f(y)+f'(y)]^2\,dy,$$

我们完成了证明, 事实上当

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{2}-x}\left(e^{2x}-1\right)}{2e+2} & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{e^{-x}\left(e^{2x}-e^2\right)}{2e^{\frac{3}{2}}+2e^{\frac{1}{2}}} & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases},$$

等号成立.

10. (10.) 取 $g(t) = \frac{1}{(t-1)^{2a}}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\int_2^x \frac{1}{F'(t)}dt \int_2^x g(t)F'(t)\,dt}{x^{1-a}\int_2^x g(t)F'(t)\,dt} &= \frac{\int_2^x \frac{1}{F'(t)}dt \int_2^x g(t)F'(t)\,dt}{x^{1-a}\left[F(x)g(x)-F(2)g(2)-\int_2^x g'(t)F(t)\,dt\right]}\\ &\geqslant \frac{\left[\int_2^x \sqrt{g(t)}dt\right]^2}{x^{1-a}\left[x^{1+a}g(x)-F(2)\cdot g(2)-\int_2^x g'(t)t^{1+a}dt\right]}\\ &= \frac{\left[\int_2^x \sqrt{g(t)}dt\right]^2}{(1+a)x^{1-a}\left[C+\int_2^x g(t)t^a dt\right]}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt}{x^{1-a}} \geqslant \frac{1}{1+a}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_2^x \frac{1}{(t-1)^a}dt\right)^2}{x^{1-a}[C+\int_2^x \frac{t^a}{(t-1)^{2a}}dt]} = \frac{1}{1-a^2}.$$

我们完成了证明.

11. (11.) 对 f 做偶延拓 (为什么不是奇延拓?), 那么考虑傅立叶级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\pi x), f'(x) \sim -\pi\sum_{n=0}^{\infty} na_n\sin(n\pi x),$$

这里

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\,dx, a_n = \int_{-1}^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx, n = 1,2,\cdots,$$

那么运用帕塞瓦尔恒等式, 我们有

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,\ \int_{-1}^{1} |f'(x)|^2\,dx = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2,$$

因此

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx \int_{-1}^{1} |f'(x)|^2\,dx \geqslant \pi^2 \left(2a_0^2 + a_1^2\right) a_1^2 \geqslant \pi^2 a_1^4,$$

即

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)\,dx\right)^4,$$

因此 $C \geqslant \frac{1}{4\pi^2}$, 另外一方面取 $f(x) = \cos(\pi x)$, 则等号成立, 所以 $C_{\min} = \frac{1}{4\pi^2}$.

12. (12.) 待定 $c > 0$, 我们运用

$$\begin{aligned}
&4\int_0^1 x^2 |f'(x)|^2\,dx \int_0^1 (|f(x)| + c)^2\,dx \\
&\geqslant 4\left(\int_0^1 x|f'(x)f(x)|\,dx + c\int_0^1 x|f'(x)|\,dx\right)^2 \\
&= 4\left(\int_0^1 x|f'(x)f(x)|\,dx + c\int_0^1 |f'(x)|\,dx\int_0^x 1dy\right)^2 \\
&= 4\left(\int_0^1 x|f'(x)f(x)|\,dx + c\int_0^1 dy\int_y^1 |f'(x)|\,dx\right)^2 \\
&\geqslant 4\left(-\int_0^1 xf'(x)f(x)\,dx + c\int_0^1 \left|\int_y^1 f'(x)\,dx\right| dy\right)^2 \\
&= 4\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x df^2(x) + c\int_0^1 |f(y)|\,dy\right)^2 \\
&= \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx + 2c\int_0^1 |f(x)|\,dx\right)^2,
\end{aligned}$$

我们需要符号, 使得上述放缩合法

$$-\int_0^1 xf'(x)f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x df^2(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant 0,$$

现在我们记

$$a = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx, b = \int_0^1 |f(x)|\,dx, b^2 \leqslant a,$$

那么

$$\int_0^1 (|f(x)| + c)^2\,dx = a + 2cb + c^2,$$

只需证明存在 $c > 0$, 使得

$$(a + 2cb)^2 \geqslant \left(a + b^2\right)\left(a + 2cb + c^2\right),$$

化简为

$$\left(3b^2 - a\right)c^2 + \left(2ab - 2b^3\right)c - ab^2 \geqslant 0,$$

你可以运用

$$\triangle = \left(2ab - 2b^3\right)^2 + 4ab^2\left(3b^2 - a\right) = 4b^4\left(a + b^2\right) \geqslant 0,$$

知 c 一定存在, 也可以取 $c = b$, 那么一定有

$$\left(3b^2 - a\right)c^2 + \left(2ab - 2b^3\right)c - ab^2 = b^4 \geqslant 0.$$

我们完成了证明.

13. (13.) 不妨设 $m<0<M$, 其余情况是显然的. 由开集构造定理, 记

$$I=\{x\in[0,1]:F(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, J=\{x\in[0,1]:F(x)<0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n,$$

这里

$$I_n\bigcap I_m=\emptyset, J_n\bigcap J_m=\emptyset, \forall n\neq m,$$

$$I_n=\begin{cases}(\inf I_n,\sup I_n), & 0<\inf I_n<\sup I_n<1\\ [0,\sup I_n), & 0=\inf I_n<\sup I_n<1\\ (\inf I_n,1], & 0<\inf I_n<\sup I_n=1\\ [0,1], & 0=\inf I_n<\sup I_n=1\end{cases},$$

以及

$$J_n=\begin{cases}(\inf J_n,\sup J_n), & 0<\inf J_n<\sup J_n<1\\ [0,\sup J_n), & 0=\inf J_n<\sup J_n<1\\ (\inf J_n,1], & 0<\inf J_n<\sup J_n=1\\ [0,1], & 0=\inf J_n<\sup J_n=1\end{cases}.$$

如果 F 在 I_n 或者 J_n 的端点不为 0, 那么由连续性, 这一个端点必然落入 I 或者 J, 此时这个端点必然落入某个 I_m 或者 J_m, 因此 $I_n\bigcap I_m=\emptyset, J_n\bigcap J_m=\emptyset$ 矛盾!
所以 F 在 I_n 或者 J_n 的端点为 0, 此时对每个 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{cases}F(x)=\int_{\inf I_n}^{x}f(y)\,dy\leqslant M(x-\inf I_n) & ,x\in I_n\\ F(x)=\int_{\inf J_n}^{x}f(y)\,dy\geqslant m(x-\inf J_n) & ,x\in J_n\end{cases},$$

以及

$$\begin{cases}F(x)=-\int_{x}^{\sup I_n}f(y)\,dy\leqslant m(x-\sup I_n) & ,x\in I_n\\ F(x)=-\int_{x}^{\sup J_n}f(y)\,dy\geqslant M(x-\sup J_n) & ,x\in J_n\end{cases}.$$

这给出了

$$\begin{aligned}|F(x)|^2&\leqslant\min\left\{M^2|x-\inf I_n|^2,m^2|x-\sup I_n|^2\right\},x\in I_n\\ |F(x)|^2&\leqslant\min\left\{M^2|x-\sup J_n|^2,m^2|x-\inf J_n|^2\right\},x\in J_n\end{aligned},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1|F(x)|^2dx&=\int_I|F(x)|^2dx+\int_J|F(x)|^2dx\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n}|F(x)|^2dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}|F(x)|^2dx\\ &\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n}\min\left\{M^2|x-\inf I_n|^2,m^2|x-\sup I_n|^2\right\}dx\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n}\min\left\{M^2|x-\sup J_n|^2,m^2|x-\inf J_n|^2\right\}dx\\ &=\frac{m^2M^2}{3(M-m)^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\sup I_n-\inf I_n|^3+\frac{m^2M^2}{3(M-m)^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\sup J_n-\inf J_n|^3\\ &\leqslant\frac{m^2M^2}{3(M-m)^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\sup I_n-\inf I_n|+\frac{m^2M^2}{3(M-m)^2}\sum_{n=1}^{\infty}|\sup J_n-\inf J_n|\\ &\leqslant\frac{m^2M^2}{3(M-m)^2}.\end{aligned}\tag{30.241}$$

我们完成了证明.

14. (14.) 分部积分得

$$\int_0^1 \left(x^3(1-x)^3\right)''' f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^3(1-x)^3 f'''(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x^3(1-x)^3\right)''' f(x)\,\mathrm{d}x &= -12\int_0^1 \left(10x^3-15x^2+6x-\frac{1}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -12\int_0^1 \left(10x^3-15x^2+6x\right) f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,\end{aligned}$$

然后

$$\int_0^1 \left(10x^3-15x^2+6x\right) f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

这就是(17.64).

15. (15.) 令 $m=2n+1\geqslant 3$, 注意到

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right|dt \\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{mt}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2m}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|dt \\ &=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos mt|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)}-\frac{1}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|dt \\ &=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos mt|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)}-\frac{1}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|dt,\end{aligned}$$

这里最后一个等号读者可以自行验证被积函数是关于 t 的偶函数. 于是

$$\begin{aligned}&4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos mt|\cdot\left|\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)}-\frac{1}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|dt \\ &=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos mt|\cdot\frac{\left|\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)-\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\right|}{\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\right|}dt \\ &\leqslant\frac{4\pi}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos mt|}{\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\right|}dt,\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$. 现在

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos mt|}{\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\right|}dt\\
=&\frac{4\pi}{m}\int_0^{\frac{\pi}{m}}\frac{|\cos mt|}{\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\right|}dt\\
&+\frac{4\pi}{m}\int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}}\frac{|\cos mt|}{\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\right|}dt\\
&+\frac{4\pi}{m}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos mt|}{\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\right|}dt\\
<&\frac{4\pi}{m}\int_0^{\frac{\pi}{m}}\frac{m}{\frac{1}{m}}dt\\
&+\frac{\pi^3}{m}\int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}}\frac{1}{t^2-\frac{\pi^2}{4m^2}}dt\\
&+\frac{4\pi}{m}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|}dt\\
=&4\pi^2+\ln 3\cdot\pi^2+\frac{8\pi^2}{m^2\sqrt{3}}\leqslant\left(4+\ln 3+\frac{8}{9\sqrt{3}}\right)\pi^2<8\pi^2.
\end{aligned}$$

这里第一个不等号来自

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\cos mt}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|=\left|\frac{\sin m\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|\leqslant m,\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\geqslant\sin\frac{\pi}{2m}\geqslant\frac{1}{m},\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{m}\right],\\
&|\cos mt|\leqslant 1,\sin\left(t\pm\frac{\pi}{2m}\right)\geqslant\frac{2}{\pi}\left(t\pm\frac{\pi}{2m}\right),\forall t\in\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}\right],\\
&\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\geqslant\cos\frac{\pi}{m}\geqslant\frac{1}{2},\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)\geqslant\cos\frac{\pi}{2m}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2},\forall t\in\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

16. (16.)

- 取 $k=2$, 令

$$c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2,A=\begin{pmatrix}\varphi(0)&\varphi(y_1-y_2)\\\varphi(y_2-y_1)&\varphi(0)\end{pmatrix},$$

  我们有 $c^\star Ac\geqslant 0$, 熟知对复 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子 T, 其自伴的充要条件是 $(Tx,x)\in\mathbb{R},\forall x\in H$, 因此 A 是正定 Hermite 矩阵, 顺序主子式为正和 A 的共轭对称性容易看出第一点成立.

- 不妨设 $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx>0$, 注意到

$$\sum_{i,j=1}^{k}\varphi(x_i-x_j)f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)\geqslant 0,\forall k\geqslant 2,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,j=1}^{k}\varphi\left(x_i-x_j\right)f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)\cdots f\left(x_k\right)dx_1dx_2\cdots dx_k\\
&=\sum_{i,j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(x_i-x_j\right)f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)\cdots f\left(x_k\right)dx_1dx_2\cdots dx_k\\
&=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{k}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\varphi\left(x_i-x_j\right)f\left(x_i\right)f\left(x_j\right)dx_idx_j\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)dx\right)^{k-2}\\
&+\sum_{i=1}^{k}\varphi\left(0\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)dx\right)^{k}\\
&=\left(k^2-k\right)\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\varphi\left(x-y\right)f\left(x\right)f\left(y\right)dxdy\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)dx\right)^{k-2}\\
&+k\varphi\left(0\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)dx\right)^{k}\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

因此

$$\left(k-1\right)\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\varphi\left(x-y\right)f\left(x\right)f\left(y\right)dxdy+\varphi\left(0\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)dx\right)^{2}\geqslant 0,$$

由 k 的任意性即得

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\varphi\left(x-y\right)f\left(x\right)f\left(y\right)dxdy\geqslant 0.$$

- 事实上由 Fubini 定理, 我们知道

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(x\right)\left(f\star f\right)\left(x\right)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(x\right)\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x-y\right)f\left(y\right)dydx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(x\right)\int_{\mathbb{R}^n}f\left(y-x\right)f\left(y\right)dydx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(y-x\right)\int_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)f\left(y\right)dydx\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

- 为了寻找一个非负勒贝格可积函数 f, 使得 $f\star f=e^{-\alpha|x|^2}$, 我们在两边取傅立叶变换并利用卷积性质, 我们有

$$\hat{f}^2=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\alpha|y|^2}e^{-2\pi ix\cdot y}dy=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}|x|^2},$$

于是取

$$\hat{f}=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{4}}e^{-\frac{\pi^2}{2\alpha}|x|^2},$$

考虑

$$f\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{4}}e^{-\frac{\pi^2}{2\alpha}|y|^2}e^{2\pi ix\cdot y}dy=2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}}e^{-2\alpha|x|^2},$$

现在直接计算就有

$$f\star f=e^{-\alpha|x|^2}.$$

因此我们利用第三点就证明了第四点.

17. (17.) 假设 $\int_0^\infty x^{2a}\phi dx\int_0^\infty x^{2b}\phi dx<\infty$, 因为 ϕ 单调递减, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi\left(x\right)=0$, 且

$$\int_0^\infty x^r\phi dx<\infty,\forall r\in[0,2\max\left\{a,b\right\}],$$

对这些 r, 由

$$\frac{\left(2^{r+1}-1\right)}{r+1}A^{r+1}\phi\left(A\right)=\frac{\left(2A\right)^{r+1}-A^{r+1}}{r+1}\phi\left(A\right)\leqslant\int_{A}^{2A}x^{r}\phi\left(x\right)dx,$$

我们知道 $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{r+1}\phi\left(A\right)=0$, 因此分部积分有

$$\int_{0}^{\infty}x^{r}\phi dx=\frac{1}{r+1}\left(R-S\right)\int_{0}^{\infty}x^{r+1}d(-\phi),$$

于是应用 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}(\int_{0}^{\infty}x^{a+b}\phi dx)^{2}&=\left(\frac{1}{a+b+1}\int_{0}^{\infty}x^{a+b+1}d(-\phi)\right)^{2}\\&\leqslant\left(\frac{1}{a+b+1}\right)^{2}\int_{0}^{\infty}x^{2a+1}d(-\phi)\int_{0}^{\infty}x^{2b+1}(-\phi)\\&=\left(2a+1\right)\left(2b+1\right)\left(\frac{1}{a+b+1}\right)^{2}\int_{0}^{\infty}x^{2a}\phi dx\int_{0}^{\infty}x^{2b}\phi dx\\&=\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^{2}\right)\int_{0}^{\infty}x^{2a}\phi dx\int_{0}^{\infty}x^{2b}\phi dx.\end{aligned}$$

我们还要考虑取等条件, 但是 ϕ 不是右连续的, 因此我们需要正规化使得构成 L-S 测度, 考虑

$$-\tilde{\phi}\left(x\right)\triangleq\begin{cases}\lim\limits_{y\to x^{+}}-\phi\left(y\right)+\phi\left(0\right), & x\geqslant0\\0, & x<0\end{cases},$$

则 $\tilde{\phi}$ 右连续递增, 因此

$$\left(R-S\right)\frac{1}{r+1}\int_{0}^{\infty}x^{r+1}d(-\phi)=\left(L-S\right)\frac{1}{r+1}\int_{0}^{\infty}x^{r+1}d(-\tilde{\phi}),$$

上述应用 Cauchy 不等式时取等条件转化为存在不全为 0 的实数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 使得依测度 $d(-\tilde{\phi})$, 几乎处处有 $c_1x^{a+\frac{1}{2}}+c_2x^{b+\frac{1}{2}}=0$, 注意

$$d\left(-\tilde{\phi}\right)\left(-\infty,0\right)=0.$$

对 $x\geqslant0$, 如果 $c_1=-c_2x^{b-a}$ 只有 0 解, 因此 $0=d\left(-\tilde{\phi}\right)\left((0,+\infty)\right)=-\tilde{\phi}\left(+\infty\right)+\tilde{\phi}\left(0\right)$, 此时意味着 $\tilde{\phi}\left(x\right)=\tilde{\phi}\left(0\right),\forall x\geqslant0$, 注意到

$$\phi\left(y\right)\leqslant\tilde{\phi}\left(x\right)+\phi\left(0\right)\leqslant\phi\left(x\right),\forall y>x\geqslant0,$$

这给出了 $\phi\left(x\right)=\phi\left(0^{+}\right),\forall x>0$. 此时 $\phi\left(x\right)=0,\forall x>0$.

如果 $c_1=-c_2x^{b-a}$ 有非 0 解 $x_0>0$, 则

$$d\left(-\tilde{\phi}\right)\left((0,x_0)\right)+d\left(-\tilde{\phi}\right)\left((x_0,+\infty)\right)=-\tilde{\phi}\left(x_0^{-}\right)+\tilde{\phi}\left(0\right)-\tilde{\phi}\left(+\infty\right)+\tilde{\phi}\left(x_0\right)=0,$$

这给出了

$$\tilde{\phi}\left(x_0^{-}\right)=\tilde{\phi}\left(0\right),\tilde{\phi}\left(+\infty\right)=\tilde{\phi}\left(x_0\right),$$

此时

$$\phi\left(x\right)=\phi\left(x_0^{+}\right),\forall x\in\left(x_0,+\infty\right),\phi\left(x\right)=\phi\left(0^{+}\right),\forall x\in\left(0,x_0\right),$$

类似之前的讨论, 此时意味着存在 $C_3\geqslant C_2\geqslant C_1\geqslant0$, 使得

$$\phi\left(x\right)=\begin{cases}C_3, & x=0\\C_2, & x\in\left(0,x_0\right)\\C_1, & x=x_0\\0, & x>x_0\end{cases},$$

我们完成了证明.

18. (18.) 记 $a_0=1$, 则

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\left(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^2e^{-x}\mathrm{d}x\\&=1+2\sum_{i=1}^{n}a_i\int_0^{\infty}x^ie^{-x}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\int_0^{\infty}x^{i+j}e^{-x}\mathrm{d}x\\&=1+2\sum_{i=1}^{n}i!a_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)!a_ia_j.\end{aligned}$$

注意对任何 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq\mathbf{0}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)!a_ia_j&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\int_0^{\infty}x^{i+j}e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\right)^2e^{-x}\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

即 $A=((i+j)!)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 正定. 现在运用习题31., 记 $\beta=\begin{pmatrix}1!\\2!\\\vdots\\n!\end{pmatrix}$, 就有所求最小值为 $1-\beta^TA^{-1}\beta$. 由加边行列式23.9.4, 我们有

$$\begin{vmatrix}A&\beta\\\beta^T&1\end{vmatrix}=|A|-\beta^TA^*\beta=|A|\left(1-\beta^TA^{-1}\beta\right).$$

一方面, 我们有

$$\begin{vmatrix}A&\beta\\\beta^T&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1!1!C_2^1&1!2!C_3^2&\cdots&1!n!C_{n+1}^n&1!\\1!2!C_3^1&2!2!C_4^2&\cdots&2!n!C_{n+2}^n&2!\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\1!n!C_{n+1}^1&2!n!C_{n+2}^2&\ddots&n!n!C_{2n}^n&n!\\1!&2!&\cdots&n!&1\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\begin{vmatrix}C_2^1&C_3^2&\cdots&C_{n+1}^n&1\\C_3^1&C_4^2&\cdots&C_{n+2}^n&1\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\C_{n+1}^1&C_{n+2}^2&\ddots&C_{2n}^n&1\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{倒数第二行减倒数第三行,}\cdots\text{,第三行减第二行,第二行减第一行}}{=}\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\begin{vmatrix}C_2^1&C_3^2&\cdots&C_{n+1}^n&1\\C_2^0&C_3^1&\cdots&C_{n+1}^{n-1}&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\C_n^0&C_{n+1}^1&\ddots&C_{2n-1}^{n-1}&0\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{第一行减最后一行}}{=}\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\begin{vmatrix}C_1^0&C_2^1&\cdots&C_n^{n-1}&0\\C_2^0&C_3^1&\cdots&C_{n+1}^{n-1}&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\C_n^0&C_{n+1}^1&\ddots&C_{2n-1}^{n-1}&0\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\begin{vmatrix}C_1^0&C_2^1&\cdots&C_n^{n-1}\\C_2^0&C_3^1&\cdots&C_{n+1}^{n-1}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\C_n^0&C_{n+1}^1&\ddots&C_{2n-1}^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{依次后一行减前一行}}{=}\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\begin{vmatrix}1&C_2^1&\cdots&C_n^{n-1}\\0&C_2^0&\cdots&C_n^{n-2}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&C_n^0&\ddots&C_{2n-2}^{n-2}\end{vmatrix}=\cdots=\prod_{k=1}^{n}(k!)^2\begin{vmatrix}1&C_2^1&\cdots&C_n^{n-1}\\0&1&\cdots&C_n^{n-2}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\ddots&C_n^0\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(k!)^2.$$

另外一方面, 注意到

$$A=\begin{pmatrix}1! & & & \\ & 2! & & \\ & & \ddots & \\ & & & n!\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^n \\ C_3^1 & C_4^2 & \cdots & C_{n+2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n+1}^1 & C_{n+2}^2 & \cdots & C_{2n}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1! & & & \\ & 2! & & \\ & & \ddots & \\ & & & n!\end{pmatrix},$$

于是我们有

$$\det A=\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^n \\ C_3^1 & C_4^2 & \cdots & C_{n+2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{2n-1}^n \\ C_{n+1}^1 & C_{n+2}^2 & \cdots & C_{2n}^n\end{vmatrix}\overset{\text{依次后一行减前一行}}{=}\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^n \\ C_2^0 & C_3^1 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_n^1 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{依次让后一行减去前一行}}{=}\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}C_2^1 & C_2^2 & \cdots & C_n^n \\ C_2^0 & C_2^1 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{后一行依次减前一行}}{=}\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & C_2^0 & C_3^1 & \cdots & C_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & C_{n-2}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_n^1 & \cdots & C_{2n-3}^{n-2}\end{vmatrix}\overset{\text{后一列依次减前一列}}{=}\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & C_{n-2}^1 & \cdots & C_{2n-5}^{n-2} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{2n-4}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\prod_{k=1}^n k!^2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^n k!^2\cdot(n+1),$$

这里最后一个等号来自三对角行列式23.48. 现在对比得到的两个式子就有 $1-\beta^TA^{-1}\beta=\frac{1}{n+1}$, 这就完成了证明.

19. (19.) 我们记

$$A=\int_0^1 f(x)\,dx, B=\int_0^1 xf(x)\,dx, C=\int_0^1 |f(x)|^2\,dx.$$

不妨设 $A,B,C>0$. 若 $\alpha=\frac{A}{3B}>1$, 此时由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\left[\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha x)f(x)\,dx\right]^2\leqslant\int_0^{\frac{1}{\alpha}}|1-\alpha x|^2\,dx\int_0^{\frac{1}{\alpha}}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{3\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}}|f(x)|^2\,dx\leqslant\frac{C}{3\alpha}=\frac{BC}{A}.$$

因此注意到

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha x)f(x)\,dx\geqslant\int_0^1(1-\alpha x)f(x)\,dx=\frac{2}{3}A>0,$$

我们有

$$\frac{BC}{A}\geqslant\left(\frac{2A}{3}\right)^2\Rightarrow BC\geqslant\frac{4}{9}A^3,$$

此时恰好就是(17.65).

若 $A \leqslant 3B$, 则 $\alpha = \frac{A}{3B} \leqslant 1$, 于是

$$\int_0^1 (1-\alpha x) f(x)\,dx = A - \alpha B = \frac{2A}{3}.$$

继续由 Cauchy 不等式16.1, 我们有

$$\left(\int_0^1 (1-\alpha x) f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1-\alpha x)^2\,dx \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha x)^2\,dx \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \frac{C}{3\alpha} = \frac{BC}{A},$$

即

$$\frac{BC}{A} \geqslant \left(\frac{2A}{3}\right)^2 \Rightarrow BC \geqslant \frac{4}{9}A^3,$$

此时恰好就是(17.65). 我们完成了证明.

20. (20.) 由上凸的几何意义, 我们有割线斜率不等式

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \geqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \forall x > t > 0. \tag{30.242}$$

记 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0, x \in [0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{p-1}F(x)\,dx &\overset{(30.242)}{\geqslant} \int_0^1 x^{p-1}dx \int_0^x \left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)dt \\ &= \int_0^1 x^{p-1}\left(\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx + \frac{1}{2(p+1)}.\end{aligned}$$

于是由

$$\int_0^1 x^p f(x)\,dx = F(1) - p\int_0^1 x^{p-1}F(x)\,dx \leqslant F(1) - \frac{p}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx - \frac{p}{2(p+1)},$$

我们就有

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\,dx \leqslant F(1) - \frac{p}{2(p+1)} \leqslant F^2(1) - \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)},$$

这里最后一个不等号来自

$$F^2(1) - F(1) - \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)} + \frac{p}{2(p+1)} = \left[F(1)-\frac{1}{2}\right]^2 \geqslant 0.$$

这就证明(17.66).

21. (21.)

(a). 首先对 $y > x$, 注意到存在唯一的 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$x + 2\pi(k-1) \leqslant y < x + 2\pi k,$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(y) - f'(x)| &= \left|\int_x^y f''(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_x^{y-2\pi(k-1)} f''(z)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \sqrt{|y-2\pi(k-1)-x|}\cdot\sqrt{\int_0^{2\pi}|f''(z)|^2\,\mathrm{d}z} \\ &\leqslant \sqrt{2\pi},\end{aligned}$$

取 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $f'(c) = 0$. 则由上式知

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(c)| \leqslant \sqrt{2\pi}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{30.243}$$

从(30.243)知 $0\in S(k)$. 对非常值函数 $f\in B$, 要满足不等式

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)+t|^\alpha}\mathrm{d}x<\infty,$$

必须有 $S(k)\subset[0,+\infty)$, 这样说明了 $S(k)$ 最小值为 0. 此外当 $\alpha\geqslant 0,t\in(0,1)$ 成立

$$\int_{\{x\in[0,2\pi]:|f(x)|\geqslant t\}}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{t^\alpha}\int_{\{x\in[0,2\pi]:|f(x)|\geqslant t\}}|f'(x)|^k\,\mathrm{d}x\overset{(30.243)}{\leqslant}2\pi\left(\sqrt{2\pi}\right)^k\frac{1}{t^\alpha},$$

因此我们知道只需要关心

$$\sup_{f\in B}\int_{\{x\in[0,2\pi]:|f(x)|<t\}}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^\alpha}.$$

注意到 $\int_{\{x\in[0,2\pi]:|f(x)|<t\}}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^\alpha}$ 关于 α 递增. 此外我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\frac{|f'|^2}{f}-sf''\right|^2\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{|f'|^4}{|f|^2}+s^2|f''|^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}2s\frac{f''|f'|^2}{f}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{|f'|^4}{|f|^2}+s^2|f''|^2\right)\mathrm{d}x-\frac{2}{3}s\int_0^{2\pi}\frac{1}{f}\mathrm{d}(f')^3\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{|f'|^4}{|f|^2}+s^2|f''|^2\right)\mathrm{d}x-\frac{2}{3}s\int_0^{2\pi}\frac{|f'|^4}{f^2}\mathrm{d}x\\&=\left(1-\frac{2}{3}s\right)\int_0^{2\pi}\frac{|f'|^4}{f^2}\mathrm{d}x+s^2\int_0^{2\pi}|f''|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f'|^4}{f^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{s^2}{\frac{2}{3}s-1}\int_0^{2\pi}|f''|^2\,\mathrm{d}x,\forall s\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right).$$

现在我们就知道 $[0,2]\subset S(4)$. 当 $\alpha_0>2$, 不妨设 $\alpha_0<4$. 我们来纠正题目中的函数 f 可取的范围. 首先题目中叙述的 $f>0$ 可以改为 f 非负而不影响题目, 这是因为由法图引理有

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\varliminf_{c\to0^+}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)+c|^\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{c\to0^+}\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)+c|^\alpha}\mathrm{d}x,$$

因此对 $f>0$ 成立的积分上确界有限当然能推出对 f 非负的积分上确界有限. 此外为将 $\int_0^{2\pi}|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant 1$ 改为 $\int_0^{2\pi}|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$, 可以考虑 $\frac{f}{||f''||_{L^2[0,2\pi]}}$, 此时不等式变成

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^\alpha}\leqslant\sup_{g\in B}\int_0^{2\pi}\frac{|g'(x)|^k}{|g(x)|^\alpha}\cdot||f''||_{L^2[0,2\pi]}^{k-\alpha}.$$

现在对非负周期 2π 函数 $f\in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, 我们考虑卷积磨光13.14中的 $f_\delta\in C^2(\mathbb{R})$, 读者不难验证 $f_\delta\in B$ 且存在子列 $\lim\limits_{i\to\infty}\delta_i=0$ 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{\delta_i}(x)=f(x),\lim_{i\to\infty}f'_{\delta_i}(x)=f'(x),a.e于[0,2\pi],\lim_{i\to\infty}\left|\left|f''_{\delta_i}-f''\right|\right|_{L^2[0,2\pi]}=0.$$

法图引理表明

$$\int_0^{2\pi}\varliminf_{i\to\infty}\frac{\left|f'_{\delta_i}(x)\right|^k}{|f_{\delta_i}(x)|^\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{i\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f'_{\delta_i}(x)\right|^k}{|f_{\delta_i}(x)|^\alpha}\mathrm{d}x.$$

基于上述讨论, 我们纠正 B 为

$$\widetilde{B}\triangleq\left\{f\in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}):f\geqslant0且周期2\pi\right\},$$

此时

$$S(k)=\left\{\alpha\geqslant0:存在K_\alpha>0,使得\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^k}{|f(x)|^\alpha}\leqslant K_\alpha||f''||_{L^2[0,2\pi]}^{k-\alpha},\forall f\in\tilde{B}\right\}.$$

现在考虑

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{3}{4-\alpha_0}}, & x\in[0,\pi]\\ p_{\alpha_0}(x), & x\in(\pi,2\pi]\end{cases},$$

这里

$$p_{\alpha_0}\in C^2(\mathbb{R}),p_{\alpha_0}(\pi)=\pi^{\frac{4}{3-\alpha_0}},p'_{\alpha_0}(\pi)=\frac{3\pi^{\frac{4}{3-\alpha_0}-1}}{4-\alpha_0},p_{\alpha_0}(2\pi)=p'_{\alpha_0}(2\pi)=0.$$

注意到

$$\int_0^{2\pi}|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{4-\alpha_0}\right)^2\left(\frac{3}{4-\alpha_0}-1\right)^2\int_0^{\pi}x^{2\left(\frac{3}{4-\alpha_0}-2\right)}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\left|p''_{\alpha_0}(x)\right|^2\mathrm{d}x<\infty,$$

则将 f 周期 2π 延拓之后容易证明 $f\in\widetilde{B}$. 于是应有 $\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^4}{|f(x)|^{\alpha_0}}\mathrm{d}x<\infty$, 但是

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^4}{|f(x)|^{\alpha_0}}\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{3}{4-\alpha_0}\right)^4\int_0^{\pi}\frac{\left|x^{\frac{3}{4-\alpha_0}-1}\right|^4}{x^{\frac{3\alpha_0}{4-\alpha_0}}}\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{4-\alpha_0}\right)^4\int_0^{\pi}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty,$$

这就是一个矛盾! 最后我们证明了 $S(4)=[0,2]$.

(b). 首先对 $y>x$, 注意到存在唯一的 $k\in\mathbb{N}$ 使得

$$x+2\pi(k-1)\leqslant y<x+2\pi k,$$

于是

$$\begin{aligned}|f'(y)-f'(x)|&=\left|\int_x^y f''(z)\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_x^{y-2\pi(k-1)}f''(z)\,\mathrm{d}z\right|\\&\leqslant\sqrt{|y-2\pi(k-1)-x|}\cdot\sqrt{\int_0^{2\pi}|f''(z)|^2\,\mathrm{d}z}\\&\leqslant\sqrt{|y-x|}.\end{aligned}$$

由例题17.2, 我们有

$$|f'(x)|\leqslant\sqrt[3]{3}\cdot|f(x)|^{\frac{1}{3}},\forall x\in\mathbb{R}.$$

(c). 由前两问我们知道

$$\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^{2024}}{|f(x)|^{\frac{2020}{3}+2}}\mathrm{d}x\leqslant3^{\frac{2020}{3}}\int_0^{2\pi}\frac{|f(x)|^{\frac{2020}{3}}|f'(x)|^4}{|f(x)|^{\frac{2020}{3}+2}}\mathrm{d}x=3^{\frac{2020}{3}}\int_0^{2\pi}\frac{|f'(x)|^4}{|f(x)|^2}\mathrm{d}x,$$

于是 $\left[0,\frac{2020}{3}+2\right]\subset S(2024)$, 当 $\alpha_0>\frac{2020}{3}+2$, 不妨设 $\alpha_0<2024$, 此时用

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{2023}{2024-\alpha_0}}, & x\in[0,\pi]\\ q_{\alpha_0}(x), & x\in(\pi,2\pi]\end{cases},$$

这里

$$q_{\alpha_0}\in C^2(\mathbb{R}),q_{\alpha_0}(\pi)=\pi^{\frac{2023}{2024-\alpha_0}},q'_{\alpha_0}(\pi)=\frac{2023}{2024-\alpha_0}\pi^{\frac{2023}{2024-\alpha_0}-1},q_{\alpha_0}(2\pi)=q'_{\alpha_0}(2\pi)=0.$$

我们做周期 2π 延拓之后和第一问类似的计算导出矛盾! 这就证明了 $S(2024)=\left[0,\frac{2020}{3}+2\right]$.

22. (22.) 由 Favard 不等式17.6, 我们有

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx\leqslant\frac{4}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2,\int_0^1 g^2(x)\,dx\leqslant\frac{4}{3}\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2.\tag{30.244}$$

我们再引用经典的反向 Chebyshev 不等式[119]有

$$\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx,\tag{30.245}$$

[119]和前文中的版本16.5不一样.

结合(30.244)和(30.245), 我们有

$$\left(\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,dx\int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

我们将给出(30.245)一个初等证明, 事实上记 $u=\int_0^1 f(x)\,dx, v=\int_0^1 g(x)\,dx$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\right|\\
=&\left|\int_0^1 (f(x)-u)\,(g(x)-v)\,dx\right|\\
\leqslant&\sqrt{\int_0^1 |f(x)-u|^2\,dx\int_0^1 |g(x)-v|^2\,dx}\\
=&\sqrt{\left(\int_0^1 f^2(x)\,dx-u^2\right)\left(\int_0^1 g^2(x)\,dx-v^2\right)}\\
\leqslant&\sqrt{\frac{1}{3}u^2\cdot\frac{1}{3}v^2}=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等号来自(30.244), 去掉绝对值就得到(30.245).

23. (23.) 用 $\frac{1}{a}f(bx)$ 代替 f 可以不妨设

$$\int_0^\infty \sqrt{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

设

$$g(x)\triangleq\left(\sqrt[4]{6}-\sqrt{x}\right)\chi_{[0,\sqrt{6}]}(x),$$

我们有

$$\int_0^\infty [f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \left[f^2(x)+g^2(x)-2f(x)\,g(x)\right]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

从而

$$2=\int_0^\infty \left[f^2(x)+g^2(x)\right]\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在

$$1\geqslant\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^\infty f(x)\left[\sqrt[4]{6}-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=\sqrt[4]{6}\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x-1,$$

即 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\sqrt[4]{6}}$. 故 k 可取 $\frac{2}{\sqrt[4]{6}}$.

又考虑

$$f_0(x)=g(x)=\left(\sqrt[4]{6}-\sqrt{x}\right)\chi_{[0,\sqrt{6}]}(x),$$

我们有

$$\int_0^\infty \sqrt{x}f_0(x)\,\mathrm{d}x=1,\int_0^\infty f_0^2(x)\,\mathrm{d}x=1,\int_0^\infty f_0(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt[4]{6}},$$

即 $k=\frac{2}{\sqrt[4]{6}}$ 是最佳的.

24. (24.) 本题来自MSE.

利用 g 的下凸性, 我们有切线不等式

$$g(kx)\geqslant g(x)+(k-1)\,xg'(x),\forall k>1,x\in(0,+\infty).\tag{30.246}$$

利用不等式(30.246)和一般测度的 Holder 积分不等式16.1有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^{p+1}}\int_0^\infty x^p e^{-\frac{g(x)}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^\infty x^p e^{-\frac{g(kx)}{kx}}\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^\infty x^p e^{-\frac{g(x)}{kx}}e^{-\frac{k-1}{k}g'(x)}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\left(\int_0^\infty x^p e^{-\frac{g(x)}{x}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}}\left(\int_0^\infty x^p e^{-g'(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{k-1}{k}},
\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-\frac{g(x)}{x}}\mathrm{d}x \leqslant k^{\frac{(p+1)k}{k-1}} \int_0^{\infty} x^p e^{-g'(x)}\mathrm{d}x.$$

让 $k \to 1^-$ 即得(17.68). 此外当 $p=0, g(x) = -\int_0^x \ln f(t)\,\mathrm{d}t$, 式(17.68)变成

$$\int_0^{\infty} e^{\frac{\int_0^x \ln f(t)\mathrm{d}t}{x}}\mathrm{d}x \leqslant e\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \forall\text{正值函数}f \in C[0,+\infty).$$

25. (25.) 注意到

$$\int_{-1}^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,[g(x)+g(-x)]\,\mathrm{d}x;$$
$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$$
$$\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [g(x)+g(-x)]\,\mathrm{d}x.$$

于是不等式(17.69)等价于

$$\int_0^1 f(x)\,[g(x)+g(-x)]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 [g(x)+g(-x)]\,\mathrm{d}x. \tag{30.247}$$

因为 $h(x) = g(x)+g(-x)$ 在 $[-1,1]$ 偶函数和下凸函数[120], 我们有 h 在 $[0,1]$ 递增. 现在用切比雪夫积分不等式16.6知(30.247)成立.

26. (26.) 类似拉格朗日插值定理的积分余项的构造方法11.2, 取

$$k(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^2(1-y)^2}{2}, & x \leqslant y \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)y^2 + \left(x^2-x\right)y, & 0 \leqslant y < x \end{cases},$$

直接分部积分计算就有 $f(x) = \int_0^1 k(x,y)\,f'''(y)\,dy$, 因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(x)^2}{x^2}dx &= \int_0^1 \frac{\left(\int_0^1 k(x,y)\,f'''(y)\,dy\right)^2}{x^2} \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{\int_0^1 |k(x,y)|^2\,dy}{x^2}dx \cdot \int_0^1 |f'''(y)|^2\,dy \\ &= \frac{1}{720}\int_0^1 |f'''(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

27. (27.) 类似拉格朗日插值定理的积分余项的构造方法11.2取

$$k(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^2(1-y)^2}{2}, & x \leqslant y \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)y^2 + \left(x^2-x\right)y, & 0 \leqslant y < x \end{cases},$$

容易知道

$$\left|\int_0^1 x(1-x)\,f(x)\,f'(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x\right)f^2(x)\,dx\right|,$$
$$f(x) = \int_0^1 k(x,y)\,f'''(y)\,dy,$$
$$f^2(x) = \int_0^1\int_0^1 k(x,y)\,k(x,z)\,f'''(y)\,f'''(z)\,dzdy.$$

[120] 虽然没有可导条件, 但你可以假装求导 h 来预判. 严格证明就是使用凸性定义的不等式从定义上得到 g 下凸, 即

$$\frac{g(x)+g(-x)-g(y)-g(-y)}{x-y} = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} - \frac{g(-x)-g(-y)}{-x-(-y)}.$$

以及对 $(y,z)\in[0,1]^2$, 不妨设 $z\leqslant y$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)k(x,y)\,k(x,z)\,dx=&-\frac{(1-y)^2z}{240}\left[(1-z)\left(y^2-z^2\right)+2y^2(1-y)(y-z)\right]\\&-\frac{(1-y)^2z}{240}\left(y(y+1)(1-y)^2z+(1-z)^2z^2(z+1)\right)\leqslant 0,\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)f^2(x)\,dx\right|&=\left|\int_{[0,1]^2}f'''(y)\,f'''(z)\,dydz\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)k(x,y)\,k(x,z)\,dx\right|\\&\leqslant\int_{[0,1]^2}\left|\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)k(x,y)\,k(x,z)\,dx\right|dydz\\&=-\int_{[0,1]^2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)k(x,y)\,k(x,z)\,dxdydz=\frac{1}{30240}.\end{aligned}$$

令 $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{6}$ 可知等号成立.

28. (28.) 当 $a=1$ 命题是显然的[121]. 注意到恒等式

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx\right)^a&=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)+f(\pi-x)-f(-x)\right]\sin xdx\right)^a\\\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx\right)^a&=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)-f(\pi-x)+f(-x)\right]\cos xdx\right)^a,\end{aligned}$$

由 Holder 不等式16.1, 我们有

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)+f(\pi-x)-f(-x)\right]\sin xdx\right)^a\\&\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f(x-\pi)+f(\pi-x)-f(-x)\right|^a dx\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)-f(\pi-x)+f(-x)\right]\cos xdx\right)^a\\&\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f(x-\pi)-f(\pi-x)+f(-x)\right|^a dx\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}.\end{aligned}$$

注意到

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}=\frac{\pi^{\frac{a-1}{2}}}{2^{a-1}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1},$$

以及初等不等式

$$\begin{cases}|x-y+z-w|^a+|x-y-z+w|^a\leqslant 2\left(x^a+y^a+z^a+w^a\right) & a\in[1,2]\\|x-y+z-w|^a+|x-y-z+w|^a\leqslant 2^{a-1}\left(x^a+y^a+z^a+w^a\right) & a\in[2,+\infty)\end{cases},x,y,z,w>0.(30.248)$$

[121] 此时系数视为在极限下的极限值.

则当 $a\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}&\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x dx\right)^{a}+\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x dx\right)^{a}\\&\leqslant \pi^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi}f^{a}(x)+f^{a}(\pi-x)+f^{a}(x-\pi)+f^{a}(-x)\,dx\\&=\pi^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi}f^{a}(x)\,dx.\end{aligned}$$

类似可证明 $1<a\leq 2$ 的情形, 这里初等不等式(30.248)可如下证明:

由对称性我们不妨设

$$x-y>0,z-w>0,,x-y\geqslant z-w,$$

因此对 $t=\frac{x-y}{z-w}\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}\frac{|x-y+z-w|^{a}+|x-y-z+w|^{a}}{x^{a}+y^{a}+z^{a}+w^{a}}&\leqslant\frac{(x-y+z-w)^{a}+(x-y-z+w)^{a}}{(x-y)^{a}+(z-w)^{a}}\\&=\frac{\left(\frac{x-y}{z-w}+1\right)^{a}+\left(\frac{x-y}{z-w}-1\right)^{a}}{\left(\frac{x-y}{z-w}\right)^{a}+1}=\frac{(t+1)^{a}+(t-1)^{a}}{t^{a}+1},\end{aligned}$$

令

$$h(t)=\frac{(t+1)^{a}+(t-1)^{a}}{t^{a}+1},t\geqslant 1,$$

注意到

$$h'(t)=a\frac{\left(t^{a}+t\right)(t-1)^{a-1}+(t+1)^{a-1}\left(t-t^{a}\right)}{t\left(1+t^{a}\right)^{2}},\forall t\geqslant 1,$$

以及

$$\lim_{t\to+\infty}h(t)=2,h(1)=2^{n-1},$$

以及

$$\begin{cases}\frac{t^{a-1}+1}{(t+1)^{a-1}}\geqslant\frac{t^{a-1}-1}{(t-1)^{a-1}} & a\in[1,2]\\ \frac{t^{a-1}+1}{(t+1)^{a-1}}\leqslant\frac{t^{a-1}-1}{(t-1)^{a-1}} & a\in[2,+\infty)\end{cases},\forall t>1,$$

则

$$h(t)\begin{cases}\text{递增} & a\in[1,2]\\ \text{递减} & a\in[2,+\infty)\end{cases}.$$

从而完成了初等不等式(30.248)的证明.

29. (29.) 对 $a\in(0,1)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, 一方面

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}|f'(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}|f'(y)|\,\mathrm{d}y\int_{0}^{y}1\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}y\,|f'(y)|\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\sqrt{\int_{0}^{1}y^{2a+1}\,|f'(y)|^{2}\,\mathrm{d}y\cdot\int_{0}^{1}y^{1-2a}\mathrm{d}y}=\sqrt{\frac{1}{2-2a}}\cdot\sqrt{\int_{0}^{1}y^{2a+1}\,|f'(y)|^{2}\,\mathrm{d}y}.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left|\int_x^1 f'(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[\int_x^1 y^{-2a}\mathrm{d}y\cdot\int_x^1 y^{2a}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\right]\\ &= \int_0^1 \left[\frac{1-x^{1-2a}}{1-2a}\int_x^1 y^{2a}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\right] = \int_0^1 y^{2a}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\int_0^y \frac{1-x^{1-2a}}{1-2a}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{1-2a}\int_0^1 y^{2a+1}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y - \frac{1}{(1-2a)(2-2a)}\int_0^1 y^2|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \left(\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{1-2a}\right)\int_0^1 y^{2a+1}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y - \frac{1}{(1-2a)(2-2a)}\int_0^1 y^2|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{3-4a}{2(a-1)(2a-1)}\int_0^1 y^{2a+1}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y - \frac{1}{(1-2a)(2-2a)}\int_0^1 y^2|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{30.249}$$

在上式令 $a=\frac{3}{4}$ 得

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^1 y^2|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y, \tag{30.250}$$

这恰好是(17.70)的 $a=\frac{1}{2}$ 的情况.

当 $a\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, 我们结合(30.249)和(30.250)得

$$\left[\frac{1}{4(1-2a)(2-2a)}+1\right]\left[\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\right] \leqslant \frac{3-4a}{2(a-1)(2a-1)}\int_0^1 y^{2a+1}|f'(y)|^2\,\mathrm{d}y,$$

即(17.70)成立. 我们完成了证明.

30. (30.) 设 $a=\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x>0$, 不等式(17.71)等价于

$$\int_0^\infty xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^s xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_s^\infty xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2}{2},$$

这里 $s>0$ 待定.

$$\begin{aligned}&\int_0^s xf(x)\,\mathrm{d}x + s\int_s^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}a^2\\ \Leftrightarrow\ &\int_0^s xf(x)\,\mathrm{d}x + s\left(a-\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{2}a^2\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a^2}{2} - sa + s\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^s xf(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^s (s-x)f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,\end{aligned}$$

利用 $f<1$, 取 $s=a$, 我们有

$$\frac{a^2}{2} - sa + \int_0^a (a-x)f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{a^2}{2} - sa + \int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

这就证明了(17.71).

31. (31.) 我们对 $p(x)=\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_jx^j, a_0=1$, 来证明

$$\int_0^1 |p(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

事实上当 $n=1$ 显然成立, 假设 $n>1$, 我们用 $n+1$ 代替 n, 则只需证明

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\right|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{30.251}$$

现在

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^n a_j x^j\right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x = 1 + 2\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i+1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j+1}.$$

由 Cauchy 行列式21.11我们知道 $A = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是正定矩阵. 由习题31., 我们有

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^n a_j x^j\right|^2 \mathrm{d}x \geqslant 1 - \beta^T A^{-1}\beta = \frac{1}{(n+1)^2}, \beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1} \end{pmatrix},$$

这里可如下计算 $\beta^T A^{-1}\beta$:

设 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = A^{-1}\beta$, 则 $\sum\limits_{k=1}^n \frac{x_k}{x+k+1} - \frac{1}{x+1}$ 有零点 $x = 1, 2, \cdots, n$. 通分得

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x+k+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{C(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}.$$

现在

$$\begin{aligned} -1 &= \lim_{x\to -1}\left[\sum_{k=1}^n \frac{x_k(x+1)}{x+k+1} - 1\right] = \lim_{x\to -1}(x+1)\left[\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x+k+1} - \frac{1}{x+1}\right] \\ &= \lim_{x\to -1}\frac{C(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+2)\cdots(x+n+1)} = \frac{C(-1)^n(n+1)!}{n!} = C(-1)^n(n+1), \end{aligned}$$

即 $C = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. 因此

$$\beta^T A^{-1}\beta = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{0+k+1} = 1 + \frac{C(0-1)(0-2)\cdots(0-n)}{(0+1)(0+2)\cdots(0+n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$

这就证明了(30.251).

32. (32.) **Method 1**

待定 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, 由 Cauchy 不等式16.1和分部积分, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n\right)^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \left|f^{(n)}(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\geqslant \left(\int_0^1 \left(a_0 + a_1 x + \cdots + x^n\right) f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(n!\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

接下来注意到

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n+1} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \int_0^1 x^{i+j}\mathrm{d}x + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i \int_0^1 x^{i+n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n+1} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_i a_j}{i+j+1} + 2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{i+n+1}. \end{aligned}$$

记

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2n} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

由习题31., 我们有

$$\frac{1}{2n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_ia_j}{i+j+1}+2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{i+n+1}\geqslant\frac{1}{2n+1}-\beta^TA^{-1}\beta,$$

且等号可以成立. 取等号成立时的 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$, 我们来证明此时上面的放缩就是题目要求的放缩.

现在记 $\mathbf{x}=A^{-1}\beta=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, 我们有 $A\mathbf{x}=\beta$, 即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k+i-1}=\frac{1}{n+i},i=1,2,\cdots,n.$$

现在 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k+x-1}-\frac{1}{n+x}$ 有 n 个零点, 于是通分得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k+x-1}-\frac{1}{n+x}=\frac{C\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdots\left(x-n\right)}{x\left(x+1\right)\cdots\left(x+n\right)}.$$

考虑

$$\begin{aligned}-1&=\lim_{x\to-n}\left[\left(x+n\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k+x-1}-1\right]=\lim_{x\to-n}\frac{C\left(x-1\right)\left(x-2\right)\cdots\left(x-n\right)}{x\left(x+1\right)\cdots\left(x+n-1\right)}\\&=\frac{C\left(-n-1\right)\left(-n-2\right)\cdots\left(-n-n\right)}{\left(-n\right)\left(-n+1\right)\cdots\left(-n+n-1\right)}=\frac{C\left(n+1\right)\cdots\left(2n\right)}{n!}=\frac{C\left(2n\right)!}{n!^2},\end{aligned}$$

即 $C=-\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 现在

$$\begin{aligned}\beta^TA^{-1}\beta=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k+n}&=\frac{1}{2n+1}-\frac{\left(n!\right)^2n!}{\left(2n\right)!\left(n+1\right)\left(n+2\right)\cdots\left(2n+1\right)}\\&=\frac{1}{2n+1}-\frac{\left(n!\right)^4}{\left(2n\right)!\left(2n+1\right)!},\end{aligned}$$

于是

$$\left[\frac{1}{2n+1}-\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{\left(n!\right)^4}{\left(2n\right)!\left(2n+1\right)!}\right)\right]\int_0^1\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\left(n!\right)^2\left(\int_0^1f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2,$$

即得(17.72).

Method 2

定义

$$g_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n\left(2n\right)!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n},g\left(x\right)=g_n\left(2x-1\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1g^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1g_n^2\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1g_n^2\left(x\right)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1\frac{\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}}{2\cdot4^n\cdot\left[\left(2n\right)!\right]^2}\mathrm{d}x\\&=\left(-1\right)^n\int_{-1}^1\frac{\left(x^2-1\right)^n\cdot\frac{d^{2n}\left(x^2-1\right)^n}{dx^{2n}}}{2\cdot4^n\cdot\left[\left(2n\right)!\right]^2}\mathrm{d}x=\left(-1\right)^n\int_{-1}^1\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2\cdot4^n\cdot\left(2n\right)!}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{\left(1-x^2\right)^n}{4^n\cdot\left(2n\right)!}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n+1}\theta}{4^n\cdot\left(2n\right)!}\mathrm{d}\theta=\frac{\left(2n\right)!!}{4^n\left(2n\right)!\left(2n+1\right)!!}\\&=\frac{n!}{2^n\left(2n\right)!!\left(2n-1\right)!!\left(2n+1\right)!!}=\frac{\left(n!\right)^2}{\left(2n\right)!\left(2n+1\right)!}.\end{aligned}$$

于是由 Cauchy 不等式16.1得

$$\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\left|f^{(n)}(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f^{(n)}(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$=\left(\int_0^1 f(x)\,g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

即得(17.72).

33. (33.) 不妨设 f 不恒为 0, 于是对某个 $f(y_0)>0, y_0\geqslant 0$, 由(17.73)得

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{f(y_0)}\int_0^\infty \epsilon^{|x-y_0|}\mathrm{d}x<\infty.$$

由

$$\left(\int_x^\infty f(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)|_{x=0}>0,\left(\int_x^\infty f(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)|_{x=\infty}<0$$

得 $x_0\geqslant 0$ 满足

$$\int_{x_0}^\infty f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

现在由(17.73)得

$$\int_{x_0}^\infty\int_0^{x_0} f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_{x_0}^\infty\int_0^{x_0}\epsilon^{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\int_{x_0}^\infty\int_0^{x_0}\epsilon^{y-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1-\epsilon^{x_0}}{\ln^2\frac{1}{\epsilon}}<\frac{1}{\ln^2\frac{1}{\epsilon}},$$

即

$$\int_{x_0}^\infty f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}y<\frac{1}{\ln\frac{1}{\epsilon}},$$

故

$$\int_0^\infty f(y)\,\mathrm{d}y=\int_{x_0}^\infty f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}y<\frac{2}{\ln\frac{1}{\epsilon}}.$$

由(17.73)得

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2=\int_0^\infty\int_y^\infty f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\int_0^\infty\int_y^\infty\epsilon^{|x-y|}f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\ln\frac{1}{\epsilon}}\int_0^\infty f(y)\,\mathrm{d}y,$$

即 $\int_0^\infty f(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{2}{\ln\frac{1}{\epsilon}}$. 考虑 $f_z(x)=\epsilon^{|x-z|}$, 由绝对值不等式知对 $f_z, z\geqslant 0$ 有(17.73)成立. 而

$$\lim_{z\to+\infty}\int_0^\infty f_z(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{z\to+\infty}\left(\int_0^z\epsilon^{z-x}\mathrm{d}x+\int_z^\infty\epsilon^{x-z}\mathrm{d}x\right)=\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{2-\epsilon^z}{\ln\frac{1}{\epsilon}}\right)=\frac{2}{\ln\frac{1}{\epsilon}},$$

故 $C=\frac{2}{\ln\frac{1}{\epsilon}}$ 为最佳常数.

34. (34.) 我们用 $C_k(m)$ 表示可能不同的只依赖 m 的正常数. 对 $y\geqslant 0$, 我们有

$$\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{1+|x+y|^m}\cdot\frac{1}{1+|x|^m}\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left(\frac{1}{1+|x+y|^m}\cdot\frac{1}{1+|x|^m}\right)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_0^1\left(\frac{1}{1+|1+y|^m}\cdot\frac{1}{1+1^m}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{1}{1+|1+y|^m}\geqslant\frac{C_1(m)}{1+|y|^m}.$$

注意到 $\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{1+|x+y|^m}\cdot\frac{1}{1+|x|^m}\right)\mathrm{d}x$ 是关于 y 的偶函数, 所以对一切 $y\in\mathbb{R}$, 都成立

$$\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{1+|x+y|^m}\cdot\frac{1}{1+|x|^m}\right)\mathrm{d}x\geqslant\frac{C_1(m)}{1+|y|^m}.$$

利用得到的不等式, 我们有我们有

$$n^a \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|x-a_j|^m} \right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|x-a_j|^m} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+|x-a_i|^m} \right) \mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{换元}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+|x+a_i-a_j|^m} \frac{1}{1+|x|^m} \right) \mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{C_1(m)}{1+|a_i-a_j|^m},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|a_i-a_j|^m} \leqslant \frac{n^a}{C_1(m)}. \tag{30.252}$$

现在不妨设 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,

$$b_q \triangleq |\{i \in \{1,2,\cdots,n\} : a_i \in [q, q+1)\}|, q \in \mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

即 b_q 表示 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 中落入 $[q, q+1)$ 的元素个数. 注意到 $\sum\limits_{q \in \mathbb{N}_0} b_q = n$, 假设 b_q 有 k 个元素非 0. 利用 Cauchy 不等式, 由(30.252)得

$$\begin{aligned} \frac{n^a}{C_1(m)} &\geqslant \sum_{q,q' \in \mathbb{N}_0} \frac{b_q b_{q'}}{1+\max\{q+1-q', q'+1-q\}^m} \\ &\geqslant \sum_{q=q' \in \mathbb{N}_0} \frac{b_q^2}{2} = \sum_{q \in \mathbb{N}_0} \frac{b_q^2}{2} = \frac{1}{2k} \sum_{b_q \neq 0} 1 \sum_{q \in \mathbb{N}_0} b_q^2 \geqslant \frac{1}{2k} \left(\sum_{q \in \mathbb{N}_0} b_q \right)^2 \\ &= \frac{n^2}{2k}, \end{aligned}$$

即得估计 $k \geqslant C_2(m) n^{2-a}$.

注意到存在 $C_3(m) > 0$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - a_j|^m \geqslant C_3(m) \sum_{q,q' \in \mathbb{N}_0} b_q b_{q'} |q-q'|^m,$$

这是因为无非把 a_i, a_j 放缩为所在区间 $[q, q+1), [q', q'+1)$ 的边界点, 这显然是同阶的. 设 $b_{q_i} \neq 0, i = 1,2,\cdots,k$ 且 q_i 严格递增, 此时有 $|q_i - q_j| \geqslant |i-j|$. 现在

$$\begin{aligned} C_3(m) \sum_{q,q' \in \mathbb{N}_0} b_q b_{q'} |q-q'|^m &\geqslant C_3(m) \sum_{q,q' \in \mathbb{N}_0, b_q, b_{q'} \neq 0} b_q b_{q'} |q-q'|^m \\ = C_3(m) \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{q_i} b_{q_j} |q_i - q_j|^m &\geqslant C_3(m) \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |i-j|^m \geqslant C_4(m) k^{m+2}, \end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自习题16., 即

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^{m+2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |i-j|^m = \frac{2}{(m+2)(m+1)}.$$

于是我们就有

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (1+|a_i-a_j|^m) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i-a_j|^m \geqslant C_4(m) k^{m+2} \geqslant C_5(m) n^{(m+2)(2-a)},$$

这就完成了证明.

35. (35.) 由定理13.8知 φ 在 $[0, +\infty)$ 递增. 由(17.74), g 递减和结论14.3.1知 g 非负且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. 若 $\varphi \equiv 0$ 则和(17.74)矛盾! 因此设 $t_0 \geqslant 0$ 使得

$$\varphi(t) > 0, \forall t > t_0, \varphi(t) = 0, \forall t \in [0, t_0].$$

对 $\varphi(t) \geqslant t > t_0$ 利用 g 递减和 φ 下凸, 我们有

$$\int_t^{\infty} g(\varphi(x)) x^p \mathrm{d}x \leqslant \int_t^{\infty} g\left(\frac{\varphi(t)}{t} x \right) x^p \mathrm{d}x = \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{p+1} \int_{\varphi(t)}^{\infty} g(x) x^p \mathrm{d}x. \tag{30.253}$$

由(30.253), 我们有(17.75)成立.

对 $\varphi(t)<t, t>t_0$, 类似(30.253)有

$$\int_0^t g(\varphi(x))\,x^p\mathrm{d}x \geqslant \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{p+1}\int_0^{\varphi(t)} g(x)\,x^p\mathrm{d}x. \tag{30.254}$$

考虑递减函数

$$G(r)\triangleq\begin{cases}\frac{1}{r^{p+1}}\int_0^r g(x)\,x^p\mathrm{d}x=\int_0^1 g(rx)\,x^p\mathrm{d}x, & r>0\\ \int_0^1 g(0)\,x^p\mathrm{d}x, & r=0\end{cases}$$

于是由(30.254)得

$$\int_0^t g(\varphi(x))\,x^p\mathrm{d}x \geqslant t^{p+1}G(\varphi(t)) \geqslant t^{p+1}G(t)=\int_0^t g(x)\,x^p\mathrm{d}x.$$

结合(17.74)即得(17.75).

对 $0\leqslant t\leqslant t_0$, 我们有

$$\int_0^t g(\varphi(x))\,x^p\mathrm{d}x=\int_0^t g(0)\,x^p\mathrm{d}x \geqslant \int_0^t g(x)\,x^p\mathrm{d}x.$$

结合(17.74)即得(17.75).

我们完成了证明.

注 若 $\varphi:[0,a)\to[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to a^-}\varphi(x)=+\infty$, 补充定义 $g(\varphi(x))=0,\forall x\geqslant a$, 其余条件都保留, 则仍有(17.75)成立.

36. (36.) 不妨设 $\int_0^\infty f(x)\,x^p\mathrm{d}x<\infty, f(0)>0$, 否则问题是平凡的. 设 $f(x)=f(0)\,e^{-\psi(x)}$, 这里 ψ 在 $[0,+\infty)$ 下凸且 $\psi(0)=0$ 或者 $[0,a)$ 下凸且

$$\psi(0)=0,\ \lim_{x\to a^+}\psi(x)=+\infty.$$

考虑

$$g(x)\triangleq e^{-\lambda x}, \lambda=\left[\frac{f(0)\,\Gamma(p+1)}{\int_0^\infty f(x)\,x^p\mathrm{d}x}\right]^{\frac{1}{p+1}}.$$

注意到

$$\int_0^\infty e^{-\psi(x)}x^p\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^p\mathrm{d}x,$$

于是

$$\frac{f(x)}{f(0)}=g\left(\lambda^{-1}\psi(x)\right), \int_0^\infty g\left(\lambda^{-1}\psi(x)\right)x^p\mathrm{d}x=\int_0^\infty g(x)\,x^p\mathrm{d}x.$$

取 $\varphi=\frac{\psi}{\lambda}$ 并利用数学类积分不等式习题35.得

$$\int_t^\infty f(x)\,x^p\mathrm{d}x\leqslant f(0)\int_t^\infty e^{-\lambda x}x^p\mathrm{d}x,\forall t\geqslant 0.$$

现在

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty f(x)\,x^q\mathrm{d}x=(q-p)\int_0^\infty t^{q-p-1}\mathrm{d}t\int_t^\infty f(x)\,x^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant f(0)\,(q-p)\int_0^\infty t^{q-p-1}\mathrm{d}t\int_t^\infty e^{-\lambda x}x^p\mathrm{d}x=f(0)\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^q\mathrm{d}x\\ &=f(0)\,\frac{\Gamma(q+1)}{\lambda^{q+1}},\end{aligned}$$

这就证明了(17.76).

37. (37.) 在数学类积分不等式习题36.中考虑 $f(x)+f(-x)$ 即证.

38. (38.) 由 Cauchy 不等式16.1和分部积分得

$$\begin{aligned}\int_a^b (f')^6\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (f')^5\,\mathrm{d}f = -5\int_a^b f\,(f')^4 f''\mathrm{d}x \leqslant 5\int_a^b |f|\,(f')^4\,|f''|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 5\sqrt{\int_a^b (f')^6\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b |f\cdot f'\cdot f''|^2\,\mathrm{d}x}\\ &\leqslant 5\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\sqrt{\int_a^b (f')^6\,\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b |f'\cdot f''|^2\,\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

即(17.78)成立.

39. (39.) 首先设 $\lambda_0>1$ 是下述方程的根

$$\sqrt{\lambda^2-1}-\arccos(\frac{1}{\lambda})+\lambda-\frac{\pi}{2}=0.$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = C\lambda_0+\int_a^b [f(x)-\lambda_0\sin f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

注意到[122]

$$t-\lambda_0\sin(t)\leqslant -\arccos(\frac{1}{\lambda_0})+\sqrt{\lambda_0^2-1},\forall t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

故有

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant(-\arccos(\frac{1}{\lambda_0})+\sqrt{\lambda_0^2-1})(b-a)+\lambda_0 C=\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C),$$

即得一个上界, 由对称性可得下界, 从而有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C).$$

为确定是最佳上界, 令

$$f_0(x)\triangleq\begin{cases}-\arccos(\frac{1}{\lambda_0}) & x\in\left[a,\frac{(b-C)\lambda_0+a\sqrt{\lambda_0^2-1}}{\lambda_0+\sqrt{\lambda_0^2-1}}\right]\\ \frac{\pi}{2} & x\in(\frac{(b-C)\lambda_0+a\sqrt{\lambda_0^2-1}}{\lambda_0+\sqrt{\lambda_0^2-1}},b]\end{cases},$$

计算可知

$$\int_a^b f_0(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C),$$

故

$$\sup_{f\in S}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C).$$

40. (40.♡) 由 Holder 不等式16.1得

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^3\leqslant\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x\cdot\left(\int_0^1 1^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)^2=\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

设

$$h(c)\triangleq 8c^3-6c^2+1,c\geqslant 0,$$

于是

$$h'(c)=24c^2-12c\Rightarrow h(c)\geqslant h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

代入 $c=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 即得(17.79).

[122]求导计算.

41. (41.) 待定 $a,b\in\mathbb{R}$, 考虑

$$\int_0^1\left[f\left(x\right)-ax^m-b\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

打开括号得

$$\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\geqslant 2a\int_0^1 x^m f(x)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{a^2}{2m+1}-b^2-\frac{2ab}{m+1}.$$

对关于 a,b 的二次型求最大值得

$$\begin{aligned}&\max_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{2a\int_0^1 x^m f(x)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{a^2}{2m+1}-b^2-\frac{2ab}{m+1}\right\}\\&=\frac{2m+1}{m^2}\left((m+1)\int_0^1 x^m f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

现在就有

$$\int_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\geqslant\frac{2m+1}{m^2}\left((m+1)\int_0^1 x^m f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

记

$$C\triangleq\int_0^1 x^m f(x)\mathrm{d}x,D\triangleq\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

以及

$$g_\lambda\left(C,D\right)\triangleq\frac{2m+1}{m^2}\left(\left(m+1\right)C-D\right)^2+D^2-\lambda CD.$$

若 g 是关于 C,D 的半正定二次型. 计算对应矩阵的行列式得

$$\frac{\left(2m+1\right)\left(m+1\right)^4}{m^4}-\left(\frac{\left(2m+1\right)\left(m+1\right)}{m^2}+\frac{\lambda}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

于是

$$\lambda\leqslant\frac{2\left(m+1\right)^2\sqrt{1+2m}-4m^2-6m-2}{m^2}.$$

因此我们证明了当

$$\lambda_0=\frac{2\left(m+1\right)^2\sqrt{1+2m}-4m^2-6m-2}{m^2},$$

必有不等式(17.80)成立.

取

$$f\left(x\right)=x^m+\frac{1}{\sqrt{2m+1}},$$

我们有(17.80)等号成立, 从而 λ_0 是所求最大值.

42. (42.) 对 $f,g\in K_{a,b}$, 我们记

$$E\triangleq\left\{x\in[a,b]:f\left(x\right)>g\left(x\right)\right\},F\triangleq[a,b]\setminus E.$$

于是

$$\frac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)}\leqslant\frac{f\left(a\right)}{f\left(b\right)}=\frac{b}{a},\forall x,y\in[a,b].\tag{30.255}$$

我们还有

$$t\triangleq\frac{\int_E f\left(x\right)\mathrm{d}x}{\int_E g\left(x\right)\mathrm{d}x}=\frac{\int_E\frac{f(x)}{g(x)}g\left(x\right)\mathrm{d}x}{\int_E g\left(x\right)\mathrm{d}x}\leqslant\sup_{x\in E}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\frac{\int_E g\left(x\right)\mathrm{d}x}{\int_E g\left(x\right)\mathrm{d}x}=\sup_{x\in E}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}.$$

又[123]

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\frac{g\left(y\right)}{f\left(y\right)}=\frac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)}\frac{g\left(y\right)}{g\left(x\right)}\leqslant\frac{b}{a},\forall x,y\in[a,b],$$

[123] 分类讨论 $x\geqslant y,x<y$ 并对 f,g 其中一个用单调性, 剩下的用不等式(30.255).

从而

$$t\cdot\frac{\int_F g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_F f(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\sup_{x\in E}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\sup_{y\in F}\frac{g(y)}{f(y)}\leqslant\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{1-\int_E g(x)\,\mathrm{d}x}{1-\int_E f(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{b}{at}.$$

现在

$$\frac{1-\int_E g(x)\,\mathrm{d}x}{1-t\int_E g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{b}{at}\Rightarrow\int_E g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{at-b}{t(a-b)}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_a^b\max\{f(t),g(t)\}\,\mathrm{d}t=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x+\int_F g(x)\,\mathrm{d}x\\&=1+\int_E f(x)\,\mathrm{d}x-\int_E g(x)\,\mathrm{d}x=1+(t-1)\int_E g(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant1+(t-1)\frac{at-b}{t(a-b)}.\end{aligned}$$

又

$$\left[(t-1)\frac{at-b}{t(a-b)}\right]'=\frac{at^2-b}{t^2(a-b)}\Rightarrow\text{上式右端在}t=\sqrt{\frac{b}{a}}\text{取最大},$$

我们有

$$\int_a^b\max\{f(t),g(t)\}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

为了给出取等条件, 我们考虑

$$f(x)=\begin{cases}\frac{b}{ba-a^2}, & x=a\\ \frac{1}{b-a}, & a<x\leqslant b\end{cases},g(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant\sqrt{ab}\\ \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1}{b-a}, & \sqrt{ab}<x\leqslant b\end{cases},$$

于是

$$\sup_{f,g\in K_{a,b}}\int_a^b\max\{f(t),g(t)\}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

注 这个积分不等式来自Lemma 2.1.

43. (43.) 考虑

$$g(x)\triangleq xf'(x)-f(x),h(x)\triangleq(x-1)f'(x)-f(x),$$

求导可证

$$g(x)\leqslant\frac{x^2}{2},h(x)\leqslant\frac{(x-1)^2}{2}.\tag{30.256}$$

我们的目标是证明[124]

$$\left(x^2-x^4\right)|f'(x)|^2+2|f(x)|^2\leqslant\frac{x^2(1-x)\left(4x^3-5x+3\right)}{4},\forall x\in[0,1].\tag{30.257}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\left(x^2-x^4\right)|f'(x)|^2+2|f(x)|^2\\&=\left(x^2-x^4\right)|g(x)-h(x)|^2+2|(1-x)g(x)+xh(x)|^2\\&=\left(-x^4+x^2+2(1-x)^2\right)g^2(x)+\left(-x^4+3x^2\right)h^2(x)+2\left(x^4-3x^2+2x\right)g(x)h(x)\\&\overset{(30.256)}{\leqslant}\left(-x^4+x^2+2(1-x)^2\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(-x^4+3x^2\right)\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)^2+2\left(x^4-3x^2+2x\right)\frac{x^2}{2}\frac{(x-1)^2}{2}\\&=\frac{x^2(1-x)\left(4x^3-5x+3\right)}{4},\end{aligned}$$

这就证明了(30.257).

[124]很容易猜想 $f(x)=\frac{x(x-1)}{2}$ 等号成立, 于是下述不等式最右边的多项式应当是 f 替换为 $\frac{x(x-1)}{2}$ 得到.

由(30.257)和

$$\int_0^1 \frac{x^2(1-x)\left(4x^3-5x+3\right)}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{42}$$

就证明了(17.81).

44. (44.) 考虑 H 为题目条件的 f 全体以及

$$S\triangleq\left\{f\in C^2[0,1]:f(0)=f'(0)=f''(0)=0,f'''\in L^2(0,1)\right\}.$$

由 Taylor 公式的积分余项, 我们有

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f'''(t)\,\mathrm{d}t,\forall f\in S.$$

基于这样的动机, 我们考虑

$$K:L^2(0,1)\to L^2(0,1),f\mapsto\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)\,\mathrm{d}t.$$

注意到 K 是有界线性算子且 $C[0,1]\subset L^2(0,1)$ 是稠密子集以及

$$K:L^2(0,1)\to S,K:C[0,1]\to H$$

是一一映射, 我们为了使得不等式(17.82)成立且系数最优, 我们要计算

$$\sup_{f\in C[0,1],||f||=1}\int_0^1|Kf(x)|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1}\int_0^1|Kf(x)|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

遗憾的是 K 不是自伴的, 为此我们求出

$$K^*:L^2(0,1)\to L^2(0,1),f\mapsto\frac{1}{2}\int_x^1(t-x)^2f(t)\,\mathrm{d}t.$$

记 $G\triangleq\frac{K+K^*}{2}$, 我们有

$$Gf(x)=\frac{1}{4}\int_0^1(x-t)^2f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由 $|Kf|\leqslant K|f|,|Gf|\leqslant G|f|$ 和自伴算子性质得

$$\begin{aligned}c&=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1}(|Kf|,|f|)=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1,f\geqslant0}(Kf,f)=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1,f\geqslant0}(f,K^*f)\\&=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1,f\geqslant0}(K^*f,f)=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1,f\geqslant0}(Gf,f)=\sup_{f\in L^2(0,1),||f||=1}|(Gf,f)|=||G||,\end{aligned}$$

注意到 G 的像是不超过二次的多项式, 因此 G 是有限秩算子, 从而是紧自伴算子. 则[125]G 存在从属于特征值 $\pm||G||$ 的单位特征向量 f. 设

$$||G||=|(Gf,f)|\leqslant(G|f|,|f|)\leqslant||G||,$$

于是结合紧自伴算子的基本性质可得

$$(G|f|,|f|)=||G||\Rightarrow G|f|=||G||\cdot|f|,$$

于是 $||G||$ 是 G 特征值. 为此我们考虑 $G|_{\mathbb{R}_2[x]}$, 其在基 $\left(1,x,x^2\right)$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{12}&\frac{1}{16}&\frac{1}{20}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{1}{12}\end{pmatrix},$$

其最大特征值为 $\frac{3\sqrt{5}+5}{240}$, 这就证明了所求最佳常数为 $\frac{3\sqrt{5}+5}{240}$.

[125] 见张恭庆泛函分析上册 234 页定理 4.4.6. 注意阅读证明过程, 他的证明里面还蕴涵了

$$|(Ax_0,x_0)|=\sup_{||x||=1}|(Ax,x)|\Rightarrow Ax_0=\lambda x_0,|\lambda|=|(Ax_0,x_0)|.$$

45. (45.) 注意到恒等式

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-x}}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\int_t^y \frac{1}{\sqrt{y-x}\sqrt{x-t}}\mathrm{d}x=\pi\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

这里

$$\int_t^y \frac{1}{\sqrt{y-x}\sqrt{x-t}}\mathrm{d}x\overset{x=t\cos^2\theta+y\sin^2\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2t\cos\theta\sin\theta+2y\sin\theta\cos\theta}{(y-t)\cos\theta\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

现在

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

考虑 $f_0(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{t}},t\in(0,1]$ 是一个取等条件, 但是不符合 $f_0\in C[0,1]$, 于是我们考虑

$$f_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{t}}, & t\in\left[\frac{1}{n},1\right]\\ \frac{\sqrt{n}}{\pi}, & t\in\left[0,\frac{1}{n}\right)\end{cases},n=1,2,\cdots.$$

注意到

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f_0(t),f_n\in C[0,1],n=1,2,\cdots,$$

于是

$$0\leqslant\int_0^x \frac{f_n(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x \frac{f_0(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t=1,n=1,2,\cdots\Rightarrow f_n\in S,n=1,2,\cdots.$$

现在

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}+2-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\pi},$$

这就证明了

$$\sup_{f\in S}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{\pi}.$$

46. (46.) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{b}{b-a}} f(x)\left[g(x)-g\left(\frac{b}{b-a}\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{\frac{b}{b-a}}^1 f(x)\left[g(x)-g\left(\frac{b}{b-a}\right)\right]\mathrm{d}x\\&\leqslant a\int_0^{\frac{b}{b-a}}\left[g(x)-g\left(\frac{b}{b-a}\right)\right]\mathrm{d}x+b\int_{\frac{b}{b-a}}^1\left[g(x)-g\left(\frac{b}{b-a}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=a\int_0^{\frac{b}{b-a}} g(x)\,\mathrm{d}x+b\int_{\frac{b}{b-a}}^1 g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从不等式证明可以看到, 当 $f(x)=\begin{cases}a, & x\in\left[0,\frac{b}{b-a}\right)\\ b, & x\in\left(\frac{b}{b-a},1\right]\end{cases}$ 时为取等条件.

47. (47.) 首先对 $a>0$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a,\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\eta^2+a^2\right)^{\frac{1+\lambda}{2}}}\mathrm{d}\eta=\frac{2\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^{\frac{1+\lambda}{2}}}\mathrm{d}\eta}{a^{\lambda}}=\frac{C_1(\lambda)}{a^{\lambda}}.$$

然后

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|a+b,z|^{1+\lambda}}{|a,\eta|^{1+\lambda}\,|b,z-\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta\overset{\text{三角不等式}}{\leqslant}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[|a,\eta|+|b,z-\eta|]^{1+\lambda}}{|a,\eta|^{1+\lambda}\,|b,z-\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta\\&\leqslant 2^{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|a,\eta|^{1+\lambda}+|b,z-\eta|^{1+\lambda}}{|a,\eta|^{1+\lambda}\,|b,z-\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta=2^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|b,z-\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a,\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta\right)\\&=2^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|b,\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a,\eta|^{1+\lambda}}\mathrm{d}\eta\right)=2^{\lambda}\left(\frac{C_1(\lambda)}{|b|^{\lambda}}+\frac{C_1(\lambda)}{|a|^{\lambda}}\right)\\&=2^{\lambda}C_1(\lambda)\frac{|a|^{\lambda}+|b|^{\lambda}}{|ab|^{\lambda}}\leqslant C(\lambda)\frac{|a+b|^{\lambda}}{|ab|^{\lambda}},\end{aligned}$$

这里蓝色不等号用到了命题12.6, 这就完成了证明.

48. (48.) 只需考虑

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x>-\infty$$

的情况. 由含参积分求导公式可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\left[(\alpha+1)\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{\alpha}}|_{\alpha=1}&=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x-2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\ln\left(2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\&=2\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

于是我们来证明

$$\left[(\alpha+1)\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

在 $\alpha>0$ 是递增函数即可完成原不等式证明.

对 $\beta>\alpha>0$, 取

$$\varphi(y)=y^{\alpha},m(y)=\frac{\beta}{\alpha}y^{\beta-\alpha},\psi(y)=y^{\beta}.$$

定义

$$s_f(y)\triangleq|\{x\in[0,1]:f(x)\geqslant y\}|,$$

然后我们有

$$\begin{aligned}\overline{\phi}&\triangleq\alpha\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant f(x)\}}y^{\alpha-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_0^{\infty}s_f(y)\,y^{\alpha-1}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

考虑

$$g(z)\triangleq\int_0^z x^{\alpha}\mathrm{d}x-\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\cdot z,$$

我们有

$$g'(z)=z^{\alpha}-\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x,g''(z)=\alpha z^{\alpha-1}>0,\forall z>0.$$

因为 f 有上界, 所以容易看到 $g'(z)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一零点 z_0, 因此容易看到 g 在 $(0,+\infty)$ 有唯一正根

$$\widetilde{M}\triangleq\left[(\alpha+1)\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

设

$$f_{\xi}\triangleq\begin{cases}\widetilde{M}\frac{x}{\xi}, & 0\leqslant x\leqslant\xi\\ \widetilde{M}\frac{1-x}{1-\xi}, & \xi\leqslant x\leqslant 1\end{cases},\xi\in(0,1),$$

则

$$s_{f_\xi}(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{\widehat{M}}, & 0\leqslant y\leqslant \widehat{M}\\ 0, & y>\widehat{M}\end{cases}.$$

注意到

$$\int_0^1 f_\xi^\alpha(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_0^\infty s_{f_\xi}(y)\,y^{\alpha-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{\widehat{M}}\int_0^{\widehat{M}} y^\alpha\mathrm{d}y.$$

类似的有

$$\overline{\psi}=\int_0^1 f^\beta(x)\,\mathrm{d}x=\beta\int_0^\infty s_f(y)\,y^{\beta-1}\mathrm{d}y,\int_0^1 f_\xi^\beta(x)\,\mathrm{d}x=\beta\int_0^\infty s_{f_\xi}(y)\,y^{\beta-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{\widehat{M}}\int_0^{\widehat{M}} y^\beta\mathrm{d}y.$$

49. (49.) 设 $p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}$ 是 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 在内积 $(f,g)\triangleq\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ 下做施密特正交化并单位化得到的多项式, 它是不超过 $n-1$ 次多项式空间的一组标准正交基.

注意到

$$\int_0^1\int_0^1 p_i(x)\,p_j(y)\,p_{i'}(x)\,p_{j'}(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\delta_{ii'}\cdot\delta_{jj'},$$

于是 $\{p_i(x)\,p_j(y)\}_{i,j=0}^{n-1}$ 是题目条件的 f 全体的一个标准正交基.

现在考虑

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n-1}c_{ij}p_i(x)\,p_j(y),$$

我们有

$$\int_0^1 f(x,x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i,j=0}^{n-1}c_{ij}\int_0^1 p_i(x)\,p_j(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}c_{ii}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i,j=0}^{n-1}c_{ij}p_i(x)\,p_j(y)\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_{i,j=0}^{n-1}\sum_{i',j'=0}^{n-1}\int_0^1\int_0^1 c_{ij}c_{i'j'}p_i(x)\,p_j(y)\,p_{i'}(x)\,p_{j'}(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_{i,j=0}^{n-1}c_{ij}^2\geqslant\sum_{i=0}^{n-1}c_{ii}^2\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\geqslant}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}c_{ii}\right)^2=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x,x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

显然等号成立条件为

$$c_{ij}=0,0\leqslant i\neq j\leqslant n-1,c_{00}=c_{11}=c_{22}=\cdots=c_{(n-1)(n-1)}=c\in\mathbb{R},$$

即

$$f(x,y)=c\sum_{i=0}^{n-1}p_i(x)\,p_i(y).$$

50. (50.) 先证最右边不等式, 不妨设

$$\overline{\lim_{T\to+\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)<\infty,$$

记

$$F(T)\triangleq\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t,T\geqslant 0,$$

分部积分得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t=F(t)\,e^{-\lambda t}|_0^\infty+\lambda\int_0^\infty F(t)\,e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\infty F(t)\,e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

现在对任何 $N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&=\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\,\lambda^2\left[\sum_{k=0}^\infty\int_{kT}^{(k+1)T}e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\,\lambda^2\left[\sum_{k=0}^\infty(k+1)Te^{-\lambda kT}\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{F(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\\
&=\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\,\lambda^2\left[\sum_{k=N}^\infty(k+1)Te^{-\lambda kT}\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{F(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\,\lambda^2\left[\sup_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right)\cdot\sum_{k=N}^\infty(k+1)T^2e^{-\lambda kT}\right]\\
&=\sup_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right)\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\sum_{k=0}^\infty(k+1)T^2e^{-\lambda kT}\right]\\
&=\sup_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right)\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\,\frac{\lambda^2T^2e^{2\lambda T}}{\left(e^{\lambda T}-1\right)^2}=\sup_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right),
\end{aligned}$$

即让 $N\to+\infty$ 得

$$\overline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\leqslant\overline{\lim_{T\to+\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

再证左边不等式, 首先对任何 $x>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=F(x)e^{-\lambda x}+\lambda\int_0^x e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t\\
&\geqslant\lambda\int_0^x e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

让 $x\to+\infty$, 对任何 $N\in\mathbb{N}$, 得

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t\right]\geqslant\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&=\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\sum_{k=0}^\infty\int_{kT}^{(k+1)T}e^{-\lambda t}F(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&\geqslant\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\sum_{k=0}^\infty kTe^{-\lambda(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{F(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\\
&\geqslant\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\inf_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right)\cdot\sum_{k=N}^\infty kT^2e^{-\lambda(k+1)T}\right]\\
&=\inf_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right)\cdot\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda^2\cdot\sum_{k=0}^\infty kT^2e^{-\lambda(k+1)T}\right]\\
&=\inf_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right)\cdot\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\,\frac{\lambda^2T^2}{\left(e^{\lambda T}-1\right)^2}=\inf_{t\geqslant NT}\left(\frac{F(t)}{t}\right),
\end{aligned}$$

即让 $N\to+\infty$ 得

$$\underline{\lim_{\lambda\to0^+}}\left[\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\geqslant\underline{\lim_{T\to+\infty}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

51. (51.) 考虑

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

考虑

$$c \triangleq \max_{\text{不全为0的}a_i\in\mathbb{R}} \frac{|a_0|}{\int_{-1}^{1}\left|a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right|\mathrm{d}x},$$

注意到上式右边关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 齐次连续函数, 所以结合紧集上连续函数必有界得

$$c=\max_{a_0^2+a_1^2+\cdots+a_n^2=1} \frac{|a_0|}{\int_{-1}^{1}\left|a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right|\mathrm{d}x}\in(0,+\infty).$$

52. (52.) 待定系数分部积分找出最佳估计为所求, 分析过程不再赘述.

我们有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1\left[\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right)f''(x)\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{32},$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^1\left[\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{48}x-\frac{1}{96}\right)f''(x)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{48}x-\frac{1}{96}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{384},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{3}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^1\left[\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{32}\right)f''(x)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{32}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{192}.\end{aligned}$$

$*$ 我们再说明系数最佳性: 利用逼近方法可以把允许使用的函数类扩大, 从而得到最佳系数, 这个方法可见非数学类微分中值定理习题11.的证明.

第一个不等式在

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{16}, & x\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\\ \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}, & x\in\left[\frac{3}{4},1\right]\end{cases}$$

时等号成立.

第二个不等式在

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}, & x\in\left[\frac{\sqrt{2}+2}{4},1\right]\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{x^2}{2}+\frac{1-2\sqrt{2}}{8}, & x\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right]\\ \frac{x^2}{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}x+\frac{3-2\sqrt{2}}{8}, & x\in\left[\frac{2-\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right]\\ -\frac{x^2}{2}, & x\in\left[0,\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right]\end{cases}$$

等号成立.

第三个不等式在

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}, & x\in\left[\frac{3}{4},1\right]\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{16}, & x\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\\ \frac{x^2}{2}, & x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\end{cases}$$

等号成立.

53. (53.) 为书写方便, 记 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换,

$$L(u_0)(x,y)\triangleq\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}u_0(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\left[\left(\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\right)*u_0\right](x,y).$$

计算得

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^2}^2}{4t}}\right)=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^2}^2}{4t}}e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\mathrm{d}\mathbf{y}=e^{-4\pi^2t||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^2}^2},\forall t>0.$$

定义

$$A_k\triangleq\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2:2^{k-1}\leqslant||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^2}<2^k\right\},k\in\mathbb{Z},$$

我们有

$$|A_k|=\pi\left(4^k-4^{k-1}\right)=3\pi\cdot4^{k-1},k\in\mathbb{Z}.$$

我们定义

$$P_ku_0\triangleq\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(u_0\right)\cdot\chi_{A_k}\right),k\in\mathbb{Z},$$

然后由帕塞瓦尔恒等式得

$$\begin{aligned}||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2&=||\mathcal{F}\left(u_0\right)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}||(\mathcal{F}\left(u_0\right)\chi_{A_k})||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left||\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(u_0\right)\chi_{A_k}\right)\right||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}||P_ku_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{k=-n}^{n}P_ku_0-u_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2=\left\|\sum_{k=-n}^{n}\mathcal{F}\left(P_ku_0\right)-\mathcal{F}\left(u_0\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\\&=\left\|\sum_{k=-n}^{n}\mathcal{F}\left(u_0\right)\chi_{A_k}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left(u_0\right)\chi_{A_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2=\left\|\sum_{|k|>n}\mathcal{F}\left(u_0\right)\chi_{A_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\left|\sum_{|k|>n}\mathcal{F}\left(u_0\right)(\mathbf{y})\chi_{A_k}(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y}=\sum_{|k|>n}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)(\mathbf{y})\chi_{A_k}(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y}\\&\leqslant\sum_{|k|>n}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y}=\sum_{|k|>n}\int_{\mathbb{R}^2}\left|u_0(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y},\end{aligned}$$

即

$$u_0=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}P_ku_0\text{在}L^2\left(\mathbb{R}^2\right).$$

先来估计每一部分:

$$\begin{aligned}&||L\left(P_ku_0\right)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}=\left\|\left(\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^2}^2}{4t}}\right)*\left(P_ku_0\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\\&=\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left(\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{||\mathbf{x}||_{\mathbb{R}^2}^2}{4t}}\right)\cdot\mathcal{F}\left(P_ku_0\right)\right]\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\\&=\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}\left|\int_{\mathbb{R}^2}e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}e^{-4\pi^2t||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^2}^2}\mathcal{F}\left(P_ku_0\right)(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right|\\&\leqslant\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}\left(\int_{A_k}e^{-4\pi^2t||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^2}^2}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)(\mathbf{y})\right|\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\\&\overset{\text{Cauchy 不等式}}{\leqslant}\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}\left(\sqrt{\int_{A_k}e^{-8\pi^2t||\mathbf{y}||_{\mathbb{R}^2}^2}\mathrm{d}\mathbf{y}}\cdot\sqrt{\int_{A_k}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y}}\right)\\&\leqslant\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}\left(\sqrt{\int_{A_k}e^{-8\pi^2t4^{k-1}}\mathrm{d}\mathbf{y}}\cdot\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathcal{F}\left(u_0\right)(\mathbf{y})\chi_{A_k}(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y}}\right)\\&=\sqrt{3\pi\cdot4^{k-1}\cdot e^{-8\pi^2t4^{k-1}}}\cdot||P_ku_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

设 $u_0^{(n)}, u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|u_0^{(n)}-u_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\left|L\left(u_0^{(n)}\right)(\mathbf{x})-L\left(u_0\right)(\mathbf{x})\right|\leqslant\frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{4t}}\left|u_0^{(n)}(\mathbf{y})-u_0(\mathbf{y})\right|\mathrm{d}\mathbf{y}\\&\leqslant\frac{1}{4\pi t}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{2t}}\mathrm{d}\mathbf{y}}\cdot\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2}\left|u_0^{(n)}(\mathbf{y})-u_0(\mathbf{y})\right|^2\mathrm{d}\mathbf{y}}=\frac{\sqrt{2\pi t}}{4\pi t}\left|\left|u_0^{(n)}-u_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}L\left(u_0^{(n)}\right)(\mathbf{x})=L\left(u_0\right)(\mathbf{x}),\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,$$

从而

$$L\left(u_0\right)(\mathbf{x})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}L\left(P_ku_0\right)(\mathbf{x}),\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left|\left|L\left(u_0\right)\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\infty\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left|L\left(P_ku_0\right)\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\right)^2\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^\infty\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sqrt{3\pi\cdot4^{k-1}\cdot e^{-8\pi^2t4^{k-1}}}\cdot\left|\left|P_ku_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right]\right)^2\mathrm{d}t\\&=\frac{3\pi}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\left[2^{k+k'}\left(\int_0^\infty e^{-4^k\pi^2t}e^{-4^{k'}\pi^2t}\mathrm{d}t\right)\left|\left|P_ku_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\cdot\left|\left|P_{k'}u_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right]\\&=\frac{3}{4\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2^{k+k'}}{4^k+4^{k'}}\left(\left|\left|P_ku_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\cdot\left|\left|P_{k'}u_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)\right].\end{aligned}$$

记

$$c_{k,k'}\triangleq\frac{2^{k+k'}}{4^k+4^{k'}},a_k\triangleq\left|\left|P_ku_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)},k,k'\in\mathbb{Z},$$

我们有

$$M\triangleq\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\frac{2^{k+k'}}{4^k+4^{k'}}=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{2^{k+k+m}}{4^k+4^{k+m}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{2^m}{4^m+1}<\infty.$$

利用非负矩阵的谱半径23.15估计和瑞丽商21.15, 即非负矩阵最大特征值小于等于最大行和和列和, 我们知道

$$\sum_{k=-n}^n\sum_{k'=-n}^nc_{k,k'}a_ka_{k'}\leqslant M\sum_{k=-n}^na_k^2,\forall n\in\mathbb{N}.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\int_0^\infty\left|\left|L\left(u_0\right)\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{3}{4\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{2^m}{4^m+1}\cdot\left|\left|u_0\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

这就是我们要证明的不等式.

54. (54.) 为方便, 我们记

$$\mathrm{d}\gamma\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

只需证明

$$\int_{\mathbb{R}}|f|^2\ln|f|\,\mathrm{d}\gamma\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f'|^2\,\mathrm{d}\gamma+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|f|^2\,\mathrm{d}\gamma\cdot\ln\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^2\,\mathrm{d}\gamma\right).$$

若对 $f\in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 已经证明上述不等式, 则对一般的 f, 不妨设

$$0<\int_{\mathbb{R}}|f|^2\,\mathrm{d}\gamma<\infty,\int_{\mathbb{R}}|f'|^2\,\mathrm{d}\gamma<\infty.$$

从而取定义13.6中的函数 χ_n, 对 $n \in \mathbb{N}$ 得

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_n f|^2 \ln |\chi_n f| \,\mathrm{d}\gamma \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|(\chi_n f)'\right|^2 \mathrm{d}\gamma + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\chi_n f|^2 \,\mathrm{d}\gamma \cdot \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_n f|^2 \,\mathrm{d}\gamma \right).$$

法图引理和控制收敛定理给出

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \ln |f| \,\mathrm{d}\gamma \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 \,\mathrm{d}\gamma + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\gamma \cdot \ln \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\gamma \right).$$

对 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), t \geqslant 0$, 考虑

$$\begin{aligned} (P_t \varphi)(x) &\triangleq \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(e^{-t} x + \sqrt{1-e^{-2t}} y\right) \mathrm{d}\gamma(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-2t}\right)}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \, e^{-\frac{\left(z-e^{-t}x\right)^2}{2\left(1-e^{-2t}\right)}} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

对 $t > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d(P_t\varphi)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-2t}\right)}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \, e^{-\frac{\left(z-e^{-t}x\right)^2}{2\left(1-e^{-2t}\right)}} \mathrm{d}z \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{\left(z-e^{-t}x\right)^2}{2\left(1-e^{-2t}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-2t}\right)}} \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \varphi(z) \left[\frac{d^2\left(\frac{e^{-\frac{\left(z-e^{-t}x\right)^2}{2\left(1-e^{-2t}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-2t}\right)}} \right)}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{ze^{-\frac{\left(z-e^{-t}x\right)^2}{2\left(1-e^{-2t}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-2t}\right)}} \right)}{dz} \right] \right\} \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[\varphi''(z) - \varphi'(z)\, z\right] \frac{e^{-\frac{\left(z-e^{-t}x\right)^2}{2\left(1-e^{-2t}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-2t}\right)}} \right\} \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) - \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \varphi'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2t} \varphi''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) - x e^{-t} \varphi'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \mathrm{d}\gamma(y) \\ &= (P_t\varphi)'' - x\,(P_t\varphi)'. \end{aligned}$$

由 Poisson 公式20.1得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (P_t\varphi)(x) \,\mathrm{d}\gamma(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \,\mathrm{d}\gamma(y). \end{aligned}$$

对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, 考虑

$$H_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(P_t f^2 + \epsilon\right) \ln\left(P_t f^2 + \epsilon\right) \mathrm{d}\gamma, t \geqslant 0, \epsilon > 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}
H_\epsilon'(t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\ln\left(P_t f^2+\epsilon\right)\right) \frac{\partial\left(P_t f^2+\epsilon\right)}{\partial t} \mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\ln\left(P_t f^2+\epsilon\right)\right) \left(\left(P_t f^2\right)''-x\left(P_t f^2\right)'\right) \mathrm{d}\gamma \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(1+\ln\left(P_t f^2+\epsilon\right)\right)' \left(P_t f^2\right)' \mathrm{d}\gamma \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\left(P_t f^2\right)'\right|^2}{P_t f^2+\epsilon} \mathrm{d}\gamma.
\end{aligned}$$

于是由牛顿莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(f^2+\epsilon\right) \ln\left(f^2+\epsilon\right) \mathrm{d}\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}\gamma+\epsilon\right) \ln\left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}\gamma+\epsilon\right) \\
&= H_\epsilon(0) - H_\epsilon(+\infty) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\left(P_t f^2\right)'\right|^2}{P_t f^2+\epsilon} \mathrm{d}\gamma\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-t} P_t\left(\left(f^2\right)'\right)\right|^2}{P_t f^2+\epsilon} \mathrm{d}\gamma\right) \mathrm{d}t = 4\int_0^\infty e^{-2t} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|P_t\left(f f'\right)\right|^2}{P_t f^2+\epsilon} \mathrm{d}\gamma \\
&\leqslant 4\int_0^\infty e^{-2t} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \frac{P_t f^2 \cdot P_t\left|f'\right|^2}{P_t f^2} \mathrm{d}\gamma = 4\int_0^\infty e^{-2t} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} P_t\left|f'\right|^2 \mathrm{d}\gamma \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \left|f'\right|^2 \mathrm{d}\gamma,
\end{aligned}$$

这里最后一个不等号来自 Cauchy 不等式16.1. 现在的由法图引理得

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 \ln f^2 \mathrm{d}\gamma \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}\gamma\right) \ln\left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}\gamma\right) + 2\int_{\mathbb{R}} \left|f'\right|^2 \mathrm{d}\gamma,$$

这就完成了不等式证明.

55. (55.) 对 $b>a$, 利用习题17.9得

$$\int_a^b \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x.$$

对任何 $A>0, t>0, N\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{t(N+1)-A} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N} \int_{ti-A}^{t(i+1)-A} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N} \left[t\int_{ti-A}^{t(i+1)-A} |f(x)| \mathrm{d}x + \frac{4}{t}\int_{ti-A}^{t(i+1)-A} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x\right] \\
&= t\int_{-A}^{t(N+1)-A} |f(x)| \mathrm{d}x + \frac{4}{t}\int_{-A}^{t(N+1)-A} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant t\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}x + \frac{4}{t}\int_{\mathbb{R}} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

让 $N\to+\infty$ 得

$$\int_{-A}^{\infty} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant t\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}x + \frac{4}{t}\int_{\mathbb{R}} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x.$$

让 $A\to+\infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant t\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}x + \frac{4}{t}\int_{\mathbb{R}} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x.$$

不妨设 f 不恒为 0, 取 $t=\sqrt{\frac{4\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\mathrm{d}x}}$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 4\sqrt{\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x}.$$

两边平方即得

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 16\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

56. (56.) 运用例题17.15, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\min\{x,f(x)\}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x+f(x)-|f(x)-x|}{2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{x+f(x)-|f(x)-x|}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1|f(x)-x|\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

57. (57.) 由变限积分的连续性, 显然

$$\left|\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$$

可以扩充到有限个内部不交的 $[a_i,b_i]$ 上.

设

$$f_+(x)\triangleq\frac{|f(x)|+f(x)}{2},f_-(x)\triangleq\frac{|f(x)|-f(x)}{2}.$$

我们知道 $f_+,f_-\in R[0,1]$.

若 $\int_0^1 f_+(x)\,\mathrm{d}x>1$, 则存在 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 使得

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})>1,$$

这里

$$m_i\triangleq\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f_+(x),i=1,2,\cdots,n.$$

把 $m_i>0$ 的 $[x_{i-1},x_i]$ 拎出来记为 $[a_i,b_i]$. 此时容易看到

$$f(x)>0,x\in[a_i,b_i].$$

因此

$$1<\sum_{i=1}^n m_i(b_i-a_i)\leqslant\left|\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|,$$

这就是一个矛盾!. 于是我们证明了

$$\int_0^1 f_+(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

同理可得

$$\int_0^1 f_-(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

因此我们证明了

$$\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f_+(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f_-(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 2.$$

58. (58.) 记

$$\begin{aligned} h_1(t) &\triangleq \frac{e^{(\alpha+1)\int_0^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1}{1+\alpha} f^{\alpha+1}(t) - \int_0^t f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x; \\ h_2(t) &\triangleq \frac{e^{(\alpha+1)\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1}{1+\alpha} f^{\alpha+1}(t) - \int_t^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \quad t\in[0,1].$$

我们有 $h_1(0)=h_2(1)=0$ 且

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= \left(e^{(\alpha+1)\int_0^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1\right) f^{\alpha}(t)\left(1+f'(t)\right) \geqslant 0; \\ h_2'(t) &= \left(e^{(\alpha+1)\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1\right) f^{\alpha}(t)\left(f'(t)-1\right) \leqslant 0, \end{aligned}$$

即 h_1 在 $[0,1]$ 递增, h_2 在 $[0,1]$ 递减.

现在我们知道 $h_1, h_2 \geqslant 0$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^t f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{e^{(\alpha+1)\int_0^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(t); \\ \int_t^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{e^{(\alpha+1)\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(t). \end{aligned}$$

两式相加并利用

$$e^x+e^y-2<e^{x+y}-1, \forall x,y\in(0,+\infty)$$

得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{e^{(\alpha+1)\int_0^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}+e^{(\alpha+1)\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}-2}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(t) \\ &\leqslant \frac{e^{(\alpha+1)\left(\int_0^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_t^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)}-1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(t) \\ &= \frac{e^{(\alpha+1)\beta}-1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(t). \end{aligned}$$

由 t 任意性得

$$\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(e^{(\alpha+1)\beta}-1\right).$$

59. (59.) 注意到对任何 $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{i=1}^n \int_{\sum\limits_{i=1}^n \frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\frac{y_i}{a_i} e^{-\sum\limits_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}\cdot z_i\right|^2 \\ =& \left|\int_{\sum\limits_{i=1}^n \frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\sum_{i=1}^n \frac{y_iz_i}{a_i} e^{-\sum\limits_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}\right|^2 \\ \leqslant& \int_{\sum\limits_{i=1}^n \frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2} \left|\sum_{i=1}^n \frac{y_iz_i}{a_i}\right|^2 \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n} e^{-\sum\limits_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \\ \leqslant& \int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{i=1}^n \frac{y_iz_i}{a_i}\right|^2 \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n} e^{-\sum\limits_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{y_iy_jz_iz_j}{a_ia_j} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n} e^{-\sum\limits_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \\ =& \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_i^2z_i^2}{a_i^2} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n} e^{-\sum\limits_{j=1}^n \frac{y_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y} \\ =& \sum_{i=1}^n z_i^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{y_i^2}{a_i^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a_i} e^{-\frac{y_i^2}{2a_i^2}}\mathrm{d}y_i = \sum_{i=1}^n z_i^2. \end{aligned}$$

取

$$z_i=\sum_{i=1}^{n}\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\frac{y_i}{a_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{y_i^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y},i=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\frac{y_i}{a_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{y_i^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}\right|^2\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\frac{y_i}{a_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{y_i^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}\right|^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(y_i-x_i)^2}{c_i}\leqslant t^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}\frac{y_i}{a_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{y_i^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{y}\right|^2\leqslant 1$$

恒成立.

60. (60.) 首先令

$$x_n\triangleq\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots,$$

我们由 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{n=1}^{m}\left(\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\cdot x_n\right)\right]^2=\left(\int_0^{\pi}f'(x)\sum_{n=1}^{m}\left[x_n\sin(nx)\right]\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\int_0^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{m}\left[x_n\sin(nx)\right]\right)^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\sum_{n=1}^{m}\sum_{n'=1}^{m}\int_0^{\pi}(x_nx_{n'}\sin(n'x)\sin(nx))\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\sum_{n=1}^{m}x_n^2\int_0^{\pi}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\sum_{n=1}^{m}x_n^2,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,m=1,2,\cdots.$$

这就证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right)^2<\infty.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right|^2}<\infty.\end{aligned}$$

61. (61.) 一方面

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x&=\sum_{n\in\mathcal{S}}\sum_{n'\in\mathcal{S}}\int_0^1e^{2\pi inx}e^{-2\pi in'x}\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathcal{S}}\int_0^1 1\mathrm{d}x\\&=|\mathcal{S}|=N.\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^4 \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left|\sum_{n_1\in\mathcal{S}}\sum_{n_2\in\mathcal{S}} e^{2\pi i n_1 x}e^{-2\pi i n_2 x}\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n_1\in\mathcal{S}}\sum_{n_2\in\mathcal{S}}\sum_{n_3\in\mathcal{S}}\sum_{n_4\in\mathcal{S}}\int_0^1 e^{2\pi i n_1 x}e^{-2\pi i n_2 x}e^{-2\pi i n_3 x}e^{2\pi i n_4 x}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n_1\in\mathcal{S}}\sum_{n_2\in\mathcal{S}}\sum_{n_3\in\mathcal{S}}\sum_{n_4\in\mathcal{S}}\int_0^1 e^{2\pi i (n_1+n_4-n_2-n_3)x}\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{加性条件}}{=} 2N^2 - N,\end{aligned}$$

这里最后一个等号相当于计数 $n_1+n_4=n_2+n_3$ 的个数, 这里 n_1 有 N 种取法, 随后 n_2,n_3 有一个必然和 n_1 一样, 另外一个又有 N 种取法, 这里合计 $2N$ 种取法, 随后 n_4 就确定了, 此时有 $2N^2$ 种取法. 但是这里 $n_2=n_3=n_1$ 时有重复计数, 即 N 种取法, 所以共有 $2N^2-N$ 种取法.

现在由 Holder 不等式16.1我们得

$$\begin{aligned}N &= \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^1 |f(x)|^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(2N^2-N\right)^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \sqrt{\frac{N^3}{2N^2-N}} > \sqrt{\frac{N}{2}}.$$

62. (62.) 对任何 $\lambda\geqslant 1$ 得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \cos\left(\lambda x^2\right)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \cos\left(\lambda x^2\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^1 \cos\left(\lambda x^2\right)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \cos\left(\lambda x^2\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\frac{1}{2\lambda}\frac{\sin\left(\lambda x^2\right)}{x}|_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^1 + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^1 \frac{\sin\left(\lambda x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} 1\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda}\left(1+\sqrt{\lambda}\right) + \frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\lambda}\left(\sqrt{\lambda}-1\right) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

63. (63.) 由

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left(x_i f - 2a_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}P$$

得

$$4a_i^2\int_{\mathbb{R}^n} x_i f\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}P \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} x_i^2|f|^2\mathrm{d}P + 4a_i^4\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}P, i=1,2,\cdots,n.$$

又

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i f\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}P = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} x_i\frac{\partial f^2}{\partial x_i}\mathrm{d}P = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-\frac{x_i^2}{a_i^2}\right)f^2\mathrm{d}P, i=1,2,\cdots,n,$$

我们有

$$-2\sum_{i=1}^n a_i^2\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-\frac{x_i^2}{a_i^2}\right)f^2\mathrm{d}P \leqslant \sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n} x_i^2|f|^2\mathrm{d}P + 4\sum_{i=1}^n a_i^4\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}P,$$

即

$$\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 f^2\mathrm{d}P \leqslant 2\sum_{i=1}^n a_i^2\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\mathrm{d}P + 4\sum_{i=1}^n a_i^4\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}P.$$

我们得证.

64. (64.) 首先取

$$f(x) \triangleq \frac{\cosh x}{\cosh 1},$$

则计算得

$$\frac{|f(1)|^2+|f(-1)|^2}{\int_{-1}^{1}\left(|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right)\mathrm{d}x}=\coth 1.$$

取

$$u(x) \triangleq \frac{f(1)+f(-1)}{2\cosh 1}\cosh x+\frac{f(1)-f(-1)}{2\sinh 1}\sinh x,$$

我们有

$$u(1)=f(1), u(-1)=f(-1), u''(x)=u(x).$$

考虑 $v \triangleq f-u$, 我们有

$$\int_{-1}^{1}\left(|f'(x)|^2+|f(x)|^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(|u'(x)|^2+|u(x)|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(|v'(x)|^2+|v(x)|^2\right)\mathrm{d}x,$$

这里用到了

$$\int_{-1}^{1}\left(v'(x)u'(x)+u(x)v(x)\right)\mathrm{d}x=0.$$

又计算得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(|u'(x)|^2+|u(x)|^2\right)=u(1)u'(1)-u(-1)u'(-1)\\&=\frac{(f(1)+f(-1))^2}{2}\tanh 1+\frac{(f(1)-f(-1))^2}{2}\coth 1\\&\geqslant\left[f^2(1)+f^2(-1)\right]\tanh 1,\end{aligned}$$

这里最后一个等号来自

$$\begin{aligned}&\frac{(f(1)+f(-1))^2}{2}\tanh 1+\frac{(f(1)-f(-1))^2}{2}\coth 1-\left[f^2(1)+f^2(-1)\right]\tanh 1\\&=\frac{1}{2}(\coth 1-\tanh 1)\left[f(1)-f(-1)\right]^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

现在我们就有

$$|f(1)|^2+|f(-1)|^2\leqslant\coth 1\int_{-1}^{1}\left(|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right)\mathrm{d}x.$$

65. (65.) 取 $f(x)=e^{\frac{x^2}{2a^2}}$, 我们有

$$\frac{|f(1)|^2+|f(-1)|^2}{\int_{-1}^{1}\left(|f(x)|^2+a^2|f'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{2a^2}}.$$

我们计算得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(|f(x)|^2+a^2|f'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\&=e^{-\frac{1}{2a^2}}\left(|f(1)|^2+|f(-1)|^2\right)\\&\quad+\int_{-1}^{1}\left[af'(x)-\frac{x}{a}f(x)\right]^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\&\geqslant e^{-\frac{1}{2a^2}}\left(|f(1)|^2+|f(-1)|^2\right),\end{aligned}$$

这就完成了证明.

66. (66.)

不妨设 $c=1$ 且

$$\int_1^{\infty}\left[|f(x)|^2+a^2|f'(x)|^2\right]e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x<\infty.$$

取

$$g(x)\triangleq e^{\frac{x^2-1}{2a^2}}\left(1-\frac{\int_1^x e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t}{\int_1^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t}\right).$$

洛必达直接验证得

$$g(x)\sim\frac{a^2}{x},g'(x)\sim-\frac{a^2}{x^2},g(x)g'(x)\sim-\frac{a^4}{x^3},x\to+\infty,$$

于是我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)g'(x)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]=0.$$

由积分计算习题53.得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\right)=0,$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)g'(x)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)=0.$$

记 $h(x)\triangleq f(x)-g(x)$, 则我们有

$$h(1)=0,\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)g'(x)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]=0,$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\infty}\left(|f(x)|^2+a^2|f'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_1^{\infty}\left(|h(x)|^2+a^2|h'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\left(|g(x)|^2+a^2|g'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\
&\quad+2\int_1^{\infty}\left(g(x)h(x)+a^2g'(x)h'(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\
&\geqslant\int_1^{\infty}\left(|g(x)|^2+a^2|g'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x+2\int_1^{\infty}g(x)h(x)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x-2a^2\int_1^{\infty}h(x)\left(g'(x)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)'\mathrm{d}x\\
&=\int_1^{\infty}\left(|g(x)|^2+a^2|g'(x)|^2\right)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_1^{\infty}|g(x)|^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x-a^2f(1)g'(1)e^{-\frac{1}{2a^2}}-a^2\int_1^{\infty}g(x)\left(g'(x)e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right)'\mathrm{d}x\\
&=-a^2g'(1)e^{-\frac{1}{2a^2}}=-e^{-\frac{1}{2a^2}}+\frac{a^2e^{-\frac{1}{a^2}}}{\int_1^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

显然当 $f=g$ 时不等式等号成立, 于是我们证明了最佳常数为

$$C=\left(-e^{-\frac{1}{2a^2}}+\frac{a^2e^{-\frac{1}{a^2}}}{\int_1^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t}\right)c^2.$$

注[*] 从数学类积分不等式习题65.和66., 考虑测度 $\mathrm{d}P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x$ 我们可得

$$W^{1,2}((-1,1),P)\to W^{1,2}(\mathbb{R},P)$$

的最佳 Sobolev 延拓系数为

$$\sqrt{\frac{ae^{-\frac{1}{2a^2}}}{\int_{\frac{1}{a}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t}}=\begin{cases}1+\frac{1}{2}a^2+o\left(a^2\right), & a\to0^+\\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}+o\left(\frac{1}{a}\right)\right), & a\to+\infty\end{cases},$$

这里 Sobolev 范数是

$$||f||_{W^{1,2}} \triangleq \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}P(x) + \int_{-1}^{1} a^2 |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}P(x)}.$$

最佳 Sobolev 延拓算子定义为

$$(Ef)(x) = \begin{cases} f(1)\, e^{\frac{x^2-1}{2a^2}} \left(1 - \dfrac{\int_1^x e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t}{\int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t}\right), & x > 1 \\ f(x), & |x| < 1 \\ f(-1)\, e^{\frac{x^2-1}{2a^2}} \dfrac{\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t} & x < -1 \end{cases}.$$

于是我们可以出一个丘赛模拟题:

例题 30.3 Let $a > 0$, consider the probability measure P on $\mathbb{R}$ with density function $\frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. For an open set $U \subset \mathbb{R}$, consider the Sobolev space $W^{1,2}(U, P)$ with norm

$$||f||_{W^{1,2}(U,P)} \triangleq \sqrt{\int_U \left(|f(x)|^2 + a^2 |f'(x)|^2\right) \mathrm{d}P(x)}.$$

(a). Prove that for $f \in W^{1,2}((-1,1), P)$, there exists a unique $F \in C[-1,1]$ such that $F(x) = f(x), a.e.$ Consequently, we may denote

$$f(1) \triangleq F(1), \quad f(-1) \triangleq F(-1).$$

(b). For $f \in W^{1,2}((-1,1), P)$, define

$$(Ef)(x) = \begin{cases} f(1)\, e^{\frac{x^2-1}{2a^2}} \left(1 - \dfrac{\int_1^x e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t}{\int_1^\infty e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t}\right), & x > 1 \\ f(x), & |x| < 1 \\ f(-1)\, e^{\frac{x^2-1}{2a^2}} \dfrac{\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t} & x < -1 \end{cases}.$$

Show that $Ef \in W^{1,2}(\mathbb{R}, P)$ and the operator norm of E is

$$\sqrt{\frac{ae^{-\frac{1}{2a^2}}}{\int_{\frac{1}{a}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}a^2 + o\left(a^2\right), & a \to 0^+ \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a} + o\left(\frac{1}{a}\right)\right), & a \to +\infty \end{cases}$$

(c). Let

$$\widetilde{E} : W^{1,2}((-1,1), P) \to W^{1,2}(\mathbb{R}, P)$$

be a continuous operator such that $\widetilde{E}f|_{(-1,1)} = f, a.e.$ Then

$$\frac{\left|\left|\widetilde{E}f\right|\right|_{W^{1,2}(\mathbb{R},P)}}{||f||_{W^{1,2}((-1,1),P)}} \geqslant \sqrt{\frac{ae^{-\frac{1}{2a^2}}}{\int_{\frac{1}{a}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}}, \quad \forall f \in W^{1,2}((-1,1), P),$$

i.e., E is the optimal Sobolev extension operator.

67. (67.) 我们首先假设

$$\int_1^\infty |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty.$$

然后我们有

$$2\int_1^\infty |f(x) f'(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^\infty |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty.$$

因此

$$2\int_1^\infty f(x) f'(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{x \to +\infty} f^2(x) - f^2(1)$$

存在. 现在 $\int_1^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$ 和结论14.3.1得 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|^2=0$. 于是我们有

$$\int_1^{\infty}|f(x)|^2+|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant -2\int_1^{\infty}f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=f^2(1)=c^2.$$

注意到 $f(x)=ce^{1-x}$ 使得等号成立, 因此我们所求最佳 $C=c^2$.

注[*] 我们有

$$E:H^1(-1,1)\to H^1(\mathbb{R}),f\mapsto(Ef)(x)\triangleq\begin{cases}f(1)e^{1-x}, & x>1\\ f(x), & x\in(-1,1)\\ f(-1)e^{1-|x|}, & x<-1\end{cases}$$

为最佳 Sobolev 延拓, 其算子范数为 $||E||=\sqrt{1+\coth 1}$.

68. (68.) 注意到

$$\begin{aligned}&f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\\&=\int_0^h f'(x+s)\,\mathrm{d}s-\int_0^h f'(x-s)\,\mathrm{d}s\\&=\int_0^h\mathrm{d}s\int_{-s}^s f''(x+t)\,\mathrm{d}t\\&\overset{\text{二重积分换序}}{=}\int_{-h}^h(h-|t|)f''(x+t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-h}^h(h-|t|)\cdot|f''(x+t)|\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-h}^h(h-|t|)\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x+t)|\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-h}^h(h-|t|)\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x)|\,\mathrm{d}x\\&=h^2\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

69. (69.) 断言

$$C(p)\triangleq\int_0^1\left[2x^2(3-2x)\right]^p\mathrm{d}x>0$$

为所求最佳常数. 对这个 $C(p)$, 注意到 $\Phi(x)\triangleq 2x^2(3-2x)$ 时恰为一个取等条件.

记

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{4x^2}{t^2}\left[3t-(1+2t)x\right], & 0\leqslant x\leqslant t\\ \frac{4(1-x)^2}{(1-t)^2}\left[(3-2t)x-t\right], & t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

以及

$$\begin{aligned}&\Phi_1(x)\triangleq 2(1-x)^2(1+2x),\Phi_2(x)\triangleq 12x(1-x)^2,\\&\Phi_3(x)\triangleq 2x^2(3-2x),\Phi_4(x)\triangleq 12x^2(1-x),\\&\Phi_5(x)\triangleq\frac{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}K(x,t)f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

这里对于 $f^{(4)}$ 恒为 0 的情况可以不引入 K 和 Φ_5. 计算直接得

$$\int_0^1 K^p\left(x,\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\Phi^p(x)\,\mathrm{d}x,\lim_{t\to0^+}\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\Phi_2^p(x)\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$\int_0^1 K(x,t)\,\mathrm{d}x=1,\int_0^1 \Phi_k(x)\,\mathrm{d}x=1,k=1,2,\cdots,5.$$

我们来证明

$$t\mapsto\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x$$

关于 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递增, 从而

$$\int_0^1 \Phi_2^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \Phi^p(x)\,\mathrm{d}x,\forall t\in(0,1).\tag{30.258}$$

考虑

$$\begin{aligned}X&\triangleq 2t(2-2t+(1+2t)z);\\ Y&\triangleq(2-2t)(2t+(3-2t)z).\end{aligned}$$

我们有

$$\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x=2^{p-1}\int_0^1(1-z)^{2p}\left(2tX^p+(2-2t)Y^p\right)\mathrm{d}z,$$

以及对 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 注意到

$$Y-X=6(1-2t)z>0,\forall z\in(0,1),$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 K^p(x,t)\,\mathrm{d}x\right]&=-2^p\int_0^1\left[z(1-z)^{2p}\left(p\left(2tX^{p-1}-(2-2t)Y^{p-1}\right)+2(1-2t)\frac{Y^p-X^p}{Y-X}\right)\right]\mathrm{d}z\\&\geqslant-2^p\int_0^1\left[z(1-z)^{2p}\left(p\left(2tY^{p-1}-(2-2t)Y^{p-1}\right)+2(1-2t)\frac{Y^p-X^p}{Y-X}\right)\right]\mathrm{d}z\\&=-2^p2(1-2t)\int_0^1\left[z(1-z)^{2p}\left(\frac{Y^p-X^p}{Y-X}-pY^{p-1}\right)\right]\mathrm{d}z\geqslant 0.\end{aligned}$$

断言不等式

$$\int_0^1 \Phi_k^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \Phi^p(x)\,\mathrm{d}x,k=1,2,\cdots,5.\tag{30.259}$$

对于 $k=1,3$, 不等式(30.259)左右两端恒等. 对于 $k=2,4$, 由对称性和(30.258)并让 $t\to0^+$ 显然得(30.259)成立. 对于 $k=5$, 考虑范数 $\|g\|_p\triangleq\left(\int_0^1|g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$. 由闵可夫斯基不等式和(30.258)得

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}K(x,t)f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}\right\|_p\leqslant\frac{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}\|K(x,t)\|_p f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}\\&\leqslant\left\|K\left(x,\frac{1}{2}\right)\right\|_p\frac{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t}=\left(\int_0^1 K^p\left(x,\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(2^p\int_0^1 x^{2p}(3-2x)^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1\Phi^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

即得(30.259)成立.

下面总是假设 $f^{(4)}$ 不恒为 0, 分部积分得

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{f(0)}{2}\Phi_1(x)+\frac{f'(0)}{12}\Phi_2(x)+\frac{f(1)}{2}\Phi_3(x)\\&+\frac{-f'(1)}{12}\Phi_4(x)+\int_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{24}f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t\cdot\Phi_5(x).\end{aligned}$$

因为要证不等式是齐次的, 可以不妨设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 然后记 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{5} c_k\Phi_k(x)$, 我们有

$$1=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{5} c_k\int_0^1 \Phi_k(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{5} c_k.$$

注意到 t^p 在 $(0,+\infty)$ 下凸, 因此我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{5} c_k\Phi_k(x)\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sum_{k=1}^{5} c_k\Phi_k^p(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{5} c_k\int_0^1\Phi_k^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{5} c_k\int_0^1\Phi^p(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\Phi^p(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[2x^2(3-2x)\right]^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是我们完成了证明.

70. (70.) 对 $i=1,2,\cdots,n$, 由

$$0\leqslant\int_\Omega\left(x_i f-2a_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

得

$$4a_i^2\int_\Omega x_i f\frac{\partial f}{\partial x_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}\leqslant\int_\Omega x_i^2|f|^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}+4a_i^4\int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

又有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega x_i f\frac{\partial f}{\partial x_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\int_\Omega x_i\frac{\partial f^2}{\partial x_i}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}x_i\cdot f^2\cdot n_i\cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(1-\frac{x_i^2}{a_i^2}\right)f^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\int_{\partial\Omega}x_i\cdot f^2\cdot n_i\cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}S-2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\int_\Omega\left(1-\frac{x_i^2}{a_i^2}\right)f^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega x_i^2|f|^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}+4\sum_{i=1}^{n}a_i^4\int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\int_{\partial\Omega}x_i\cdot f^2\cdot n_i\cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}S+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega x_i^2|f|^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\leqslant2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\int_\Omega|f|^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x}+4\sum_{i=1}^{n}a_i^4\int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{2a_j^2}}\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}$$

我们得证.

71. (71.) 由 Taylor 公式容易得到

$$\lim_{x\to0^+}\left|\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right|=\left|\frac{f''(0)}{2}\right|,$$

从而

$$\int_0^1\left|\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right|\mathrm{d}x<\infty.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{x} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}(\cos(nx))\right|\\&= \left|-\frac{1}{n}\left(\frac{f(1)}{1}\cos n - f'(0) - \int_0^1 \cos(nx)\,\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)\right|\\&\leqslant \frac{|f(1)|+|f'(0)|+\int_0^1\left|\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right|\mathrm{d}x}{n},\end{aligned}$$

即取

$$c \triangleq |f(1)|+|f'(0)|+\int_0^1\left|\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right|\mathrm{d}x$$

为所求.

接下来考虑

$$f(x) \triangleq \begin{cases}\frac{1}{\ln\left(\frac{2}{|x|}\right)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \in C(\mathbb{R}),$$

我们来严格证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{x\ln\frac{2}{x}}\mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n\int_0^n \frac{\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\mathrm{d}x\right) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

对任何 $X>0$, 当自然数 $n>\max\left\{\frac{eX}{2},\frac{X^2}{4}\right\}$, 我们有

$$\left|\frac{\ln n}{\ln\frac{2n}{X}}\right| \leqslant 2,$$

从而

$$\int_0^X\left|\frac{\ln n\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^X\left|\frac{\ln n\sin x}{x\ln\frac{2n}{X}}\right|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^X\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x<\infty,$$

即由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^X\left(\frac{\ln n\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^X\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n\cdot\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^X\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

求导得

$$\left(\frac{\ln n}{x\ln\left(\frac{2n}{x}\right)}\right)' = -\frac{\ln n\cdot\left(\ln\frac{2n}{x}-1\right)}{x^2\ln^2\frac{2n}{x}},$$

即 $\frac{\ln n}{x\ln\left(\frac{2n}{x}\right)}$ 在 $\left(0,\frac{2n}{e}\right)$ 递减, 在 $\left(\frac{2n}{e},n\right)$ 递增. 因此由第二积分中值定理11.3, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_X^{\frac{2n}{e}}\frac{\ln n\cdot\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\mathrm{d}x\right| = \frac{\ln X}{X\ln\frac{2n}{X}}\left|\int_X^\zeta \sin x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2\ln X}{X};\\&\left|\int_{\frac{2n}{e}}^n\frac{\ln n\cdot\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\mathrm{d}x\right| = \frac{\ln n}{n\ln 2}\left|\int_\xi^n\sin x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2\ln n}{n\ln 2},\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^n\frac{\ln n\cdot\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^X\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\frac{\ln X}{2X};\\&\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^n\frac{\ln n\cdot\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^X\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\frac{\ln X}{2X},\end{aligned}$$

即由 X 任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln n\int_0^1\frac{\sin(nx)}{x}f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\ln n\cdot\sin x}{x\ln\frac{2n}{x}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

现在我们证明了 c 不存在.

72. (72.) 记 $\cos x\cosh x=1$ 的最小正根为 a, 断言 $a\approx 4.7300407$ 为所求.

取

$$f_0(x)\triangleq\cos(ax)-\cosh(ax)-\frac{\cos a-\cosh a}{\sin a-\sinh a}(\sin(ax)-\sinh(ax)),$$

则计算得

$$f_0(0)=f_0(1)=f_0'(0)=f_0'(1)=0;$$
$$\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x=a^4\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Method 1 注意到打开括号配方得

$$\begin{aligned}&\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x-a^4\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[f''(x)-\frac{a\cosh(ax)\sin(ax)-a\cos(ax)\sinh(ax)}{1-\cos(ax)\cosh(ax)}f'(x)+\frac{a^2\sin(ax)\sinh(ax)}{1-\cosh(ax)\cos(ax)}f(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

于是我们证明了 a 为所求.

注 上述 **Method 1** 这种方法最初来自第九届清疏数学全程班学员" 绯暗妖精", 这种配方构造其实没有太大涵养[126], 所以我们略去了计算细节, 其思路动机来自于接下来的本质方法 **Method 2**.

Method 2

基本的 Sobolev 知识告诉我们题目积分不等式等价于对 $f\in H_0^2(0,1)$ 中的函数成立. 我们还有紧嵌入 $H_0^2(0,1)\to L^2[0,1]$. 由齐次性, 我们相当于在有界集

$$K\triangleq\left\{f\in H_0^2(0,1):\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=1\right\}$$

上求 $\int_0^1|f''(x)|^2\,\mathrm{d}x$ 下确界. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset K$ 是极小化序列. 由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}&\int_0^1|f_n'(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\int_0^x f_n''(y)\,\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1\left(\int_0^1|f_n''(y)|\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left(\int_0^1|f_n''(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1|f_n''(x)|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $H_0^2(0,1)$ 有界集, 从而是 $H_0^2(0,1)$ 的弱列紧集和 $L^2[0,1]$ 中列紧集, 因此在 $H_0^2(0,1)$ 有弱收敛的子列, 在 $L^2[0,1]$ 有强收敛的子列, 不妨仍然把这个公共子列记为 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 并设其极限函数为 $f_0\in H_0^2(0,1)$. 此时 $f\in K$. 由范数弱下半连续性, 我们还有

$$\int_0^1|f_0''(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1|f_n''(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

因此 f_0 是达到最小值的函数. 记

$$a\triangleq\left(\int_0^1|f_0''(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac14}>0.$$

对任何 $t\in\mathbb{R},\phi\in C_c^\infty(0,1)$, 我们有

$$\int_0^1|f_0''(x)+t\phi''(x)|^2\,\mathrm{d}x-a^4\int_0^1|f_0(x)+t\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

于是

$$\frac{d\left[\int_0^1|f_0''(x)+t\phi''(x)|^2\,\mathrm{d}x-a^4\int_0^1|f_0(x)+t\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]}{dt}\Big|_{t=0}=0,$$

[126] 当然, 当年非 AI 时代徒手算出这些东西含金量要更高.

即

$$\int_0^1 f_0''(x)\,\phi''(x)\,\mathrm{d}x = a^4\int_0^1 f_0(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为 $f_0 \in H_0^2(0,1) \subset H_0^2(\mathbb{R})$, 上述 ϕ 可以扩充到 $C_c^\infty(\mathbb{R})$, 于是在分布意义下 $f_0^{(4)}(x) = a^4 f_0(x)$, 正则性理论告诉我们 $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

现在我们只需要解方程

$$y^{(4)} = a^4 y, y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

此时直接背出通解带值算知 $\cos a \cosh a = 1$ 时才有非 0 的解且这个解恰好是前面给的取等条件中 f_0 的倍数[127]. 为了 f_0 是达到最小的函数, 显然 $a > 0$ 应该尽可能小, 于是 a 恰好就是 $\cos x \cosh x = 1$ 的最小正根. 我们得证.

73. (73.) 考虑

$$f_0(x) \triangleq e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),$$

我们有

$$\int_0^\infty |f_0(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \int_0^\infty |f_0'(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1, \int_0^\infty |f_0''(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

即

$$\int_0^\infty |f_0'(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^\infty |f_0(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty |f_0''(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任何 $f \in C^2[0,+\infty)$, 不妨设[128] f 在 x 充分大为 0, 否则截断逼近即可. 再不妨设

$$0 < \int_0^\infty |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_0^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

现在

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_0^\infty |f''+f'+f|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(|f''|^2+|f'|^2+|f|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + 2\int_0^\infty f''f'\mathrm{d}x + 2\int_0^\infty ff'\mathrm{d}x + 2\int_0^\infty ff''\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \left(|f''|^2+|f|^2-|f'|^2\right)\mathrm{d}x - |f'(0)+f(0)|^2 \\
&\leqslant \int_0^\infty \left(|f''|^2+|f|^2-|f'|^2\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

现在对任何 $\lambda > 0$, 我们有

$$\lambda^2\int_0^\infty |f'(\lambda x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty |f(\lambda x)|^2\,\mathrm{d}x + \lambda^4\int_0^\infty |f''(\lambda x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\lambda^2\int_0^\infty |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \lambda^4\int_0^\infty |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

取

$$\lambda \triangleq \left(\frac{\int_0^\infty |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^\infty |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{4}},$$

[127] 不影响作为取等条件, 因为齐次.

[128] 见例题17.16的 **Method 1**.

我们有

$$\int_0^{\infty}\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\left(\int_0^{\infty}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}\left|f''(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

这就完成了证明.

74. (74.)

引理 30.17

设 V 是一个实内积空间. $||\cdot||,\langle\rangle$ 是 V 上的内积和范数. 证明: 对一切

$$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R},v_1,v_2,\cdots,v_n\in V$$

都有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_je^{-||v_i-v_j||^2}\geqslant 0.$$

♡

证明 注意到

$$||v_i-v_j||^2=||v_i||^2+||v_j||^2-\left\langle\sqrt{2}v_i,\sqrt{2}v_j\right\rangle,i,j=1,2,\cdots,n.$$

同时用 $\frac{v_i}{\sqrt{2}}$ 替换 v_i, $a_ie^{||v_i||^2}$ 替换 a_i, 此时只需证明

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_je^{\langle v_i,v_j\rangle}\geqslant 0.$$

Taylor 展开得

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_je^{\langle v_i,v_j\rangle}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle v_i,v_j\rangle^k.$$

当 $k=0$ 得

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j=\left|\sum_{i=1}^n a_i\right|^2\geqslant 0.$$

当 $k=1$ 对应 Gram 矩阵对应的二次型, 因此显然有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\langle v_i,v_j\rangle\geqslant 0.$$

又半正定矩阵的 Hardamard 积也半正定[129], 我们有

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\langle v_i,v_j\rangle^k\geqslant 0,k=2,3,\cdots,$$

这就证明了

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_je^{-||v_i-v_j||^2}\geqslant 0.$$

回到原题: 先考虑 $s=2$, 这是引理30.17的直接推论. 再来看一般的 $s\in(0,2)$. 注意到

$$|x-y|^s=\frac{1}{2\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{1+s}}\mathrm{d}u}\int_0^{\infty}\frac{(\cos(tx)-\cos(ty))^2+(\sin(tx)-\sin(ty))^2}{t^{s+1}}\mathrm{d}t,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

设

$$\Phi_x(t)\triangleq\sqrt{\frac{1}{2t^{1+s}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u^{1+s}}\mathrm{d}u}}(\cos(tx)-1,\sin(tx)),$$

我们有

$$||\Phi_x(\cdot)-\Phi_y(\cdot)||^2_{L^2(0,+\infty)}=|x-y|^s,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

[129] 见定理23.19.

我们完成了证明.

75. (75.) 由非数学类微分中值定理习题119., 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\left|f^{(n-1)}(\xi)\right| \leqslant 4^{n-1}(n-1)! \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

现在对 $x \in [0,1]$ 我们有

$$\begin{aligned}\left|f^{(n-1)}(x)\right| &\leqslant \left|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\xi)\right| + \left|f^{(n-1)}(\xi)\right| \\ &= \left|\int_\xi^x f^{(n)}(y)\,\mathrm{d}y\right| + \left|f^{(n-1)}(\xi)\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|f^{(n)}(y)\right| \mathrm{d}y + 4^{n-1}(n-1)! \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

不等式对

$$f(x) \triangleq \frac{\sin(n \arccos(2x-1))}{\sin(\arccos(2x-1))}$$

等号成立[130]. 我们完成了证明.

76. (76.) 取 $f(x) \triangleq (1-x)^{\frac{1}{p-1}}$, 我们有

$$\left(\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} \int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{p}{2p-1}\right)^p \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2p-1}.$$

下证

$$C_p \triangleq \left(\frac{p}{2p-1}\right)^p > 0$$

为所求.

不妨设 f 不恒为 0, 记

$$A \triangleq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, B \triangleq \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x, C \triangleq \int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x.$$

对 $a > 0$, 我们由 Holder 不等式16.1有

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{a}\right) f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{B}{a} \\ &\leqslant \int_0^1 \max\left\{1 - \frac{x}{a}, 0\right\} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{B}{a} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \max\left\{1 - \frac{x}{a}, 0\right\}^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}} + \frac{B}{a} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \max\left\{1 - \frac{x}{a}, 0\right\}^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}} + \frac{B}{a} \\ &= \left(\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}} + \frac{B}{a} \\ &= C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{a(p-1)}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \frac{B}{a}.\end{aligned}$$

上述不等式右边关于 $a > 0$ 最小值在

$$a_* \triangleq \frac{(Bp)^{\frac{p}{2p-1}} (2p-1)^{\frac{p-1}{2p-1}}}{C^{\frac{1}{2p-1}} (p-1)}$$

达到, 此时就有

$$A \leqslant C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{a_*(p-1)}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \frac{B}{a_*} = \left[C B^{p-1} \left(\frac{2p-1}{p}\right)^p\right]^{\frac{1}{2p-1}},$$

[130]计算验证见非数学类微分中值定理习题82..

即

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1}\int_0^1 f^p(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{p}{2p-1}\right)^p\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2p-1}.$$

77. (77.) 由 Cauchy 不等式16.1有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|xff'|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}|xf|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f'|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

由连续函数积分收敛必有子列趋于 014.3.1得 $x_n\to+\infty$ 使得 $x_n^2f^2(x_n)\to 0$. 现在就有 $x_nf^2(x_n)\to 0$. 同理可得 $y_n\to-\infty$ 使得 $y_nf^2(y_n)\to 0$ 分部积分得

$$\int_{y_n}^{x_n}xff'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}xf^2|_{y_n}^{x_n}-\frac{1}{2}\int_{y_n}^{x_n}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是让 $n\to\infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}xff'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|xff'|\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

等号成立条件为 Cauchy 不等式取等条件, 即 $xf=cf'$ 的解, 即

$$f(x)=Ae^{\frac{x^2}{2c}},A\in\mathbb{R},c<0.$$

78. (78.) 只需考虑 f 不恒为 0, 此时显然 $f^{(j)},1\leqslant j<m$ 不恒为 0. 现在考虑

$$a_k\triangleq\int_0^{\infty}\left|f^{(k)}(x)\right|^2\mathrm{d}x>0,k=0,1,\cdots,m.$$

利用引理11.1得

$$\int_0^{\infty}\left|f^{(k-1)}(x)f^{(k+1)}(x)\right|\mathrm{d}x<\infty,\int_0^{\infty}\left|f^{(k)}(x)\right|^2\mathrm{d}x<\infty.$$

利用数学类积分不等式习题77.的方法分部积分得

$$\int_0^{\infty}\left|f^{(k)}(x)\right|^2\mathrm{d}x=-\int_0^{\infty}f^{(k-1)}(x)f^{(k+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

由 Cauchy 不等式16.1得

$$a_k^2\leqslant a_{k-1}a_{k+1},k=1,2,\cdots,m-1.$$

现在

$$\ln a_k-\ln a_{k-1}\leqslant\ln a_{k+1}-\ln a_k,k=1,2,\cdots,m-1.$$

结合递增数列的平均值数列也递增得

$$\frac{\ln a_j-\ln a_0}{j}\leqslant\frac{\ln a_m-\ln a_0}{m},1\leqslant j<m,$$

即

$$a_j\leqslant a_0^{\frac{m-j}{m}}a_m^{\frac{j}{m}},1\leqslant j<m.$$

因此我们证明了

$$\int_0^{\infty}\left|f^{(j)}(x)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-j}{m}}\left(\int_0^{\infty}\left|f^{(m)}(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{j}{m}},1\leqslant j<m.$$

30.17 数学类级数

1. (1.) 答案见mse.

2. (2.) 约定 $a_{nk}=0, k>n$, 则由级数的法图引理18.18 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}|a_{nk}|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|=\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|\leqslant M.$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$, 于是对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任何 $n\geqslant N$, 都有 $|z_n|\leqslant\epsilon$.
于是对 $n>\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k-\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\epsilon\sum_{k=N+1}^{n}|a_{nk}-a_k|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\epsilon\sum_{k=N+1}^{n}|a_{nk}|+\epsilon\lim_{m\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n}|a_{mk}|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+\epsilon M+\epsilon\lim_{m\to\infty}\sum_{k=N+1}^{m}|a_{mk}|\\&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}\left(a_{nk}-a_k\right)z_k\right|+2\epsilon M,\end{aligned}$$

从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k-\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|\leqslant2M\epsilon,$$

由 ϵ 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k-\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|=0.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kz_k|\leqslant\sup_{k\geqslant1}|z_k|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,$$

因此有下面极限存在

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kz_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz_k.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}z_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz_k.$$

3. (3.) 设 f 是解析函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{i^i}{(i+1)^{i+1}}x^{i+1}, x\in(0,1)$, 断言最佳常数

$$C=\sup_{x\in(0,1)}\frac{(1-x)f'(x)+f(x)}{\sqrt{xf'(x)-f(x)}}<\infty.$$

事实上由基本的渐近分析方法, 即幂级数的阶由系数决定, 我们知道

$$\begin{aligned}
&f(x) \sim \frac{-\ln(1-x)}{e}, x \to 1^-\\
&f(x) \sim \frac{1}{4}x^2, x \to 0^+\\
&xf'(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+1} x^{i+1} \sim \frac{1}{e(1-x)}, x \to 1^-\\
&xf'(x) - f(x) \sim \frac{1}{4}x^2, x \to 0^+\\
&(1-x)f'(x) + f(x) \sim \frac{1}{2}x, x \to 0^+\\
&f'(x) \sim \frac{1}{e(1-x)}, x \to 1^-.
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)f'(x)+f(x)}{\sqrt{xf'(x)-f(x)}} = 1, \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)f'(x)+f(x)}{\sqrt{xf'(x)-f(x)}} = 0,$$

因此 $C < \infty$. 我们可以看到 C 蕴含在一个超越方程的解之中, 实际上对 $x \in (0,1)$, 考虑

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\frac{(1-x)f'(x)+f(x)}{\sqrt{xf'(x)-f(x)}} = \frac{[(x-2)f(x)-x(x-1)f'(x)]f''(x)}{2[xf'(x)-f(x)]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

即 $x \in (0,1)$ 是 $\frac{2-x}{x(1-x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 的根. 从而可以确定

$$C = \max\left\{1, \frac{(1-x)f'(x)+f(x)}{\sqrt{xf'(x)-f(x)}}\right\} = \max\left\{1, \frac{2\sqrt{1-x}}{x}\sqrt{f(x)}\right\},$$

这里 $x \in (0,1)$ 是 $\frac{2-x}{x(1-x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 的全部根 (显然有限).

接下来断言 C 是最佳的, 对任意 $\lambda > 1$, 取 $a_j = \frac{1}{\lambda^{j+1}}\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j+1}, j = 1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\frac{j}{j+1}} = f'\left(\frac{1}{\lambda}\right), \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \frac{f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda} - f\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

于是

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^{\frac{j}{j+1}} - \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j}} = \frac{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)+f\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda} - f\left(\frac{1}{\lambda}\right)}}.$$

由 λ 任意性即知 C 如果是一个要求的常数, 这不可改进.

我们考虑 ℓ^1 中的函数 $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^{\frac{j}{j+1}}$, 注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n} |x_j|^{\frac{j}{j+1}} &= \sum_{\left\{m\leqslant j\leqslant n:|x_j|^{\frac{j}{j+1}}<2|x_j|\right\}} |x_j|^{\frac{j}{j+1}} + \sum_{\left\{m\leqslant j\leqslant n:|x_j|^{\frac{j}{j+1}}\geqslant 2|x_j|\right\}} |x_j|^{\frac{j}{j+1}}\\
&\leqslant 2\sum_{j=m}^{n}|x_j| + \sum_{\left\{m\leqslant j\leqslant n:|x_j|\leqslant 2^{-(j+1)}\right\}} |x_j|^{\frac{j}{j+1}}\\
&\leqslant 2\sum_{j=m}^{n}|x_j| + \sum_{j=m}^{n}\frac{1}{2^j}.
\end{aligned}$$

因为上述不等式右端项在 ℓ^1 所有紧子集上一致收敛, 所以 $f \in C\left(\ell^1\right)$.

注意到对每个 $S > 0$, 考虑

$$g(\mathbf{x}) = f\left(S - \sum_{i=2}^{\infty} x_i, x_2, \cdots\right),$$

我们的目标是找到 g 在凸集 $\left\{(x_2,x_3,\cdots):\sum\limits_{i=2}^{\infty}x_i<S,x_i>0,i=2,3,\cdots\right\}$ 的最大值点.

对任意 $n\in\mathbb{N},w_1,w_2,\cdots,w_n\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}w_iw_j&=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}w_iw_j\\&=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_i}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)w_iw_j\\&=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)w_iw_j\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\sum_{i=2}^{n}w_i\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}w_i^2\\&=-\frac{1}{4}\left(S-\sum_{i=2}^{\infty}x_i\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\sum_{i=2}^{n}w_i\right)^2-\sum_{i=2}^{n}\frac{i}{(i+1)^2}x_i^{-\frac{i+2}{i+1}}w_i^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

即 g 在定义域为上凸函数, 从而至多存在唯一极值点 (如果存在, 一定是最大值点). 现在考虑 $\frac{\partial g}{\partial x_i}=0,i=2,3,\cdots$, 即

$$\frac{1}{2}\left(S-\sum_{i=2}^{\infty}x_i\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{i}{i+1}x_i^{-\frac{1}{i+1}},i=2,3,\cdots.$$

从而 $\frac{i}{i+1}x_i^{-\frac{1}{i+1}}=\lambda,i=1,2,\cdots$, 因此 $x_j=\frac{1}{\lambda^{j+1}}\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j+1},j=1,2,\cdots$, 由于 $\mathbf{x}=(x_j)\in\ell^1$, 所以我们证明了我们之前验证 C 不可改进时取的序列 (a_j) 恰好是达到 g 最大值的点 (a_j). 即

$$g\leqslant g\left(a_2,a_3,\cdots,\right)=f\left(a_1,a_2,\cdots\right)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{\frac{j}{j+1}}=f'\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

结合

$$f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leqslant\frac{1}{\lambda}f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)+f\left(\frac{1}{\lambda}\right)+C\sqrt{\frac{1}{\lambda}f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)+f\left(\frac{1}{\lambda}\right)}=S+C\sqrt{S}.$$

我们证明了不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n+C\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}.$$

我们完成了证明.

我们对上面 g 在 $(a_2,a_3,\cdots)$ 取最大值做一个严格证明. 对 $\left\{(x_2,x_3,\cdots):\sum\limits_{i=2}^{\infty}x_i<S,x_i>0,i=2,3,\cdots\right\}$ 中的点 $(x_2,x_3,\cdots)$, 我们考虑 m 充分大, 在有限维就有

$$g\left(x_2,x_3,\cdots\right)\leqslant g\left(a_2,\cdots,a_m,x_{m+1},\cdots\right)+\sum_{j=2}^{m}\frac{\partial g\left(a_2,\cdots,a_m,x_{m+1},\cdots\right)}{\partial x_j}\left(x_j-a_j\right).$$

于是令 $m\to+\infty$, 我们有

$$g\left(x_2,x_3,\cdots\right)\leqslant g\left(a_2,a_3,\cdots\right)+\lim_{m\to\infty}\sum_{j=2}^{m}\frac{\partial g\left(a_2,\cdots,a_m,x_{m+1},\cdots\right)}{\partial x_j}\left(x_j-a_j\right).$$

对 $1 \leqslant j \leqslant m$, 我们看到

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\left(a_2, \cdots, a_m, x_{m+1}, \cdots\right)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{2}\left(S-\sum_{j=2}^{m} a_j-\sum_{j=m+1}^{\infty} x_j\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{j}{j+1} a_j^{-\frac{1}{j+1}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(S-\sum_{j=2}^{m} a_j-\sum_{j=m+1}^{\infty} x_j\right)^{-\frac{1}{2}}+\lambda \\ &= O(1).\end{aligned}$$

因此由控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial g\left(a_2, \cdots, a_m, x_{m+1}, \cdots\right)}{\partial x_j}\left(x_j-a_j\right)=0.$$

这就证明了 g 在 $\left(a_2, a_3, \cdots\right)$ 取最大值. 于是上面只是借助了无穷维的观点, 并非无穷维的本质证明.

事实上 $C=1$, 因为

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{(i+1)^{i+1}} x^{i+1}} \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x^{i+1}}=\frac{x}{2 \sqrt{1-x}}.$$

4. (4.) 显然 f 的定义级数一致收敛且 $f \in C(\mathbb{R}), f(0)=0$. 于是在(19.79)中取 $y=0$ 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n|\sin nx| \leqslant M|x|, \forall x \in(-\infty,+\infty).$$

现在对任何 $m \in \mathbb{N}, x \neq 0$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{m} a_n\left|\frac{\sin nx}{x}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left|\frac{\sin nx}{x}\right| \leqslant M,$$

于是

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{m} a_n\left|\frac{\sin nx}{x}\right|=\sum_{n=1}^{m} n a_n \leqslant M.$$

现在让 $m \to \infty$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n \leqslant M$, 这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n$ 收敛.

5. (5.) 式(19.80)即是对 $f, \chi_{[c,d]}(x)$ 的帕塞瓦尔等式18.28.

6. (6.) 我们定义 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (nx)}{n \ln^2(n+2)}$, 由引理8.1易知 f 定义幂级数一致收敛且 $f \in C[0, \pi]$.

一方面

$$f(\pi)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{(2n-1) \ln^2(2n+1)}+\frac{1}{2n \ln^2(2n+2)}\right)<0.$$

另外一方面

$$f(0)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+2)}>0.$$

由连续函数的零点定理就知道存在我们需要的 $\xi \in(0, \pi)$ 使得

$$f(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n \ln^2(n+2)}=0.$$

7. (7.) 注意到存在递增无界数列 λ_n 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n a_n}{n}<\infty$, 例如取 $\lambda_n=\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}}+\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k}}}, n=1,2, \cdots$. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n a_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\left(\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}}+\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k}}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}}-\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k}}\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}}.$$

如下证明来自网友 Ptr: 取 $m_1=1$, 并考虑数列 $m_{k+1}=\left\lceil\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_k}}\right)m_k\right\rceil, k=1,2,\cdots$, 这里 $\lceil x\rceil$ 表示向上取整, 即不小于等于 x 的最小整数, 注意到 m_k 是一个严格递增的正整数列且有不等式

$$\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_k}}\right)m_k<m_{k+1}\leqslant\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_k}}\right)m_k+1, k=1,2,\cdots. \tag{30.260}$$

考虑

$$n_k=\left\{\ell\in\mathbb{N}:m_k\leqslant\ell<m_{k+1}, a_\ell=\min_{m_k\leqslant t<m_{k+1}}a_t\right\},$$

于是我们运用不等式(30.260)有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_{k+1}}{m_{k+1}}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{m_{k+2}}{m_k}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_{k+1}}}\right)\left[\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_k}}\right)m_k+1\right]+1}{m_k}=1,$$

即由夹逼准则得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}=1.$$

现在运用不等式(30.260)就有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n a_n}{n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\frac{\lambda_i a_i}{i}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\frac{\lambda_{m_k}a_{n_k}}{i}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{m_k}a_{n_k}\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{m_k}a_{n_k}\ln\frac{m_{k+1}}{m_k}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{m_k}a_{n_k}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_k}}\right).\end{aligned}$$

由 $\lim_{k\to\infty}\lambda_{m_k}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda_{m_k}}\right)=1$ 知 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ 收敛. 我们完成了证明.

8. (8.) 由 EM 公式, 我们有9.3,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin^2\sqrt{n}}{n}&=\frac{\sin^2 1+\frac{\sin^2\sqrt{m}}{m}}{2}+\int_1^m\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}dx+\int_1^m b_1(x)\left(\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}\right)'dx\\&=\frac{\sin^2 1+\frac{\sin^2\sqrt{m}}{m}}{2}+\int_1^m\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}dx+\int_1^m b_1(x)\frac{\sin\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)}{x^2}dx.\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{n}}{n}&=\frac{\sin^2 1}{2}+\int_1^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}dx+\int_1^{\infty}b_1(x)\left(\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}\right)'dx\\&=\frac{\sin^2 1}{2}+2\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y}dy+\int_1^{\infty}b_1(x)\left(\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}\right)'dx=+\infty.\end{aligned}$$

注意由9.29, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin^2\sqrt{n}}{n}&=C+2\int_0^m\frac{\sin^2 y}{y}dy+o(1)\\&=C+\ln m+o(1).\end{aligned}$$

9. (9.) 原本级数等价于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n$ 在 $|z|=1$ 处处收敛.

对整数 $m\in\mathbb{N}$ 和整数 $t\in\left[m^2,m^2+2m\right), |z|=1$, 我们有

$$\left|\sum_{n=m^2}^{t}\frac{(-1)^m}{n}z^n\right|\leqslant\sum_{n=m^2}^{m^2+2m-1}\frac{1}{n}\leqslant\sum_{n=m^2}^{m^2+2m-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{m}\right),$$

即

$$\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=m^2}^{t}\frac{(-1)^m}{n}z^n\right|=0. \tag{30.261}$$

现在对充分大的 $N\in\mathbb{N}$, 级数的部分和可以写成

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{(-1)^k}{n}z^n+\underbrace{\sum_{n=m^2}^{t}\frac{(-1)^m}{n}z^n}_{\text{可能没有}},$$

于是用(30.261)知我们只需研究 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum\limits_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{z^n}{n}$ 的收敛性.

当 $z\neq 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{z^n}{n}&\overset{\text{Abel 变换8.2}}{=}\sum_{j=k^2}^{k^2+2k-1}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\sum_{i=k^2}^{j}z^i+\frac{1}{k^2+2k}\sum_{i=k^2}^{k^2+2k}z^i\\&=\sum_{j=k^2}^{k^2+2k-1}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\frac{z^{k^2}-z^{j+1}}{1-z}+\frac{1}{k^2+2k}\frac{z^{k^2}-z^{k^2+2k+1}}{1-z}\\&=O\left(\sum_{j=k^2}^{k^2+2k-1}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+2k}\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{k\left(k^2+2k\right)}\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=O\left(\frac{1}{k^2}\right),\end{aligned}$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum\limits_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{z^n}{n}$ 在 $z\neq 1$ 收敛, 当 $z=1$ 的时候见习题19.72.

10. (10.) 我们直接考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$, 则当 $x\in(0,\pi)$, 运用 Abel 变换8.2有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}e^{ikx}\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{e^{ix}-e^{i(m+1)x}}{1-e^{ix}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{ix}-1}{1-e^{ix}}\right|\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right|\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\pi+\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x\right)\\&=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是我们来证明

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x\sim c\ln n,n\to\infty,$$

就能说明原积分收敛.

注意到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x-\frac{1}{\ln n}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi}\left|\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x+\frac{1}{\ln n}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\to0,n\to\infty,\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\ln n}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\frac{(n+1)x}{2}\right|}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\ln n}\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\mathrm{d}y\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\ln n}\sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\ln n}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\frac{|\sin y|}{y+k\pi}\mathrm{d}y\\&\overset{\text{Stolz 定理9.1}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y+(n+1)\pi}\mathrm{d}y=2\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

现在我们证明了 $\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$.

11. (11.) 不妨设 $\alpha>1$, 注意到由 Weyl 等分布理论9.18, 我们知道 $\left\{\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是等分布且

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left|\left\{1\leqslant j\leqslant N:\left\{\frac{j}{2\pi}\right\}\in\left[\frac{1}{2}+\frac{\arcsin(\alpha-1)}{2\pi},1-\frac{\arcsin(\alpha-1)}{2\pi}\right]\right\}\right|}{N}=\frac{1}{2}-\frac{\arcsin(\alpha-1)}{\pi}.$$

记 $c\triangleq\frac{1}{2}-\frac{\arcsin(\alpha-1)}{\pi}$, 我们有于是对任何 $m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left|\left\{m\leqslant j\leqslant N:\left\{\frac{j}{2\pi}\right\}\in\left[\frac{1}{2}+\frac{\arcsin(\alpha-1)}{2\pi},1-\frac{\arcsin(\alpha-1)}{2\pi}\right]\right\}\right|}{N}=\frac{1}{2}-\frac{\arcsin(\alpha-1)}{\pi}.$$

因此存在 $N_m\geqslant m$, 使得对所有 $N\geqslant N_m$, 都有

$$\left|\left\{m\leqslant j\leqslant N:\left\{\frac{j}{2\pi}\right\}\in\left[\frac{1}{2}+\frac{\arcsin(\alpha-1)}{2\pi},1-\frac{\arcsin(\alpha-1)}{2\pi}\right]\right\}\right|\geqslant\frac{c}{2}N.$$

从而对 $N\geqslant N_m$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{N}\frac{1}{j^{\alpha+\sin j}}&=\sum_{j=m}^{N}\frac{1}{j^{\alpha+\sin\left(2\pi\left\{\frac{j}{2\pi}\right\}\right)}}\\&\geqslant\sum_{\left(1-\frac{c}{2}\right)N+1\leqslant j\leqslant N}\frac{1}{j}\\&\geqslant\sum_{\left(1-\frac{c}{2}\right)N+1\leqslant j\leqslant N}\ln\frac{j+1}{j}\\&\geqslant\ln\frac{N+1}{\left(1-\frac{c}{2}\right)N+2}\end{aligned}.$$

于是

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=m}^{N}\frac{1}{j^{\alpha+\sin j}}\geqslant\ln\frac{2}{2-c}>0.$$

因此原本级数发散.

12. (12.) 首先 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$ 在 $x=1$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$ 收敛半径大于等于 1, 即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{na_n}\leqslant1,$$

因此 $f(x)\in C^{\infty}(0,1)$.

我们只需证明如下换序

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1-x^n}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lim_{x\to 1^-}\frac{x^n-1}{x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_n.$$

事实上

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_n<\infty,\frac{1-x^n}{n(1-x)}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}x^j}{n}\leqslant 1,$$

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}x^j}{n+1}-\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}x^j}{n}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(x^n-x^j\right)}{n(n+1)}\leqslant 0,\forall x\in[0,1],$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1-x^n}{1-x}$ 关于 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

13. (13.) 注意到由(19.81)有

$$\sum_{n=m}^{m+k}\left|\frac{f_n(x)}{n^p}\right|\leqslant\sum_{n=m}^{m+k}\frac{1}{n^{2p}}\sum_{n=m}^{m+k}f_n^2(x)\leqslant M\sum_{n=m}^{m+k}\frac{1}{n^{2p}},\forall x\in I.$$

于是由 Cauchy 收敛准则得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{n^p}$ 在 I 一致收敛.

14. (14.)

引理 30.18

对任何 $\epsilon>0,p_0\in\mathbb{N}$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $z_1,z_2,\cdots,z_N\in\mathbb{C}$, 使得

$$\left|\sum_{j=1}^{N}z_j^{p_0}\right|>1,\left|\sum_{j=n}^{m}z_j^{p}\right|\leqslant\epsilon,\forall 1\leqslant n\leqslant m\leqslant N,p\in\mathbb{N}\setminus\{p_0\}.$$

♡

注这个引理的证明有点小 bug, 结果是对的, 读者读的时候需要自己做一下修改.

证明 我们取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{p_0}\right\},k=\left[\frac{1}{p_0\delta^{p_0}}\right]+1,N=kp_0$. 我们构造的满足引理的序列是

$$z_j=\delta e^{\frac{2\pi ij}{p_0}},j=0,1,2,\cdots,N-1.$$

下面验证 $\{z_j\}_{j=0}^{kp_0-1}$ 为所求.

事实上,

$$\left|\sum_{j=0}^{N-1}z_j^{p_0}\right|=k\left|\sum_{j=0}^{p_0-1}\delta^{p_0}\right|=kp_0\delta^{p_0}>1.$$

$$\sum_{j=0}^{p_0-1}z_j^p=\delta^p\sum_{j=0}^{p_0-1}e^{\frac{2\pi pij}{p_0}}=\delta^p\frac{1-e^{2\pi ip}}{1-e^{\frac{2\pi i}{p_0}}}=0,\forall p\in\mathbb{N}\setminus\{p_0\}.$$

于是对任何 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N,p\in\mathbb{N}\setminus\{p_0\}$, 由 z_j 的周期性和上一等式, 不妨设 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant p_0-1$, 我们有

$$\left|\sum_{j=n}^{m}z_j^p\right|\leqslant\sum_{j=n}^{m}\left|z_j^p\right|\leqslant p_0\delta^p\leqslant p_0\delta\leqslant\epsilon.$$

引理证毕!.

回到原题证明, 事实上, 取满射 $f:\mathbb{N}\to M$, 使得对所有 $m\in M$, 我们有 $f^{-1}(\{m\})$ 是无穷集.

我们在引理30.18中取 $\epsilon=\frac{1}{2^7},p_0=f(j),j=1,2,\cdots$, 于是得到

$$z_1^{(j)},z_2^{(j)},\cdots,z_{N_j}^{(j)}\in\mathbb{C},$$

使得

$$\left|\sum_{k=1}^{N_j}\left(z_k^{(j)}\right)^{p_0}\right|>1,\left|\sum_{k=n}^{m}\left(z_k^{(j)}\right)^{p}\right|\leqslant\frac{1}{2^j},\forall 1\leqslant n\leqslant m\leqslant N_j,p\in\mathbb{N}\setminus\{p_0\}.$$

取 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: 约定 $N_0=0$, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在唯一的 $j\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, 使得 $n=N_j+r,0<r\leqslant N_{j+1}-N_j$, 于是令 $a_n=z_r^{(N_{j+1})}$. 我们断言 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为所求.

事实上, 对每个 $p_0\in M$, 因为 $f^{-1}(\{p_0\})$ 为无限集且 $\left|\sum\limits_{k=1}^{N_j}\left(z_k^{(j)}\right)^{p_0}\right|>1$, 我们由 Cauchy 收敛准则知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{p_0}$ 发散. 另外一方面, 对每个 $p\notin M$ 和自然数 $T\geqslant S$, 则必存在唯一的整数 $t\geqslant s\geqslant 0$, 使得

$$\sum_{\ell=0}^{s}N_\ell<S\leqslant\sum_{\ell=0}^{s+1}N_\ell,\sum_{\ell=0}^{t}N_\ell<T\leqslant\sum_{\ell=0}^{t+1}N_\ell.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=S}^{T}a_n^p\right|&\leqslant\left|\sum_{n=S}^{\sum_{\ell=0}^{s+1}N_\ell}a_n^p\right|+\left|\sum_{n=1+\sum_{\ell=0}^{t}N_\ell}^{T}a_n^p\right|+\left|\sum_{n=1+\sum_{\ell=0}^{s+1}N_\ell}^{\sum_{\ell=0}^{t}N_\ell}a_n^p\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{s+1}}+\frac{1}{2^{t+1}}+\sum_{\ell=s+2}^{t}\frac{1}{2^\ell}\\&=\sum_{\ell=s+1}^{t+1}\frac{1}{2^\ell}.\end{aligned}$$

因此我们证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 对任何 $p\notin M$ 收敛. 因此我们完成了证明.

15. (15.) 考虑 Cauchy 收敛准则知原级数在 $[0,1)$ 一致收敛的充要条件是在 $[0,1]$ 一致收敛. 由 Dini 定理13.39知原级数在 $[0,1]$ 一致收敛的充要条件是和函数在 $[0,1]$ 连续, 显然这等价于原级数在 $x=1$ 连续性. 即判断是否有

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(1-x\right)x^{n^m}=0.\tag{30.262}$$

对 $x\in(0,1)$, 由 EM 公式9.3, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}n\left(1-x\right)x^{n^m}&=\sum_{n=0}^{k}n\left(1-x\right)x^{n^m}\\&=\frac{k\left(1-x\right)x^{k^m}}{2}+\int_0^k y\left(1-x\right)x^{y^m}\mathrm{d}y\\&+\int_0^k\left(y-\lfloor y\rfloor-\frac{1}{2}\right)\frac{d\left(y\left(1-x\right)x^{y^m}\right)}{dy}dy\\&=\frac{k\left(1-x\right)x^{k^m}}{2}+\int_0^k y\left(1-x\right)x^{y^m}\mathrm{d}y\\&+\left(1-x\right)\int_0^k\left(y-\lfloor y\rfloor-\frac{1}{2}\right)\left(x^{y^m}+my^m\ln x\cdot x^{y^m}\right)dy.\end{aligned}$$

令 $k\to+\infty$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-x\right)x^{n^m}=\int_0^{\infty}y\left(1-x\right)x^{y^m}\mathrm{d}y+\left(1-x\right)\int_0^{\infty}\left(y-\lfloor y\rfloor-\frac{1}{2}\right)\left(x^{y^m}+my^m\ln x\cdot x^{y^m}\right)dy.$$

一方面

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y\left(1-x\right)x^{y^m}\mathrm{d}y&=\left(1-x\right)\int_0^\infty ye^{-y^m\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}y\\&\overset{y=\frac{t^{\frac{1}{m}}}{\ln^{\frac{1}{m}}\frac{1}{x}}}{=}\frac{1-x}{\ln^{\frac{2}{m}}\frac{1}{x}}\int_0^\infty t^{\frac{2}{m}-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\&\sim\frac{1}{\ln^{\frac{2}{m}-1}\frac{1}{x}}\int_0^\infty t^{\frac{2}{m}-1}e^{-t}\mathrm{d}t,x\to1^-.\end{aligned}$$

另外一方面,

$$\begin{aligned}&\left|\left(1-x\right)\int_0^\infty\left(y-\lfloor y\rfloor-\frac{1}{2}\right)\left(x^{y^m}+my^m\ln x\cdot x^{y^m}\right)dy\right|\\&\leqslant\frac{1-x}{2}\int_0^\infty\left|x^{y^m}+my^m\ln x\cdot x^{y^m}\right|\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{1-x}{2}\int_0^\infty x^{y^m}\mathrm{d}y+\frac{1-x}{2}\ln\frac{1}{x}\int_0^\infty my^mx^{y^m}\mathrm{d}y\\&=\frac{1-x}{2}\int_0^\infty e^{-y^m\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}y+\frac{1-x}{2}\ln\frac{1}{x}\int_0^\infty my^me^{-y^m\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}y\\&=\frac{1-x}{2\ln^{\frac{1}{m}}\frac{1}{x}}\int_0^\infty e^{-y^m\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}y+\frac{1-x}{2}\frac{1}{\ln^{\frac{1}{m}}\frac{1}{x}}\int_0^\infty my^me^{-y^m}\mathrm{d}y\\&\sim\frac{1}{2\ln^{\frac{1}{m}-1}\frac{1}{x}}\int_0^\infty e^{-y^m\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}y+\frac{1}{2\ln^{\frac{1}{m}-1}\frac{1}{x}}\int_0^\infty my^me^{-y^m}\mathrm{d}y,x\to1^-.\end{aligned}$$

于是当 $m>2$ 时有 $\frac{1}{m}-1<\frac{2}{m}-1<0$, 此时(30.262)成立, 因此原级数在 $[0,1)$ 一致收敛. 当 $1\leqslant m\leqslant2$, 此时(30.262)不成立, 此原级数在 $[0,1)$ 不一致收敛.

16. (16.) 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=+\infty$. 由8.6, 我们有

$$H_n=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty.$$

于是存在 $M>0,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\ln n+\gamma-\frac{M}{n}\leqslant H_n\leqslant\ln n+\gamma+\frac{M}{n},\forall n\geqslant N. \tag{30.263}$$

由定义有

$$n+\frac{1}{k_n}>H_{k_n}\geqslant n,n=1,2,\cdots. \tag{30.264}$$

于是由(30.263),(30.264)得

$$\begin{aligned}&n\leqslant H_{k_n}<\ln k_n+\gamma+\frac{M}{k_n}\Rightarrow k_n>\frac{e^{n-\gamma}}{e^{\frac{M}{k_n}}};\\&\ln k_n+\gamma-\frac{M}{k_n}<H_{k_n}<n+\frac{1}{k_n}\Rightarrow k_n<e^{n-\gamma}\cdot e^{\frac{M+1}{k_n}}.\end{aligned}$$

于是

$$k_n\sim e^{n-\gamma},n\to\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}=e.$$

17. (17.) 本构造来自逆神[131]

考虑

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^{2^k}}, & 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant2^{2^k}-1,k=2m\\\frac{1}{2^{2^{k+1}}}, & 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant2^{2^k}-1,k=2m-1\end{cases},b_n=\begin{cases}\frac{1}{2^{2^{k+1}}}, & 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant2^{2^k}-1,k=2m\\\frac{1}{2^{2^k}}, & 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant2^{2^k}-1,k=2m-1\end{cases},m\in\mathbb{N}.$$

[131] 马明辉, 曾经的 QQ 数学大神.

上述构造对 $n\geqslant 2$ 有意义, 于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^{2^{2m-1}}}^{2^{2^{2m}}-1}\frac{1}{2^{2^{2m}}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2m}}}\left(2^{2^{2m}}-2^{2^{2m-1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right)=+\infty;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^{2^{2m-2}}}^{2^{2^{2m-1}}-1}\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\left(2^{2^{2m-1}}-2^{2^{2m-2}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right)=+\infty.$$

但是

$$\min\left\{a_n,b_n\right\}=\frac{1}{2^{2^{k+1}}},2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1,$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\min\left\{a_n,b_n\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{2^{k-1}}}^{2^{2^k}-1}\frac{1}{2^{2^{k+1}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{k+1}}}\left(2^{2^k}-2^{2^{k-1}}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2^k}}{2^{2^{k+1}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2^k}}<\infty.$$

18. (18.) 由 EM 公式9.3得

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{n^{\alpha}+k^{\alpha}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\alpha}+m^{\alpha}}\right)+\int_0^m\frac{1}{n^{\alpha}+x^{\alpha}}\mathrm{d}x-\alpha\int_0^m\frac{b_1\left(x\right)x^{\alpha-1}}{\left(n^{\alpha}+x^{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

让 $m\to+\infty$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}+k^{\alpha}}&=\frac{1}{2n^{\alpha}}+\int_0^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}+x^{\alpha}}\mathrm{d}x-\alpha\int_0^{\infty}\frac{b_1\left(x\right)x^{\alpha-1}}{\left(n^{\alpha}+x^{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2n^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha}}\mathrm{d}x+O\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\left(n^{\alpha}+x^{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2n^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha}}\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{n^{\alpha-1}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha}}\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).\end{aligned}$$

当 $\alpha>\frac{3}{2}$ 时, 由例题19.72知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{\alpha}+k^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{\alpha-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$$

收敛且当 $\alpha>2$ 绝对收敛, 当 $1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$, 我们容易知道原级数发散[132]. 当 $\alpha\leqslant 1$, 我们有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}+k^{\alpha}}$ 发散, 这就证明了原级数在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ 发散, $\left(\frac{3}{2},2\right]$ 条件收敛, $(2,+\infty)$ 绝对收敛.

19. (19.) 取 $f\left(x\right)=x^2$, 于是由积分中值定理11.3得

$$\sum_{k\in F_n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{n^2}^{(n+1)^2+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2n+2}{\sqrt{\theta_n}}\sim\frac{2n+2}{n}\to 2,$$

以及

$$\sum_{k\in F_n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{n^2-1}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2n+2}{\sqrt{\theta_n}}\sim\frac{2n+2}{n}\to 2.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in F_n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2.$$

20. (20.) 对任何 $x<y$, 由有理数的稠密性, 存在 (x,y) 中的有理数 r, 因此 $f\left(y\right)>f\left(x\right)$. 这就证明了 f 严格递增.

[132]这个范围内 O 部分总是收敛的, 因此只需判断第一个级数收敛性即可.

设 $x=r_m$ 是有理数, 对 $h>0$, 我们有

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{n:x\leqslant r_n<x+h}\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{1}{2^m}>0,$$

因此 f 在 x 处不连续.

设 x 是无理数, 对 $h>0$, 注意到

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{n:x\leqslant r_n<x+h}\frac{1}{2^n}=\sum_{n:x<r_n<x+h}\frac{1}{2^n}.$$

对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\epsilon$, 当 h 充分小必有 $r_1,r_2,\cdots,r_N\notin(x,x+h)$, 于是

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{n:x<r_n<x+h}\frac{1}{2^n}\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\epsilon,$$

因此 $\lim\limits_{h\to0^+}f(x+h)=f(x)$. 类似可得 $\lim\limits_{h\to0^-}f(x+h)=f(x)$, 这就证明了 f 在 x 处连续.

21. (21.) 考虑子列

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}=\{n\in\mathbb{N}:a_n\geqslant0\},\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}=\{n\in\mathbb{N}:a_n<0\}.$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k},\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{m_k}$ 都绝对收敛. 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+|a_n|}{2},\sum_{k=1}^{\infty}a_{m_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-|a_n|}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}-\sum_{k=1}^{\infty}a_{m_k},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

22. (22.) 考虑

$$a_k=\begin{cases}\frac{(-1)^1}{1\cdot1!}, & k=1\\ \frac{(-1)^n}{n\cdot n!}, & \sum\limits_{t=1}^{n-1}t!<k\leqslant\sum\limits_{t=1}^{n}t!,n=2,3,\cdots\end{cases},$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

但是对任何 $i,j\in\mathbb{N}$, 注意当 $n\geqslant j$ 时有 $j|n!$, 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i+nj}$ 加括号可以表示为[133]

$$\frac{1}{j}\cdot\frac{(-1)^1}{1}+\frac{1}{j}\frac{(-1)^2}{2}+\frac{1}{j}\frac{(-1)^3}{3}+\cdots.$$

由级数加括号的结论18.20知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i+nj}$ 收敛.

23. (23.) 注意到[134]

$$x=4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\left(1+(-1)^{n-1}\right)}{mn\pi^2}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y),x,y\in[0,1],$$

以及逐项微分得

$$u''_{xx}+u''_{yy}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-(m\pi)^2-(n\pi)^2\right]A_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)=x.$$

[133] 当然从充分大的项开始

[134] 模仿傅立叶系数的计算方法可以算出积分

$$\int_0^1\int_0^1x\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{(-1)^{m-1}\left(1+(-1)^{n-1}\right)}{mn\pi^2},$$

然后再反回去求和函数验证.

于是我们有

$$\left[-(m\pi)^2-(n\pi)^2\right]A_{mn}=4\frac{(-1)^{m-1}\left(1+(-1)^{n-1}\right)}{mn\pi^2},m,n\in\mathbb{N},$$

即

$$A_{mn}=4\frac{(-1)^{m}\left(1+(-1)^{n-1}\right)}{mn\left(m^2+n^2\right)\pi^4},m,n\in\mathbb{N}.$$

24. (24.)

(a). 由定义可知 $L(x)$ 是 $(0,T)$ 的正值单调递减函数. 注意到对任何 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$L(x)\geqslant n,\forall x\in(0,\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}),$$

即 L 在 0 附近无界, 从而 0 是瑕点.

(b). 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 所以我们可以将 a_n 递减重排, 这不改变 $L(x)$ 和求和定义. 因此不妨设 a_n 递减. 由例题18.100, 我们知道[135]

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

现在

$$\begin{aligned}\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(a_{n+1},a_n]}L(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(a_{n+1},a_n]}n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1}),\end{aligned}$$

这里 $a_n=a_{n+1}$ 的时候虽然

$$L(x)\neq n,\forall x\in(a_{n+1},a_n],$$

但是区间长度是 0 所以也可以视为

$$L(x)=n,\forall x\in(a_{n+1},a_n].$$

25. (25.) 必要性:

设 $\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对可积, 则对任意严格递增的数列 $\{x_n\}$ 且 $x_0=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 这就证明了必要性!

充分性:

Method 1 $*$

$F(x)\triangleq\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$ 内闭绝对连续. 所以 $\bigvee_0^x F$ 也内闭绝对连续, 因此

$$\bigvee_a^x F=\int_a^x|F'(y)|\,\mathrm{d}y,\forall x>a\geqslant 0.$$

若 $\int_0^{\infty}|f(y)|\,\mathrm{d}y=+\infty$, 则可选取正实数列 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}T_n=+\infty,T_n>T_{n-1},\int_{T_{n-1}}^{T_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant 1,n=1,2,\cdots.$$

由有界变差的定义得对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 有划分

$$T_{n-1}=t_{n,0}<t_{n,1}<\cdots<t_{n,m_n}=T_n$$

[135] 无论是否收敛.

使得

$$\sum_{j=1}^{m_n}|F(t_{n,j})-F(t_{n,j-1})|\geqslant \bigvee_{T_{n-1}}^{T_n}F-\frac{1}{2}=\int_{T_{n-1}}^{T_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_n}\left|\int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=+\infty,$$

这就和题目假设矛盾! 因此我们证明了

$$\int_0^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

Method 2

引理 30.19

若 $f\in R[a,b]$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在划分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得

$$\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\epsilon.$$

♡

证明 对 $\epsilon>0$, 由定理13.51得阶梯函数 φ 使得

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\epsilon}{2}.$$

记

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

是 φ 的分段点, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\varphi(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\epsilon+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}$$

这就完成了证明.

回到原题: 若 $\int_0^{\infty}|f(y)|\,\mathrm{d}y=+\infty$, 则可选取正实数列 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}T_n=+\infty,T_n>T_{n-1},\int_{T_{n-1}}^{T_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant1,n=1,2,\cdots.$$

由引理30.19得对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 有划分

$$T_{n-1}=t_{n,0}<t_{n,1}<\cdots<t_{n,m_n}=T_n$$

使得

$$\sum_{j=1}^{m_n}\left|\int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant\int_{T_{n-1}}^{T_n}|f(x)|\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_n}\left|\int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=+\infty,$$

这就和题目假设矛盾! 因此我们证明了

$$\int_0^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

26. (26.) 约定求和上限严格小于下限时是 0.

(a). 构造

$$a_k=\begin{cases}1, & x-\sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{a_j}{\beta^j}\geqslant\frac{1}{\beta^k}\\ 0, & x-\sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{a_j}{\beta^j}<\frac{1}{\beta^k}\end{cases},k=1,2,\cdots.$$

若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\beta^j}>x$, 则存在最小的 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{k_0}\frac{a_j}{\beta^j}>x$. 但是此时

$$\frac{1}{\beta^{k_0}}\geqslant\frac{a_{k_0}}{\beta^{k_0}}>x-\sum_{j=1}^{k_0-1}\frac{a_j}{\beta^j},$$

即 $a_{k_0}=0,\sum\limits_{j=1}^{k_0-1}\frac{a_j}{\beta^j}>x$, 这就和 k_0 最小性矛盾!.

若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\beta^j}=x-\epsilon,\epsilon>0$, 则

$$\frac{1}{\beta^k}\leqslant\epsilon\leqslant x-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_j}{\beta^j},\forall k\geqslant\frac{\ln\frac{1}{\epsilon}}{\ln\beta},$$

即 $a_k=1$ 对充分大的 k 成立. 现在考虑 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得 $a_{k_0}=0,a_j=1,\forall j\geqslant k_0+1$, 于是

$$x-\sum_{j=1}^{k_0-1}\frac{a_j}{\beta^j}<\frac{1}{\beta^{k_0}}.$$

注意到

$$x-\epsilon=\sum_{j=1}^{k_0-1}\frac{a_j}{\beta^j}+\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{\beta^j}>x-\frac{1}{\beta^{k_0}}+\frac{1}{\beta^{k_0}(\beta-1)}\geqslant x-\frac{1}{\beta^{k_0}}+\frac{1}{\beta^{k_0}(2-1)}=x,$$

这就是一个矛盾!, 因此我们证明了 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\beta^j}=x$.

(b). 构造

$$a_k=\begin{cases}1, & \sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{a_j}{\beta^j}\leqslant x\\ -1, & \sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{a_j}{\beta^j}>x\end{cases},k=1,2,\cdots.$$

记 $S_k\triangleq\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{a_k}{\beta^k},k=1,2,\cdots$.

设有穷或者无穷正整数序列 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$ 满足对每一个 k, 我们有 $S_{n_k}\leqslant x,S_{n_k+1}>x$ 或者 $S_{n_k}>x,S_{n_k+1}\leqslant x$, 而 $j\neq n_k$ 时有 $S_j,S_{j+1}>x$ 或者 $S_j,S_{j+1}\leqslant x$. 为方便, 在序列有限时在末尾补一项 ∞ 以及记 $S_\infty=x$, 于是

$$x-\frac{a_{n_k+1}}{\beta^{n_k+1}}<S_{n_k}\leqslant x,S_{n_k+1}=S_{n_k}+\frac{a_{n_k+1}}{\beta^{n_k+1}},$$

或者

$$x<S_{n_k}\leqslant x-\frac{a_{n_k+1}}{\beta^{n_k+1}},S_{n_k+1}=S_{n_k}+\frac{a_{n_k+1}}{\beta^{n_k+1}}.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \lim_{k\to\infty} S_{n_k+1} = x.$$

现在对任何正整数 $j > n_1$, 我们有唯一的 $k_j \in \mathbb{N}$ 使得 $n_{k_j} < j \leqslant n_{k_j+1}$, 此时注意到 S_j 在 $n_{k_j}+1 \leqslant j < n_{k_j+1}$ 之间单调, 于是有

$$\min\left\{S_{n_{k_j}+1}, S_{n_{k_j+1}}\right\} \leqslant S_j \leqslant \max\left\{S_{n_{k_j}+1}, S_{n_{k_j+1}}\right\},$$

因此由夹逼准则得 $\lim\limits_{j\to\infty} S_j = x$, 即现在我们证明了 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\beta^k}$.

27. (27.) 考虑 $S_n(x) \triangleq \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$, 于是

$$|a_n| = \frac{|S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0)|}{|x_0|^n} \leqslant \frac{2}{|x_0|^n} \cdot \sup_{n\geqslant 1} |S_n(x_0)|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

我们有

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{|x_0|} \Rightarrow r \geqslant |x_0|.$$

设 $S_{-1}(x) \triangleq 0$, 对 $N \in \mathbb{N}_0, x \in A$, 我们有 $0 < \frac{x}{x_0} < 1$, 然后

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} [S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0)] \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \\
&\overset{\text{Abel 变换8.2}}{=} \left|S_N(x_0)\left(\frac{x}{x_0}\right)^N + \sum_{n=0}^{N-1} S_n(x_0)\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1}\right]\right| \\
&\leqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^N \cdot \sup_{n\geqslant 0} |S_n(x_0)| + \sup_{n\geqslant 0} |S_n(x_0)| \cdot \sum_{n=0}^{N-1}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1}\right] \\
&= \sup_{n\geqslant 0} |S_n(x_0)| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j x_0^j\right|,
\end{aligned}$$

让 $N \to +\infty$ 得

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j x_0^j\right|.$$

28. (28.)

(a). 设

$$c_1 \triangleq \lfloor x \rfloor, c_{n+1} \triangleq \left\lfloor \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k!}\right) \cdot (n+1)! \right\rfloor, n = 1, 2, \cdots.$$

我们归纳证明

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k!} < \frac{1}{n!}, n = 1, 2, \cdots. \tag{30.265}$$

当 $n = 1$, 显然成立. 假设 n 时成立, $n+1$ 时利用 $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ 有

$$x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_k}{k!} \geqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k!} - \frac{\left(x - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k!}\right) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = 0;$$

$$x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_k}{k!} < x - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k!} - \frac{\left(x - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k!}\right) \cdot (n+1)! - 1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!},$$

这就完成了(30.265)证明. 现在我们知道 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k!}$ 以及利用(30.265)得

$$0\leqslant c_{n+1}=\left\lfloor\left(x-\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{k!}\right)\cdot(n+1)!\right\rfloor<n+1.$$

若存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $c_m\neq 0,c_n=0,\forall n\geqslant m+1$, 则

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n!}=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_n}{n!}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{c_n}{n!}+\frac{c_m-1}{m!}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{n-1}{n!},$$

即此时表示方式不唯一.

设有两种不同表示方式

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c'_n}{n!},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n-c'_n}{n!}=0.$$

假定最小的 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $c_N\neq c'_N$, 不妨设 $c'_N>c_N$ 则

$$\frac{1}{N!}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}\geqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{c_n-c'_n}{n!}=\frac{c'_N-c_N}{N!}\geqslant\frac{1}{N!},$$

上述等号成立表明

$$c'_N-c_N=1,c_n=n-1,c'_n=0,\forall n\geqslant N+1.$$

于是我们证明了 x 表示唯一的充要条件是不存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $c_m\neq 0,c_n=0,\forall n\geqslant m+1$ 这样表出的 x.

(b). 充分性显然, 下证必要性.

设

$$x=\frac{p}{q}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k!},0\leqslant p<q,$$

注意到存在 $N,M\in\mathbb{N}$ 使得 $q|N!$. 且 $x=\frac{M}{N!}$. 于是

$$\frac{M}{N!}-\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{k!}=\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{k!}.$$

若上式左边为 0, 则取 $k_0\triangleq N+1$ 即可. 若上式左边不为 0, 考虑

$$\left|\frac{M}{N!}-\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{k!}\right|=\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{k!}\right|\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{N!}.$$

通分上述不等式左边知上述不等式取等, 此时 $c_k=k-1,\forall k\geqslant N+1$. 现在注意到 c_k 不能全是 $k-1$, 否则 $x=1$. 故可设 $k_0\in\mathbb{N}$ 是最小的满足 $c_{k_0}\neq k_0-1$ 的正整数, 此时有

$$x=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{c_k}{k!}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{k-1}{k!}=\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{c_k}{k!}+\frac{c_{k_0}+1}{k_0!},$$

即 k_0 为所求.

29. (29.)

显然 S 的任意阶逐项微分级数都是一致收敛的, 所以

$$S\in C^{\infty}(\mathbb{R}),S^{(k)}(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}n^{2k}\sin\left(n^2x+\frac{k\pi}{2}\right),k=0,1,2,\cdots.$$

所以

$$a_k \triangleq \frac{S^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^{2k}, k = 0, 1, 2, \cdots.$$

由数学类极限习题52., 当 k 充分大, 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^{4k} \geqslant \frac{1}{2}\cdot(4k)!.$$

注意到[136] $\sqrt[k]{k!} \sim \frac{k}{e}, k \to +\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\sqrt[k]{|a_k|} &\geqslant \lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k]{\frac{1}{(2k)!}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}n^{4k}} \geqslant \lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k]{\frac{(4k)!}{2\cdot(2k)!}}\\ &= \lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k]{\frac{(4k)!}{(2k)!}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\left(\frac{4k}{e}\right)^2}{\frac{2k}{e}} = +\infty,\end{aligned}$$

即幂级数收敛半径为 0.

30. (30.) 对 $N \in \mathbb{N}$, 首先

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\ln n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\ln(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{\ln 2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right] = \frac{2}{\ln 2}.$$

然后我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\ln(n+1)} &= \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{N}\frac{\sin\left(\frac{(qN+r)\pi}{N}\right)}{\ln(qN+r+1)} = \sum_{r=1}^{N}\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{\ln(qN+r+1)}\\ &\geqslant \sum_{r=1}^{N}\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)\left(\frac{1}{\ln(r+1)} - \frac{1}{\ln(N+r+1)}\right)\\ &\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=} \sum_{r=1}^{N}\frac{N\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)}{\theta\ln^2(\theta)} \geqslant \sum_{r=1}^{N}\frac{N\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)}{(N+r+1)\ln^2(N+r+1)}\\ &\geqslant \sum_{r=1}^{N}\frac{N\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)}{(N+N+1)\ln^2(N+N+1)} = \frac{N^2}{(2N+1)\ln^2(2N+1)}\cdot\frac{1}{N}\cdot\sum_{r=1}^{N}\sin\left(\frac{r\pi}{N}\right)\\ &\sim \frac{N}{2\ln^2 N}\cdot\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \to +\infty, N \to +\infty,\end{aligned}$$

这里第一个不等号来自交错级数不等式18.4, 即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n}$ 在 $x = 0$ 附近无界, 因此我们有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n} \notin R[0, \pi].$$

31. (31.) 对 $x \in (-\infty, 0]$, 取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n \geqslant 1$. 我们有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^x a_{n+1}} \geqslant \sum_{n=N}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}.$$

然后对 $M \geqslant N, p \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{M+p}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} &\geqslant \sum_{n=M+1}^{M+p}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{M+p+1}}\\ &= \frac{a_{M+p+1}-a_{M+1}}{a_{M+p+1}} = 1 - \frac{a_{M+1}}{a_{M+p+1}}.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=M+1}^{M+p}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1,$$

[136] 结论8.2.

因此由 Cauchy 收敛准则知 f 无定义.

对 $x\in(0,1)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^x a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(a_{n+1}-a_n\right)a_{n+1}^{x-1}}{a_n^x a_{n+1}^x}$$

$$\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{\leqslant}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}^x-a_n^x}{a_n^x a_{n+1}^x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n^x}-\frac{1}{a_{n+1}^x}\right)$$

$$=\frac{1}{xa_1^x}<\infty.$$

对 $a\in(0,1), x\geqslant a$, 取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $a_n\geqslant 1$. 此时我们有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^x a_{n+1}}\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^a a_{n+1}}<\infty,$$

即原级数在 $[a,+\infty)$ 一致收敛, 从而在 f 在 $[a,+\infty)$ 连续. 由 a 任意性得 f 在 $(0,+\infty)$ 连续.

32. (32.) 注意到

$$\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1}a_k\leqslant\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1}\left(a_{2k}+a_{2k+1}\right)=\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1}a_k, j=1,2,\cdots.$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1}a_k\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}a_1=+\infty,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.

33. (33.) 注意到 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+a_n\right)$ 条件收敛, 于是这是黎曼重排定理19.11的直接推论.

34. (34.) 必要性是课本定理, 即幂级数在其收敛闭区间上一致收敛. 我们来证明充分性.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[0,R)$ 一致收敛, 对任何 $\epsilon>0$, 我们知道存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得当 $m\geqslant n\geqslant N$ 都有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k x^k\right|\leqslant\epsilon,\forall x\in[0,R).$$

于是让 $x\to R^-$ 得

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k R^k\right|\leqslant\epsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k R^k$ 收敛.

35. (35.) 由条件不等式得

$$a_2<a_3+a_4<a_4+a_5+a_9+a_{16}<\cdots.$$

记集

$$S_1=\{2\},S_2=\{3,4\},S_3=\{4,5,9,16\},\cdots.$$

$|S_k|\leqslant 2^{k-1}, k=1,2,\cdots$, 我们证明

$$|S_k|=2^{k-1}, k=1,2,\cdots. \tag{30.266}$$

假定最小的 $k\geqslant 4$ 使得 $|S_k|<2^{k-1}$. 显然我们有 $n^2\in S_k$ 使得 $n,n^2-1\in S_{k-1}$. 又

$$\min S_j>j, j=1,2,\cdots$$

且 n^2-1 不是完全平方数, 我们知道 $n\geqslant k$ 且 $n^2-2\in S_{k-2}$.

又注意到 n^2-2 也不是完全平方数, 所以 $n^2-3\in S_{k-3}$. 注意到 $k\leqslant n\leqslant 2n-2$, 于是 S_{k-2n+2} 无意义. 因

此这个过程一直下去可得 $n^2-k+1\in S_1$, 此时

$$n^2-k+1=2\Rightarrow n^2=1+k\geqslant k^2,$$

这就是一个矛盾!. 至此我们证明了(30.266).

显然 $\min S_k=k+1$, 于是我们有

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}a_j\geqslant\sum_{j\in S_k}a_j\geqslant a_2,k=1,2,\cdots.$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

36. (36.) 记

$$A_n\triangleq[0,2^n)\bigcap\left\{k\in\mathbb{Z}:|\sin k|<\frac{1}{n}\right\},B_n\triangleq\left[2^{n-1},2^n\right)\bigcap A_n,n=1,2,\cdots.$$

我们把单位圆周 $7n$ 等分, 于是对 $e^{ik},k=0,1,2,\cdots,2^n-1$ 必有 $\left\lceil\frac{2^n}{7n}\right\rceil$ 个 e^{ik} 落入同一个圆弧并且对落入这个圆弧的 e^{ik_1},e^{ik_2} 有

$$|\sin(k_1-k_2)|\leqslant\left|e^{i(k_1-k_2)}-1\right|=\left|e^{ik_1}-e^{ik_2}\right|\leqslant\frac{2\pi}{7n}<\frac{1}{n},$$

这里倒数第二个不等号来自连接圆上两个点的弦长小于等于弧长. 现在我们知道

$$|A_n|\geqslant\left\lceil\frac{2^n}{7n}\right\rceil.$$

对 $k\in B_n$, 我们有

$$k^{-1-|\sin k|}>(2^n)^{-1-\frac{1}{n}}=2^{-n-1}.$$

又

$$A_n\subset A_{n-1}\bigsqcup B_n\Rightarrow|B_n|\geqslant|A_n|-|A_{n-1}|,n=2,3,\cdots,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{2^N-1}k^{-1-|\sin k|}=\sum_{n=2}^{N}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}k^{-1-|\sin k|}\geqslant\sum_{n=2}^{N}\sum_{k\in B_n}k^{-1-|\sin k|}\\
&\geqslant\sum_{n=2}^{N}\sum_{k\in B_n}\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{n=2}^{N}\frac{|B_n|}{2^{n+1}}\geqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{|A_n|-|A_{n-1}|}{2^{n+1}}\\
&=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{|A_n|}{2^{n+2}}-\frac{|A_{n-1}|}{2^{n+1}}\right)+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{|A_n|}{2^{n+1}}-\frac{|A_n|}{2^{n+2}}\right)\\
&=\frac{|A_N|}{2^{N+2}}-\frac{|A_1|}{2^3}+\sum_{n=2}^{N}\frac{|A_n|}{2^{n+2}}\geqslant\frac{|A_N|}{2^{N+2}}-\frac{|A_1|}{2^3}+\sum_{n=2}^{N}\frac{\left\lceil\frac{2^n}{7n}\right\rceil}{2^{n+2}}\\
&\geqslant-\frac{|A_1|}{2^3}+\sum_{n=2}^{N}\frac{\frac{2^n}{7n}}{2^{n+2}}=-\frac{|A_1|}{2^3}+\frac{1}{28}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}\to+\infty,N\to+\infty,
\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+|\sin n|}}$ 发散.

37. (37.) 取 $x_n=r^n,r>1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{2n-1}}=\frac{r^3}{r^2-1}\geqslant\frac{r^3}{r^2-1}\Big|_{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

这里用到了

$$\left(\frac{r^3}{r^2-1}\right)'=\frac{r^2\left(r^2-3\right)}{\left(1-r^2\right)^2}.$$

因此 $\alpha\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 都能取到.

设 $y_n \triangleq \frac{x_{n+1}}{x_1}$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n^3}=x_1^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}^3}=x_1^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n^3}-x_1\right).$$

设满足题目条件的 α 下确界为 M, 则现在

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n^3}=x_1+\frac{1}{x_1^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n^3}\geqslant x_1+\frac{1}{x_1^2}M\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{M}{4}},$$

即

$$M\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{M}{4}}\Rightarrow M\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

至此我们证明了 α 的取值范围是 $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

38. (38.) 记

$$d(N)\triangleq\frac{1}{N}\left|\left\{n\in\left[\sqrt{N},N\right]\bigcap\mathbb{Z}:f(n)\leqslant N\right\}\right|\in[0,1].$$

Case 1 若存在 $\epsilon_0>0$ 和无穷多个 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $d(N)\geqslant\epsilon_0$. 我们选取正整数列 $N_k,k=1,2,\cdots$ 使得

$$\sqrt{N_1}<N_1<\sqrt{N_2}<N_2<\sqrt{N_3}<N_3<\cdots,d(N_k)\geqslant\epsilon_0,k=1,2,\cdots.$$

此时我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+f(n)}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\sqrt{N_k}\leqslant n\leqslant N_k}\frac{1}{n+f(n)}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k d(N_k)}{N_k+N_k}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon_0}{2}=+\infty.$$

Case 2 若 $\lim\limits_{N\to\infty}d(N)=0$, 对任何 $\epsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$ 且 $N_0>\frac{1}{\epsilon^2}$ 使得对所有 $N\geqslant N_0$ 都有 $d(N)\leqslant\epsilon$. 于是对所有整数 $N\geqslant N_0$, 都有

$$|\{n\leqslant N,n\in\mathbb{N}:f(n)\leqslant N\}|\leqslant\sqrt{N}+Nd(N)\leqslant 2\epsilon N.$$

现在就有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{f(n)}&\overset{\text{单射用到了}}{\geqslant}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\lfloor 2\epsilon N\rfloor}\frac{1}{n}-\frac{N-\lfloor 2\epsilon N\rfloor}{N}\\&\geqslant-1+\sum_{n=\lfloor 2\epsilon N\rfloor+1}^{N}\frac{1}{n}\geqslant-1+\sum_{n=\lfloor 2\epsilon N\rfloor+1}^{N}\ln\frac{n+1}{n}\\&=-1+\ln\frac{N+1}{\lfloor 2\epsilon N\rfloor+1}\geqslant-1+\ln\frac{N+1}{2\epsilon N+1},\end{aligned}$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{f(n)}\right)\geqslant-1+\ln\frac{1}{2\epsilon}.$$

让 $N\to\infty$ 得

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{f(n)}\right)=+\infty.$$

我们完成了证明.

39. (39.) 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(nx)}{n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty,$$

即原级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 注意到 $(\cdot)$ 是右连续但不是左连续函数.

当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 对任何 $n\in\mathbb{N}$, (ny) 都在 $y=x$ 连续, 因此原函数项级数在 x 连续.

当 $x\in\mathbb{Q}$, 设

$$x=\frac{p}{q},q>0,p,q\in\mathbb{Z},(p,q)=1.$$

注意到

$$\lim_{y\to x^-}(ny)=\begin{cases}1, & n=mq, m\in\mathbb{N}\\ (nx), & \text{其他}\end{cases}.$$

因为级数控制收敛定理18.16, 结合当 n 不是 q 的倍数时 $(nx)=0$, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ny)}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{y\to x^-}\frac{(ny)}{n^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2q^2}+\sum_{n\in\text{其他}}\frac{(nx)}{n^2}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2q^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2},\end{aligned}$$

即原函数项级数在 x 不连续.

至此我们证明了原级数在无理数连续, 有理数不连续, 从而由勒贝格定理知原级数在任何有界闭区间黎曼可积.

40. (40.) 注意到

$$\frac{d\left(te^{-nt}\right)}{dt}=(1-nt)\,e^{-nt},$$

于是我们知道 te^{-nt} 在 $[1,+\infty)$ 递减, 从而对任何 $\delta\in(0,1)$ 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}x^ne^{-nx^n}&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^n<\infty, x\in[0,1-\delta];\\\sum_{n=1}^{\infty}x^ne^{-nx^n}&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}<\infty, x\in[1,+\infty),\end{aligned}$$

即原级数在 $[0,1-\delta]\bigcup[1,+\infty)$ 一致收敛, 因此也在 $[0,+\infty)\setminus\{1\}$ 连续.

为了证明原函数项级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 我们只需要证明其在 $x=1$ 连续, 然后用 Dini 定理13.39得原函数项级数在包含 1 的闭区间一致收敛, 从而也在 $[0,+\infty)$ 一致收敛性.

我们断言

$$\lim_{s\to+\infty}f\left(e^{-\frac{1}{s}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}.\tag{30.267}$$

对 $s>e^2$ 定义

$$a(n,s)\triangleq\frac{n}{s}+ne^{-\frac{n}{s}}, N(s)\triangleq s(\ln s+\ln\ln s).$$

注意到 $N(s)>2s$, 我们有

$$f\left(e^{-\frac{1}{s}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a(n,s)}=\sum_{1\leqslant n\leqslant 2s}e^{-a(n,s)}+\sum_{2s<n\leqslant N(s)}e^{-a(n,s)}+\sum_{n>N(s)}e^{-a(n,s)}.$$

由

$$e^{-a(n,s)}\leqslant e^{-\frac{n}{e^2}}, 1\leqslant n\leqslant 2s, \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n}{e^2}}<\infty$$

和级数控制收敛定理18.16得

$$\lim_{s\to+\infty}\sum_{1\leqslant n\leqslant 2s}e^{-a(n,s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{s\to+\infty}e^{-a(n,s)}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}.$$

我们还有

$$\sum_{n>N(s)}e^{-a(n,s)}\leqslant\sum_{n=\lfloor N(s)\rfloor+1}^{\infty}e^{-\frac{n}{s}}=\frac{e^{-\frac{\lfloor N(s)\rfloor+1}{s}}}{1-e^{-\frac{1}{s}}}\leqslant\frac{e^{-\frac{N(s)}{s}}}{1-e^{-\frac{1}{s}}}=\frac{1}{\left(1-e^{-\frac{1}{s}}\right)s\ln s},$$

即

$$\lim_{s\to+\infty}\sum_{n>N(s)}e^{-a(n,s)}=0.$$

注意到

$$\frac{\partial a}{\partial n}=\frac{1}{s}+\left(1-\frac{n}{s}\right)e^{-\frac{n}{s}},\frac{\partial^2\alpha}{\partial n^2}=\frac{1}{s}\left(\frac{n}{s}-2\right)e^{-\frac{n}{s}}\geqslant 0,n\geqslant 2s,$$

由切线不等式, 对 $n\in(2s,N(s)]$ 我们有

$$\begin{aligned}a(n,s)&\geqslant a(N(s),s)+\frac{\partial a}{\partial n}(N(s),s)(n-N(s))\\&\geqslant \ln s+\ln\ln s+\left(\frac{1}{s}+\left(1-\frac{N(s)}{s}\right)e^{-\frac{N(s)}{s}}\right)(n-N(s))\\&=\ln s+\ln\ln s+\left(\frac{1}{s}+(1-\ln s\cdot\ln\ln s)\frac{1}{s\ln s}\right)(n-N(s))\\&=\ln s+\ln\ln s+\left(\frac{\ln s(\ln\ln s-1)-1}{s\ln s}\right)(N(s)-n).\end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned}&\sum_{2s<n\leqslant N(s)}e^{-a(n,s)}\leqslant\sum_{2s<n\leqslant N(s)}e^{-\ln s-\ln\ln s-\left(\frac{\ln s(\ln\ln s-1)-1}{s\ln s}\right)(N(s)-n)}\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\ln s-\ln\ln s-\left(\frac{\ln s(\ln\ln s-1)-1}{s\ln s}\right)k}=\frac{1}{s\ln s}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{\ln s(\ln\ln s-1)-1}{s\ln s}}}\\&\sim\frac{1}{s\ln s}\cdot\frac{1}{\frac{\ln s\cdot(\ln\ln s-1)-1}{s\ln s}}\to 0,s\to+\infty,\end{aligned}$$

即我们证明了(30.267). 因此我们知道原级数一致收敛.

41. (41.) 由

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n+x}\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,\sum_{n=0}^{\infty}\left|-\left(\frac{1}{2^n+x}\right)^2\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}<\infty$$

得

$$f\in C^1[0,+\infty),|f'(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n},\forall x\geqslant 0.$$

于是我们知道 f 是 Lipschitz 连续的, 从而一致连续.

首先

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}&>\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{2^t+x}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{2^t+x}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{2^{-t}}{1+x\cdot 2^{-t}}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\ln 2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x\cdot 2^{-t}}\mathrm{d}2^{-t}=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{1}{1+x\cdot y}\mathrm{d}y\\&=\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}.\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}&<\frac{1}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{2^t+x}\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x}+\int_0^{\infty}\frac{1}{2^t+x}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}.\end{aligned}$$

因此我们证明就证明了

$$0<f(x)-\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}<\frac{1}{1+x},\forall x>0.$$

42. (42.) 对任何 $t>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{\sin(a_kx)}{k^2}\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(a_kx)}{k^2}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^t\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(a_kx)}{k^2}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^t|\tan x|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{\sin(a_kx)}{k^2}\mathrm{d}x\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(a_kt)}{a_kk^2},$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(a_kt)}{a_kk^2\int_0^t|\tan x|\,\mathrm{d}x}\leqslant 1.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\varliminf_{t\to0^+}\frac{1-\cos(a_kt)}{a_kk^2\int_0^t|\tan x|\,\mathrm{d}x}\leqslant\varliminf_{t\to0^+}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(a_kt)}{a_kk^2\int_0^t|\tan x|\,\mathrm{d}x}\leqslant 1.$$

因此我们证明了 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_k}{k^2}=0$.

43. (43.) 首先利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{\ell+n}^{\ell}x^n=\frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{0\leqslant\ell\leqslant\frac{n}{k+1}}C_{n-k\ell}^{\ell}z^{\ell}\right)x^n&=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{n=(k+1)\ell}^{\infty}C_{n-k\ell}^{\ell}x^n\right)z^{\ell}\\&=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{\ell+n}^{\ell}x^n\right)z^{\ell}x^{(k+1)\ell}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z^{\ell}x^{(k+1)\ell}}{(1-x)^{\ell+1}}\\&=\frac{1}{1-x}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{zx^{k+1}}{1-x}\right)^{\ell}=\frac{1}{1-x-zx^{k+1}}.\end{aligned}$$

我们断言至少有一个 $x\in\mathbb{C}$ 使得 $1-x-zx^{k+1}=0$ 且 $|x|\leqslant 2$.

当 $z\neq0$ 时由韦达定理, 该方程所有根的积的模为 $\frac{1}{|z|}$, 于是当 $|z|\geqslant\frac{1}{2^{k+1}}$ 时我们需要的 x 存在. 当 $|z|<\frac{1}{2^{k+1}}$ 时在 $|x|=2$ 上, 我们有

$$\left|zx^{k+1}\right|\leqslant|z|\cdot2^{k+1}<1\leqslant|1-x|,$$

由 Rouché 定理知原方程和 $1-x$ 在 $|x|<2$ 零点个数相同, 即得我们需要的 x 存在.

现在我们知道 $\frac{1}{1-x-zx^{k+1}}$ 的收敛半径小于等于 2, 所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sum_{0\leqslant\ell\leqslant\frac{n}{k+1}}C_{n-k\ell}^{\ell}z^{\ell}\right|}\geqslant\frac{1}{2}.$$

因此由上极限定义得无穷多个 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|\sum_{0\leqslant\ell\leqslant\frac{n}{k+1}}C_{n-k\ell}^{\ell}z^{\ell}\right|\geqslant\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)^n.$$

44. (44.) 当 $\alpha\leqslant2,x>0$ 我们有

$$\frac{2nx}{1+n^{\alpha}x}\sim\frac{2}{n^{\alpha-1}},n\to+\infty,$$

即原级数发散.

当 $\alpha>2$, 我们有

$$\left(\frac{2nx}{1+n^{\alpha}x}\right)'=\frac{2n}{(1+n^{\alpha}x)^2}>0.$$

于是

$$\sup_{x\geqslant0}\frac{2nx}{1+n^{\alpha}x}=2\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

现在我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^{\alpha}x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $\alpha>2$.

45. (45.) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在. 因此我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 处处收敛.

因为总有 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|a_ne^{-S_nx}\right|=+\infty$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在定义域不一致收敛.

对任何 $[a,b]$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|a_ne^{-S_nx}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{S_n\max\{|a|,|b|\}}<\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在定义域内闭一致收敛.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$, 一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty,\forall x\leqslant 0.$$

另外一方面对 $x>0$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)e^{-S_nx}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}e^{-yx}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}e^{-yx}\mathrm{d}y=\frac{1}{x},\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 收敛.

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在 $x=0$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在定义域一致收敛会导致也在 $x=0$ 收敛而矛盾!.

现在我们知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在定义域不一致收敛.

对任何 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_na}<\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在定义域内闭一致收敛.

46. (46.) 例题19.48的直接推论.

47. (47.)

(a). 对任何 $[a,b]\subset(1,\infty)$, 我们有

$$\left|\left(n^{-x}\right)^{(k)}\right|=\left|(-\ln n)^k\cdot n^{-x}\right|\leqslant(\ln n)^k\cdot n^{-a},k=1,2,\cdots.$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)^k\cdot n^{-a}<\infty,k=1,2,\cdots,$$

我们有 ζ 和其逐项微分的级数都是内闭一致收敛的, 从而 $\zeta\in C^{\infty}(1,+\infty)$.

(b). 我们有

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\left(\zeta(x)-1\right)\mathrm{d}x&=\int_1^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}\mathrm{d}x\\&\overset{\text{Levi 定理}}{=}\sum_{n=2}^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{1}{n^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=+\infty,\end{aligned}$$

即积分发散.

如果你不喜欢任何实分析定理, 那我们也可以这样: 对任何 $m\in\mathbb{N}$ 我们有

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\left(\zeta(x)-1\right)\mathrm{d}x&=\int_1^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\infty}\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=2}^{m}\int_1^{\infty}\frac{1}{n^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n\ln n},\end{aligned}$$

即让 $m \to +\infty$ 得 $\int_1^{\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x$ 发散.

48. (48.)

Step 1

我们先证对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都有

$$\sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n-1}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} + g_n, \forall n \in \mathbb{N} < \infty$$

的充分必要条件是 $a_0 < 1$. 必要性可取 $n = 1$ 得

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_0^r < \infty \Rightarrow a_0 < 1.$$

当 $a_0 < 1$, 对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 我们设 $n-1$ 在 $\mathbb{N}_0$ 上有一个分拆 γ, 其中 γ 中不为 0 的项有 s 个. 于是

$$\sum_{r=s}^{\infty} \sum_{\gamma} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} = \sum_{r=s}^{\infty} a_0^{r-s} \cdot (\text{和} r, a_0 \text{无关的有限和}) < \infty,$$

即我们得

$$\sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n-1}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} + g_n, \forall n \in \mathbb{N} < \infty.$$

Step 2 回到原题

首先由(19.82)和结论8.2得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{g_n}{n!}} < +\infty$, 即存在 $r > 0$ 使得

$$g(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n!} x^n, x \in (-r, r).$$

显然

$$M(x) = a_0 + g(x) + \frac{CxM(x)}{1 - M(x)}, M(0) = a_0$$

存在实解析解

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} x^n, x \in (-r, r),$$

这里 r 可能更小, 但我们仍然记为 r.

我们将证明

$$a_n \leqslant m_n, n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{30.268}$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n!}} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} \leqslant \frac{1}{r},$$

即存在 $M_1, M_2 > 0$ 使得

$$a_n \leqslant M_1 M_2^n n!, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

我们将 M 的展开代回原方程得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_n}{n!}x^n&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n!}x^n+Cx\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_n}{n!}x^n\right)^r\\&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n!}x^n+Cx\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r}\sum_{k_t=0}^{\infty}\frac{m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!}x^{k_1+k_2+\cdots+k_r}\\&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n!}x^n+C\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}}\frac{m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!}x^n\\&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{g_n}{n!}+\frac{C}{n!}\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}}\frac{n!m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\right)x^n,\end{aligned}$$

即得递推

$$m_0=a_0,m_n=g_n+C\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}}\frac{n!m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!},n=1,2,\cdots.$$

若有 $a_k\leqslant m_k,k=0,1,2,\cdots,m-1$, 则我们有

$$\begin{aligned}m_n&=g_n+C\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}}\frac{n!m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\\&\geqslant g_n+C\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}}m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}\\&\geqslant g_n+C\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{N}_0\\k_1+k_2+\cdots+k_r=n-1}}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_r}\geqslant a_n.\end{aligned}$$

于是由数学归纳法得

$$a_n\leqslant m_n,\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

这就完成了本题的证明.

49. (49.) 对 $s=\{s_n\}_{n=0}^{\infty}\in S$, 我们有

$$|h(s)|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_0s_1s_2\cdots s_k}{2^k}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2.$$

对二进制表示 $x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k},a_k\in\{0,1\}$, 我们取

$$s_0\triangleq 1,s_1\triangleq 2a_0-1,s_k\triangleq\frac{2a_{k-1}-1}{2a_{k-2}-1},k\geqslant 2.$$

我们有

$$\begin{aligned}h(s)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_0s_1s_2\cdots s_k}{2^k}=1+\frac{2a_0-1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{s_1s_2\cdots s_k}{2^k}\\&=1+\frac{2a_0-1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2a_{k-1}-1}{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}=x.\end{aligned}$$

把 s_0 变为 -1 可得 $h(s)=-x$. 现在我们知道 h 值域是 $[-2,2]$. 由

$$h\left(\begin{pmatrix}1&-1&1&1&\cdots\end{pmatrix}\right)=h\left(\begin{pmatrix}-1&-1&1&1&\cdots\end{pmatrix}\right)=0$$

可得 h 不是单射.

当 $n=0$, 显然(19.84)成立. 设 $n-1$ 时(19.84)成立, 于是我们有

$$T\triangleq 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s_1s_2\cdots s_{k+1}}{2^k}\right)=s_1\sqrt{2+s_2\sqrt{2+s_3\sqrt{2+\cdots+s_{n-1}\sqrt{2+s_n\sqrt{2}}}}}.$$

现在利用

$$2+2\sin x=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

就有

$$\begin{aligned}s_0\sqrt{2+T}&=s_0\sqrt{2+2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s_1s_2\cdots s_{k+1}}{2^k}\right)}\\&=s_0\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s_1s_2\cdots s_{k+1}}{2^k}\right)}\\&=2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n}\frac{s_0s_1s_2\cdots s_k}{2^k}\right),\end{aligned}$$

即得(19.84)对 n 成立. 因此由数学归纳法得(19.84)对一切 $n\in\mathbb{N}$ 都成立. 至此我们完成了证明.

50. (50.) 因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x)}{n^{ax}}$ 在 $(2,+\infty)$ 一致收敛, 所以对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任何自然数 $M_2\geqslant M_1\geqslant N$ 都有

$$\left|\sum_{n=M_1}^{M_2}\frac{\cos(n\pi x)}{n^{ax}}\right|\leqslant\epsilon,\forall x\in(2,+\infty).$$

注意到

$$\sum_{n=M_1}^{M_2}\frac{1}{n^{2a}}=\lim_{x\to 2^+}\left|\sum_{n=M_1}^{M_2}\frac{\cos(n\pi x)}{n^{ax}}\right|\leqslant\epsilon,$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2a}}<\infty$, 即 $a>\frac{1}{2}$.

当 $a>\frac{1}{2}$, 我们有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\cos(n\pi x)}{n^{ax}}\right|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2a}}<\infty,\forall x\in(2,+\infty),$$

即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x)}{n^{ax}}$ 关于 $x\in(2,+\infty)$ 一致收敛, 因此所求 a 范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

51. (51.) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛且 $\arctan(nx)$ 单调并一致有界, 我们由 A-D 判别法知级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 因此 f 在 $[0,+\infty)$ 连续.

显然 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$ 且逐项微分级数在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛. 对 $x>0$, 我们有

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+4k^2x^2}-\frac{1}{1+(2k-1)^2x^2}\right)<0,$$

因此 f 在 $[0,+\infty)$ 严格递减.

52. (52.) 取严格递增的正整数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\left|\sum_{n=n_k+1}^{\infty}u_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{2^k},\forall k=1,2,\cdots,x\in I.$$

考虑一种加括号方式

$$\sum_{j=1}^{n_1}u_j(x)+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k}u_j(x).$$

在 I 上我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k}u_j(x)\right|&\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{j=n_{k-1}+1}^{\infty}u_j(x)-\sum_{j=n_k+1}^{\infty}u_j(x)\right|\\&\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\right)<\infty,\end{aligned}$$

即由 M 判别法得这种加括号的函数项级数在区间 I 绝对且一致收敛.

53. (53.) 显然级数收敛. 对 $(0,1)$ 的无理数 x, 我们有 $x\neq r_n,\forall n\in\mathbb{N}$. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{2026^nh}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2026^n}<\infty.$$

于是由级数控制收敛定理18.16得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{2026^nh}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{h\to0}\left(\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{2026^nh}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2026^n}.\end{aligned}$$

因此 f 在无理数处可微.

对 $(0,1)$ 的有理数 x, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x=r_k$. 现在

$$f(x)=\underbrace{\frac{|x-r_k|}{2026^k}}_{r_k\text{处不可微}}+\underbrace{\sum_{n\neq k}\frac{|x-r_n|}{2026^n}}_{\text{同无理数的证明知}r_k\text{处可微}},$$

即 f 在有理数处不可微.

54. (54.) 首先对 $r\in(0,1),x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos(kx)&=\Re\left(\sum_{k=1}^{\infty}r^ke^{ikx}\right)\\&=\Re\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(re^{ix}\right)^k\right)=\Re\left(\frac{re^{ix}}{1-re^{ix}}\right)=\frac{r\cos x-r^2}{1-2r\cos x+r^2},\end{aligned}$$

即

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos(kx)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

取 $r \triangleq \sqrt{2}-1$, 对 $n \in \mathbb{N}$, 由三角函数正交性我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2}-\cos x}\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \cos(nx)\left(1+2\sum_{k=1}^\infty r^k\cos(kx)\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^\pi r^n\cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi r^n > 0.\end{aligned}$$

现在就有

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2}-\cos x}\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^\infty r^n = \frac{\pi r}{1-r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

55. (55.) 对 $x, y \in [0,1]$, 我们有

$$|S(x)-S(y)| = \sum_{n=1}^\infty \frac{|u_n(x)-u_n(y)|}{2^n} \leqslant L\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\right)|x-y|,$$

即 S 是连续的.

固定 $m \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\sum_{n\neq m}\left|\frac{u_n(x)-u_n(x_m)}{2^n(x-x_m)}\right| \leqslant \sum_{n\neq m}\frac{L}{2^n} < \infty.$$

由级数控制收敛定理18.16得

$$\lim_{x\to x_m}\sum_{n\neq m}\frac{u_n(x)-u_n(x_m)}{2^n(x-x_m)} = \sum_{n\neq m}\lim_{x\to x_m}\frac{u_n(x)-u_n(x_m)}{2^n(x-x_m)} = \sum_{n\neq m}\frac{u_n'(x_m)}{2^n}.$$

现在就有

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{u_n(x)}{2^n} = \underbrace{\frac{u_m(x)}{2^m}}_{\text{在}x_m\text{不可导}} + \underbrace{\sum_{n\neq m}\frac{u_n(x)}{2^n}}_{\text{在}x_m\text{可导}},$$

即 S 在 x_m 不可微. 类似可得 S 在所有无理数点可微且

$$S'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{u_n'(x)}{2^n}.$$

附录 A 一些基本工具

图 A.0.1: 常用 taylor 公式表

泰勒展开式(高清重制版)

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}+\cdots,\ x\in(-1,1]$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\cdots$$

$$\tan x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4^n-1)\zeta(2n)}{\pi^{2n}}x^{2n-1}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+o(x^{12}),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!}x_{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\frac{50521}{3628800}x^{10}+o(x^{11}),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9+\frac{63}{2816}x^{11}+o(x^{12}),\ x\in(-1,1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\cdots,\ x\in(-1,1)$$

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots$$

$$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots$$

$$\tanh x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(4^n-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\frac{1382}{155925}x^{11}+o(x^{12}),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sech} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4-\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8-\frac{50521}{3628800}x^{10}+o(x^{11}),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arsinh} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9-\frac{63}{2816}x^{11}+o(x^{12}),\ x\in(-1,1)$$

$$\operatorname{artanh} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{11}x^{11}+o(x^{12}),\ x\in(-1,1)$$

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{240}x^6+\frac{1}{90}x^7+\frac{31}{5760}x^8+\frac{1}{5670}x^9-\frac{2951}{3628800}x^{10}+o(x^{10})$$

$$e^{\tan x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\frac{37}{120}x^5+\frac{59}{240}x^6+\frac{137}{720}x^7+\frac{871}{5760}x^8+\frac{41641}{3628800}x^9+o(x^9)$$

$$e^{\arcsin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{17}{144}x^6+\frac{13}{126}x^7+\frac{629}{8064}x^8+\frac{325}{4536}x^9+o(x^9)$$

$$e^{\arctan x}=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{24}x^5+\frac{29}{144}x^6-\frac{1}{1008}x^7-\frac{1219}{8064}x^8-\frac{1163}{72576}x^9+o(x^9)$$

$$\tan(\tan x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5+\frac{181}{315}x^7+\frac{59}{105}x^9+\frac{3455}{6237}x^{11}+o(x^{12})$$

$$\sin(\sin x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5-\frac{8}{315}x^7+\frac{13}{2520}x^9-\frac{47}{49896}x^{11}+o(x^{12})$$

$$\tan(\sin x)=x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{107}{5040}x^7-\frac{73}{24192}x^9+\frac{41897}{39916800}x^{11}+o(x^{12})$$

$$\sin(\tan x)=x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{55}{1008}x^7-\frac{143}{3456}x^9-\frac{968167}{39916800}x^{11}+o(x^{12})$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots,\ x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+\frac{2447e}{5760}x^4-\frac{959e}{2304}x^5+\frac{238043e}{580608}x^6-\frac{67223e}{165888}x^7+o(x^7)$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{24}x^4+\frac{11}{120}x^5+\frac{271}{720}x^6+\frac{53}{2520}x^7-\frac{4069}{13440}x^8+o(x^8)$$

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{7e}{24}x^2-\frac{3e}{16}x^3+\frac{139e}{1152}x^4-\frac{899e}{11520}x^5+\frac{29311e}{580608}x^6-\frac{189617e}{5806080}x^7+o(x^7)$$

微信号: BingerMath

图 A.0.2: 常用反三角函数性质表

arc sin x + arc sin y =	arc sin x − arc sin y =
$\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $(xy\le 0$ 或 $x^2+y^2\le 1)$ $\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $(x>0, y>0, x^2+y^2>1)$ $-\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $(x<0, y<0, x^2+y^2>1)$	$\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$ $(xy\ge 0$ 或 $x^2+y^2\le 1)$ $\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$ $(x>0, y<0, x^2+y^2>1)$ $-\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$ $(x<0, y>0, x^2+y^2>1)$
arc cos x + arc cos y =	arc cos x − arc cos y =
$\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x+y\ge 0)$ $2\pi-\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x+y<0)$	$-\arccos(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x\ge y)$ $\arccos(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x<y)$
arc tan x + arc tan y =	arc tan x − arc tan y =
$\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ $(xy<1)$ $\pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ $(x>0, xy>1)$ $-\pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ $(x<0, xy>1)$	$\arctan\frac{x-y}{1+xy}$ $(xy>-1)$ $\pi+\arctan\frac{x-y}{1+xy}$ $(x>0, xy<-1)$ $-\pi+\arctan\frac{x-y}{1+xy}$ $(x<0, xy<-1)$
2 arc sin x =	2 arc cos x =
$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ $\left(\lvert x\rvert\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\pi-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<x\le 1\right)$ $-\pi-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ $\left(-1\le x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\arccos(2x^2-1)$ $(0\le x\le 1)$ $2\pi-\arccos(2x^2-1)$ $(-1\le x<0)$
2 arc tanx =	cos (n arc cos x) =
$\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert<1)$ $\pi+\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert>1)$ $-\pi+\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ $(x<-1)$	$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$ $(n\ge 1)$

附录 B 高中数学基础

B.1 集合与逻辑用语

集合与逻辑用语.

B.2 复数

1. 复数 (1);
2. 复数 (2).

B.3 长除法

长除法视频.

B.4 部分分式分解

部分分式分解视频.

B.5 多重求和的换序

1. 求和与求积符号上;
2. 求和与求积符号下;
3. 求和换序.

B.6 三角恒等式

1. 三角恒等变换;
2. 三角恒等变换应用;
3. 反三角函数.